

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère De L'enseignement Supérieur
Et De La Recherche Scientifique



UNIVERSITE ECHAHID HAMMA LAKHDAR
D'EL OUED
FACULTE DE LA SCIENCES EXACTES



MEMOIRE DE FIN D'ETUDE

MASTER ACADEMIQUE

Domaine : Mathématiques et informatique

Filière : Mathématiques

Option : Mathématiques fondamentales

Thème

Équation de Hammerstein généralisée et applications.

Présente par: Derouiche Imane.
Guedda Imane.

Devant le jury:

Hariz Bekker Lourabi.
Guedda Lamine.
Mnasser Bekker.

Président
Encadreur
Examineur

Univ. El Oued
Univ. El Oued
Univ. El Oued

Promotion : 2020/2021.

Remerciements

Nous tenons tout d'abord à remercier "Dieu" le tout puissant et miséricordieux qui nous a donné la force et la patience d'accomplir ce travail.

*En deuxième lieu, nous tenons à remercier notre encadreur : **Dr. Guedda Lamine** pour ses appréciations compétentes, ses précieux conseils et son aide durant toute la période du travail.*

*Nous remercions vivement nos familles **Guedda** et **Derouiche** pour leur aide matérielle et morale durant toute la période de préparation. Nous tenons également à exprimer notre gratitude envers tous les Enseignants et le personnel administratif d'université de **Chahid Hamma Lakhdar El-Oued** qui ont contribué à notre formation et à l'élaboration de ce présent travail.*

Nos vifs remerciements vont également aux membres du jury pour l'intérêt qu'ils ont porté à notre travail. Et de l'enrichir par leurs propositions.

Enfin, nous tenons également à remercier toutes les personnes qui ont participé de près ou de loin à la réalisation de ce modeste travail.

Table des matières

Introduction	1
1 Rappels et notions fondamentales	3
1.1 Notions topologiques	3
1.1.1 Espaces métrique	3
1.1.2 Espaces de Banach	4
1.1.3 Espaces de Hilbert	5
1.1.4 Espace mesurable	6
1.2 Théorème de convergence dominée	7
1.3 Quelques espaces fonctionnels	7
1.4 Ensembles et fonctions convexes	8
1.5 Rappel sur les opérateurs	8
1.5.1 Opérateurs linéaires bornés	9
1.5.2 Partie compacte et opérateur compact	9
1.5.3 Opérateur linéaire intégrale	10
1.5.4 Opérateur de Nemitskii	10
1.5.5 Opérateur de Hammerstein	10
1.5.6 Critère de compacité (Théorème d'Ascoli-Arzella)	11
1.6 Inégalités utiles et propriétés	11
1.6.1 Inégalité de Hölder	11
1.6.2 Inégalité de Cauchy Schwartz	12
1.6.3 Théorème de Fubini	12
1.7 Quelques théorèmes du point fixe	12
1.7.1 Théorème de point fixe de Banach	12
1.7.2 Théorème de point fixe de Guo-Krasnosel'skii	13
2 Quelques équations intégrales	14
2.1 Introduction	14
2.2 Classification des équations intégrales	14
2.2.1 Équations intégrales linéaires	14
2.2.2 Équations intégrales non linéaires	15
2.3 Existence et unicité d'une solution continue et bornée d'une équation intégrale de type Hammerstein	16

3	Équation de Harmmerstein généralisé	21
3.1	Introduction	21
3.2	Hypothèses et résultats auxiliaires	22
3.2.1	Cadre fonctionnel	22
3.2.2	Formulation du problème	22
3.3	Théorème principale	24
4	Applications aux problèmes à valeurs aux limites du troisième ordre	29
4.1	Problème aux limites dont la non linéarité dépend de la première dérivée de la fonction inconnue	29
4.2	Exemple	33
	Conclusion	35

Notations Principales

$\mathbb{R}$	: L'ensemble des nombres réels.
$\overline{\mathbb{R}}$	: Droite des réels achevés ($\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$).
$\mathbb{R}^n$	: $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$ (n fois).
$\mathbb{N}$	: L'ensemble des nombres entiers.
$\mathbb{C}$	: L'ensemble des nombres complexes.
$\mathbb{K}$	: $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
$\overline{A}$	: L'adhérence de A .
$\mathcal{P}(E)$	: L'ensemble des parties de E .
$L(E, F)$	: L'ensemble des fonctions linéaire de E dans F .
$C(E, F)$	: L'ensemble des fonctions continues de E dans F .
$C(\Omega)$	: L'ensemble des fonctions continues de Ω dans $\mathbb{R}$.
$C_a(\Omega)$	: L'ensemble des fonctions continues et bornées par a de Ω dans $\mathbb{R}$.
$\mathcal{C}^m([a, b])$	: L'ensemble des fonctions dérivables et continue jusqu'à l'ordre m sur $[a, b]$.
$K(E, F)$	: L'ensemble de toute les applications compactes de E dans F .
$B(x, r)$	: Boule ouverte de centre x et de rayon r .
$\ \cdot\ _p$	: $\ \cdot\ _{L^p}$ où $1 \leq p \leq \infty$.
i.e	: C'est à dire.
$p.p.$	: Presque partout.

Introduction

Une équation intégrale est définie comme une équation dans laquelle la fonction inconnue $u(t)$ à déterminer apparaît sous le signe intégral. Le sujet des équations intégrales est l'un des outils les plus utiles en mathématiques pures et appliquées. Il a d'énormes applications dans de nombreux problèmes physiques avec des conditions initiales où aux limites associés à des équations différentielles ordinaires (EDO), fractionnaires (EDF) où à dérivées partielles (EDP).

Le développement de la science a conduit à la formation de nombreuses lois physiques, qui lorsqu'ils sont reformulés sous forme mathématique, apparaissent souvent comme des équations différentielles avec des conditions initiales (ou au bord) c'est pourquoi les équations différentielles et par suite les équations intégrales jouent un rôle très important dans la résolution de problèmes pratiques. Par exemple, la loi de Newton, selon laquelle le taux de variation de l'impulsion d'une particule est égale à la force agissant sur elle, peut-être traduite en langage mathématique comme équation différentielle.

De même, les problèmes survenant sur les circuits électriques, la cinétique chimique et le transfert de chaleur dans un milieu peuvent tous être représentés mathématiquement sous forme d'équations différentielles.

Une forme typique d'une équation intégrale d'inconnue $u(t)$ est de la forme :

$$u(t) = f(t) + \lambda \int_{a(t)}^{b(t)} k(t, s) u(s) ds \quad (1)$$

où $k(t, s)$ est appelé le noyau de l'équation intégrale (1), et $a(t)$ et $b(t)$ sont les bornées d'intégration. On observe facilement que la fonction inconnue $u(t)$ apparaît sous le signe intégral. Il est à noter ici que le noyau $k(t, s)$ et la fonction $f(t)$ dans l'équation (1) sont des fonctions données, et λ est un paramètre constant.

Le premier objectif est de déterminer la fonction inconnue $u(t)$ qui satisfait l'équation (1) en utilisant un certain nombre de techniques de résolution.

On parle généralement de deux types d'équations intégrales, ce sont, les équations intégrales de Fredholm (Ivar Fredholm 1866 -1927) et de Volterra (Vito Volterra 1860-1940). Elles sont importantes dans plusieurs domaines de physique : les équations de diffusion, le problème à frontière libre, les problèmes de contacts et de l'astrophysique.

L'existence de solutions aux équations intégrales a été largement étudiée.

Depuis que A. Hammerstein a publié son article ([13]) en 1930, l'équation intégrale non linéaire de Hammerstein est devenue l'un de plus importants domaines d'application des

concepts, techniques et méthodes d'analyse fonctionnelle non linéaire ; voir par exemple ([2, 4, 6, 9]).

Des systèmes d'équations intégrales ont été considérées dans([1, 5, 8, 10]). Dans tout ces travaux, les non-linéarités ne dépend pas des dérivées de la fonction inconnue.

Dans ce mémoire ; on étudie l'existence de solutions d'un type d'équations intégrales de Hammerstein plus générale que des autres déjà traitées où on a considéré une non linéarité dépendant de la fonction inconnue et ses dérivées jusqu'à l'ordre m et ayant des noyaux discontinus qui présentent également des discontinuités dans leurs dérivées partielles par rapport au première variable.

L'approche utilisée est basée sur un théorème de point fixe sur les cônes dû à Guo-Krasnosel'skii.

Le reste de ce mémoire est réparti dans quatre chapitres.

Dans le **premier chapitre**, Il nous semble utile de rappeler quelques notions et outils de base utilisées tout au long de ce mémoire, comme l'espace de : Banach, Hilbert, les espaces mesurables et de Lebesgue ainsi que quelques théorèmes du point fixe et critère de compacité.

Le **deuxième chapitre**, est consacré au classification par linéarité des équations intégrales de Volterra et Fredholm (linéaire et non linéaire) et quelques résultats d'existence et unicité pour une équation intégrale non linéaire de Hammerstein. sous des conditions convenables.

Dans le **troisième chapitre**, Nous étudierons l'équation intégrale généralisée de Hammerstein suivante :

$$u(t) = \int_0^1 k(t, s)g(s)f(s, u(s), u'(s), \dots, u^{(m)}(s)) ds$$

où $k : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction noyau telle que $k \in W^{m,1}([0, 1]^2)$, m est un entier positif avec $m \geq 1$, $g : [0, 1] \rightarrow [0, \infty)$ avec $g(t) \geq 0$, p.p $t \in [0, 1]$ et $f : [0, 1] \times \mathbb{R}^{m+1} \rightarrow [0, \infty)$ est une fonction L^∞ -carathéodory (voir [11])

Le **dernier chapitre**, Représente une application du résultat obtenue dans le 3 ème chapitre à un problème aux limites de troisième ordre dont la non linéarité dépend de la première dérivée de la fonction inconnue avec un exemple.

Chapitre 1

Rappels et notions fondamentales

Dans ce chapitre on présentera quelques notions utilisées tout au long de ce mémoire concernant l'analyse fonctionnelle.

1.1 Notions topologiques

1.1.1 Espaces métrique

Définition 1.1.1. Soit X un ensemble non vide. Une distance (ou métrique) sur X est une application $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$ satisfaisant les propriétés suivantes :

1. $\forall u, v \in X, d(u, v) \geq 0$ et $d(u, v) = 0$ si et seulement si $u = v$ (séparation).
2. $d(u, v) = d(v, u)$ (symétrie).
3. $\forall u, v, w \in X, d(u, w) \leq d(u, v) + d(v, w)$ (inégalité triangulaire).

Un espace métrique est un couple (X, d) où X est un ensemble non vide et d une distance sur X .

Exemple 1.1.1. 1) Sur $\mathbb{R}^n$ on peut définir les distances suivantes :

$$d_1(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|.$$

$$d_2(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}.$$

$$d_\infty(x, y) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|.$$

2) Sur $C([0, 1], \mathbb{R}) = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ continue}\}$. On peut définir la distance :

$$d_\infty(f, g) = \sup_{t \in [0, 1]} |f(t) - g(t)|.$$

3) Soit d une application définie par :

$$d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \rightarrow d(x, y) = |x^3 - y^3|.$$

d est une distance sur $\mathbb{R}$.

Métrie induite : Si (X, d) est un espace métrique et A un sous-ensemble de X la restriction : $d|_{A \times A} : A \times A \rightarrow \mathbb{R}$ définit une distance sur A . Par conséquent, tout sous-ensemble d'un espace métrique constitue un espace métrique.

1.1.2 Espaces de Banach

Définition 1.1.2. Un espace $(E, \|\cdot\|)$ est dit espace vectoriel normé sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ s'il est muni d'une application $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}$ qui vérifie :

1. $\forall x \in E, \|x\| = 0$ si et seulement si $x = 0$ (séparation).
2. $\forall \lambda \in \mathbb{K}, x \in E, \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ (homogénéité) où $|\lambda|$ désigne respectivement la valeur absolue si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et le module si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
3. $\forall x, y \in E, \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (l'inégalité triangulaire).

L'application $\|\cdot\|$ ainsi définie est appelée norme .

i) Sur $\mathbb{R}^n$, on peut définir plusieurs normes :

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|.$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \text{ (la norme euclidienne).}$$

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|.$$

ii) L'espace vectoriel $C([0, 1], \mathbb{R})$ peut-être muni des normes suivantes :

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt.$$

$$\|f\|_2 = \sqrt{\int_0^1 (f(t))^2 dt}.$$

$$\|f\|_\infty = \max_{t \in [0, 1]} |f(t)| \text{ (norme de la convergence uniforme).}$$

iii) Sur l'espace des suites numériques bornées (à valeur dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), on peut définir la norme :

$$\|u\| = \sup_{n \geq 0} |u_n|.$$

Norme produit : Si $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ sont deux espaces normés, on peut définir une norme sur l'espace vectoriel $E \times F$ par :

$$\forall (x, y) \in E \times F, \|(x, y)\| = \max(\|x\|_E, \|y\|_F).$$

On peut démontrer que si $\|\cdot\|$ est une norme sur l'espace vectoriel E , alors la fonction réelle $d : (x, y) \mapsto \|x - y\|$ est une distance sur E , dite distance canonique associée à la norme $\|\cdot\|$.

Soit A une partie de l'espace vectoriel normé E , on dit que :

1. A est un ouvert de E si, pour tout $x \in A$, il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset A$.
2. A est un fermé de E si, pour toute suite convergente $(x_n)_n \subset A$ sa limite est aussi dans A .

3. A est un sous-ensemble borné de E s'il existe $M > 0$ tel que $\forall x \in A, \|x\| < M$.

Définition 1.1.3. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'un espace métrique (E, d) . On dit qu'elle est convergente vers $x \in E$ si et seulement si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n > N \Rightarrow d(x_n, x) < \epsilon.$$

Définition 1.1.4. (Suite de Cauchy) Dans un espace métrique (E, d) , une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite de Cauchy si et seulement si elle satisfait,

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p, q > N \Rightarrow d(x_p, x_q) < \epsilon.$$

Dans le cas d'un espace vectoriel normé, on remplace dans les deux définitions précédentes $d(x_n, x) < \epsilon$, $d(x_p, x_q) < \epsilon$ respectivement par $\|x_n - x\| < \epsilon$, $\|x_p - x_q\| < \epsilon$.

Proposition 1.1.1. Toute suite convergente est une suite de Cauchy tandis que la réciproque n'est pas toujours vraie.

Définition 1.1.5. (Espace complet) Un espace métrique E est dit complet si toute suite de Cauchy dans E est convergente vers un élément de E .

Définition 1.1.6. (Espace de Banach) Tout espace vectoriel normé complet s'appelle espace de Banach.

Exemple 1.1.2. $(C([a, b], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach.

1.1.3 Espaces de Hilbert

Définition 1.1.7. (Produits scalaires) Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Un produit scalaire sur E est une forme hermitienne définie positive sur E .

Autrement dit, un produit scalaire sur E est une application $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \longrightarrow \mathbb{K}; (x, y) \longmapsto \langle x, y \rangle$ vérifiant :

1. $\langle x + x', y \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x', y \rangle$ et $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$.
2. $\langle y, x \rangle = \overline{\langle x, y \rangle}$.
3. $\langle x, x \rangle \geq 0$.
4. $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$.

Le nombre $\langle x, y \rangle$ est appelé le produit scalaire de x et y .

Tout $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E muni d'un produit scalaire $(x, y) \longmapsto \langle x, y \rangle$ est donc un espace normé pour la norme définie par : $x \longmapsto \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$. Muni par cette norme E est appelé **espace préhilbertien**.

Définition 1.1.8. (Espace de Hilbert) Un espace de Hilbert est un espace préhilbertien complet.

Remarque 1.1.1. Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien et $y, z \in E$ tels que pour tout $x \in E$, on ait $\langle x, y \rangle = \langle x, z \rangle$, alors on a : $y = z$.

En effet, pour tout $x \in E$, on a : $\langle x, y - z \rangle = 0$.

En prenant $x = y - z$, on obtient $\|y - z\|^2 = 0$, d'où $y = z$.

Exemple 1.1.3. 1. $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire usuel est défini par :

$$\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^n x_j y_j.$$

Où :

$$x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n,$$

est un espace de Hilbert.

2. $\mathbb{C}^n$ muni du produit scalaire usuel est défini par :

$$\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^n x_j \bar{y}_j.$$

Où :

$$x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{C}^n,$$

est un espace de Hilbert.

Remarque 1.1.2. Un espace de Hilbert est un espace de Banach pour la norme associée au produit scalaire.

Définition 1.1.9. 1. Un espace euclidien est un $\mathbb{R}$ -espace préhilbertien de dimension finie.

2. Un espace hermitien est un $\mathbb{C}$ -espace préhilbertien de dimension finie.

(Pour plus de détails voir [18]).

1.1.4 Espace mesurable

Définition 1.1.10. (Espace mesurable) Une classe $\mathcal{A}$ des parties d'un ensemble E est appelée tribu ou σ -algèbre si elle vérifie les trois axiomes suivantes :

1. $E \in \mathcal{A}$.
2. pour tout $A \subseteq E, A \in \mathcal{A} \Leftrightarrow A^c \in \mathcal{A}$.
3. si (A_n) est une famille dénombrable d'éléments de $\mathcal{A}$, alors $\bigcup_n A_n \in \mathcal{A}$.

On dit alors que $(E, \mathcal{A})$ est un **espace mesurable**, et les éléments de $\mathcal{A}$ sont appelés les ensembles mesurables.

Définition 1.1.11. (Fonction mesurable) Soient $(E_1, \mathcal{A}_1)$ et $(E_2, \mathcal{A}_2)$ deux espaces mesurables. Une fonction $f : (E_1, \mathcal{A}_1) \rightarrow (E_2, \mathcal{A}_2)$ est dite mesurable de $(E_1, \mathcal{A}_1)$ dans $(E_2, \mathcal{A}_2)$ si $f^{-1}(\mathcal{A}_2) \subseteq \mathcal{A}_1$, i.e pour tout $B \in \mathcal{A}_2$ on a $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}_1$.

Exemple 1.1.4. Une fonction constante définie sur un ensemble mesurable est une fonction mesurable.

Définition 1.1.12. (Mesure) Une mesure sur un espace mesurable $(E, \mathcal{A})$ est une application $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty[$ qui vérifie :

1. $\mu(\emptyset) = 0$.

2. μ est σ -additive : i.e $\mu\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n)$, pour toute suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans $\mathcal{A}$ telle que $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$.

On dit alors que $(E, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace mesuré, et pour tout $A \in \mathcal{A}$, on appelle $\mu(A)$ la mesure de A .

Une mesure μ sur un espace mesurable $(E, \mathcal{A})$ est dite finie si :

$$\mu(E) < \infty.$$

1.2 Théorème de convergence dominée

Théorème 1.2.1. [3]. Soit $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite des fonctions mesurables définie d'un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$. Supposons qu'il existe une fonction mesurables f vérifie :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x), \quad p.p. \ x \in \Omega$$

et une fonction intégrable $g : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty]$ telle que,

$$|f_n(x)| \leq g(x), \quad p.p. \ x \in \Omega$$

Alors f est intégrable, et on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} f_n(x) dx = \int_{\Omega} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) dx = \int_{\Omega} f(x) dx.$$

1.3 Quelques espaces fonctionnels

Espace $C([a, b])$: l'espace des fonctions $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continues sur l'intervalle $[a, b]$. Muni de la norme $\|x\|_{\infty} = \max_{t \in [a, b]} |x(t)|$.

$C([a, b])$ est un espace de Banach.

Espace $C^k([a, b])$: l'espace de toutes les fonctions $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, k fois continument dérivables sur $[a, b]$. Muni de la norme $\|f\| = \sum_{i=0}^k \|f^{(i)}\|_{\infty}$, où $f^{(i)}$ est la dérivée de f d'ordre i , avec $f^{(0)} = f$.

$C^k([a, b])$ est un espace de Banach.

Espace $L^1(\Omega)$: Pour Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$; on désigne par $L^1(\Omega)$ l'ensemble de toutes les fonctions $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mesurables et intégrables sur Ω au sens de Lebesgue. Cet espace est muni de la norme :

$$\|f\|_1 = \int_{\Omega} |f(x)| dx.$$

En abrégé, on écrit $L^1(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ mesurable}; \|f\|_1 < \infty\}$.

Espace $L^p(\Omega)$: [7] Soit $1 \leq p < +\infty$, $L^p(\Omega)$ est l'ensemble de toutes les fonctions $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mesurables telles que $|f(x)|^p \in L^1(\Omega)$. Cet ensemble muni de la norme :

$$\|f\|_{L^p} = \|f\|_p = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Si $p = \infty$, on a $L^\infty(\Omega)$ est l'espace des fonctions $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable vérifiant $\exists c > 0$ telle que $|f(x)| \leq c$, p.p. sur Ω .

Sa norme est notée par :

$$\|f\|_{L^\infty} = \|f\|_\infty = \inf \{c > 0, |f(x)| \leq c, \text{ p.p. sur } \Omega\}.$$

Pour tout $1 \leq p < +\infty$; $L^p(\Omega)$ sont des espaces de Banach.

En particulier l'espace $L^2(\Omega)$ muni du produit scalaire :

$$\langle f, g \rangle = \int_{\Omega} f(x) \cdot \overline{g(x)} dx,$$

est un espace de Hilbert.

Les espaces $W^{m,p}(\Omega)$: Soient $m \in \mathbb{N}^*$ et $1 \leq p \leq +\infty$. L'espace $W^{m,p}(\Omega)$ est l'ensemble de toutes les fonctions $v \in L^p(\Omega)$ telles que $D^\alpha v \in L^p(\Omega)$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^m$ avec $|\alpha| \leq m$.

$W^{m,p}(\Omega)$ est la généralisation de la notion d'espace de sobolev :

$$H^m(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega); D^\alpha v \in L^2(\Omega)\} \text{ i.e } W^{m,2}(\omega) = H^m(\omega).$$

1.4 Ensembles et fonctions convexes

- Une partie C de $\mathbb{R}^n$ est dite convexe si, pour tout couple (a, b) d'éléments de C , le segment $[a, b]$ est tout entier inclus dans C .

Autrement dit, C est convexe lorsque pour tout $a, b \in C$ et tout $\lambda \in [0, 1]$,

$$\lambda a + (1 - \lambda)b \in C.$$

- Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle définie sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$. On dit que f est convexe sur I , si pour tous x, y de I et tout $\lambda \in [0, 1]$, on a :

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

1) les boules d'un espace vectoriel normé sont des parties convexes.

2) les parties convexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.

(Voir [3]).

1.5 Rappel sur les opérateurs

Soient E et F deux espaces vectoriels normés et $\Omega \subset \mathbb{R}$.

1.5.1 Opérateurs linéaires bornés

Définition 1.5.1. Un opérateur A défini sur E dans F est dit linéaire s'il vérifie les conditions suivantes :

pour tout u, v dans E et α, β dans $\mathbb{R}$.

- i) $Au \in F$.
- ii) $A(\alpha u + \beta v) = \alpha Au + \beta Av$.

Définition 1.5.2. Un opérateur linéaire A de E dans F est dit borné s'il existe une constante positive C , telle que :

$$\|Au\|_F \leq C\|u\|_E, \forall u \in E.$$

Définition 1.5.3. $A : E \rightarrow F$ un opérateur linéaire, les propriétés suivantes sont équivalentes :

- i) L'opérateur A est continu sur E .
- ii) L'opérateur A est continu au point 0_x .
- iii) L'opérateur A est borné.

1.5.2 Partie compacte et opérateur compact

Définition 1.5.4. (Compacité) Soit U un ensemble d'un espace normé X , U est dit compact si de tout recouvrement de U par des ouverts de U on peut extraire un sous-recouvrement fini i.e. $\forall V_j, j \in J$ (ouverts); $U \subset \bigcup_{j \in J} V_j, \exists V_{j(k)}, j(k) = 1, 2, \dots, n$ tel que $U \subset \bigcup_{k=1}^n V_{j(k)}$.

Définition 1.5.5. On dit que l'espace E est compact si de toute suite $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de E on peut extraire une sous suite convergente vers un point de E . Une partie S de E est dite compacte si le sous-espace $(S, |||)$ est compact.

Une partie S de E est dite relativement compacte si l'adhérence de S (i.e $\overline{S}$) est une partie compacte de E .

Application compacte

Soit $T \in L(E, F)$, on dit que T est une application compact si et seulement si une des trois propositions équivalentes suivantes est satisfaite :

- i) L'image de tout borné de E est relativement compact dans F .
- ii) $T(B_E(0, 1))$ est relativement compact dans F .
- iii) De toute suite bornée $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de E on peut extraire une sous suite telle que $(Tx_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ converge dans F quand $k \rightarrow \infty$.
- L'ensemble de toutes les applications compactes est noté par $K(E, F)$.
- En générale : L'opérateur $T : E \rightarrow F$ est un opérateur compact s'il envoie tout sous

ensemble borné de E à un ensemble relativement compact dans F (voir [14]).

• Un opérateur $T : E \rightarrow F$ est dit complètement continu si T est continu et compact.

1.5.3 Opérateur linéaire intégrale

Définition 1.5.6. Soit :

$$By(x) = \int_{\Omega} G(x, s)y(s)ds,$$

un opérateur linéaire intégrale.

Les propriétés de cet opérateur sont déterminées par les propriétés du noyau $G(x, s)$.

Si $G(x, s)$ est continu alors B est complètement continu dans l'espace $C(\Omega)$.

1.5.4 Opérateur de Nemitskii

Définition 1.5.7. L'opérateur de Nemitskii N associé à la fonction $f : (x, y) \rightarrow f(x, y)$ est défini par :

$$Ny(x) = f(x, y(x)) \text{ pour tout } x \in \Omega.$$

Les propriétés de N sont déterminées par les propriétés de f .

Si f est continue alors N est continu et borné dans l'espace des fonctions continues.

1.5.5 Opérateur de Hammerstein

Définition 1.5.8. (Fonction de Carathéodory) Soit $I \subset \mathbb{R}$, on dit que $f : I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de Carathéodory si :

- 1) l'application $x \mapsto f(x, y)$ est mesurable pour tout $y \in \mathbb{R}^n$.
- 2) l'application $y \mapsto f(x, y)$ est continue sur $\mathbb{R}$ pour presque tout $x \in I$.

Si pour chaque nombre réel $r > 0$, il existe $h_r \in L^p(I)$ tel que $|f(x, y)| < h_r(x)$, pour presque tout $x \in I$ et pour tout $y \in \mathbb{R}^n$, avec $\|y\| < r$, alors f est dite L^p -Carathéodory avec $1 \leq p \leq \infty$.

Définition 1.5.9. La fonction f étant une fonction de Carathéodory, on suppose que Ω est un compact et considérons un noyau de Green G associé à la fonction f .

Alors, l'opérateur H défini par :

$$(Hu)(x) = \int_{\Omega} G(x, y)f(y, u(y))dy.$$

est appelé opérateur de Hammerstein.

Remarque 1.5.1. Soit :

$$Hy(x) = \int_{\Omega} G(x, s)f(s, y(s))ds$$

On peut mettre H sous la forme : $H = BN$, où :

$$By(x) = \int_{\Omega} G(x, s)y(s)ds \quad \text{et} \quad Ny(x) = f(x, y(x)).$$

Si f est continue et B est complètement continu, alors H est complètement continu dans l'espace des fonctions continues.

Pour plus de détails concernant les propriétés des opérateurs B, N et H , on peut consulter [15] .

Exemple 1.5.1. Si Ω est un domaine de $\mathbb{R}^n$, une solution u du problème :

$$\begin{cases} \Delta u = f(x, u) & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

peut se mettre sous la forme intégrale :

$$u(x) = \int_{\Omega} G(x, y) f(y, u(y)) dy.$$

où G est le noyau de Green.

1.5.6 Critère de compacité (Théorème d'Ascoli-Arzelà)

Soient (E, d_E) un espace métrique compact et (F, d_F) un espace métrique complet. Notons par $C(E, F)$ l'espace vectoriel de toutes les fonctions continues $f : E \rightarrow F$.

Définition 1.5.10. La famille $D \subset C(E, F)$ est dite *équicontinue* si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que $d_F(f(x), f(y)) < \varepsilon$ pour tout $x, y \in E$ satisfaisant $d_E(x, y) < \delta$ et toute $f \in D$.

Théorème 1.5.1. La famille $D \subset C(E, F)$ est relativement compacte si et seulement si

- i) D est équicontinue.
- ii) pour tout $t \in E$, l'ensemble :

$$M(t) = \{x(t) ; x(\cdot) \in D\}.$$

est relativement compact dans F .

Cas particuliers

- 1- Si F est un espace de Banach de dimension finie, la deuxième condition du théorème d'Ascoli-Arzelà est équivalente à D est uniformément borné, i.e il existe $M > 0$ tel que pour tout $x \in D$

$$\|x\|_{\infty} = \sup_{t \in E} \|x(t)\| \leq M.$$

En particulier ; pour $F = \mathbb{R}$ (En effet, dans ce cas, pour tout $t \in E$, $\overline{M(t)}$ est un fermé borné d'un espace de dimension finie F).

- 2- Si F est un espace métrique compact, alors le théorème d'Ascoli-Arzelà peut-être éxprimer comme le suivant : la famille $D \subset C(E, F)$ est relativement compact si et seulement si D est équicontinue.

1.6 Inégalités utiles et propriétés

1.6.1 Inégalité de Hölder

Soit p , telle que $1 \leq p \leq \infty$, et soient f, g deux fonctions telles que $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^q(\Omega)$, alors :

$$f \cdot g \in L^1(\Omega) \text{ et } \|f \cdot g\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \cdot \|g\|_{L^q(\Omega)},$$

avec : $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

1.6.2 Inégalité de Cauchy Schwartz

Soient f, g deux fonctions de $L^2(\Omega)$ alors :

$$|\langle f, g \rangle| \leq \|f\|_2 \cdot \|g\|_2.$$

1.6.3 Théorème de Fubini

Théorème 1.6.1. *Si $f : [a, b] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue, alors les intégrales :*

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(x, t) dx \right) dt \quad \text{et} \quad \int_a^b \left(\int_c^d f(x, t) dt \right) dx$$

existent et elles sont égales.

1.7 Quelques théorèmes du point fixe

Définition 1.7.1. *(Point fixe) Soient (X, d) un espace métrique, une application f est défini par :*

$f : X \rightarrow X$, on dit que $x \in X$ est un point fixe de f si :

$$f(x) = x.$$

1.7.1 Théorème de point fixe de Banach

Définition 1.7.2. *Soit (E, d) un espace métrique complet et l'application $f : E \rightarrow E$.*

On dit que f est une application lipschitzienne s'il existe une constante positive $\alpha \geq 0$ telle que l'on ait, pour tout couple d'éléments x, y de E l'inégalité

$$d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x, y).$$

si $\alpha \geq 1$, f est appelé non expansive.

si $0 < \alpha < 1$, f est appelé contraction, où α -contraction.

Théorème 1.7.1. *(Théorème de Banach(1922)) Soit (E, d) un espace métrique complet non vide et soit $f : E \rightarrow E$ une application α -contraction. Alors f possède un unique point fixe.*

Démonstration 1.7.1. *i) L'unicité :*

On pose que $x, y \in E$ deux points fixes de f alors $f(x) = x, f(y) = y$

$$d(x, y) = d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x, y).$$

comme $0 < \alpha < 1$ donc $d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$.

ii) L'existence :

On choisit un point $x_0 \in E$ quelconque et on définit la suite $x_n = f(x_{n-1})$, on montre

par récurrence que $d(x_n, x_{n+1}) \leq \alpha^n d(x_0, x_1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et on montre que la suite $(x_n)_n$ est de Cauchy :

$$\begin{aligned}
 d(x_n, x_{n+p}) &\leq \sum_{k=0}^{p-1} d(x_{n+k}, x_{n+k+1}) \\
 &\leq \sum_{k=0}^{p-1} \alpha^{n+k} d(x_0, x_1) \\
 &\leq \alpha^n \sum_{k=0}^{p-1} \alpha^k d(x_0, x_1) \\
 &\leq \alpha^n \frac{1 - \alpha^p}{1 - \alpha} d(x_0, x_1) \\
 &\leq \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} d(x_0, x_1).
 \end{aligned}$$

et donc $d(x_n, x_{n+p}) \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$, ceci exprime le fait que $(x_n)_n$ est une suite de Cauchy dans E , et comme E est un espace complet, il existe $x \in E$ tel que $x_n \rightarrow x$. Par continuité, $x_{n+1} = f(x_n) \rightarrow f(x)$, d'où $f(x) = x$.

1.7.2 Théorème de point fixe de Guo-Krasnosel'skii

Définition 1.7.3. (Cône) Soit E un espace de Banach, et $K \subset E$ un sous-ensemble non-vide, fermé et convexe. K est un cône sur E s'il vérifie les conditions suivantes :

- 1) $\forall x \in K$, alors $\lambda x \in K$ pour tout réel $\lambda > 0$.
- 2) si $x \in K$ et $-x \in K$, alors $x = 0$.

Théorème 1.7.2. (Guo-Krasnosel'skii) Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach, et $K \subset E$ un cône de E ; Ω_1, Ω_2 deux ouverts bornés de E tels que $0 \in \Omega_1$ et $\overline{\Omega_1} \subset \Omega_2$.

Soit $A : K \cap (\overline{\Omega_2} \setminus \Omega_1) \rightarrow K$ un opérateur complètement continu tel que on a où bien :

- 1) $\|Au\| \leq \|u\|$ pour tout $u \in K \cap \partial\Omega_1$ et $\|Au\| \geq \|u\|$ pour tout $u \in K \cap \partial\Omega_2$.
- 2) ou $\|Au\| \geq \|u\|$ pour tout $u \in K \cap \partial\Omega_1$ et $\|Au\| \leq \|u\|$ pour tout $u \in K \cap \partial\Omega_2$.

Alors, A admet un point fixe dans $K \cap (\overline{\Omega_2} \setminus \Omega_1)$.

Quelques équations intégrales

2.1 Introduction

Ce chapitre contient une classification selon la linéarité des équations intégrales de Fredholm et nous étudierons également l'existence et l'unicité d'une solution bornée et continue d'une équation intégrale non linéaire de type Fredholm-Hammerstein [5] en utilisant le théorème de point fixe de Banach.

Considérons les équations intégrales de type Fredholm-Hammerstein de la forme suivante :

$$y(t) = u(t, y(t)) + \int_{\Omega} \mathcal{K}(t, s) \mathcal{F}(s, y(s)) ds, \quad t \in \Omega$$

où Ω est un ensemble mesurable de $\mathbb{R}^n$ de la mesure de Lebesgue notée $\mu(\Omega)$; $\mathcal{F}(\cdot, \cdot)$ et $u(\cdot, \cdot) : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions données dépendant de y , et $y(\cdot) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction inconnue à chercher solution de l'équation dessus.

2.2 Classification des équations intégrales

2.2.1 Équations intégrales linéaires

Définition 2.2.1. (*Équation intégrale de Fredholm*) On appelle équation intégrale de Fredholm une équation à une inconnue $\varphi(x)$ de la forme :

$$h(x)\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b \mathcal{K}(x, t)\varphi(t)dt. \quad (2.1)$$

où $f(x), \mathcal{K}(x, t)$ sont des fonctions connues et λ est un paramètre non nul, réel ou complexe.

La fonction $h(x)$ détermine le type de l'équation intégrale.

i) Si $h(x) = 0$, l'équation (2.1) s'écrit :

$$f(x) + \lambda \int_a^b \mathcal{K}(x, t)\varphi(t)dt = 0. \quad (2.2)$$

et s'appelle équation intégrale de Fredholm de première espèce.

ii) Si $h(x) = u = \text{constante} \neq 0$, l'équation (2.1) s'écrit :

$$u\varphi(x) = f(x) + \int_a^b \mathcal{K}(x, t)\varphi(t)dt. \quad (2.3)$$

et s'appelle équation intégrale de Fredholm de seconde espèce.

iii) Si $h(x) \neq 0$, donc la formule (2.1) est appelée équation intégrale de Fredholm de troisième espèce.

Remarque 2.2.1. 1. Si $f(x) = 0$, l'équation (2.1) est dite homogène.

2. Si $f(x) \neq 0$, l'équation (2.1) est dite non homogène.

Définition 2.2.2. (Équation intégrale de Volterra) On appelle équation intégrale linéaire de Volterra, une équation de la forme :

$$h(x)\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x \mathcal{K}(x, t)\varphi(t)dt. \quad (2.4)$$

i) On appelle équation intégrale de Volterra de première espèce, si $h(x) = 0$, donc l'équation (2.4) s'écrit :

$$f(x) + \lambda \int_a^x \mathcal{K}(x, t)\varphi(t)dt = 0. \quad (2.5)$$

ii) On appelle équation intégrale de Volterra de seconde espèce, si $h(x) = u = \text{constante} \neq 0$, donc l'équation (2.4) s'écrit :

$$u\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x \mathcal{K}(x, t)\varphi(t)dt. \quad (2.6)$$

iii) Si $h(x) \neq 0$, donc la formule (2.4) est appelée équation intégrale de Volterra de troisième espèce.

Remarque 2.2.2. 1. Si $f(x) = 0$, l'équation (2.4) est dite homogène.

2. Si $f(x) \neq 0$, l'équation (2.4) est dite non homogène.

Remarque 2.2.3. L'équation intégrale de Volterra est un cas particulier de l'équation intégrale de Fredholm, il suffit de prendre le noyau $\mathcal{K}$ vérifie la condition suivante :

$$\mathcal{K}(x, t) = 0, \text{ pour } x < t.$$

2.2.2 Équations intégrales non linéaires

Définition 2.2.3. (Équation intégrale de Fredholm) L'équation intégrale non linéaire de Fredholm de première espèce prend la forme :

$$f(x) + \lambda \int_a^b \mathcal{K}(x, t, \varphi(t))dt = 0 \quad (2.7)$$

est appelée *équation intégrale de Fredholm de second espèce*, de la forme :

$$u\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b \mathcal{K}(x, t, \varphi(t))dt. \quad (2.8)$$

où ($u = \text{constante} \neq 0$).

et troisième espèce, de la forme :

$$h(x)\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b \mathcal{K}(x, t, \varphi(t))dt. \quad (2.9)$$

Définition 2.2.4. (*Équation intégrale de Volterra*) L'équation intégrale non linéaire de Volterra de première espèce prendre la forme :

$$f(x) + \lambda \int_a^x \mathcal{K}(x, t, \varphi(t))dt = 0. \quad (2.10)$$

est appelée *équation intégrale de Volterra de second espèce*, de la forme :

$$u\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x \mathcal{K}(x, t, \varphi(t))dt. \quad (2.11)$$

et troisième espèce, de la forme :

$$h(x)\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x \mathcal{K}(x, t, \varphi(t))dt. \quad (2.12)$$

Remarque 2.2.4. 1. Si $f(x) = 0$, donc l'équation est dite homogène.

2. Si $f(x) \neq 0$, donc l'équation est dite non homogène.

Définition 2.2.5. (*Équation intégrale de Hammerstein*) On appelle *équation intégrale de Hammerstein* une équation de la forme :

$$h(x)\varphi(x) + \lambda \int_a^b \mathcal{K}(x, t)\mathcal{F}(t, \varphi(t))dt = f(x). \quad (2.13)$$

Définition 2.2.6. (*Équation intégrale de Hammerstein-Volterra*) On appelle *équation intégrale de Hammerstein-Volterra* une équation de la forme :

$$h(x)\varphi(x) + \lambda \int_a^x \mathcal{K}(x, t)\mathcal{F}(t, \varphi(t))dt = f(x). \quad (2.14)$$

2.3 Existence et unicité d'une solution continue et bornée d'une équation intégrale de type Hammerstein

Dans cette partie, nous utilisons le théorème de point fixe de Banach pour montrer l'existence et de même l'unicité d'une solution continue et bornée de l'équation intégrale de type Hammerstein suivante :

$$y(t) = u(t, y(t)) + \int_{\Omega} \mathcal{K}(t, s)\mathcal{F}(s, y(s))ds, \quad t \in \Omega. \quad (2.15)$$

On suppose que, $u(., .) : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue sur $\Omega \times \mathbb{R}$, $u(., 0)$ est borné sur Ω , et vérifie pour $b_1 \in L^\infty(\Omega)$, la condition suivante :

$$|u(t, x) - u(t, y)| \leq b_1(t)|x - y|. \quad (2.16)$$

$\mathcal{F}(., .) : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction mesurable sur $\Omega \times \mathbb{R}$, telle que $\mathcal{F}(., 0) \in L^\infty(\Omega)$ et :

$$|\mathcal{F}(t, x) - \mathcal{F}(t, y)| \leq b_2(t)|x - y|. \quad (2.17)$$

ou $b_2 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$ est une fonction mesurable, de plus, $K(., s) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est continue pour p.p. $s \in \Omega$, $\mathcal{K}(t, .) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est mesurable pour p.p. $t \in \Omega$ et il existe une fonction $g \in L^1(\Omega)$ telle que :

$$\forall t \in \Omega, |\mathcal{K}(t, s)| \leq g(s), \quad \text{p.p. } s \in \Omega \quad (2.18)$$

En outre :

$$b = \|b_1\|_\infty + \int_\Omega g(s)b_2(s)ds < 1. \quad (2.19)$$

Théorème 2.3.1. *Sous les hypotheses ci-dessus, l'équation (2.15) admet une solution unique dans $\mathcal{C}_a(\Omega)$.*

Démonstration 2.3.1. *On pose :*

$$a = \frac{\|u(., 0)\|_\infty + \int_\Omega g(s)\mathcal{F}(s, 0)ds}{1 - b}.$$

et on définit l'opérateur :

$$T : \begin{array}{l} \mathcal{C}_a(\Omega) \rightarrow \mathcal{C}_a(\Omega) \\ y \rightarrow Ty. \end{array}$$

où :

$$Ty(t) = u(t, y(t)) + \int_\Omega \mathcal{K}(t, s)\mathcal{F}(s, y(s))ds.$$

Alors, l'équation (2.15) peut-être écrire de La forme :

$$Ty = y. \quad (2.20)$$

et le problème ramène à trouver les solutions de l'équation (2.20).

Tout d'abord, on montre que l'opérateur T est bien défini.

Soit $y \in \mathcal{C}_a(\Omega)$, Comme $u(., .)$ est continue sur $\Omega \times \mathbb{R}$, il suffit de montrer la continuité de $t \mapsto \int_\Omega \mathcal{K}(., s)\mathcal{F}(s, y(s))$ sur Ω pour déduire la continuité de Ty .

Soit $\{t_n\}$ une suite converge vers t dans Ω .

On a :

$$\begin{aligned} & \left| \int_\Omega \mathcal{K}(t_n, s)\mathcal{F}(s, y(s))ds - \int_\Omega \mathcal{K}(t, s)\mathcal{F}(s, y(s))ds \right| \\ &= \left| \int_\Omega (\mathcal{K}(t_n, s) - \mathcal{K}(t, s))\mathcal{F}(s, y(s))ds \right| \\ &\leq \int_\Omega |(\mathcal{K}(t_n, s) - \mathcal{K}(t, s))| |\mathcal{F}(s, y(s)) - \mathcal{F}(s, 0) + \mathcal{F}(s, 0)| ds \\ &\leq \int_\Omega |(\mathcal{K}(t_n, s) - \mathcal{K}(t, s))| (|\mathcal{F}(s, y(s)) - \mathcal{F}(s, 0)| + |\mathcal{F}(s, 0)|) ds. \end{aligned}$$

Par (2.17), et le fait que $\mathcal{F}(., 0) \in L^\infty(\Omega)$, on obtient :

$$\begin{aligned} & \left| \int_\Omega (\mathcal{K}(t_n, s) - \mathcal{K}(t, s))\mathcal{F}(s, y(s))ds \right| \\ &\leq \int_\Omega |(\mathcal{K}(t_n, s) - \mathcal{K}(t, s))| (b_2(s)|y(s)| + |\mathcal{F}(s, 0)|) ds \\ &\leq \int_\Omega |(\mathcal{K}(t_n, s) - \mathcal{K}(t, s))| (b_2(s)\|y\|_\infty + |\mathcal{F}(s, 0)|) ds \\ &\leq \int_\Omega |(\mathcal{K}(t_n, s) - \mathcal{K}(t, s))| (ab_2(s) + |\mathcal{F}(s, 0)|) ds \\ &\leq \int_\Omega |(\mathcal{K}(t_n, s) - \mathcal{K}(t, s))| (ab_2(s) + \|\mathcal{F}(., 0)\|_\infty) ds. \end{aligned}$$

On utilise (2.18), (2.19), la continuité de $\mathcal{K}(\cdot, s)$ et le fait que $g \in L^1(\Omega)$, on déduit en appliquant le théorème de convergence dominée :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \int_{\Omega} \mathcal{K}(t_m, s) \mathcal{F}(s, y(s)) ds - \int_{\Omega} \mathcal{K}(t, s) \mathcal{F}(s, y(s)) ds \right| = 0.$$

par conséquent, $\int_{\Omega} \mathcal{K}(\cdot, s) \mathcal{F}(s, y(s)) ds$ est continue sur Ω , d'où la continuité de Ty .
Montrons que $\|Ty\|_{\infty} \leq a$.

On a :

$$\begin{aligned} |Ty(t)| &= \left| u(t, y(t)) + \int_{\Omega} \mathcal{K}(t, s) \mathcal{F}(s, y(s)) ds \right| \\ &\leq |u(t, y(t))| + \left| \int_{\Omega} \mathcal{K}(t, s) \mathcal{F}(s, y(s)) ds \right| \\ &\leq |u(t, y(t)) - u(t, 0) + u(t, 0)| + \int_{\Omega} |\mathcal{K}(t, s)| |\mathcal{F}(s, y(s))| ds \\ &\leq |u(t, y(t)) - u(t, 0)| + |u(t, 0)| + \int_{\Omega} |\mathcal{K}(t, s)| |\mathcal{F}(s, y(s))| ds. \end{aligned}$$

En utilisant (2.16), (2.18) et (2.17) on trouve :

$$\begin{aligned} |Ty(t)| &= \left| u(t, y(t)) + \int_{\Omega} \mathcal{K}(t, s) \mathcal{F}(s, y(s)) ds \right| \\ &\leq b_1(t) |y(t)| + |u(t, 0)| + \int_{\Omega} g(s) |\mathcal{F}(s, y(s)) - \mathcal{F}(s, 0) + \mathcal{F}(s, 0)| ds \\ &\leq b_1(t) \|y\|_{\infty} + \|u(t, 0)\|_{\infty} + \int_{\Omega} g(s) |\mathcal{F}(s, y(s)) - \mathcal{F}(s, 0)| + g(s) |\mathcal{F}(s, 0)| ds \\ &\leq b_1(t) \|y\|_{\infty} + \|u(t, 0)\|_{\infty} + \int_{\Omega} g(s) |\mathcal{F}(s, y(s)) - \mathcal{F}(s, 0)| ds + \int_{\Omega} g(s) |\mathcal{F}(s, 0)| ds. \end{aligned}$$

De (2.17) et (2.19), il vient :

$$\begin{aligned} |Ty(t)| &\leq a \|b_1\|_{\infty} + \|u(t, 0)\|_{\infty} + \int_{\Omega} g(s) b_2(s) \|y\|_{\infty} ds + \int_{\Omega} g(s) |\mathcal{F}(s, 0)| ds \\ &\leq a \left(\|b_1\|_{\infty} + \int_{\Omega} g(s) b_2(s) ds \right) + \|u(t, 0)\|_{\infty} + \int_{\Omega} g(s) |\mathcal{F}(s, 0)| ds. \\ &= ab + \|u(t, 0)\|_{\infty} + \int_{\Omega} g(s) |\mathcal{F}(s, 0)| ds. \end{aligned} \tag{2.21}$$

On a d'après (2.19) :

$$\begin{aligned} a - ab &= \|u(t, 0)\|_{\infty} + \int_{\Omega} g(s) \mathcal{F}(s, 0) ds \\ &\leq \|u(t, 0)\|_{\infty} + \int_{\Omega} |g(s) \mathcal{F}(s, 0)| ds \\ &= \|u(t, 0)\|_{\infty} + \int_{\Omega} g(s) |\mathcal{F}(s, 0)| ds. \end{aligned}$$

alors :

$$ab = a - \|u(t, 0)\|_{\infty} - \int_{\Omega} g(s) |\mathcal{F}(s, 0)| ds.$$

La substitution direct de ab dans (2.21), nous donne que : $|Ty(t)| \leq a$.

On conclut que T est bien défini.

Maintenant, montrons que T est une contraction sur $\mathcal{C}_a(\Omega)$.

Soient $x, y \in \mathcal{C}_a(\Omega)$. d'après (2.16), (2.17) et (2.18), On a :

$$\begin{aligned}
 |Tx(t) - Ty(t)| &= \left| u(t, x(t)) - u(t, y(t)) + \int_{\Omega} \mathcal{K}(t, s) (\mathcal{F}(s, x(s)) - \mathcal{F}(s, y(s))) ds \right| \\
 &\leq |u(t, x(t)) - u(t, y(t))| + \int_{\Omega} |\mathcal{K}(t, s)| |\mathcal{F}(s, x(s)) - \mathcal{F}(s, y(s))| ds \\
 &\leq b_1(t) |x(t) - y(t)| + \int_{\Omega} g(s) |x(s) - y(s)| b_2(s) ds \\
 &\leq |b_1(t)| \|x - y\|_{\infty} + \|x - y\|_{\infty} \int_{\Omega} g(s) b_2(s) ds \\
 &\leq \|x - y\|_{\infty} \underbrace{\left(\|b_1\|_{\infty} + \int_{\Omega} g(s) b_2(s) ds \right)}_{b < 1} < \|x - y\|_{\infty}.
 \end{aligned}$$

donc T est une contraction sur $\mathcal{C}_a(\Omega)$ qui est un espace métrique complet.

D'après le théorème de point fixe de Banach, l'équation intégrale (2.15) admet une seule solution $y \in \mathcal{C}_a(\Omega)$.

Nous donnons un exemple :

Exemple 2.3.1. Considerons l'équation intégrale, pour tous $t \in [0, \infty[$ et $\alpha > 0$ une constante :

$$y(t) = h(t) + \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1 + y^2(s))}{(1 + s^2)(\alpha + t)} ds. \quad (2.22)$$

On remarque que cette équation intégrale est de type Hammerstein de la forme de l'équation (2.15), où $h(\cdot)$ est une fonction bornée et continue sur $[0, \infty[$,

$$\mathcal{K}(t, s) = \frac{1}{(1 + s^2)(\alpha + t)} \text{ et } \mathcal{F}(t, s) = \ln(1 + s^2).$$

Nous avons :

- 1) • $\mathcal{F}(t, s) = \ln(1 + s^2)$, est une fonction mesurable car elle est continue.
 - $\mathcal{F}(t, 0) = \ln(1) = 0 \in L^{\infty}([0, \infty[))$.
 - $|\mathcal{F}(t, s_1) - \mathcal{F}(t, s_2)| = |\ln(1 + s_1^2(s)) - \ln(1 + s_2^2(s))| \leq |s_1 - s_2| = b_2(t) |s_1 - s_2|$ avec $b_2 = 1 \in L^{\infty}([0, \infty[)$.
- 2) • On a $\mathcal{K}(t, s) = \frac{1}{1 + s^2} \times \frac{1}{\alpha + t}$, qui est une fonction continue sur $\Omega \times \Omega$.
 - $|\mathcal{K}(t, s)| = \frac{1}{1 + s^2} \left| \frac{1}{\alpha + t} \right| \leq \frac{1}{\alpha(1 + s^2)} = g(s), \forall t, s \in [0, \infty[, \text{ avec } g \in L^1[0, \infty[.$
 - car : $\int_0^{\infty} \left| \frac{1}{\alpha(1 + s^2)} \right| ds = \frac{1}{\alpha} [\arctan(s)]_0^{\infty} = \frac{\pi}{2\alpha} < +\infty.$

3) • On choisit $\alpha > \frac{\pi}{2}$, pour que $b = \int_0^\infty g(s)ds < 1$.

D'après le théorème 2.3.1 on déduit que l'équation :

$$y(t) = v(t) + \int_{\Omega} \mathcal{K}(t, s) \mathcal{F}(s, y(s)) ds, \quad t \in \Omega$$

admet une seule solution bornée $y_\alpha(\cdot) \in \mathcal{C}([0, \infty[)$.

Équation de Hammerstein généralisé

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, on s'intéresse de l'équation généralisée de Hammerstein suivante :

$$u(t) = \int_0^1 k(t, s)g(s)f(s, u(s), u'(s), \dots, u^{(m)}(s)) ds. \quad (3.1)$$

où $k : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction noyau telle que $k \in W^{m,1}([0, 1]^2)$, m est un entier positif avec $m \geq 1$, $g : [0, 1] \rightarrow [0, \infty)$ avec $g(t) \geq 0$ p.p $t \in [0, 1]$ et $f : [0, 1] \times \mathbb{R}^{m+1} \rightarrow [0, \infty)$ est une fonction L^∞ -carathéodory (voir [11]).

La particularité de ce problème est que dans tout les résultats déjà obtenus, la non-linéarité f ne peut dépendre que de la fonction inconnue u tandis qu'ici elle dépend des dérivées $u(\cdot), u'(\cdot), \dots, u^{(m)}(\cdot)$.

On pose :

$$v_0(s) = u(s), v_1(s) = u'(s), \dots, v_m(s) = u^{(m)}(s).$$

et

$$v(s) = (v_0(s), v_1(s), \dots, v_m(s)).$$

Alors, l'équation (3.1) peut-être écrit comme une équation intégrale vectorielle de Hammerstein sous la forme :

$$v(t) = \int_0^1 K(t, s)g(s)f(s, v(s))ds, \quad (3.2)$$

$$K(t, s) = \left(k(t, s), \frac{\partial k(t, s)}{\partial t}, \frac{\partial^2 k(t, s)}{\partial t^2}, \dots, \frac{\partial^m k(t, s)}{\partial t^m} \right).$$

Ce qui peut alors être vu comme un cas particulier du système de Hammerstein suivant :

$$v(t) = \int_0^1 K(t, s)F(s, v(s))ds. \quad (3.3)$$

considéré par Brezis et Browder [7] où $K(t, s)$ est une matrice carrée et F est une fonction vectorielle.

L'existence de solutions de (3.1) sera obtenue ici via un cône de compression/expansion dû à Guo-Krasnosel'skii (voir [12]).

3.2 Hypothèses et résultats auxiliaires

Supposons que les conditions suivantes satisfaites :

- (H1) la fonction noyau $k : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$ appartient à $W^{m,1}([0, 1]^2)$ et pour tout $\tau \in [0, 1]$.
 $\lim_{t \rightarrow \tau} |k(t, s) - k(\tau, s)| = 0$, pour tout $s \in [0, 1]$ et $\lim_{t \rightarrow \tau} \left| \frac{\partial^i k(t, s)}{\partial t^i} - \frac{\partial^i k(\tau, s)}{\partial \tau^i} \right| = 0$
pour $i = 1, \dots, m$ et pour p.p $s \in [0, 1]$.
- (H2) pour tout $j = 0, 1, \dots, m$; il existe des sous-intervalles $[a_j, b_j] \subseteq [0, 1]$, des fonctions positives $\phi_j \in L^\infty[0, 1]$ et des constantes $c_j \in (0, 1]$ telles que :
 $0 \leq k(t, s) \leq \phi_0(s)$ pour $t \in [0, 1]$ et p.p. $s \in [0, 1]$.
 $0 \leq \frac{\partial^i k(t, s)}{\partial t^i} \leq \phi_i(s)$ pour $t \in [0, 1]$, p.p. $s \in [0, 1]$ et $i = 1, \dots, m$.
 $k(t, s) \geq c_0 \phi_0(s)$ pour $t \in [a_0, b_0]$ et p.p. $s \in [0, 1]$.
 $\frac{\partial^i k(t, s)}{\partial t^i} \geq c_i \phi_i(s)$ pour $t \in [a_i, b_i]$ p.p $s \in [0, 1]$ et $i = 1, \dots, m$.
- (H3) pour $j = 0, 1, \dots, m$; les fonctions $g, \phi_j \in L^1[0, 1], g(t) \geq 0$ p.p. $t \in [0, 1]$ et $\int_{a_j}^{b_j} \phi_j(s) g(s) ds > 0$.
- (H4) la fonction $f : [0, 1] \times \mathbb{R}^{m+1} \rightarrow [0, \infty)$ est L^∞ -Carathéodory.

3.2.1 Cadre fonctionnel

Pour résoudre le problème (3.1) on prend l'espace $E := C^m[0, 1]$ équipé de la norme

$$\|u\| := \max \{ \|u^{(j)}\| : j = 0, 1, \dots, m \}.$$

où $\|y\| := \max_{t \in [0, 1]} |y(t)|$. $(E, \cdot)$ muni de la norme ainsi définie est un espace de Banach.

Considérons aussi le sous-ensemble K de E défini par :

$$K := \left\{ w \in C^m[0, 1] : \min_{t \in [a_i, b_i]} w^{(i)}(t) \geq c_i \|w^{(i)}\| \text{ pour } i = 0, 1, \dots, m \right\}. \quad (3.4)$$

K est un cône de E (pour la démonstration, on peut consulter [17]).

Remarque 3.2.1. Une solution non triviale u de (3.1) sera une fonction $u \in K$ satisfaisant (3.1) telle que $\|u\| \neq 0$.

Notons que les fonctions du cône K sont positives sur le sous-intervalle $[a_0, b_0]$, croissantes sur $[a_1, b_1]$ et convexes sur $[a_2, b_2]$, néanmoins ils peuvent changer de signe et avoir une variation ou une concavité différente sur $[0, 1]$.

3.2.2 Formulation du problème

Définir l'opérateur intégral $T : K \rightarrow K$ par :

$$Tu(t) := \int_0^1 k(t, s) g(s) f(s, u(s), u'(s), \dots, u^{(m)}(s)) ds. \quad (3.5)$$

Toute solution positive du problème (3.1) est point fixe de l'opérateur T .

Lemme 3.2.1. Supposons que les conditions (H1)-(H4) soient vérifiées. Alors l'opérateur T donné par (3.5) est un opérateur compact et $T(K) \subset K$.

Démonstration 3.2.1. Prenons $u \in K$ par (H2),

$$\|Tu\| \leq \int_0^1 \phi_0(s)g(s)f(s, u(s), u'(s), \dots, u^{(m)}(s)) ds.$$

et

$$\begin{aligned} \min_{t \in [a_0, b_0]} Tu(t) &\geq c_0 \int_0^1 \phi_0(s)g(s)f(s, u(s), u'(s), \dots, u^{(m)}(s)) ds \\ &\geq c_0 \|Tu\|. \end{aligned}$$

De plus, pour $i = 1, \dots, m$,

$$\begin{aligned} \|(Tu)^{(i)}\| &= \max_{t \in [0, 1]} \left| \int_0^1 \frac{\partial^i k}{\partial t^i}(t, s)g(s)f(s, u(s), u'(s), \dots, u^{(m)}(s)) ds \right| \\ &\leq \int_0^1 \phi_i(s)g(s)f(s, u(s), u'(s), \dots, u^{(m)}(s)) ds. \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \min_{t \in [a_i, b_i]} (Tu(t))^{(i)} &= \min_{t \in [a_i, b_i]} \int_0^1 \frac{\partial^i k}{\partial t^i}(t, s)g(s)f(s, u(s), u'(s), \dots, u^{(m)}(s)) ds \\ &\geq c_i \int_0^1 \phi_i(s)g(s)f(s, u(s), u'(s), \dots, u^{(m)}(s)) ds \\ &\geq c_i \|(Tu)^{(i)}\|. \end{aligned}$$

Alors, $\forall u \in K, Tu \in K$ par conséquent $TK \subset K$.

Pour appliquer le théorème d'Ascoli-Arzelà, nous devons montrer que T est uniformément borné et équicontinu dans $C^m[0, 1]$. Pour ce faire, soit $u \in K$ et $r > 0$ tels que $\|u\| \leq r$. d'après (H2) – (H4),

$$\begin{aligned} \|Tu\| &= \max_{t \in [0, 1]} |Tu(t)| \\ &\leq \int_0^1 \phi_0(s)g(s)f(s, u(s), u'(s), \dots, u^{(m)}(s)) ds \\ &\leq \int_0^1 \phi_0(s)g(s)\varphi_r(s)ds < +\infty. \end{aligned}$$

car f est L^∞ -carathéodory.

Et pour $i = 1, \dots, m$,

$$\begin{aligned} \|(Tu)^{(i)}\| &= \max_{t \in [0, 1]} \left| \int_0^1 \frac{\partial^{(i)} k}{\partial t^i}(t, s)g(s)f(s, u(s), u'(s), \dots, u^{(m)}(s)) ds \right| \\ &\leq \int_0^1 \phi_i(s)g(s)f(s, u(s), u'(s), \dots, u^{(m)}(s)) ds \\ &\leq \int_0^1 \phi_i(s)g(s)\varphi_r(s)ds < +\infty. \end{aligned}$$

Par conséquent, T est uniformément borné dans K .

Considérons $t_1, t_2 \in [0, 1]$. Par (H1),

$$\begin{aligned}
& |Tu(t_1) - Tu(t_2)| \\
&= \left| \int_0^1 k(t_1, s) g(s) f(s, u(s), u'(s), \dots, u^{(m)}(s)) ds - \int_0^1 k(t_2, s) g(s) f(s, u(s), u'(s), \dots, u^{(m)}(s)) ds \right| \\
&= \left| \int_0^1 (k(t_1, s) - k(t_2, s)) g(s) f(s, u(s), u'(s), \dots, u^{(m)}(s)) ds \right| \\
&\leq \int_0^1 |k(t_1, s) - k(t_2, s)| g(s) f(s, u(s), u'(s), \dots, u^{(m)}(s)) ds \\
&\leq \int_0^1 |k(t_1, s) - k(t_2, s)| g(s) \varphi_r(s) ds \rightarrow 0 \text{ si } t_1 \rightarrow t_2.
\end{aligned}$$

Pour $i=1, \dots, m$,

$$\begin{aligned}
& |(Tu)^{(i)}(t_1) - (Tu)^{(i)}(t_2)| \\
&\leq \int_0^1 \left| \frac{\partial^i k}{\partial t^i}(t_1, s) - \frac{\partial^i k}{\partial t^i}(t_2, s) \right| g(s) f(s, u(s), u'(s), \dots, u^{(m)}(s)) ds \\
&\leq \int_0^1 \left| \frac{\partial^i k}{\partial t^i}(t_1, s) - \frac{\partial^i k}{\partial t^i}(t_2, s) \right| g(s) \varphi_r(s) ds \rightarrow 0 \text{ si } t_1 \rightarrow t_2.
\end{aligned}$$

Par conséquent, T est équicontinu dans K , et par le théorème d'Ascoli-Arzelà, T est compact dans K .

3.3 Théorème principale

Pour obtenir notre résultat d'existence, nous supposons des conditions de sous-linéarité et de superlinéarité à l'origine et en $+\infty$.

(H5) Pour $i = 0, 1, \dots, m$,

$$\limsup_{x_i \rightarrow 0} \max_{t \in [0,1]} \frac{f(t, x_0, x_1, \dots, x_m)}{\max\{|x_i|\}} = 0. \quad (3.6)$$

et il existe $i_0 \in \{0, 1, \dots, m\}$ tel que $x_{i_0} \rightarrow +\infty$, et

$$\liminf_{x_{i_0} \rightarrow +\infty} \min_{t \in [0,1]} \frac{f(t, x_0, x_1, \dots, x_m)}{\max\{|x_i|\}} = +\infty. \quad (3.7)$$

(H6) pour $i = 0, 1, \dots, m$

$$\liminf_{x_i \rightarrow 0} \min_{t \in [0,1]} \frac{f(t, x_0, x_1, \dots, x_m)}{\max\{|x_i|\}} = +\infty. \quad (3.8)$$

et il existe $i_0 \in \{0, 1, \dots, m\}$ tel que $x_{i_0} \rightarrow +\infty$ et

$$\limsup_{x_{i_0} \rightarrow +\infty} \max_{t \in [0,1]} \frac{f(t, x_0, x_1, \dots, x_m)}{\max\{|x_i|\}} = 0. \quad (3.9)$$

Théorème 3.3.1. Soit $f : [0, 1] \times \mathbb{R}^{m+1} \rightarrow [0, \infty)$ une fonction L^∞ -carathéodory telle que les conditions (H1)-(H4) soient satisfaites. Si (H5) ou (H6) est satisfaite, alors le problème (3.1) a au moins une solution non négative $u(t) \in C^m[0, 1]$. De plus, si $m \geq 2$, cette solution est une fonction non décroissante et convexe.

Démonstration 3.3.1. Les conditions du théorème 1.7.2 seront prouvées en une séquence d'étapes. Tout d'abord, supposons que (H5) est satisfaite :

Étape 1 : $\|Tu\| \leq \|u\|$ pour certains $\rho_1 > 0$ et $u \in K \cap \partial\Omega_1$, avec $\Omega_1 = \{u \in E : \|u\| < \rho_1\}$. En vue de (H3), choisissons :

$$\varepsilon_1 := \min \left\{ \frac{1}{\int_0^1 \phi_i(s)g(s)ds} : i = 0, 1, \dots \right\}. \quad (3.10)$$

D'après (3.6), il existe $0 < \rho_1 < 1$ tel que :

$$(t, u(t), u'(t), \dots, u^{(m)}(t)) \in [0, 1] \times [-\rho_1, \rho_1]^{m+1}$$

et

$$f(t, u(t), u'(t), \dots, u^{(m)}(t)) \leq \varepsilon_1 \|u\|. \quad (3.11)$$

si $u \in K$ et $\|u\| = \rho_1$, alors pour (H2), (3.10), et (3.11),

$$\begin{aligned} Tu(t) &= \int_0^1 k(t, s)g(s)f(s, u(s), u'(s), \dots, u^{(m)}(s)) ds \\ &\leq \int_0^1 \phi_0(s)g(s)\varepsilon_1 \|u\| ds \\ &= \varepsilon_1 \|u\| \int_0^1 \phi_0(s)g(s)ds < \|u\|. \end{aligned}$$

et pour $i = 1, \dots, m$,

$$\begin{aligned} (Tu(t))^{(i)} &= \int_0^1 \frac{\partial^i k}{\partial t^i}(t, s)g(s)f(s, u(s), u'(s), \dots, u^{(m)}(s)) ds \\ &\leq \int_0^1 \phi_i(s)g(s)\varepsilon_1 \|u\| ds \\ &= \varepsilon_1 \|u\| \int_0^1 \phi_i(s)g(s)ds < \|u\|. \end{aligned}$$

Par conséquent, $\|Tu\| \leq \|u\|$.

Étape 2 : $\|Tu\| \geq \|u\|$ pour certains $\rho_2 > \rho_1$ et $u \in K \cap \partial\Omega_2$ avec $\Omega_2 = \{u \in E : \|u\| < \rho_2\}$.

S'il y a $i_0 \in \{0, 1, \dots, m\}$ tel que $u^{(i_0)}(t) \rightarrow +\infty$, alors $\|u\| \rightarrow +\infty$.

Supposons, sans perte de généralité, que toute autre composante soit bornée, i.e qu'il existe des nombres positifs θ_j tels que $\|u^{(j)}\| < \theta_j$ pour $j = 0, 1, \dots, m$, et $j \neq i_0$. Choisir :

$$\xi := \max \left\{ \frac{1}{c_i \int_0^1 \phi_i(s)g(s)ds} : i = 0, 1, \dots, m \right\}. \quad (3.12)$$

1. D'après (3.7), il existe $\rho^* > 0$ tel que, pour :

$$(t, u(t), u'(t), \dots, u^{(m)}(t)) \in [0, 1] \times [0, \theta_0] \times \dots \times [\rho^*, +\infty) \times \dots \times [0, \theta_m]$$

On a :

$$f(t, u(t), u'(t), \dots, u^{(m)}(t)) \geq \xi \|u\|. \quad (3.13)$$

pour c_i donné par (H2), considérons :

$$\rho_2 := \max \left\{ \rho_1 + 1, \frac{\rho^*}{c_i}, \theta_j : i = 0, 1, \dots, m, j = 0, 1, \dots, m, j \neq i_0 \right\}. \quad (3.14)$$

Soit $u \in K$ tel que $\|u\| = \rho_2$.

Puis, par (3.14),

$$u^{(i_0)}(t) \geq c_{i_0} \|u^{(i_0)}\| = c_{i_0} \rho_2 \geq \rho^*, \text{ pour } t \in [a_{i_0}, b_{i_0}].$$

Maintenant à partir de (H2), (3.12), et (3.13),

$$\begin{aligned} Tu(t) &\geq \int_{a_0}^{b_0} k(t, s) g(s) f(s, u(s), u'(s), \dots, u^{(m)}(s)) ds \\ &\geq c_0 \int_{a_0}^{b_0} \phi_0(s) g(s) f(s, u(s), u'(s), \dots, u^{(m)}(s)) ds \\ &\geq c_0 \int_{a_0}^{b_0} \phi_0(s) g(s) \xi \|u\| ds \\ &= c_0 \xi \|u\| \int_{a_0}^{b_0} \phi_0(s) g(s) ds \geq \|u\|. \end{aligned}$$

et de manière analogue, pour $i = 1, \dots, m$,

$$\begin{aligned} (Tu(t))^{(i)} &\geq \int_{a_i}^{b_i} \frac{\partial^{(i)} k}{\partial t^i}(t, s) g(s) f(s, u(s), u'(s), \dots, u^{(m)}(s)) ds \\ &\geq c_i \int_{a_i}^{b_i} \phi_i(s) g(s) f(s, u(s), u'(s), \dots, u^{(m)}(s)) ds \\ &\geq c_i \xi \|u\| \int_{a_i}^{b_i} \phi_i(s) g(s) ds \geq \|u\|. \end{aligned}$$

Par conséquent, $\|Tu\| \geq \|u\|$.

D'après le théorème 1.7.2, l'opérateur T a un point fixe dans $K \cap (\overline{\Omega_2} \setminus \Omega_1)$ qui à son tour est une solution de notre problème.

Supposons maintenant que (H6) est satisfaite.

Étape 3 : $\|Tu\| \geq \|u\|$ pour certains $\rho_3 > 0$ et $u \in K \cap \partial\Omega_3$ avec $\Omega_3 = \{u \in E : \|u\| < \rho_3\}$.

En prenant $\xi > 0$ comme dans (3.12), on voit que par (3.8) il existe $0 < \rho_3 < 1$ tel que :

$$(t, u(t), u'(t), \dots, u^{(m)}(t)) \in [0, 1] \times [0, \rho_3]^{m+1}$$

et

$$f(t, u(t), u'(t), \dots, u^{(m)}(t)) \geq \xi \|u\|. \quad (3.15)$$

Considérons $u \in K$ tel que $\|u\| = \rho_3$.

Ensuite, en appliquant des inégalités similaires à celles de l'étape 2, nous obtenons que $\|Tu\| \geq \|u\|$.

Étape 4 : $\|Tu\| \leq \|u\|$ pour certains $\rho_4 > \rho_3$ et $u \in K \cap \partial\Omega_4$ avec $\Omega_4 = \{u \in E : \|u\| < \rho_4\}$.

Notons que si pour certains $i_0 \in \{0, 1, \dots, m\}$, $u^{(i_0)}(t) \rightarrow +\infty$, alors $\|u\| \rightarrow +\infty$.

cas1 : Supposons que f soit borné. Alors il y a $N > 0$ tel que :

$$f(t, u(t), u'(t), \dots, u^{(m)}(t)) \leq N.$$

pour tout :

$$(t, u(t), u'(t), \dots, u^{(m)}(t)) \in [0, 1] \times [0, +\infty)^{m+1}.$$

Choisir :

$$\rho_4 := \max \left\{ \rho_3 + 1, N \int_0^1 \phi_i(s)g(s)ds : i = 0, 1, \dots, m \right\}.$$

et prenons $u \in K$ avec $\|u\| = \rho_4$. puis :

$$\begin{aligned} Tu(t) &= \int_0^1 k(t, s)g(s)f(s, u(s), u'(s), \dots, u^{(m)}(s)) \\ &\leq N \int_0^1 \phi_0(s)g(s)ds \leq \rho_4, \text{ pour } t \in [0, 1] \end{aligned}$$

Et pour $i = 1, \dots, m$,

$$\begin{aligned} (Tu(t))^{(i)} &= \int_0^1 \frac{\partial^i k}{\partial t^i}(t, s)g(s)f(s, u(s), u'(s), \dots, u^{(m)}(s)) ds \\ &\leq N \int_0^1 \phi_i(s)g(s)ds \leq \rho_4, \text{ pour } t \in [0, 1] \end{aligned}$$

Ainsi, $\|Tu\| \leq \|u\|$.

cas2 : Supposons que f est illimité.

D'après (3.9), il existe $\mu > 0$ tel que

$$\max \left\{ \mu \int_0^1 \phi_i(s)g(s)ds : i = 0, 1, \dots, m \right\} \leq 1. \quad (3.16)$$

et

$$f(t, u(t), u'(t), \dots, u^{(m)}(t)) \leq \mu\|u\| \quad (3.17)$$

pour $|u^{(i_0)}(t)| \geq M$. Supposons, sans perte de généralité, que les autres arguments de f sont bornés, i.e qu'il existe $\theta_j > 0$ tel que $\|u^{(j)}\| < \theta_j$, pour $j = 0, 1, \dots, m$, et $j \neq i_0$.

Définir :

$$\rho_4 := \max \{M, \theta_j, \rho_3 + 1 : j = 0, 1, \dots, m, j \neq i_0\}$$

réglage :

$$\begin{aligned} p(r) &:= \max \{f(t, u(t), u'(t) \dots u^{(m)}(t)) : t \in [0, 1] \\ &\quad |u^{(i)}(t)| \leq r, i = 0, 1, \dots, m\}. \end{aligned}$$

On a :

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} p(r) = +\infty.$$

Par conséquent, $p(\rho_4) \geq p(r)$, $0 \leq r \leq \rho_4$.

Puis, par (3.17) :

$$f(t, u(t), u'(t), \dots, u^{(m)}(t)) \leq \mu \|u\| \leq \mu \rho_4. \quad (3.18)$$

et $p(\rho_4) \leq \mu \rho_4$. Donc :

$$\begin{aligned} Tu(t) &= \int_0^1 k(t, s)g(s)f(s, u(s), u'(s), \dots, u^{(m)}(s)) ds \\ &\leq \int_0^1 \phi_0(s)g(s)p(\rho_4) ds \\ &\leq p(\rho_4) \int_0^1 \phi_0(s)g(s)ds \leq \mu \rho_4 \int_0^1 \phi_0(s)g(s)ds \leq \rho_4. \end{aligned}$$

et pour $i = 0, 1, \dots, m$,

$$\begin{aligned} (Tu(t))^{(i)} &= \int_0^1 \frac{\partial^i k}{\partial t^i}(t, s)g(s)f(s, u(s), u'(s), \dots, u^{(m)}(s)) ds \\ &\leq \int_0^1 \phi_i(s)g(s)p(\rho_4) ds \leq p(\rho_4) \int_0^1 \phi_i(s)g(s)ds \\ &\leq \mu \rho_4 \int_0^1 \phi_i(s)g(s)ds \leq \rho_4. \end{aligned}$$

D'après le théorème 1.7.2, l'opérateur T a un point fixe dans $K \cap (\overline{\Omega_4} \setminus \Omega_3)$ qui sera une solution positive du problème (3.1).

Applications aux problèmes à valeurs aux limites du troisième ordre

4.1 Problème aux limites dont la non linéarité dépend de la première dérivée de la fonction inconnue

Considérons le problème à valeur aux limites du troisième ordre à trois points comportant l'équation différentielle dont le terme non linéaire dépend de la première dérivée de la fonction inconnue :

$$-u'''(t) = g(t)f(t, u(t), u'(t)). \quad (4.1)$$

avec les conditions aux limites suivantes :

$$u(0) = u'(0) = 0, u'(1) = \alpha u'(\eta). \quad (4.2)$$

où $f : [0, 1] \times [0, +\infty)^2 \rightarrow [0, +\infty)$ est une fonction L^∞ -carathéodory non négative, $g \in L^1[0, 1]$ est une fonction positive p.p $t \in [0, 1]$, $0 < \eta < 1$, et le paramètre α satisfait $1 < \alpha < \frac{1}{\eta}$. Par des arguments de calcul standard, le problème (4.1), (4.2) peut-être écrit comme l'équation intégrale :

$$u(t) = \int_0^1 G(t, s)f(s, u(s), u'(s)) ds. \quad (4.3)$$

Lemme 4.1.1. Soit $\alpha\eta \neq 1$. Pour tout $y \in C[0; 1]$, le problème aux limites :

$$\begin{cases} -u'''(t) = y(t) \\ u(0) = u'(0) = 0 \\ u'(1) = \alpha u'(\eta) \end{cases}$$

admet l'unique $u(t) = \int_0^1 G(t, s)y(s)ds$,

où $G(t, s)$ est la fonction de Green associée au problème (4.1), (4.2) et est donnée par :

$$G(t, s) = \frac{1}{2(1 - \alpha\eta)} \begin{cases} (2ts - s^2)(1 - \alpha\eta) + t^2s(\alpha - 1), & s \leq \min\{\eta, t\}, \\ t^2(1 - \alpha\eta) + t^2s(\alpha - 1), & t \leq s \leq \eta, \\ (2ts - s^2)(1 - \alpha\eta) + t^2(\alpha\eta - s), & \eta \leq s \leq t, \\ t^2(1 - s), & \max\{\eta, t\} \leq s. \end{cases} \quad (4.4)$$

Démonstration 4.1.1. Par intégration trois fois de 0 à t , on obtient de l'équation $-u'''(t) = y(t)$, on a :

$$\begin{aligned} u''(t) &= a - \int_0^t y(s) ds \\ u'(t) &= at + b - \int_0^t (t-s)y(s) ds \\ u(t) &= \frac{1}{2}at^2 + bt + c - \frac{1}{2} \int_0^t (t-s)^2 y(s) ds. \end{aligned}$$

où a, b et c sont des constantes réelles à déterminer.

D'après la condition au bord $u(0) = u'(0) = 0$, on trouve $b = c = 0$ et selon la condition $u'(1) = \alpha u'(\eta)$, on a :

$$a - \int_0^1 (1-s)y(s) ds = \alpha \left(a\eta - \int_0^\eta (\eta-s)y(s) ds \right).$$

alors :

$$a = \frac{1}{1-\alpha\eta} \left[\int_0^1 (1-s)y(s) ds - \int_0^\eta \alpha(\eta-s)y(s) ds \right].$$

en substituant a dans l'expression de $u(t)$ on obtient :

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{1}{2(1-\alpha\eta)} \left[\int_0^1 t^2(1-s)y(s) ds - \int_0^\eta \alpha t^2(\eta-s)y(s) ds \right] - \frac{1}{2} \int_0^t (t-s)^2 y(s) ds \\ &= \frac{1}{2(1-\alpha\eta)} \left[\int_0^1 t^2(1-s)y(s) ds - \int_0^\eta \alpha t^2(\eta-s)y(s) ds - \int_0^t (1-\alpha\eta)(t-s)^2 y(s) ds \right] \\ &= \frac{1}{2(1-\alpha\eta)} \int_0^1 G(t,s)y(s) ds, \end{aligned}$$

où :

$$G(t,s) = \frac{1}{2(1-\alpha\eta)} \begin{cases} (2ts - s^2)(1-\alpha\eta) + t^2s(\alpha-1), & s \leq \min\{\eta, t\}, \\ t^2(1-\alpha\eta) + t^2s(\alpha-1), & t \leq s \leq \eta, \\ (2ts - s^2)(1-\alpha\eta) + t^2(\alpha\eta-s), & \eta \leq s \leq t, \\ t^2(1-s), & \max\{\eta, t\} \leq s. \end{cases}$$

Par des simples simplifications, on aboutit au résultat.

Les lemmes suivants donnent quelques propriétés des fonctions du noyau (4.4).

Lemme 4.1.2. [16]. soit $0 < \eta < 1$ et $1 < \alpha < \frac{1}{\eta}$. Alors pour tout $(t,s) \in [0,1] \times [0,1]$, on a :

$$0 \leq G(t,s) \leq \phi_0(s),$$

où :

$$\phi_0(s) = \frac{1+\alpha}{1-\alpha\eta} s(1-s). \quad (4.5)$$

Démonstration 4.1.2. Premièrement, nous montrerons que $G(t,s) \geq 0$ pour toute $(t,s) \in [0,1] \times [0,1]$. Comme c'est évident dans d'autres cas, il suffit de prouver le cas

$\eta \leq s \leq t$. Maintenant nous supposons que $\eta \leq s \leq t$. Puis :

$$\begin{aligned} G(t, s) &= \frac{1}{2(1 - \alpha\eta)} [(2ts - s^2)(1 - \alpha\eta) + t^2(\alpha\eta - s)] \\ &= \frac{1}{2(1 - \alpha\eta)} [(t^2 - 2ts + s^2)\alpha\eta + s(2t - t^2 - s)] \\ &= \frac{1}{2(1 - \alpha\eta)} \{(t - s)^2\alpha\eta + s[(t - t^2) + (t - s)]\} \geq 0. \end{aligned}$$

Ensuite, nous prouverons que $G(t, s) \leq \phi_0(s)$ pour toute $(t, s) \in [0, 1] \times [0, 1]$.

En fait, pour tout fixe $s \in [0, 1]$, il est facile de voir que :

$$G_t(t, s) = \frac{1}{1 - \alpha\eta} \begin{cases} s(1 - \alpha\eta) + ts(\alpha - 1), & s \leq \min\{\eta, t\}, \\ t(1 - \alpha\eta) + ts(\alpha - 1), & t \leq s \leq \eta, \\ s(1 - \alpha\eta) + t(\alpha\eta - s), & \eta \leq s \leq t, \\ t(1 - s), & \max\{\eta, t\} \leq s. \end{cases}$$

Si $s \leq \min\{\eta, t\}$, alors :

$$\begin{aligned} G_t(t, s) &= \frac{1}{1 - \alpha\eta} [s(1 - \alpha\eta) + ts(\alpha - 1)] \leq \frac{1}{1 - \alpha\eta} \alpha s(1 - \eta) \\ &\leq \frac{1}{1 - \alpha\eta} \alpha s(1 - s) \leq \phi_0(s). \end{aligned}$$

Si $t \leq s \leq \eta$, alors :

$$\begin{aligned} G_t(t, s) &= \frac{1}{1 - \alpha\eta} [t(1 - \alpha\eta) + ts(\alpha - 1)] \leq \frac{1}{1 - \alpha\eta} \alpha s(1 - \eta) \\ &\leq \frac{1}{1 - \alpha\eta} \alpha s(1 - s) \leq \phi_0(s). \end{aligned}$$

Si $\eta \leq s \leq t$, alors :

$$\begin{aligned} G_t(t, s) &= \frac{1}{1 - \alpha\eta} [s(1 - \alpha\eta) + t(\alpha\eta - s)] = \frac{1}{1 - \alpha\eta} [s(1 - t) + \alpha\eta(t - s)] \\ &\leq \frac{1}{1 - \alpha\eta} [s(1 - s) + \alpha s(1 - s)] = \phi_0(s). \end{aligned}$$

Si $\max\{\eta, t\} \leq s$, alors :

$$G_t(t, s) = \frac{1}{1 - \alpha\eta} t(1 - s) \leq \frac{1 + \alpha}{1 - \alpha\eta} s(1 - s) = \phi_0(s).$$

Par conséquent,

$$G_t(t, s) \leq \phi_0(s), \quad (t, s) \in [0, 1] \times [0, 1].$$

Alors pour tout $(t, s) \in [0, 1] \times [0, 1]$, on a :

$$G(t, s) = \int_0^t G_\tau(\tau, s) d\tau \leq \int_0^t \phi_0(s) d\tau = t\phi_0(s) \leq \phi_0(s).$$

Lemme 4.1.3. [16] . soit $0 < \eta < 1$ et $1 < \alpha < \frac{1}{\eta}$. Alors pour tout $(t, s) \in [\frac{\eta}{\alpha}, \eta] \times [0, 1]$, la fonction de Green $G(t, s)$ satisfait $G(t, s) \geq c_0 \phi_0(s)$, où :

$$0 < c_0 := \frac{\eta^2}{2\alpha^2(1+\alpha)} \min\{\alpha - 1, 1\} < 1. \quad (4.6)$$

Démonstration 4.1.3. Si $s = 0$ ou $s = 1$, puis par Lemme 4.1.2, le résultat suit. Maintenant nous supposons que $(t, s) \in [\frac{\eta}{\alpha}, \eta] \times (0, 1)$. Alors :

$$\frac{G(t, s)}{\phi_0(s)} = \begin{cases} \frac{(2ts - s^2)(1 - \alpha\eta) + t^2s(\alpha - 1)}{2(1 + \alpha)s(1 - s)} \geq \frac{t^2(\alpha - 1)}{2(1 + \alpha)(1 - s)} \geq \frac{t^2(\alpha - 1)}{2(1 + \alpha)} \geq \frac{\eta^2(\alpha - 1)}{2\alpha^2(1 + \alpha)} \geq c_0, \\ s \leq t \leq \eta, \\ \frac{t^2(1 - \alpha\eta) + t^2s(\alpha - 1)}{2(1 + \alpha)s(1 - s)} \geq \frac{t^2(\alpha - 1)}{2(1 + \alpha)(1 - s)} \geq \frac{t^2(\alpha - 1)}{2(1 + \alpha)} \geq \frac{\eta^2(\alpha - 1)}{2\alpha^2(1 + \alpha)} \geq c_0, & t \leq s \leq \eta, \\ \frac{t^2(1 - s)}{2(1 + \alpha)s(1 - s)} = \frac{t^2}{2(1 + \alpha)s} \geq \frac{t^2}{2(1 + \alpha)} \geq \frac{\eta^2}{2\alpha^2(1 + \alpha)} \geq c_0, & t \leq \eta \leq s \end{cases}$$

i.e $G(t, s) \geq c_0 \phi_0(s)$.

- La première dérivée de la fonction de Green est donnée par :

$$\frac{\partial G}{\partial t}(t, s) = \frac{1}{(1 - \alpha\eta)} \begin{cases} s(1 - \alpha\eta) + ts(\alpha - 1), & s \leq \min\{\eta, t\}, \\ t(1 - \alpha\eta) + ts(\alpha - 1), & t \leq s \leq \eta, \\ s(1 - \alpha\eta) + t(\alpha\eta - s), & \eta \leq s \leq t, \\ t(1 - s), & \max\{\eta, t\} \leq s. \end{cases}$$

et satisfait les lemmes suivants :

Lemme 4.1.4. [17] . Pour $0 < \eta < 1, 1 < \alpha < \frac{1}{\eta}$, et tout $(t, s) \in [0, 1] \times [0, 1]$, on a :

$$0 \leq \frac{\partial G}{\partial t}(t, s) \leq \phi_1(s),$$

où :

$$\phi_1(s) = \frac{(1 - s)}{(1 - \alpha\eta)}. \quad (4.7)$$

Lemme 4.1.5. [17] Pour $0 < \eta < 1, 1 < \alpha < \frac{1}{\eta}$, et tout $(t, s) \in [\frac{\eta}{\alpha}, \eta] \times [0, 1]$, la dérivée de la fonction de Green $\frac{\partial G}{\partial t}(t, s)$ satisfait :

$$\frac{\partial G}{\partial t}(t, s) \geq c_1 \phi_1(s),$$

avec

$$0 < c_1 := \min\{\alpha\eta, \eta\} < 1. \quad (4.8)$$

D'après le réglage fonctionnel ci-dessus, il est clair que (4.3) est un cas particulier de (3.1) avec $m = 1$.

De plus ; les hypothèses (H1) et (H2) sont satisfaites avec $k(t, s) = G(t, s)$, ϕ_0 et ϕ_1 donnés

respectivement par (4.5) et (4.7), c_0 et c_1 donnés par (4.6) et (4.8), et $[a_0, b_0] = [a_1, b_1] = [\frac{\eta}{\alpha}, \eta]$; (H3) continu, et par les lemmes 4.1.2 et 4.1.4,

$$g(t) \frac{1+\alpha}{1-\alpha\eta} t(1-t), g(t) \frac{(1-t)}{(1-\alpha\eta)} \in L^1[0, 1].$$

et

$$\int_{\frac{\eta}{\alpha}}^{\eta} \frac{1+\alpha}{1-\alpha\eta} s(1-s)g(s)ds > 0, \quad \int_{\frac{\eta}{\alpha}}^{\eta} \frac{(1-s)}{(1-\alpha\eta)} g(s)ds > 0.$$

Par conséquent, si (H5) ou (H6) est vrai, alors l'équation intégrale (4.3) a une solution $u(t) \in C^m[0, 1]$ qui est une solution du problème (4.1), (4.2). De plus, à partir du lemme 4.1.2, cette solution est positive, et elle est croissante par le lemme 4.1.4.

4.2 Exemple

[11] Comme exemple concret, considérons le problème de la valeur limite non linéaire du troisième ordre

$$\begin{cases} -u'''(t) = (t^2 + 1) \left(e^{-(u(t))^2} + \sqrt[3]{|u'(t)|} \right), \\ u(0) = u'(0) = 0, u'(1) = 2u'(\frac{1}{3}). \end{cases} \quad (4.9)$$

Ce problème est un cas particulier du système (4.1) avec $f(t, x, y) = e^{-x^2} + \sqrt[3]{|y|}$, $g(t) = t^2 + 1$, $\eta = \frac{1}{3}$, et $\alpha = 2$.

La fonction de Green pour le problème linéaire homogène associé à (4.9) est

$$G(t, s) = \frac{1}{2} \begin{cases} 2ts - s^2 + 3t^2s, & s \leq \min \left\{ \frac{1}{3}, t \right\} \\ t^2 + 3t^2s, & t \leq s \leq \frac{1}{3}, \\ 2ts - s^2 + t^2(2 - 3s), & \frac{1}{3} \leq s \leq t, \\ 3t^2(1 - s) & \max \left\{ \frac{1}{3}, t \right\} \leq s, \end{cases} \quad (4.10)$$

Et pour tout $(t, s) \in [0, 1] \times [0, 1]$, on a $0 \leq G(t, s) \leq \phi_0(s)$, où :

$$\phi_0(s) = 9s(1 - s).$$

Et pour $(t, s) \in [\frac{1}{6}, \frac{1}{3}] \times [0, 1]$, on a $G(t, s) \geq c_0 \phi_0(s)$, où : $c_0 = \frac{1}{216}$. La première dérivée de la fonction de Green est donnée par :

$$\frac{\partial G}{\partial t}(t, s) = \begin{cases} s + 3ts, & s \leq \min \left\{ \frac{1}{3}, t \right\}, \\ t + 3ts, & t \leq s \leq \frac{1}{3}, \\ s + t(2 - 3s), & \frac{1}{3} \leq s \leq t, \\ 3t(1 - s), & \max \left\{ \frac{1}{3}, t \right\} \leq s. \end{cases}$$

Et pour $(t, s) \in [0, 1] \times [0, 1]$, on a : $0 \leq \frac{\partial G}{\partial t}(t, s) \leq \phi_1(s)$, où :

$$\phi_1(s) = 3(1 - s).$$

Pour $(t, s) \in [\frac{1}{6}, \frac{1}{3}] \times [0, 1]$, la dérivée de la fonction de Green vérifie $\frac{\partial G}{\partial t}(t, s) \geq c_1 \phi_1(s)$, avec : $c_1 = \frac{1}{3}$.

On peut facilement vérifier que les fonctions ci-dessus satisfont (H1)-(H2) avec $[a_0, b_0] = [a_1, b_1] = [\frac{1}{6}, \frac{1}{3}]$, et (H3) – (H4) avec $\varphi_r(t) = 6tr^2$.

Enfin, (H6) est continue depuis :

$$\liminf_{t \in [0, 1], \|u\| \rightarrow 0} \frac{e^{-(u(t))^2} + \sqrt[3]{|u'(t)|}}{\|u\|} = +\infty.$$

et

$$\limsup_{t \in [0, 1], \|u\| \rightarrow +\infty} \frac{e^{-(u(t))^2} + \sqrt[3]{|u'(t)|}}{\|u\|} = 0.$$

Par conséquent, selon le théorème (3.6), il existe une solution de (4.1), i.e qu'il existe une solution positive et croissante du problème (4.9).

Conclusion

A travers ce travail, nous avons prouvé l'existence de solutions d'une classe d'équations intégrales non linéaires de type Hammerstein généralisés :

$$u(t) = \int_0^1 k(t, s)g(s)f(s, u(s), u'(s), \dots, u^{(m)}(s)) ds,$$

en suivant les étapes suivantes :

- 1- Mettre cette équation sous la forme d'un problème de point fixe pour un opérateur non linéaire T .
- 2- Définir un cadre fonctionnel et un cône K bien choisi.
- 3- Sous des conditions convenables sur la fonction noyau et ces dérivées partielles ainsi que la nonlinéarité $f(s, u(s), u'(s), \dots, u^{(m)}(s))$; on a démontré que l'opérateur T est compact et que $T(K) \subset K$.
- 4- Définir deux ouverts bornés Ω_1, Ω_2 et démontrer que sous des conditions de sous et superlinéarité, toutes les conditions du théorème de point fixe de Guo-Krasnosel'skii sont satisfaites et par suites notre équation intégrales admet au moins une solution positive (dans K).

Ce résultat d'existence est important car d'une part, il généralise plusieurs travaux déjà faits, et d'une autre part il représente un outil efficace dans l'étude des problèmes aux limites.

Nous proposons aussi et ce sera notre futur travail, de suivre la même méthode décrite ci-dessus pour étudier des autres genres d'équation intégrales soit en affaiblissant les conditions exigées où appliquer le résultat obtenu dans l'étude des autres problèmes où même essayer de trouver des conditions d'unicité.

Bibliographie

- [1] Agarwal.R.P., O'Regan.D., Wong.P.J.Y. : Constant-sign Solutions of Systems of Integral Equations. Springer, Cham (2013).
- [2] Amann.H. : Existence theorems for equations of Hammerstein type. Appl. Anal. 1, 385 – 397 (1972).
- [3] Amaury.L. : Théorie de la Mesure et Intégration, Université Pierre et Marie Curie (Paris 6), Licence de Mathématiques L3, 2011.
- [4] Aziz.W., Leiva.H., Merentes.N. : Solutions of Hammerstein equations in the space $BV(I_a^b)$. Quaest. Math. 37(3), 359 – 370(2014).
- [5] Bellour.A. : On the existence of bounded Continuous solution of Hammerstein Integral equation, MATEMATIQKI VESNIK, 63, 2(2011), 127 – 132.
- [6] Benmezai.A., Graef.J.R., Kong.L. : Positive solutions for abstract Hammerstein equations and applications. Commun. Math. Anal. 16, 47 – 65(2014).
- [7] Brezis.H., Browder.F. : Existence theorems for nonlinear integral equations of Hammerstein type. Bull. AMS 81, 73–78 (1975).
- [8] Cheng.X., Zhang.Z. : Existence of positive solutions to systems of nonlinear integral or differential equations. Topol. Methods Nonlinear Anal. 34, 267 – 277 (2009).
- [9] Chidume.C.E., Shehu.Y. : Iterative approximation of solutions of generalized equations of Hammerstein type. Fixed Point Theory 15, 427 – 440(2014).
- [10] Franc.D., Infante.G., O'Regan.D. : Nontrivial solutions in abstract cones for Hammerstein integral systems. Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst. Ser. A Math. Anal. 14, 837-850 (2007).
- [11] Graef.J., Kong.L., Minho's.F. : Generalized Hammerstein Equations and Applications ; Results. Math, 2016 Springer International Publishing, DOI 10.1007/s00025-016-0615-y.
- [12] Guo.D., Lakshmikantham.V. : Nonlinear Problems in Abstract Cones, Academic Press, Boston (1988).
- [13] Hammerstein. A. : Nichtlineare Integralgleichungen nebst Anwendungen. Acta Math. 54, 117-176 (1930).
- [14] Kolmogorov.A., Fomine.S. : Elements de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle, Mir. 1977.

- [15] Krasnoselskii.M.A., Zabreiko.P.P. : Geometrical methods of nonlinear Analysis. Springer-Verlag New York 1984.
- [16] Li-Jun.G., Jian-Ping.S., Ya-Hong.Z. : Existence of positive solutions for nonlinear third-order three-point boundary value problems. *Nonlinear Anal.* **68**, 3151–3158(2008).
- [17] Minho's.F.R. de Sousa : On the solvability of third-order three point systems of differential equations with dependence on the first derivative, *Bull Braz Math Soc, New Series*, DOI 10.1007/s00574-016-0025-5.
- [18] Nawfal.EH.H. : Topologie générale et espace norme, Dunod, 2011.

Résumé

Notre but dans ce mémoire, est de prouver l'existence de solutions à une équation intégrale non linéaire généralisée où la non-linéarité dépend des dérivées jusqu'à l'ordre m de la fonction inconnue et ayant des fonctions noyaux discontinus qui ont des discontinuités dans les dérivés partielles par rapport à leur première variable.

Notre approche est basée sur le théorème de compression/expansion de Guo-Krasnosel'skii sur les cônes et il peut être appliqué à des problèmes aux limites d'ordre arbitraire $n \geq m$.

mots clés : Équation intégrale de Hammerstein, Théorème de Guo-Krasnosel'skii, Problèmes aux limites, Noyaux discontinus, Cône d'un espace de Banach.

الملخص

الهدف من هذه المذكرة هو إثبات وجود الحلول لمعادلة تكاملية غير خطية معممة حيث الجزء غير الخطي فيها يتعلق بالمشتقات الى غاية الرتبة m للدالة المجهولة كما أن الدالة النواة ومشتقاتها الجزئية متقطعة غير مستمرة بالنسبة للمتغير الأول. المقاربة المنتهجة في الحل تتمثل في استعمال نظرية النقطة الصامدة لـ قيو- كرازنوزيلسكي على مخروط. وتطبيق نتيجة الوجود المستخلصة في حل مسائل حدية من الرتبة $n \geq m$.

الكلمات المفتاحية : المعادلة التكاملية لهامرستان، نظرية قيو- كرازنوزيلسكي، مسائل حدية، النواة غير المستمرة، مخروط في فضاء باناخ.

Abstract

Our goal, in this memory is to prove the existence of solutions to a generalised nonlinear integral equation where the nonlinearity depends on the derivatives up to order m of the unknown function and having discontinuous kernels functions that have discontinuities in the partial derivatives with respect to their first variable.

Our approach is based on the Guo-Krasnosel'skii compression/expansion theorem on cones and it can be applied to boundary value problems of arbitrary order $n \geq m$.

keywords : Hammerstein integral equation, Guo-Krasnosel'skii theorem, Boundary value problems, Discontinuous kernels, Cone in Banach space.