الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة الشهيد حمه لخضر الوادي

كلية العلوم والتكنولوجيا

قسم رياضيات وإعلام آلي

مذكرة تخرج لنيل شهادة

ليسانس أكاديمي

الميدان: رياضيات وإعلام آلي

شعبة: رياضيات

التخصص: نمذجة رياضية ومحاكاة عددية

الموضوع

حل المعادلات التفاضلية الخطية المتجانسة من الدرجة الأولى والرتبة الثانية حول النقطة الشاذة بطريقة فروبينيس.

من إعداد الطلبة:

* رحال يونس.
* صوالح محمد اسماعيل.
* لبيهي جعفر.

الأستاذ المؤطر:

* ذويب بشير.

الموسم الجامعي: 2014-2015

كلمة شكر

كل شكر يكون لله وكل جهد بعون الله فهو من يسر لنا دروب العلم وأنعم علينا بالإرادة وأنار لنا الطريق في إنجاز هذا العمل الذي من خلاله نتقدم بجزيل الشكر والعرفان إلى الأستاذ المشرف بشير ذويب الذي رافقنا طيلة إعداد هذا العمل بنصائحه القيمة وتوجيهاته السديدة فجزاه الله عنا خير الجزاء .

كما لا يفوتنا أن نشكر أساتذتنا في قسم الرياضيات الذين سهروا على تكويننا وتعليمنا حتى يقدموا لنا مشعل المهنة النبيلة كما نشكر أعضاء لجنة المناقشة.

وفي الأخير إلى كل من قدم لنا يد العون والمساعدة من قريب أو بعيد لهم جزيل الشكر والعرفان.

Dé
di

الإهداء

إليك والدي الحبيب ...لقد كنت نعم الأب ومازلت...

أسأل الله أن يحفظك وأن يبارك لنا في عمرك...

إليك أمي الغالية ... يا من ضحيت من أجلي في كل شيء ...

جازاك الله عني خير الجزاء.

إلى كل إخوتي وأخواتي الأعزاء.

إلى عائلتي كبيرهم وصغيرهم.

إلى كل من نساه قلمي ولم ينساه قلبي.

الإهداء

الحمد لله الذي أنار لي دربي ويسر لي أمري لإنهاء عملي، أهدي ثمرة جهدي إلى من قال الله تعالى فيهما:

"...واعْبُدُوا الله ولا تُشْرِكُوا بِهِ شَيْئًا وَبِالوَالِدَيْنِ إِحْسَانًا..."

إلى ينبوع العطاء والحنان أمي الغالية أطال الله في عمرها

واليك والدي العزيز لقد كنت نعم الأب ومازلت أسأل الله ان يحفظك وأن يبارك لنا في عمرك.

وأهدي عملي هذا إلي إخوتي وأخواتي

وكل الأهل والأقارب والجيران وأخص بالذكر:

أخوالي وخالاتي

الى كل زملائي وزميلاتي بالجامعة إلى أصحابي وإلى كل أساتذتي الفضلاء وكل من يسهر على خدمة العلم وإلى الزملاء دفعة 2015 وخاصة دفعة الرياضيات.

الى كل من نساه قلمي و لم ينساه قلبي.

الإهداء

أهدي هذا العمل إلى:

من قال عنهما جلّ وعلا "وقل ربّي ارحمهما كما ربّياني صغيرا""

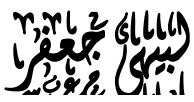
مبعث فخري وقدوتي عرفانا بحبها العظيم أمي، وإلى مصدر

عزتي وروّاد دري أبي وإلى قرّة عيني ومبعث فرحي وسروري إخوتي

وأخواتي وإلى كلّ الأهل والأقارب والأحبّاء وإلى زملاء وطلبة

قسم السّنة الثالثة رياضيات دفعة 2015.

والى الذين لم أذكرهم في مذكرتنا ولكنهم موجودون في ذاكرتي



الفهرس

الفهـــرس:

المقدمـة:.....1

1. المعـادلات التفاضليـة الخطيـة المتجانسـة مـن الدرجـة الأولـى والـرتبـة الثـانية.....2

مقدمـة.....2

1.1.عموميات حول المعادلات التفاضلية.....2

1.1.1. تعريف المعادلة التفاضلية.....2

2.1.1. تصنيف المعادلات التفاضليـة.....2

2.1. الحلول العامـة للمعادلات التفاضلية الخطية من الدرجة الأولى والرتبة الثانية.....3

3.1.حـل المعادلات التفاضلية الخطيـة المتجانسـة من الدرجـة الأولـى والرتبـة الثانيـة ذات المعامـلات الثابتــة.....8

1.3.1. حالـة الجذران حقيقيان ومختلفان.....9

2.3.1. حالة الجذر مكرر.....9

2.3.1. حالة الجذران مركبان.....11

2. السلاسـل الصحيحـة.....12

مقدمـة.....12

1.2. سلاسل التوابـع.....12

1.1.2. التقارب البسيط لسلاسل التوابع.....12

2.1.2. التقـارب المطلق لسلاسل التوابع.....13

3.1.2. التقارب بانتظام لسلاسـل التوابع.....14

4.1.2. التقارب النظيمي لسلاسـل التوابع.....14

5.1.2. خواص مجاميع السلاسل.....14

2.2. السلاسل الصحيحــة.....16

1.1.2. دراسـة طبيعة السلاسـل

الصحيحـة.....16

2.2.2. نصف قطر ومجال تقارب سلسلة صحيحة.....17
3.2.2. الطرق العملية لحساب نصف قطر التقارب.....18
4.2.2. دراسة السلاسل الصحيحة الحقيقية من الشكل $\sum_n a_n(x-x_0)^n$.....19
5.2.2. الخواص التحليلية لسلاسل الصحيحة.....19
6.2.2. العمليات الجبرية على السلاسل الصحيحة.....20
7.2.2. قابلية النشر إلى سلسلة صحيحة.....21
8.2.2. نشر بعض التوابع المألوفة.....22
9.2.2. المدوال التحليلية.....23
3. حل المعادلات التفاضلية الخطية المتجانسة من الدرجة الأولى والرتبة الثانية حول النقطة الشاذة بطريقة فروبينيس.....24
مقدمة.....24
1.3. حل المعادلات التفاضلية الخطية المتجانسة من الدرجة الأولى والرتبة الثانية باستعمال السلاسل الصحيحة حول النقطة العادية.....24
2.3. طريقة فروبينيس.....26
1.2.3. حالة النقطة الشاذة المنتظمة.....26
2.2.3. حالة النقطة الشاذة غير المنتظمة.....33

المقدمة

المقدمـة:

من أهم فروع الرياضيات قديما وحديثا هو فرع المعادلات التفاضلية التي تعتبر عصب جل العلوم النشطة إذ لم نقل كلها، حيث نجد العديد من المسائل في مجال الهندسة والعلوم الفيزيائية والعلوم الاجتماعية تصاغ رياضيا على شكل معادلات تفاضلية، لمعرفة طرق إيجاد حلول هذه المعادلات وجب علينا تصنيفها إلى عادية وخطية من جهة، وذات متغير واحد وذات متغيرين أو أكثر من جهة أخرى وتجدر الإشارة إلى أن مذكرتنا هذه تهتم بالطرق التحليلية لحل المعادلات التفاضلية لذلك نركز في دراستنا على باب الحل التحليلي وهو حل المعادلات باستعمال السلاسل وخصوصا عند النقط الشاذة أي طريقة فروبينيس.

في الفصل الأول نتعرض باختصار إلى مفهوم المعادلات التفاضلية العادية ومعنى حل المعادلة التفاضلية بالإضافة إلى الشروط الابتدائية لوجود الحل، ثم إلى طريقة الحل وذلك بالنسبة إلى المعادلات ذات الدرجة الأولى والرتبة الثانية المتجانسة ومسألة الوجود والوحدانية، ونتطرق أيضا إلى ما يسمى بتخفيض الرتبة.

في الفصل الثاني من هذه المذكرة نتناول فصل السلاسل التوابع والسلاسل الصحيحة والتي نحتاجها في الفصل الثالث، وسنعرج على محور سلاسل التوابع بما فيه من تقاربات بسيطة ومطلقة ومنتظمة ونظيمية وسنتطرق بعد ذلك إلى نظريات قابلية الاشتقاق فالمكاملة لسلاسل التوابع، ثم نتطرق إلى محور السلاسل الصحيحة وستناول كيفية حساب نصف قطر تقارب سلسة صحيحة باستخدام كل من علاقة أدامار فمقياس كوشي ودالمبير، وبعد ذلك سنتعرض إلى الخواص التحليلية لسلاسل الصحيحة من (قابلية الاشتقاق والمكاملة) وإلى العمليات الجبرية على السلاسل من جداء وجمع، ثم نعرج إلى قابلية النشر إلى سلسلة صحيحة وفي آخر الفصل سوف نعطي تعريفا للدوال التحليلية.

في الفصل الثالث ندرس حل المعادلة التفاضلية الخطية من الدرجة الأولى والرتبة الثانية حول النقطة العادية ونركز أكثر على النقطة الشاذة للمعادلة التفاضلية الخطية من الدرجة الأولى والرتبة الثانية بعدها نبين نظرية وجود هذا الحل على شكل سلسلة فروبينيس، نلجأ إلى النظرية التي نقوم من خلالها على التعرف على شكل هذا الحل.

الفصل الأول : المعادلات التفاضلية الخطية المتجانسة من الدرجة الأولى والرتبة الثانية

1. المعادلات التفاضلية الخطية المتجانسة من الدرجة الأولى والرتبة الثانية:

مقدمة:

سنتطرق في هذا الفصل بعض إلى المفاهيم الأساسية للمعادلات التفاضلية العادية وسنعرج إلى مفهوم "الرونسكي"وكيف تكون الحلول أساسية للمعادلة التفاضلية، ونتطرق إلى حل المعادلة التفاضلية المتجانسة من الدرجة الأولى والرتبة الثانية ذات المعاملات الثابتة وكيفية تخفيض رتبتها.

1.1. عموميات حول المعادلات التفاضلية:

1.1.1. تعريف المعادلة التفاضلية:

المعادلة التفاضلية هي كل معادلة تشمل تابع مجهول ومشتقاته، وتسمى معادلة تفاضلية اعتيادية إذا كان المجهول تابع لمتغير واحد، أما إذا كان التابع المجهول متعدد المتغيرات فتسمى معادلة تفاضلية جزئية.

2.1.1. تصنيف المعادلات التفاضلية:

تصنف المعادلات التفاضلية على عدة اعتبارات وهي:

أ- رتبة المعادلة التفاضلية:

وهي أعلى مشتقة في المعادلة مثلا : $y''+y'+y=0$ من الرتبة الثانية.

ب-درجة المعادلة التفاضلية:

وهي درجة (قوة) أعلى مشتقة في المعادلة التفاضلية، مثلا $y''+y=0$ من الدرجة الأولى.

ت- الخطية [7]

نسمي معادلة تفاضلية خطية من الرتبة n كل معادلة من الشكل:

$$a_n(x)\frac{d^n y}{d^n x}+a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{d^{n-1}x}+\cdots+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=f(x) \qquad (1.1)$$

حيث $a_0,a_1,.....,a_n$، f توابع معرفة على المجال I، و $a_n \neq 0$ لكل x من I، وللمعادلة التفاضلية الخطية نوعان هما:

*** المعادلات التفاضلية الخطية المتجانسة:**

هي المعادلة (1.1) بحيث $f(x)=0$ لكل x من I.

*** المعادلات التفاضلية الخطية غير المتجانسة:**

وهي المعادلة (1.1) بحيث $f(x)\neq 0$.

2.1. الحلول العامة للمعادلات التفاضلية الخطية المتجانسة من الدرجة الأولى والرتبة الثانية:

تعريف 1.2.1

تعرف الصورة العامة للمعادلة التفاضلية من الدرجة الأولى والرتبة الثانية بصفة عامة التي تأخذ الشكل التالي:

$\forall x \in I,\ F(x,y,y',y'')=0$، حيث I هي فترة انتماء المتغير المستقل x.

تعريف 2.2.1

تعرف المعادلة التفاضلية الخطية غير المتجانسة من الرتبة الثانية والدرجة الأولى على أنها المعادلة التي تأخذ الشكل التالي:

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=G(x) \qquad (1.2)$$

حيث $P(x),Q(x),G(x)$ دوال مستمرة على I، وإذا كانت $G(x)=0$ فإن المعادلة (1.2) تكون معادلة خطية متجانسة من الدرجة الأولى والرتبة الثانية وتأخذ الشكل التالي:

$$L(y)=y''+P(x)y'+Q(x)y=0 \qquad (1.3)$$

تعريف 3.2.1

إذا كانت الدالة $y=f(x)$ تحقق المعادلة (1.2) على المجال I عندئذ نقول أن $y=f(x)$ هو حل لـ(1.2) على هذا المجال.

نظرية 1.2.1 (الوجود والوحدانية) [1]

لتكن المعادلة التفاضلية (1.2) ولنفرض أن الدوال $P(x), Q(x), G(x)$ مستمـرة على المجال I، إذا كان حـل المعادلــة (1.2) موجـود ويحقـق الشرطين الابتدائيــين $y(x_0)=\alpha, y'(x_0)=\beta$، حيث α,β عـددان حقيقيان، بينمـا $x_0 \in I$، إذا فإنه يوجد حل وحيد للمسألة التفاضلية المكونة من المعادلة التفاضلية (1.2) والشرطان الابتدائيان السابقين.

تعريف 4.2.1 [7]

ليكن y_1, y_2 حلين للمعادلة التفاضلية (1.3) نسمي المحدد: $W[y_1,y_2]=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$

بـ" رونسكي" الحلين y_1, y_2.

نظرية 2.2.1 [14]

إذا كانت المجموعة $E=\{y_1,y_2\}$ أساسا لفضاء حلول المعادلة (1.3)، فإن رونسكي الحلول هو:

$$W[y_1,y_2](x)=ce^{-\int P(x)dx}$$ ، حيث $c \neq 0$ ثابت.

البرهان: [5] .

الرونسكي يأخذ الشكل التالي: $W[y_1,y_2]=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$

باشتقاق $W[y_1,y_2]$ نجد:

$$\begin{aligned}\frac{dW(x)}{dx} &= y_1(x)y_2''(x)-y_1''(x)y_2(x)\\ &= y_1(x)\left[-P(x)y_2'(x)-Q(x)y_2(x)\right]-y_2(x)\left[-P(x)y_1'(x)-Q(x)y_1(x)\right]\\ &= -P(x)\left[y_1(x)y_2'(x)-y_2(x)y_1'(x)\right]\\ &= -P(x)W(x)\end{aligned}$$

وعليه فإن $\frac{dW}{W}=-P(x)dx$

وبحل هذه المعادلة التفاضلية نحصل على $W\left(x\right)=ce^{-\int P(x)dx}$

نظرية 3.2.1 [1]

إذا كان y_1,y_2 حلان للمعادلة (1.3) في المجال I، فإن $y=c_1y_1+c_2y_2$ هو أيضا حل للمعادلة (1.3).

البرهان:

بما أن $y_1(x),y_2(x)$ حلان للمعادلة (1.3) فهما يحققانها أي:

$L(y_1)=y_1"+P(x)y_1'+Q(x)y_1=0$ و $L(y_2)=y_2"+P(x)y_2'+Q(x)y_2=0$

لنحسب $L\left[c_1y_1(x)+c_2y_2(x)\right]$

$$L\left[c_1y_1(x)+c_2y_2(x)\right]=\left[c_1y_1(x)+c_2y_2(x)\right]"+P(x)\left[c_1y_1(x)+c_2y_2(x)\right]'+Q(x)\left[c_1y_1(x)+c_2y_2(x)\right]$$

$$L\left[c_1y_1(x)+c_2y_2(x)\right]=c_1\left[y_1"+P(x)y_1'+Q(x)y_1\right]+c_2\left[y_2"+P(x)y_2'+Q(x)y_2\right]$$

$$=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)=0$$

وعليه فإن: $y=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$ هو الآخر حل للمعادلة التفاضلية (1.3).

نظرية 4.2.1 [2]

إذا كانت الدالتان P,Q للمعادلة التفاضلية (1.3) مستمرتين حيث $\alpha<x<\beta$ وإذا كان $y_1(x),y_2(x)$ حلين للمعادلة التفاضلية (1.3)، وإذا كانت نقطة واحدة على الأقل من المجال $\alpha<x<\beta$ حيث $W(y_1,y_2)\neq0$ فإن $\{y_1,y_2\}$ هي أساس لحلول المعادلة (1.3).

البرهان:

نفرض أن y_1,y_2,y_3 حلول للمعادلة التفاضلية (1.3) و $W(y_1,y_2)\neq0$ على المجال $\alpha<x<\beta$ والمطلوب إثبات أن $y_3=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$.

بما أن y_1, y_2, y_3 حلول للمعادلة التفاضلية (1.3) فإن:

$$y_1'' + P(x)y_1' + Q(x)y_1 = 0 \qquad (1.4)$$

$$y_2'' + P(x)y_2' + Q(x)y_2 = 0 \qquad (1.5)$$

$$y_3'' + P(x)y_3' + Q(x)y_3 = 0 \qquad (1.6)$$

بضرب (1.4) في $(-y_2)$ و (1.5) في (y_1) والجمع نجد:

$$y_1y_2'' - y_2y_1'' + P(x)\left[y_1y_2' - y_2y_1'\right] = 0 \qquad (1.7)$$

بوضع $W_{12} = W(y_1, y_2) = y_1y_2' - y_2y_1'$

تصبح العلاقة (1.7) على الشكل:

$$W_{12}' = W_{12}P(x) \qquad (1.8)$$

وهي معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى والتي حلها من الشكل:

$$W_{12} = c_{12}e^{-\int P(x)dx} \qquad (1.9)$$

وبنفس الطريقة مع (1.5) و (1.6) ، (1.6) و (1.4) نحصل على:

$$W_{23}' = W_{23}P(x) \qquad (1.10)$$

و التي حلها من الشكل:

$$W_{23} = c_{23}e^{-\int P(x)dx} \qquad (1.11)$$

و أيضا:

$$W_{13}' = W_{13}P(x) \qquad (1.12)$$

و التي حلها من الشكل:

$$W_{13} = c_{13}e^{-\int P(x)dx} \qquad (1.13)$$

حيث c_{12}, c_{13}, c_{23} ثوابت.

بضرب (1.11) في $(-y_1)$ و (1.13) في (y_2) والجمع نجد:

$$(y_1y_2'-y_1'y_2)y_3=(c_{13}y_2-c_{23}y_1)e^{-\int P(x)dx}$$

وعليه: $$y_3=-\frac{c_{23}}{c_{12}}y_1+\frac{c_{13}}{c_{12}}y_2=c_1y_1+c_2y_2$$

نظرية 5.2.1 (تخفيض الرتبة للمعادلة التفاضلية من الرتبة الثانية) [5]

إذا كان y_1 حل للمعادلة التفاضلية (1.3)، وكان $y_1(x)\neq 0$ ، لكل x من I فإن $y_2=y_1(x)\int\frac{u(x)}{y_1^2(x)}dx$ حل ثاني على المجال I وبالتالي تكون المجموعة $E=\{y_1,y_2\}$ أساسا لفضاء حلول للمعادلة (1.3) على I.

البرهان: انظر **[2]**

نقوم بالتغيير التالي: $y=\phi(x)y_1(x)$

بالاشتقاق نجد:

$$y'=\phi'(x)y_1(x)+y_1'(x)\phi(x),y''=\phi''(x)y_1(x)+2y_1'(x)\phi'(x)+y_1''(x)\phi(x)$$

بالتعويض في المعادلة (1.3) والترتيب نجد:

$$\phi(x)\left[y_1''(x)+P(x)y_1'(x)+Q(x)y_1(x)\right]+\phi'(x)\left[2y_1'(x)+P(x)y_1(x)\right]+\phi''(x)y_1(x)=0$$

بما أن y_1 حل للمعادلة التفاضلية (1.3) وعليه الحد الأول يساوي الصفر، ومنه تصبح المعادلة تأخذ الشكل: $$\phi'(x)\left[2y_1'(x)+P(x)y_1(x)\right]+\phi''(x)y_1(x)=0$$

وبما أن $y_1(x)\neq 0$ تصبح المعادلة أعلاه من الشكل:

$$\phi''(x)+\phi'(x)\left[\frac{2y_1'(x)}{y_1(x)}+p(x)\right]=0$$

نضع $\phi'(x)=z$، وعليه تصبح من الشكل:

$$\frac{z'(x)}{z(x)} = -\left[\frac{2y'(x)}{y_1(x)} + p(x)\right]$$

بالمكاملة نجد: $\ln z(x) = -\int P(x)dx - 2\ln y_1 + \ln c$

وعليه: $z(x) = c\frac{1}{y_1^2}e^{-\int P(x)dx}$

ومنه ينتج $\phi(x) = \int z dz = c_1\int u(x)dx + c_2$

حيث: $u(x) = \frac{1}{y_1^2}e^{-\int P(x)dx}$ و c_1, c_2 ثوابت اختيارية.

ومنه: $y = c_1 y_1(x)\int u(x)dx + c_2 y_1(x)$

وبالتالي: $y_2 = y_1(x)\int \frac{u(x)}{y_1^2(x)}dx$

3.1.حل المعادلات الخطية المتجانسة من الدرجة الأولى والرتبة الثانية ذات المعاملات الثابتة:

لتكن المعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة من الدرجة الأولى والرتبة الثانية التي تأخذ الشكل:

$y'' + Ay' + By = 0$ ، حيث A, B ثوابت. (1.14)

لحل المعادلة (1.14) نفرض أن حلها من الشكل: $y = ce^{rx}$

ومنه $y' = cre^{rx}$ و $y'' = ce^{rx} + cr^2e^{rx}$

وبالتعويض بـ y'', y', y في المعادلة (1.14) نجد:

$$ce^{rx}\left(r^2 + Ar + B\right) = 0$$

بما أن $ce^{rx} \neq 0$ فإن:

$$r^2 + Ar + B = 0 \quad (1.15)$$

وتسمي المعادلة المميزة، لحل المعادلة (1.15) نبحث عن جذري المعادلة المميزة.

من الواضح ان حل المميزة (1.15) هو: $r_1 = \frac{-A + \sqrt{A^2 - 4B}}{2}, r_2 = \frac{-A - \sqrt{A^2 - 4B}}{2}$

وهذا يعني ان لدينا ثلاث حالات للجذرين r_1, r_2:

1.3.1. حالة الجذران حقيقيان مختلفان:

نظرية 1.3.1 [5]

نفرض أن جذرا معادلة التعريف (1.15) هما عددان حقيقيان ومختلفان، فإن للمعادلة (1.15) حلان أساسيان هما: $y_1 = e^{r_1 x}, y_2 = e^{r_2 x}$ وعلية فالحل العام يأخذ الشكل $y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$.

البرهان: [1]

r_1, r_2 حقيقيان ومختلفان أي أن $\Delta = A^2 - 4B > 0$، وهذا يعني أن هناك حلان للمعادلة (1.14) هما:

$$y_1 = e^{r_1 x}, y_2 = e^{r_2 x}$$

وللتأكد أنهما غير مرتبطان خطيا نقوم بحساب الرونسكي:

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{r_1 x} & e^{r_2 x} \\ r_1 e^{r_1 x} & r_2 e^{r_2 x} \end{vmatrix} = (r_1 - r_2) e^{(r_1 + r_2)x} \neq 0$$

وعليه فإن الحل العام للمعادلة (1.14) يكون من الشكل: $y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$

2.3.1. حالة الجذر مكرر:

نظرية 2.3.1 [2]

نفرض أن جذر معادلة التعريف (1.15) مكرر $r = r_1 = r_2$، فإن للمعادلة (1.15) حلان أساسيان هما: $y_1 = x e^{r_1 x}, y_2 = e^{r_2 x}$ وعلية فالحل العام يأخذ الشكل $y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 x e^{r_2 x}$.

البرهان: [1]

r_1, r_2 حقيقيان ومكرران أي أن $\Delta = A^2 - 4B = 0$، وعليه فإن $r_1 = r_2 = \frac{-A}{2}$.

وهذا يعني أن هناك حلان مكرران $y_2 = e^{-\frac{A}{2}x}, y_1 = e^{-\frac{A}{2}x}$.

لكن: $$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{\frac{-A}{2}x} & e^{\frac{-A}{2}x} \\ -\frac{A}{2}e^{\frac{-A}{2}x} & -\frac{A}{2}e^{\frac{-A}{2}x} \end{vmatrix} = 0$$

وبالتالي فإن الحلين $y_1(x), y_2(x)$ مرتبطان خطيا، وهذا يعني أنه لا يمكن أن يكونا حلين أساسيين، وللحصول على حلين مستقلين خطيا نأخذ الحل الأول $y_1 = e^{-\frac{A}{2}x}$ بينما نأخذ الحل الثاني في الشكل:

$$y_2(x) = \psi(x) y_1(x) = \psi(x) e^{-\frac{A}{2}x} \tag{1.16}$$

باشتقاق (1.16) نجد:

$$y_2'(x) = \psi'(x) e^{-\frac{A}{2}x} - \frac{A}{2}\psi(x) e^{-\frac{A}{2}x} \tag{1.17}$$

بالإشفاق (1.17) نحصل على:

$$y_2''(x) = -\frac{A}{2}\psi'(x) e^{-\frac{A}{2}x} + \psi''(x) e^{-\frac{A}{2}x} - \frac{A}{2}\psi'(x) e^{-\frac{A}{2}x} + \frac{A^2}{4}\psi(x) e^{-\frac{A}{2}x} \tag{1.18}$$

بالتعويض بـ (1.18),(1.17),(1.16) في المعادلة (1.14) والقسمة على $e^{-\frac{A}{2}x}$ والتعويض بـ $B = \frac{A^2}{4}$ نحصل على: $\psi''(x) = 0$

وهذه الأخيرة معادلة تفاضلية خطية متجانسة من الدرجة الأولى والرتبة الثانية، لحلها نقوم بإدخال التكامل مرتين على طرفيها نحصل على: $\psi(x) = c_1 x + c_2$

وعليه نحصل على الحل الثاني من الشكل:

$$y_2(x) = (c_1 x + c_2) e^{-\frac{A}{2}x}$$

وعليه الحل العام يأخذ الشكل:

$$y_g = a_0 e^{-\frac{A}{2}} + a_1 (c_1 x + c_2) e^{-\frac{A}{2}}$$

3.3.1. حالة الجذران مركبان:

نظرية 3.3.1 [6]

نفرض أن جذرا معادلة التعريف (1.15) مركبان $r_1 = p + iq, r_2 = p - iq$، فإن للمعادلة (1.15) حلان أساسيان هما: $y_1(x) = e^{px}\cos qx, y_2(x) = e^{px}\sin qx$، وعلية فالحل العام يأخذ الشكل:

$$y(x) = c_1 e^{px}\cos qx + c_2 e^{px}\sin qx .$$

البرهان:[3]

r_1, r_2 مركبان أي أن $\Delta = A^2 - 4 < 0$ ، وعليه الجذرين يأخذان الشكل التالي:

$$r_1 = \frac{-A + i\sqrt{4B - A^2}}{2}, r_2 = \frac{-A - i\sqrt{4B - A^2}}{2} \qquad (1.19)$$

بإجراء تغيير التالي: $p = -\frac{A}{2}, q = \frac{\sqrt{4B - A^2}}{2}$ في العلاقة (1.19) نحصل على:

$$r_1 = p + iq, r_2 = p - iq \qquad (1.20)$$

و عليه فإن:

$$y_1(x) = e^{(p+iq)x}, y_2(x) = e^{(p-iq)x} \qquad (1.21)$$

ويمكن التأكد أنهما غير مرتبطان خطيا، وعليه فالحل العام بأخذ الشكل:

$y_g(x) = c_1 e^{(p+iq)x} + c_2 e^{(p-iq)x}$ وعليه $y(x) = c_1 e^{px}\cos qx + c_2 e^{px}\sin qx$

مثال 1.3.1

لتكن المعادلة التفاضلية التالية: $y'' - 9y = 0$

المعادلة المميزة تأخذ الشكل: $r^2 - 9 = 0$، وعليه للمعادلة المميزة جذران حقيقيين هما $r_1 = -3, r_2 = 3$ ومنه الحل العام يأخذ شكل الحالة الأولى أي من الشكل: $y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{3x}$.

الفصل الثاني :
دراسة السلاسل الصحيحة

2. السلاسل الصحيحة:

مقدمة:

سنتطرق في هذا الفصل إلى دراسة سلاسل التوابع وأنواع تقاربها البسيط والمطلق والمنتظم والنظيمي وسنركز أكثر على دراسة السلاسل الصحيحة وتقاربها وكيفية حساب نصف قطر تقاربها والخواص التحليلية والجبرية لها ثم نعرج إلى قابلية نشر تابع إلى سلسلة صحيحة ثم نختم بتعريف الدوال التحليلية.

1.2. سلاسل التوابع:

تعاريف 1.1.2

* التطبيق المعرف بـ $f:\mathbb{N}\to F(E,\mathbb{C})$ يدعى متتالية توابع معرفة على E ونرمز لها بالرمز (f_n) حيث $f_n=f(n)$ و $F(E,\mathbb{C})$ هي مجموعة التوابع المعرفة على المجموعة الجزئية غير الخالية E من $\mathbb{R}$ والتي تأخذ قيمها في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$.

* لتكن $(U_n)_{\mathbb{N}}$ متتالية توابع ذات قيم عقدية معرفة على مجموعة غير خالية E من $\mathbb{R}$.

1) تسمى سلسلة التوابع ذات الحد العام U_n ونرمز لها بالرمز $\sum_{n\geq 0}U_n$ الثنائية $\left(\{U_n\},\{S_n\}\right)$ المألفة من المتتاليتين $\{U_n\}$ و $\{S_n\}$، S_n يسمى المجموع الجزئي من الرتبة n حيث: $S_n=\sum_{k=0}^{n}U_k$

2) السلسلة $\sum_{k=n+1}^{\infty}U_k$ تدعى الباقي من الرتبة n للسلسة $\sum_{n\geq 0}U_n$.

1.1.2. التقارب البسيط لسلاسل التوابع:

تعريف 2.1.2

نقول عن سلسلة توابع $\sum_{n\geq 0}U_n(x)$ أنها متقاربة ببساطة على E إذا كانت متقاربة عند كل x من E.

نظرية 1.1.2 (معيار كوشي للتقارب ببساطة لسلاسل التوابع) [9].

تتقارب سلسلة التوابع $\sum_{n\geq 0}U_n$ ببساطة إذا وفقط إذا:

$$\forall x\in E,\ \forall \varepsilon>0,\ \exists N\in\mathbb{N},\ \forall n,m\in\mathbb{N}:\quad \left[m>n>N\Rightarrow |S_m(x)-S_n(x)|<\varepsilon\right]$$

حيث: $$S_m(x) - S_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} U_k(x)$$

تعريف 3.1.2

إذا كانت السلسلة $\sum_{n\geq 0} U_n$ متقاربة ببساطة على E فإن $S = \lim_{n\to\infty} S_n$ هو مجموع السلسلة.

مثال 1.1.2

لتكن سلسلة التوابع التالية $\sum_{n=0}^{\infty} U_n$ حيث: $\forall x \in \mathbb{R} : U_n(x) = x^n$.

بتطبيق معيار كوشي نجد: $\sqrt[n]{|U_n(x)|} = |x|$

* من أجل $|x| > 1$ تكون السلسلة المعطاة متباعدة (لأن $\lim_{n\to\infty} |x| > 1$ أي أن $\lim_{n\to\infty} |x| \neq 0$).

* من أجل $|x| < 1$ تكون السلسلة المعطاة متقاربة.

و $s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} U_k(x) = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ و منه $\lim_{x\to\infty} S_n(x) = S(x) = \frac{1}{1-x}$

وعليه $\sum_{n\geq 0} x^n$ تتقارب ببساطة نحو $\frac{1}{1-x}$، ونكتب $\sum_{n\geq 0} x^n \xrightarrow{C.S} \left.\frac{1}{1-x}\right|_{]-1,1[}$.

2.1.2. التقارب المطلق لسلسة التوابع:

تعريف 4.1.2

نقول عن سلسلة التوابع $\sum_{n\geq 0} U_n$ أنها متقاربة مطلقا على E إذا كانت السلسلة $\sum_{n\geq 0} |U_n|$ متقاربة ببساطة على E.

3.1.2. التقارب بانتظام لسلاسل التوابع:

تعريف 5.1.2

نقول عن سلسلة التوابع $\sum_{n\geq 0} U_n$ أنها متقاربة بانتظام على E إذا كانت متتالية المجاميع الجزئية S_n متقاربة بانتظام على E نحو تابع S، وهذا يعني:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N} : \left[n > N \Rightarrow \sup_{x\in E} |S_n(x) - S(x)| < \varepsilon \right]$$

نظرية 2.1.2 (معيار كوشي للتقارب بانتظام) [8]

حتى تكون سلسلة التوابع $\sum_{n\geq 0} U_n$ ، $U_n : E \to \mathbb{C}$ متقاربة بانتظام على E يلزم ويكفي أن يكون:

$$\forall x \in E \ , \forall \varepsilon > 0, \ \exists N \in \mathbb{N}, \ \forall n \in \mathbb{N}: \ m \geq n \geq N \Rightarrow \left[\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} U_k \right| < \varepsilon \right]$$

4.1.2. التقارب النظيمي لسلاسل التوابع:

تعريف 6.1.2

نقول عن سلسلة التوابع أنها متقاربة نظيميا على E إذا كانت السلسلة العددية $\sum_{n\geq 0} \|U_n\|$ متقاربة حيث $\|U_n\| = \sup_{x \in X} |U_n(x)|$ ، ونكتب $S_n \xrightarrow{C.N} S|_E$.

نظرية 3.1.2 [10]

كل سلسلة متقاربة نظيميا على E فهي متقاربة مطلقا وبانتظام على E.

5.1.2. خواص مجاميع سلاسل التوابع:

نظرية 4.1.2 (خاصية الاستمرار) [8]

لتكن $\sum_{n\geq 0} U_n$ ، $U_n : [a,b] \to \mathbb{C}$ سلسلة توابع متقاربة بانتظام على $[a,b]$، إذا كانت كل التوابع U_n مستمرة عند $x_0 \in [a,b]$ فإن المجموع S للسلسلة مستمرة عند x_0.

نتيجة 1.1.2

إذا كانت كل التوابع U_n مستمرة على $[a,b]$ وكانت $\sum_{n=0}^{\infty} U_n$ متقاربة بانتظام على $[a,b]$ فإن المجموع S مستمر على $[a,b]$.

نظرية 5.1.2 (خاصية قابلية المكاملة) [10]

لتكن $\sum_{n=0}^{\infty} U_n$ ، $U_n : [a,b] \to \mathbb{C}$ سلسلة توابع متقاربة بانتظام على $[a,b]$ ، إذا كانت كل التوابع U_n قابلة

للمكاملة على $[a,b]$ فإن:

أ- S قابل للمكاملة على $[a,b]$.

ب- $\int_a^b \sum_{n\geq 0} U_n(x)dx = \sum_{n\geq 0} \int_a^b U_n(x)dx$.

ج- $\sum_{n\geq 0} \int_a^x U_n(t) \xrightarrow{C.U} \int_a^x \sum_{n\geq 0} U_n(t)dt \Big|_{[a,b]}$.

نظرية 6.1.2 (خاصية قابلية الاشتقاق) [10]

لتكن $\sum_{n\geq 0} U_n$، $U_n : [a,b] \to \mathbb{C}$ سلسلة توابع حيث:

أ- $\forall n \quad U_n \in C^1([a,b])$.

ب- توجد على الاقل نقطة $x_0 \in [a,b]$ بحيث تكون السلسلة العددية $\sum_{n\geq 0} U_n(x_0)$ متقاربة.

ت- $\sum_{n\geq 0} U_n$ متقاربة بانتظام على المجال $[a,b]$.

فإن السلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} U_n$ متقاربة بانتظام على $[a,b]$ ويكون مجموع السلسلة $S = \sum_{n=0}^{\infty} U_n$ قابل للاشتقاق باستمرار على $[a,b]$ ومشتقها: $S' = \left(\sum_{n\geq 0} U_n(x) \right)' = \sum_{n\geq 0} U'_n(x)$.

2.2. السلاسل الصحيحة:

تعريف 1.2.2

نعتبر متتالية الأعداد العقدية (a_n).

* نسمي السلسلة الصحيحة ذات المتغير العقدي z وذات المعاملات a_n سلسلة توابع $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$.

* تدعى السلسلة $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ بالسلسلة الصحيحة العقدية.

* التابع $U_n : z \in \mathbb{C} \to a_n z^n$ هو الحد العام لسلسلة.

1.2.2. دراسة طبيعة السلاسل الصحيحة:

ما دامت السلاسل الصحيحة سلاسل توابع فإن كل ما طبقناه على هذه الأخيرة يطبق على السلاسل الصحيحة.

نظرية 1.2.2 (نظرية آبيل) [11]

إذا كانت السلسلة الصحيحة $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ متقاربة عند $z_0 \neq 0$ فإنها ستكون متقاربة مطلقا من أجل كل z بحيث $|z| < |z_0|$.

ملاحظة 1.2.2

تعرف المجموعة $z \in C$ حيث $|z| < |z_0|$ على أنها القرص المفتوح المعرف بـ: $D(0,|z_0|) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < |z_0|\}$.

برهان النظرية 1.2.2

بما أن $\sum_n a_n {z_0}^n$ متقاربة فإن $\lim_{n\to\infty} a_n {z_0}^n = 0$ ، وهذا يعني وجود $M > 0$ بحيث $|a_n {z_0}^n| \leq M$.

$$|a_n z^n| = \left|a_n {z_0}^n \frac{z^n}{{z_0}^n}\right| = |a_n {z_0}^n| \left|\frac{z}{z_0}\right|^n \leq M \left|\frac{z}{z_0}\right|^n$$

لكن $\sum_n \left|\frac{z}{z_0}\right|^n$ سلسلة هندسة متقاربة، وبالتالي حسب معيار المقارنة $\sum_n a_n z^n$ متقاربة مطلقا وبالتالي متقاربة على $D(0,|z_0|)$.

نتيجة 1.2.2:

إذا تباعدت السلسلة $\sum_n a_n z^n$ عند z_0 فإنها تتباعد من أجل كل z حيث $|z| > |z_0|$.

نتيجة 2.2.2 [8]

إذا تقاربت السلسلة $\sum_n a_n z^n$ في المجال $]-a,a[$ حيث $a > 0$ ، فإنها متقاربة ناظميا على كل مجال $[-r,r]$ حيث $a > r$.

البرهان:

نثبت أن $r < r' < a$ ، يوجد $M > 0$ بحيث $|a_n r'^n| \leq M$.

كما هو الحال في برهان نص نظرية آبيل نحصل على:

$$\forall x \in [-r,r]: |a_n x^n| \le M \left(\frac{r}{r'}\right)^n$$

ومنه برهان النتيجة.

2.2.2. نصف قطر ومجال تقارب سلسلة صحيحة:

- نذكر أن المجموعة $\Delta = \{z \in C : \sum_{n\ge 0} a_n z^n$ متقاربة $\}$ يدعى حيز التقارب لسلسلة $\sum_{n\ge 0} a_n z^n$.

تعريف 2.2.2

نسمي العدد الحقيقي الموجب R بنصف قطر تقارب السلسلة الصحيحة $\sum_{n\ge 0} a_n z^n$ حيث $R = \sup\{|z| / z \in \Delta\}$.

مثال 1.2.2

لنعتبر السلسلة الصحيحة $\sum_{n\ge 1} n! z^n$

$\lim_{n\to\infty} |n! z^n| = +\infty$ ، وعليه $\Delta = \{0\}$ و $R = 0$.

3.2.2. الطرق العملية لحساب نصف قطر التقارب:

- **الطريقة الأولى: "طريقة أدامار" [11]**

لتكن السلسلة الصحيحة $\sum_n a_n z^n$ و R نصف قطر تقاربها، عندئذ:

$$R = \begin{cases} \frac{1}{\sigma} & , 0 < \sigma < +\infty \\ 0 & , \sigma = +\infty \\ +\infty & , \sigma = 0 \end{cases}$$

حيث: $\sigma = \lim_{n\to+\infty} \sup \sqrt[n]{|a_n|}$

البرهان: لبرهان علاقة أدامار أنظر**[8]**

- **الطريقة الثانية: (قاعدة دالمبير) [9]**

$$L=\lim_{n\to+\infty}\frac{\left|a_{n+1}z^{\,n+1}\right|}{\left|a_n z^{\,n}\right|}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\left|a_{n+1}\right|.\left|z^{\,n+1}\right|}{\left|a_n\right|.\left|z^{\,n}\right|}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\left|a_{n+1}\right|.\left|z\right|^{n+1}}{\left|a_n\right|.\left|z\right|^{n}}=\left(\lim_{n\to+\infty}\frac{\left|a_{n+1}\right|}{\left|a_n\right|}\right)\left|z\right|=\ell\left|z\right|$$

$$\left|z\right|<\frac{1}{\ell}\Leftrightarrow L<1$$

نأخذ: $R=\frac{1}{\ell}$

- **الطريقة الثالثة: (مقياس كوشي) [9]**

$$L=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\left|a_n z^{\,n}\right|}=\left(\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\left|a_n\right|}\right)\left|z\right|$$

أي: $L=\ell\left|z\right|$

* $\sum_n a_n z^{\,n}$ متقاربة مطلقًا إذا كان : $L<1 \quad \Leftrightarrow \ell.\left|z\right|<1. \quad \Leftrightarrow \left|z\right|<\frac{1}{\ell}$

* $\sum_n a_n z^{\,n}$ متباعدة إذا كان: $L>1 \Leftrightarrow \left|z\right|>\frac{1}{\ell}$

و منه: $R=\frac{1}{\ell}$

مثال 2.2.2

لتكن السلسلة الصحيحة التالية : $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(3+(-1)^n)^n}z^{\,n}$ حيث : $a_n=\frac{1}{(3+(-1)^n)^n}$

باستخدام علاقة أدمار نجد: $\frac{1}{R}=\limsup_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\left|a_n\right|}=\frac{1}{2}$ ، هذا يعني أن $R=2$.

4.2.2. دراسة السلاسل الصحيحة الحقيقية من الشكل: $\sum_{n\geq 0}a_n(x-x_0)^n$

نستطيع كتابة السلسلة $\sum_{n\geq 0}a_n(x-x_0)^n$ على الشكل $\sum_{n\geq 0}a_n y^{\,n}$ حيث $x-x_0=y$، وعليه يكون نصف قطر تقارب السلسلة الثانية نفسه نصف قطر تقارب الأولى، ومنه فإن السلسلة $\sum_{n\geq 0}a_n(x-x_0)^n$ تتقارب مطلقا على

المجال $]x_0-R,x_0+R[$ حيث R هو نصف قطر تقاربها، وتتباعد هذه السلسلة من أجل $|x-x_0|>R$

كما أنها تتقارب نظيميا على المجال $[a,b]$ من $]x_0-R,x_0+R[$.

ملاحظة 2.2.2

في حالة $|x-x_0|=R$ فإن السلسلة $\sum_{n\geq 0}a_n(x-x_0)^n$ قد تتقارب أو تتباعد.

5.2.2. الخواص التحليلية للسلاسل الصحيحة:

نظرية 2.2.2 (استمرار مجموع سلسلة صحيحة) [8]

اذا كانت $\sum_{n\geq 0}a_n(x-x_0)^n$ سلسلة صحيحة و R نصف قطر تقاربها و $S(x)$ مجموعها عندئذ فإن $S(x)$ يكون مستمرا على المجال $]x_0-R,x_0+R[$.

البرهان:

نعلم أن $x\to a_n(x-x_0)$ مستمر على R و بالتالي على $]x_0-R,x_0+R[$ من أجل كل n كما أن السلسلة $\sum_{n\geq 0}a_n(x-x_0)^n$ متقاربة بانتظام على كل مجال $[a,b]$ من $]x_0-R,x_0+R[$ ، وعليه فإن $s(x)$ مستمر على المجال $]x_0-R,x_0+R[$.

نظرية 3.2.2 (قابلية الاشتقاق والمكاملة) [12]

إذا كانت $\sum_{n\geq 0}a_n(x-x_0)^n$ سلسلة صحيحة و R نصف قطر تقاربها عندئذ فإن:

أ- التابع $S(x)$ يكون قابل للاشتقاق على $]x_0-R,x_0+R[$ ومشتقته $S'(x)=\sum_{n\geq 1}na_n(x-x_0)^{n-1}$.

ب- $S(x)$ قابل للمكاملة على $[x_0,x]$ ، وتكامله $\int_{x_0}^{x}S(t)dt=\sum_{n\geq 0}\frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1}$.

نتيجة 3.2.2 [10]

إذا كان $S(x)=\sum_{n\geq 0}a_n(x-x_0)^n$ فإن : $a_k=\frac{S^{(k)}(x_0)}{k!}\quad \forall k\in N$

البرهان:

باشتقاق $s(x)$ نجد:

$$S'(x)=\sum_{n\geq 1} n a_n (x-x_0)^{n-1}, S''(x)=\sum_{n\geq 2} n(n-1)a_n (x-x_0)^{n-2}, \ldots\ldots, S^{(k)}(x)=\sum_{n\geq k} n(n-1)\ldots(n-k+1)a_n (x-x_0)^{n-k}$$

و بوضع $x = x_0$ نستنتج العلاقة مباشرة $\forall k \in N$ $a_k = \frac{s^{(k)}(x)}{k!}$.

6.2.2. العمليات الجبرية على السلاسل الصحيحة:

نظرية 5.2.2 [12]

لتكن $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$, $\sum_{n\geq 0} b_n x^n$ سلسلتين صحيحتين نصف قطرهما R_1, R_2 على التوالي عندئذ:

- مجموعهما هو السلسلة الصحيحة: $\sum_{n\geq 0}(a_n + b_n)x^n$ ونصف قطرها $R \geq Min(R_1, R_2)$.

جداؤهما هو السلسلة الصحيحة: $\left(\sum_{n\geq 0} a_n x^n\right)\left(\sum_{n\geq 0} b_n x^n\right) = \sum_{n=0} C_n x^n$ مع: $C_n = \sum_{n\geq 0} a_{n-p} b_p, \forall x \in R$

والتي نصف قطرها $R \geq Min(R_1, R_2)$.

7.2.2. قابلية النشر إلى سلسلة صحيحة:

تعريف 4.2.2

نسمي $\sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ بسلسة تايلور للتابع f في جوار x_0، وإذا كانت $x_0 = 0$ تدعى f بسلسة ماكلوران.

قضية 1.2.2 [8]

كل سلسلة صحيحة هي سلسلة تايلور.

تعريف 5.2.2

نقول عن التابع f المعرف في جوار x_0 أنه يقبل النشر إلى سلسلة تايلور في جوار x_0 إذا وجد $R > 0$

يحقق : $\forall x \in]x_0 - R, x_0 + R[\quad f(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$

نظرية 6.2.2 [8]

ليكن $f \in C^{\infty}(\Delta)$ حيث $\Delta =]x_0 - R, x_0 + R[$ عندئذ:

$$\forall x \in \Delta : \lim_{x \to \infty} R_n(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

حيث $R_n(x)$ هو باقي نشر تايلور من الرتبة n.

البرهان:

$f(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x)$ ومنه التكافؤ ينتج مباشرة.

نتيجة 4.2.2

إذا كان $f \in C^{\infty}(\Delta)$ حيث $\Delta =]x_0 - R, x_0 + R[$ فإنه إذا وجد عدد حقيقي $M > 0$ بحيث:

$\forall x \in \Delta : |f^{(n)}(x)| \leq M$ عندئذ فإن f يقبل النشر إلى سلسلة صحيحة.

البرهان:

بما أن: $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + R_n(x)$ ، وهو نشر تايلور للتابع f في جوار x_0

و $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$ هو باقي لاغرانج و $0 < \theta < 1$.

إذا: $|R_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!}|x - x_0|^{n+1} \leq \frac{M \delta^{n+1}}{(n+1)!}$

لكن $\lim_{n \to \infty} |R_n(x)| = 0$، وعليه حسب النظرية السابقة فإن التابع f يقبل النشر إلى سلسة صحيحة في جوار x_0.

8.2.2. نشر بعض التوابع المألوفة:

i. $f(x) = \cos x$

$$\forall n \in N \quad \forall x \in R \quad |f^{(n)}(x)| \leq 1$$

وعليه f يقبل النشر إلى سلسلة صحيحة و نشره يأخذ الشكل:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{(-1)^{2n}}{(2n)!} x^{2n} + \ldots\ldots$$

ii. $f(x) = e^x$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{x^n}{n!} + R_n(x)$$

و $R_n(x) = \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1}, 0 < \vartheta < 1$

وعليه فإن $\left|R_n(x)\right| \le \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} \left|x^{n+1}\right| \to 0$

ومنه:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

9.2.2. الدوال التحليلية:

تعريف 6.2.2

نقول عن الدالة $f(x)$ أنها تحليلية عند النقطة x_0 إذا أمكن تمثيلها بسلسلة تايلور، أي تتقارب في المجال $\left|x - x_0\right| < R$.

مثال 3.2.2

لتكن الدالة $f(x) = \frac{1}{2} + 2x$

الدالة f تحليلية عند النقطة $x_0 = 0$ لأنه يمكن كتابتها على شكل سلسلة من الشكل :

$$f(x) = \frac{1}{2}(x-0)^0 + 2(x-0) + 0(x-0)^2 + \ldots\ldots 0(x-0)^n + \ldots.$$

الفصل الثالث: حل المعادلات التفاضلية الخطية المتجانسة من الدرجة الأولى والرتبة الثانية حول النقطة الشاذة بطريقة فروبينيس

3. حل المعادلات التفاضلية الخطية المتجانسة من الدرجة الأولى والرتبة الثانية حول النقطة الشاذة بطريقة فروبينيس:

مقدمة:

في كثير من الحالات يصعب حل المعادلات التفاضلية من الدرجة الأولى والرتبة الثانية ذات المعاملات المتغيرة، وعليه سنتطرق إلى حل هذه المعادلات باستخدام طريقة السلاسل الصحيحة حول النقطة العادية وسنركز أكثر على النقطة الشاذة المنتظمة والغير منتظمة بطريقة فروبينيس.

1.3. حلول المعادلات التفاضلية الخطية المتجانسة من الدرجة الأولى والرتبة الثانية باستعمال السلاسل الصحيحة حول النقطة العادية:

تعريف 1.1.3

لتكن المعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة من الدرجة الأولى والرتبة الثانية التي تأخذ الشكل التالي:

$P(x)y''+Q(x)y'+R(x)y=0$ ، حيث R,Q,P توابع تحليلية. (3.1)

* نقول أن x_0 نقطة عادية للمعادلة (3.1) إذا كان: $P(x_0)\neq 0$.

* نقول أن x_0 نقطة شاذة للمعادلة (3.1) إذا كان: $P(x_0)=0$.

إذا كانت x_0 نقطة شاذة للمعادلة التفاضلية وكانت الدالتان φ_1، φ_2 تحليليتين حيث:

$\varphi_1(x)=(x-x_0)\frac{Q(x)}{P(x)}, \varphi_2(x)=(x-x_0)^2\frac{R(x)}{P(x)}$، فإن النقطة x_0 تسمى نقطة شاذة منتظمة.

مثال 1.1.3

في المعادلة $x^2y''+axy'+by=0$ نلاحظ أن $x_0=0$ نقطة شاذة للمعادلة التفاضلية أعلاه، بعد الحساب نجد: $\varphi_1(x)=a$ و $\varphi_2(x)=b$ دالتان تحليليتين، وبالتالي $x_0=0$ نقطة شاذة منتظمة.

نظرية 1.1.3 [2]

إذا كانت النقطة x_0 نقطة عادية للمعادلة التفاضلية التالية:

$y''+q(x)y'+r(x)y=0$ (3.2)

وكانت الدالتان r,q تحليليتين عند النقطة x_0 فإن الحل العام للمعادلة (3.2) من الشكل:

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n=a_0y_1(x)+a_1y_2(x)$$

حيث a_0,a_1 ثابتان اختياريان و $y_1(x),y_2(x)$ سلسلتان تحليليتان عند النقطة x_0 ومستقلتان خطيا، ونصف قطر تقارب كل منهما أقل من أصغر نصفي قطر تقارب السلسلتين $p(x)$ و $r(x)$.

البرهان: انظر**[2]**

- **الطريقة العملية لإيجاد الحل عند النقطة العادية [1]**

نفرض في هذه الحالة أن حل المعادلة (3.2) من الشكل: $y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ ، ثم نقوم بالتعويض بهذا الحل ومشتقاته في المعادلة (3.2) نحصل على معادلة كل حدودها سلاسل وبمقارنة معاملات قوى x المختلفة في طرفي المعادلة يمكن الحصول على المعاملات a_n ثم التعويض بهذه المعاملات في الحل المفروض نحصل على هذا الحل في شكله النهائي.

مثال 2.1.3

لتكن المعادلة التفاضلية التالية: $y"+y=0$

للبحث عن حل هذه باستخدام السلاسل الصحيحة حول النقطة العادية $x_0=0$ نفرض حل هذه المعادلة

من الشكل: $y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$

نقوم باشتقاق الحل المفروض مرة و مرتين نجد:

$$y"(x)=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2} \quad ، \quad y'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$$

وبالتعويض $y(x).y'(x),y"(x)$ في المعادلة التفاضلية السابقة نجد: $\sum_{n=0}^{\infty}[(n+2)(n+1)a_{n+2}+a_n]x^n=0$

$$\sum_{n=0}^{\infty}[(n+2)(n+1)a_{n+2}+a_n]x^n=0$$

وبمساواة معاملات x^n بالصفر نحصل على الصيغة التراجعية:

$$(n+1)(n+2)a_{n+2}+a_n=0 \quad ، \quad n=0,1,2.....$$

بالتعويض عن n= 0,1,2... على التوالي في الصيغة التراجعية نحصل على الحل العام للمعادلة العطاة وهو:

$$a_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}+a_1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}=a_0\cos x+a_1\sin x$$

2.3. طريقة فروبينيس:

1.2.3. حالة النقطة الشاذة المنتظمة:

نظرية 1.2.3 [2]

إذا كانت $x=x_0$ نقطة شاذة منتظمة للمعادلة التفاضلية (3.1)، فإنه يوجد على الأقل حل على شكل سلسلة فروبينيس، حيث سلسلة فروبينيس تأخذ الشكل التالي: $y=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\left(x-x_0\right)^{n+r}$ حيث $\sum_{n=0}^{\infty}a_n\left(x-x_0\right)^n$ متقاربة على المجال $0<\left|x-x_0\right|<R$، و R هو نصف قطر تقارب السلسلة.

البرهان [2]

نلاحظ أنه يمكن وضع المعادلة (3.1) على الشكل التالي:

$$L(y)=y''+f(x)y'+g(x)y=0 \qquad (3.3)$$

حيث: $f(x)=\frac{Q(x)}{P(x)}$ و $g(x)=\frac{R(x)}{P(x)}$ و $p(x)\neq 0$

نفرض أن $x_0=0$ نقطة شاذة منتظمة للمعادلة (3.3)، هذا يعني أن كلا من $xf(x)$ و $x^2g(x)$ دالتين تحليليتين عند $x_0=0$، وهذا يعني أن يمكن تمثيلهما بسلسلتين صحيحتين حيث $xf(x)=\sum_{n=0}^{\infty}A_nx^n$ و $x^2g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}B_nx^n$ هاتان السلسلتان متقاربتان في مجال و ليكن R أصغر مجال تقارب.

نفرض أن حل المعادلة (3.3) هو $y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+r}$، حيث : $a_0\neq 0$ و $a_1,a_2,.....a_n$ ثوابت.

نقوم باشتقاق y نجد:

$$y'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r-1} \quad , \quad y''(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r-2}$$

بالتعويض في المعادلة (3.3) كل من قيم $xf(x), x^2 g(x), y, y', y''$ وضرب السلاسل في بعضها نجد

العلاقة التكرارية التالية:

$$\{r(r-1)+A_0 r+B_0\}a_0 x^{r-2}+\sum_{n=0}^{\infty}\left\{(n+r)(n+r-1)a_n+\sum_{m=0}^{n}[(r+m)A_{n-m}+B_{n-m}]a_m\right\}x^{n+r-2}=0 \qquad (3.4)$$

وبمساواة قوى x المختلفة بالصفر نحصل على:

معادلة التعريف والتي تنتج من مساواة أصغر قوة لـ x بالصفر: $r^2-(1-A_0)r+B_0=0$

ولها جذران r_1, r_2 يعينان بدلالة A_0, B_0.

وأيضا:

$$\{(n+r)(n+r-1)+(n+r)A_0+B_0\}a_n+\sum_{m=0}^{n-1}\{(r+m)A_{n-m}+B_{n-m}\}a_m=0 \qquad (3.5)$$

نلاحظ أنه يمكن كتابة معامل a_n على الشكل التالي:

$$(n+r)(n+r-1)+(n+r)A_0+B_0=n(n+2r-1-B_0)$$

من معادلة التعريف نجد: $r_1+r_2=1-A_0$

هذا يعني أنه يمكن كتابة معامل a_n على الشكل: $n(n+2r-r_1-r_2)$

ومنه تصبح العلاقة (3.5) من الشكل:

$$n(n+2r-r_1-r_2)a_n+\sum_{m=0}^{n-1}\{(r+m)A_{n-m}+B_{n-m}\}a_m=0 \qquad (3.6)$$

وللحصول على معاملات الحل الأول نعوض عن r بـ r_1 في (3.6) نجد العلاقة التكرارية التالية :

$$n(n+\delta)a_n+\sum_{m=0}^{n-1}\{(r_1+m)A_{n-m}+B_{n-m}\}a_m=0 \qquad (3.7)$$

حيث: $\delta=r_1-r_2$.

ثم نقوم بالتعويض في الحل المفروض نحصل على سلسلة الحل الاول.

لكن هذه السلسلة لا تمثل شيء إن لم تكن متقاربة، ولنبرهن أنها متقاربة نقوم بما يلي:

بما أن السلسلتين $|x||f(x)|$ و $|x^2||g(x)|$ متقاربتين من أجل $|x|<R$ فإن لكل منهما قيمة محدودة k وأكبر من هاتين القيمتين في المجال $|x|<r$ حيث $r<R$، هذا يعني أن:

$$|x||f(x)|\le\sum_{n=0}^{\infty}|A_n||x^n| \qquad \text{و} \qquad |x^2||g(x)|\le\sum_{n=0}^{\infty}|B_n||x^n|$$

ومن أجل $|x|=r$ نجد:

$$\sum_{n=0}^{\infty}|A_n|r^n\le K \qquad \text{و} \qquad \sum_{n=0}^{\infty}|B_n|r^n\le K$$

وبالتالي:

$$|A_n|\le\frac{K}{r^n} \quad \text{و} \quad |B_n|\le\frac{K}{r^n}. \tag{3.8}$$

وبأخذ القيمة المطلقة لحدود العلاقة التكرارية (3.7) والتعويض بالعلاقة (3.8) نجد:

$$n(n+\delta)|a_n|\le\sum_{m=0}^{n-1}|a_m|(r_1+m+1)\frac{K}{r^{n-m}}$$

وبأخذ سلسلة معاملاتها b_n تحقق العلاقة: $n(n+\delta)|b_n|=\sum_{m=0}^{n-1}b_m(r_1+m+1)\frac{K}{r^{n-m}}$

يكون: $|a_n|<b_n$، وبالتالي $\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{b_{n-1}}=\frac{1}{r}$.

أي أن نصف قطر تقارب السلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$ هو r، وهذا يعني أن السلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ متقاربة من أجل $|x|<R$ وبذالك نكون قد عينا أحد حلول المعادلة (3.1) وهو: $y_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+r_1}$.

أما لتعيين الحل الثاني نعوض في الصيغة التكرارية بدل r بـ r_2 في الصيغة التكرارية (3.6)، وهنا نميز ثلاث حالات والتي تبينها النظرية التالية:

نظرية 2.2.3 (نظرية فروبينيس) [5]

لنفرض أن $x = x_0$ نقطة شاذة منتظمة للمعادلة التفاضلية (3.1) وأن r_1, r_2 هما جذرا معادلة التعريف الخاصة بالمعادلة التفاضلية (3.1) حيث $r_1 \geq r_2$.

- **الحالة الأولى:**

إذا كان الجذران r_1, r_2 مختلفين والفرق بينهما ليس عدد صحيحا فإن للمعادلة التفاضلية (3.1) حلان مستقلان من الشكل: $y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^{n+r_1}, y_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^{n+r_2}$.

- **الحالة الثانية:**

إذا كان الجذران r_1, r_2 مختلفين، والفرق بينهما عدد صحيحا موجبا فإن للمعادلة (3.1) حلان مستقلان من الشكل: $y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^{n+r_1}, y_2(x) = A y_1 \ln(x - x_0) + \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^{n+r_2}$، حيث A ثابت.

- **الحالة الثالثة:**

إذا كان الجذران r_1, r_2 مكررين، بمعنى أن يكون $r_1 = r_2 = \alpha$، إذا فإن للمعادلة التفاضلية (3.1) حلان مستقلان من الشكل : $y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^{n+\alpha}, y_2(x) = y_1 \ln(x - x_0) + \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^{n+\alpha}$.

حيث $a_0 \neq 0$ و $b_0 \neq 0$ في الحالات الثلاثة.

البرهان:

باعتبار $x_0 = 0$ في برهان الحالات الثلاثة الآتية:

- **الحالة الأولى [2]**

كون $\delta = r_1 - r_2$ عدد غير صحيح في هذه الحالة يتناظر جذر معادلة التعريف r_2 على نمط سلسلة الحل الأول أي أن $y_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n+r_2}$، واضح أن الحلان الأول والثاني مستقلان خطيا.

- **الحالة الثانية [2]**

- لمعرفة الحل الثاني نلجأ إلى طريقة تخفيض الرتبة، وعليه $y_2(x)=y_1(x)\int\frac{e^{-\int f(x)dx}}{y_1^{\,2}}dx$ (حسب نظرية 1.2.4 الفصل الأول).

بأخذ بعين الاعتبار $r_1+r_2=1-A_0$ ، وأيضا $r_1-r_2=\delta$ ينتج $A_0=1-\delta-2r_1$ ، ولدينا:

$$e^{-\int f(x)dx}=e^{-\int\left[A_0+A_1x+.....A_nx^n\right]\frac{dx}{x}}=e^{-\int[2r_1-1-\delta]\frac{dx}{x}}e^{-\int[A_1+.....]dx}=x^{2r_1-1-\delta}e^{-\int[A_1+.....]dx}$$

وعليه الحل الثاني يأخذ الشكل:

$$y_2=y_1\int\frac{g(x)}{x^{1+\delta}} \qquad (3.9)$$

حيث:
$$g(x)=\frac{e^{-\int(A_1x+A_1x^2+....)dx}}{\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right)^2}$$

نلاحظ أن $g(x)$ دالة تحليلية عند النقطة $x=0$ لأن $a_0\neq 0$ فرضا، وبالتالي يمكن كتابة $g(x)$ على شكل سلسلة أي $g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}g_nx^n$ ، بالتعويض عن $g(x)$ في العلاقة (3.9) نجد:

$$y_2=y_1\int x^{-1-\delta}\sum_{n=0}^{\infty}g_nx^ndx$$

بملاحظة أن معامل g_n لما $n=\delta$ هي $\frac{1}{x}$ ، وتكامل $\frac{1}{x}$ هو $\ln x$ ، فإن $y_2(x)$ يأخذ الشكل التالي:

$$y_2(x)=y_1\left[\sum_{n=0}^{\delta-1}\frac{g_n}{n-\delta}x^{n-\delta}+g_\delta\ln|x|+\sum_{n=\delta+1}^{\infty}\frac{g_n}{n-\delta}x^{n-\delta}\right]$$

ومنه $y_2(x)=Ay_1(x)\ln|x|+\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^{n+r_2}$. وعليه $y_2(x)=g_\delta y_1(x)\ln|x|+\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^{n+r_2}$

- **الحالة الثالثة [15]**

لدينا $y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ حل للمعادلة (3.3) أي أن $L(y)=0$ ؛ نقوم باشتقاق $L(y)$ جزئيا بالنسبة لـ r نجد:

$$L\left[\ln x\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+r}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{da_n}{dr}x^{n+r}\right]=0 \text{ ، وعليه } \frac{\partial}{\partial r}L\left[\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+r}\right]=0$$

وبالتعويض $r=r_1$ تصبح العلاقة من الشكل $L\left[\ln x\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+r_1}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{da_n}{dr}x^{n+r_1}\right]=0$

وعليه $y_2=y_1\ln x+\sum_{n=0}^{\infty}b_n x^{n+r_1}$ هو حل ثاني للمعادلة التفاضلية (3.3).

الطريقة العملية لحل معادلة تفاضلية من الدرجة الأولى والرتبة الثانية حول النقطة الشاذة المنتظمة بطريقة فروبينيس:

يمكن اختصار هذه الخطوات في النقاط التالية:

- نتأكد أن النقطة شاذة منتظمة للمعادلة المعطاة وذلك من خلال النسبتين φ_1 ، φ_2 فإذا كانتا تحليليتين تكون النقطة المدروسة شاذة منتظمة.
- نفرض أن الحل من الشكل $y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^{n+r}$ ونعوض بالحل المفروض ومشتقاته في المعادلة المطلوب حلها.
- نقوم بمساواة معاملات أصغر أس بالصفر فنحصل على معادلة التعريف ثم نقوم بمساواة القوى الأخرى المختلفة بالصفر فنحصل على الصيغة التكرارية لمعامل a_n.
- بعد حل معادلة التعريف نحصل الجذريين على r_2 و r_2 حيث نعتبر $r_1\geq r_2$ ثم نعوض الجذر الأكبر في العلاقة التكرارية فنجد الحل الأول.
- اذا كان الفرق بين الجذرين r_2 و r_2 عددا غير صحيح نعوض عن r_2 في الصيغة التكرارية ونستنتج الحل الثاني.
- اذا كان الفرق بين الجذرين r_2 و r_2 عددا صحيح نعوض عن r_2 في الصيغة التكرارية ونوجد المعاملات $a_1,a_2,.....,a_\delta$ فإذا كانت جميعها معينة نستنتج الحل الثاني، أما اذا كانت a_δ غير معينة نلجأ إلى طريقة تخفيض الرتبة.
- إذا كانت $r_1=r_2$ لإيجاد حل مستقل خطيا عن y_1 نقوم بالاشتقاق الجزئي بالنسبة الى r ثم نحسب قيمة هذا

الجذر عند $r = r_1$ فتكون هي الحل الثاني $y_2(x)$ حيث: $y_2(x) = \left.\frac{\partial y(x,r)}{\partial r}\right|_{r=r_1}$.

وبذالك يكون الحل العام من الشكل : $y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$

مثال 1.2.3

لنبحث عن حل المعادلة التفاضلية التالية بطريقة فروبينيس:

$$2x^2 y'' + (x + 4x^2) y' + (2x - 1) y = 0;\ x > 0 \qquad (3.10)$$

نلاحظ أن $x_0 = 0$ هي نقطة شاذة للمعادلة التفاضلية المعطاة، نبحث الآن فيما إذا كانت $x_0 = 0$ نقطة شاذة منتظمة أو غير منتظمة:

بعد الحساب نجد:

$$\varphi_1(x) = (x - x_0)\frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{1}{2} + 2x \qquad \text{و} \qquad \varphi_2(x) = (x - x_0)^2 \frac{R(x)}{P(x)} = x - \frac{1}{2}$$

إن الدالتين $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ تحليليتان عند $x = 0$، وعليه فالنقطة $x = 0$ هي نقطة شاذة منتظمة، وبالتالي يمكن فرض حل فروبينيس: $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$.

باشتقاق $y(x)$ نجد:

$$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r-1} \quad , \quad y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n x^{n+r-2}$$

بالتعويض عن y'', y', y في المعادلة (3.10) نجد:

$$[(r(r-1)a_0 + \frac{1}{2} r a_0 - \frac{1}{2} a_0]x^r + \sum_{n=1}^{\infty} [(n+r)(n+r-1)a_n + \frac{1}{2}(n+r)a_n + 2(n-1+r)a_{n-1} + a_{n-1} - \frac{1}{2} a_n]x^{n+r} = 0$$

هذا يعني أن:

$$r(r-1) + \frac{1}{2} r - \frac{1}{2} = 0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} [(n+r)(n+r-1)a_n + \frac{1}{2}(n+r)a_n + 2(n-1+r)a_{n-1} + a_{n-1} - \frac{1}{2} a_n]x^{n+r} = 0 \qquad (3.11)$$

حل معادلة التعريف يعطي $r_1 = 1, r_2 = -\frac{1}{2}$. بما أن $r_1 - r_2 = \frac{3}{2}$ ، إذا شكل الحل ينطبق مع الحالة الأولى من نظرية فروبينيس.

من العلاقة (3.11) نحصل على العلاقة التراجعية التالية:

$$a_n = \frac{-2(2n+1)}{n(2n+3)+4} a_{n-1}$$

ثم نعوض في العلاقة التراجعية عن $r = r_1 = 1$ نحصل على الحل الأول والذي يأخذ الشكل:

إذا فإن الحل الأول هو:

$$y_1(x) = 3a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{n!(2n+3)} x^{n+1}$$

حيث a_0 ثابت اختياري غير صفري. للحصول على الحل الثاني $y_2(x)$، نعوض في العلاقة التراجعية العامة عن $r = r_2 = -\frac{1}{2}$ فنحصل على معاملات b_n الخاصة بالحل الثاني والتي تأخذ الشكل:

$$b_n = \frac{-4(n-1)}{n(2n-3)} b_{n-1} \qquad n = 1,2,...$$

وبالتعويض عن $n = 1,2,3,....$ بالترتيب في هذه العلاقة التراجعية يمكن أن نحصل على الشكل النوني للمعاملات b_n، فإذا بدأنا بالتعويض عن $n = 1$ فإننا نجد أن $b_1 = 0$، وبالاستمـرار في التعويض ببقية قيم n نجد ما يلـي $b_2 = b_3 = ... = 0$، الأمر الذي يعني أن الحل الثاني يأخذ الشكل التالي:

$$y_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n-\frac{1}{2}} = b_0 x^{-\frac{1}{2}} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^{n-\frac{1}{2}} = b_0 x^{-\frac{1}{2}} + 0 = \frac{b_0}{\sqrt{x}}$$

وعليه:

$$y(x) = 3a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{n!(2n+3)} x^{n+1} + \frac{b_0}{\sqrt{x}}$$

2.2.3. حالة النقطة الشاذة غير المنتظمة [4]

إذا كانت $x = 0$ نقطة شاذة غير منتظمة نبحث عن الحل عندما تكون x كبيرة جدا، نفرض أن $w = \frac{1}{x}$ ثم

نعوض في المعادلة التفاضلية إذا كانت $w=0$ نقطة عادية أو شاذة منتظمة فإن x عند ∞ تكون نقطة عادية أو شاذة منتظمة، وتحل المعادلة بالطرق السابقة حيث نلاحظ أن w صغير جدا بمعنى أن x كبير جدا، وعليه ونقول إذا كانت $w=0$ نقطة عادية أو شاذة منتظمة للمعادلة المحوّلة، فإن المعادلة تكون لها نقطة عادية أو شاذة منتظمة عند (∞).

مثال 2.2.3

لتكن المعادلة التفاضلية التالية:

$$4x^3y''+6x^2y'+y=0 \qquad (3.12)$$

لإيجاد حلول المعادلة التفاضلية (3.12) عند النقطة الشاذة $x_0=0$

بالحساب نجد : $\varphi_2=(x-x_0)\dfrac{Q(x)}{P(x)}=\dfrac{3}{2}$ و $\varphi_1=(x-x_0)^2\dfrac{R(x)}{P(x)}=\dfrac{1}{4x}$

نلاحظ أن φ_1 غير تحليلية عند النقطة $x_0=0$ وهذا يعني أن $x_0=0$ نقطة شاذة غير منتظمة لـ(3.12)

لإيجاد حلول المعادلة المعطاة نقوم بالتغيير التالي:

$$w=\frac{1}{x}\Rightarrow x=\frac{1}{w}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dw}\frac{dw}{dx}=-\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dw}=-w^2\frac{dy}{dw}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dw}\left[-w^2\frac{dy}{dw}\right]\frac{dw}{dx}=\frac{-1}{x^2}\left[-w^2\frac{d^2y}{dw^2}-2w\frac{dy}{dw}\right]=w^4\frac{d^2y}{dw^2}+2w^3\frac{dy}{dw}$$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية المعطاة نجد:

$$4w\frac{d^2y}{dw^2}+2\frac{dy}{dw}+y=0 \qquad (3.13)$$

وعليه فإن $w=0$ نقطة شاذة منتظمة للمعادلة (3.13)، وبالتالي فإن النقطة عند الملا نهاية تكون نقطة شاذة منتظمة للمعادلة (3.12).

نفرض أن $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n w^{n+r}$ باشتقاق y مرة ومرتين و التعويض في (3.13)نجد:

$$4\sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+r)(n+r-1) w^{n+r-1} + 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+r) w^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n w^{n+r} = 0$$

بمساواة معاملات أقل أس بالصفر والاختصار نحصل على معادلة التعريف: $r_1 = 0, r_2 = \frac{1}{2}$

وبمساواة قوى w^{n+r-1} نحصل على الصورة التكرارية :

$$a_n = \frac{-1}{(n+r)(4n+4r-2)} a_{n-1}, n \geq 1$$

وبالتعويض في الصيغة التكرارية عن $r = r_1 = 0$ نجد: $a_n = \frac{-1}{n(4n+-2)} a_{n-1}$

أي أن: $a_1 = \frac{-1}{2!} a_0, a_2 = \frac{(-1)^2}{6!} a_0, a_3 = \frac{(-1)^3}{7!} a_0, \ldots\ldots\ldots\ldots, a_n = \frac{(-1)^n}{(2n)!} a_0$

وبعد تعويض a_n و r_1 نجد الحل الأول من الشكل التالي:

$$y_1(w) = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} w^n$$

وللبحث عن الحل الثاني نعوض عن $r = r_2 = \frac{1}{2}$ في العلاقة التكرارية مع أخذ سلسلة حدودها b_n نجد:

$$b_n = \frac{-1}{(2n+1)(2n)} b_{n-1}, n \geq 1$$

أي أن: $b_1 = \frac{-1}{3!} b_0, b_2 = \frac{(-1)^2}{5!} b_0, b_3 = \frac{(-1)^3}{7!} b_0, \ldots\ldots\ldots\ldots, b_n = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} b_0$

وبعد تعويض الحل الثاني يأخذ الشكل التالي: $y_2(w) = b_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} w^{n+\frac{1}{2}}$

وبالتالي فإن الحل العام للمعادلة (3.13) هو:

$$y(w) = C_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} w^n + C_2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} w^{n+\frac{1}{2}}$$

المراجع

المراجع

باللغة العربية:

[1] د. أميل شكر الله في المعادلات التفاضلية العادية وتحويلات لابلاس.
مؤسسة بيتر للطباعة والتوديعات–القاهرة.
الطبعة: الرابع جانفي 2006 –الطبعة الأولى: أكتوبر 2001.

[2] د. إسماعيل بوقفة والدكتور عايش الهنادوة في المعادلات التفاضلية حلول وتطبيقات.
أستاذ كلية العلوم والتكنولوجيا الجمهورية اليمنية.
الطبعة الأولى سنة 2004.

[3] د. حسن مصطفى العويضي في المعادلات التفاضلية الجزء الأول.
أستاذ الرياضيات بجامعة الأزهر كلية التربية للبنات الرياض.
الطبعة الأولى 2005.

[4] د. حسن مصطفى العويضي في المعادلات التفاضلية الجزء الثاني.
أستاذ الرياضيات بجامعة الأزهر كلية التربية للبنات الرياض.
الطبعة الأولى 2005.

[5] د. رشيد خليل في مقدمة في المعادلات التفاضلية.
أستاذ في قسم الرياضيات كلية العلوم الجامعة الأردنية.
الطبعة الثانية 2008.

[6] ريتشر برونسف في المعادلات التفاضلية.
سلسلة شوم، الطبعة الأولى العربية سنة 2000.

[7] د. رمضان محمد جهية في التفاضل والتكامل الجزء الثاني.
الطبعة الثانية 01 مارس 2002.

[8] قادة علاب في عناصر التحليل الرياضي التوابع لمتغير حقيقي واحد.
ترجمة أبو بكر خالد سعد الله، نشر سنة 2010.
ديوان المطبوعات الجامعية الساحة المركزية بن عكنون–الجزائر.

[9] مصطفى شقاق في التحليل 2.
المدرسة العليا للأساتذة التعليم التقني بوهران–الطباعة سنة 2006–2007.

المراجع
باللغة الأجنبية:

[10] . Claudio canuto-Anita Tabacco.
Mathematical Analysis 2. Edition2008
Editore Spanger verlaq.

[11].E Ramis-Cour Mathématiques spéciale.
Troisiéme édition-paris Millan barcelone 1993.

[12] . Jeam François Ruaud- François Moulin.
Mathématique 2 année serie Eramis 2002.

[13] . J.F Marckert −élément de cours mathématiques.
Université de versalles-salnt quentln.

[14] . N . piskounov−Calcul diffréntiel et intégra tom 2.
Editions Mir –Moscou.
First Edition 1975.

[15] .sean Mauch- introduction to methods of applied mathematics.
April 8.2002.

ملخص المذكرة

تناولنا في هذه المذكرة حل المعادلات التفاضلية الخطية المتجانسة من الدرجة الأولى والرتبـــة الثانية حول النقطة الشاذة بطريقة ''فروبينيس''، ولحل هذه المعادلة نحتاج إلى مفهوم النقطة الشاذة المنتظمة وغير المنتظمة والحل المفروض يكون على شكل سلسلة صحيحة فوجب دراسة طبيعة السلاسل ونوع تقاربها مع تعريف الدوال التحليلية كما تعرضنا إلى عموميات حول المعادلات التفاضلية وحلها بالطرق العادية.

الكلمات المفتاحية: طريقة فروبينيس، نقطة شاذة منتظمة وغير منتظمة، سلسلة صحيحة، الدول التحليلية

Résumé

Nous avons traité dans cette mémoire la solution de l'équations différentielle linéaire hétérogène de première vitesse et deuxième ordre autour du point anormale de méthode Frobunius, et pour résoudre cette équation, nous devons comprendre le concept du point régulière et irrégulière, et la solution doit être sous la forme d'une série entière; donc d' étudier la nature des séries et le type de convergence avec la définition des fonctions analytiques ; ainsi nous prenons en charge des généralités sur les équations différentielles et les résoudre par des méthodes normal.

mots clés: méthode Frobunius, point régulière et irrégulière, série entière, fonction analytique.

Summary

We treat in this note the solution of linear differential equations heterogeneous first grade and second grade about the abnormal point in a way of Frobunius and to solve this equation we need the concept of abnormal point regular and irregular, and the solution should be in the form of true series and should study the nature of the series and the type of convergence with the definition of analytic functions as we were to generalities about differential equations and solve it by normal methods.

Key words: way of Frobunius, point regular and irregular, true series, analytic functions .