



République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la
Recherche Scientifique



UNIVERSITÉ HAMMA LAKHDAR D'EL OUED

FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES

Mémoire de fin d'étude

MASTER ACADEMIQUE

Domaine: Mathématiques et Informatique

Filière: Mathématiques

Spécialité: Mathématiques fondamentales et appliquées

Thème

**Analyse Variationnelle d'un Problème de
Contact en Fractionnaire Thermo-
viscoélastique avec Compliance Normale et
Frottement de Coulomb**

Présenté par: **Largot Ibtissam et Hada Meriem**

Sous la supervision de: **Hadj Ammar Tedjani**

Soutenue devant le jury:

Dr. Meziane Said Ameur

Université d'El-Oued

Président

Pr. Hadj Ammar Tedjani

Université d'El-Oued

Rapporteur

Dr. Mesai Aoun Mohamed Salah

Université d'El-Oued

Examineur

Année universitaire 2023 – 2024

إهداء

وَأَخِرُ دَعْوَاهُمْ أَنْ الْحَمْدُ لِلَّهِ رَبِّ الْعَالَمِينَ

الحمد لله الذي بنعته تتم الصالحات، وبفضله تنزل النخيرات والبركات ويتوفيقه
تتحقق المقاصد والغايات، فأحمده وأثنى عليه.

أهدي تخرجي وحصاد ما زرعته إلى من وصانا بها المولى عز وجل خيراً، أمي وأبي
العزیزین لکما منی خالص الحب والاحترام والتبجيل

إلى أخواتي اللاتي وفروا لي كل الأسباب والفرص لتحقيق هذا الحلم، فشكراً لكم
على الحب الذي لا ينتهي والتضحيات الكبيرة التي قدمتها من أجلي.

أسأل الله عز وجل أن قد وفقت في إنجاز هذا العمل المتواضع، فإن أصبت فيه فبتوفيق
من الله، وإن أخطأت أو قصرت فالكسأل الله وحده نعم المولى ونعم النصير

”رَبِّ إِنِّي لَمَّا أَنْزَلْتَ إِلَيَّ مِنْ خَيْرٍ فَقِيرٌ“

والسلام عليكم ورحمة الله وبركاته.

مريم

إهداء

وَأَخِرُ دَعْوَاهُمْ أَنْ الْحَمْدُ لِلَّهِ رَبِّ الْعَالَمِينَ

الحمد لله الذي بنعمته تتم الصالحات لك الحمد حتى ترضى ولك الحمد
والشكر بعد الرضى ولك الحمد والشكر اذا رضيت .
أهدي تخرجي ونجاحي لوالدي ووالدتي الذين لا توفيهن الكليات حقهم في
البر والإحسان الى من رضا الله في رضاهم وما توفيقني
وسر نجاحي الا بدعائهم .

إلى إخوتي من كان لهم بالغ الأثر في كثير من العقبات .
إلى صديقاتي الذين أشهد لهم بأنهم نعم الرفقاء في جميع الأمور .
كما أشكر جميع أساتذتي الكرام ؛ ممن لم يتوانوا في يد العون لي .

إبتسام

شكر وعرفان

قال رسول الله ﷺ " مَنْ لَمْ يَشْكُرِ النَّاسَ لَمْ يَشْكُرِ اللَّهَ "

نتقدم بخالص الشكر والتقدير للأستاذ المشرف تجاني حاج عمار على إرشاداته

وتوجيهاته التي لم يبخل بها علينا يوما ، والذي منحنا من وقته الثمين

ومن محر معلوماته وخبراته الواسعة ما شكّل إضافة كبيرة للعمل

البحثي، فنسأل الله العزيز أن يجازيه خير الجزاء.

والشكر موصول لأعضاء لجنة المناقشة الكرام على تفضلهم بقبول مناقشة

رسالة الماجستير هذه.

قال تعالى " لَئِنْ شَكَرْتُمْ لَأَزِيدَنَّكُمْ "

TABLE DES MATIÈRES

Notations générales	iii
Introduction	vi
1 Modélisation et quelques rappels mathématiques	1
1.1 Modélisation	1
1.1.1 Cadre physique	1
1.1.2 Modèle mathématique	4
1.1.3 Loi de Kelvin-Voigt	5
1.1.4 Conditions aux limites	6
1.2 Quelques rappels mathématiques	8
1.2.1 Espaces de Hilbert	8
1.2.2 Triplet de Gelfand	9
1.2.3 Espaces de Lebesgue $L^p(\Omega)$	9
1.2.4 Quelques outils dans l'espace $L^p(\Omega)$	10
1.2.5 Espaces de Sobolev	11
1.2.6 Espaces fonctionnels	14
1.2.7 Espaces $L^p(0, T; X)$ et $W^{k,p}(0, T; X)$	16
1.2.8 Rappels d'analyse non linéaire dans les espaces de Hilbert	18
1.2.9 Dérivée fractionnaire de Caputo	21

1.2.10	Lemme de Gronwall	25
1.2.11	Les inégalités de Hölder et de Young	26
2	Analyse d'un problème de contact avec compliance normale et frottement en matériaux thermo-viscoélastiques	27
2.1	Formulation du problème	27
2.2	Formulation variationnelle	31
2.3	Existence de la solution	34
	Conclusion	47
	Bibliographie	48

Notations générales

$\mathbb{N}$	Ensemble des entiers naturels,
$\mathbb{R}$	L'ensemble des nombres réels,
$\mathbb{S}^d$	L'espace des tenseurs symétriques du second ordre sur $\mathbb{R}^d$ ($d = 2, 3$),
C	Constante réelle strictement positive,
i.e	C'est à dire,
$\partial_i \theta$	La dérivée partielle de θ par rapport à la i^{eme} composante $x : \partial_i \theta = \frac{\partial \theta}{\partial x_i}$,
$\Delta v = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2}$	Laplacien de v ,
$\nabla \theta$	Gradient de l'application $\theta : \nabla \theta = (\partial_1 \theta, \dots, \partial_d \theta)$,
$\partial \theta$	Sous-différentiel de l'application θ ,
$\frac{\partial u_i}{\partial u_j}$	Sous-différentiel de l'application u tel que $u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial u_j}$,
Div	Divergence du tenseur ; $\text{Div } \sigma = (\sigma_{ij,j})$,
div	Divergence du vecteur ; $\text{div } D = (D_{i,i})$,
${}_0^C D_t^\alpha$	La dérivée de Caputo d'ordre α telle que $0 < \alpha \leq 1$,
${}_0 I_t^\alpha$	The fractional primitive of order α telle que $\alpha > 0$,
$\partial J(x)$	Le sous différentiel de Clarke de J au point $x \in X$, est le sous ensemble de X' ,
$\cdot$	Produit scalaire sur $\mathbb{R}^d$ ou $\mathbb{S}^d$,
$\ \cdot\ $	La norme euclidienne sur $\mathbb{R}^d$ ou $\mathbb{S}^d$,
(x, y)	Paire d'un espace produit $X \times Y$,
$(\cdot, \cdot)_X$	Le produit scalaire de X ,
$\ \cdot\ _X$	La norme de X ,
$(\cdot, \cdot)_{X' \times X}$	Le produit dual entre X' et X ,
p.p.	Presque partout,
Ω	Domaine borné avec une surface frontière régulière Γ ,
$\overline{\Omega}$	L'adhérence de Ω ,
Γ_i	Les parties de frontière Γ , ($i = D, N, C$),
$mes(\Gamma_i)$	Mesure de Lebesgue $(d-1)$ dimensionnelle de Γ_i ,
dx	Mesure superficielle sur Ω ,
da	Mesure superficielle sur Γ_i ,

ν	La normale unitaire sortante à Γ ,
v_ν, v_τ	Les composantes normal et tangentielle du champ vectoriel v défini sur $\overline{\Omega}$,
$C^1(\Omega)$	L'espace des fonctions réelles continûment différentiables sur Ω ,
$\mathcal{D}(\Omega)$	L'espace des fonctions réelles indéfiniment différentiables et à support compact,
$L^2(\Omega)$	L'espace des fonctions u mesurables sur Ω telles que $\int_{\Omega} u ^2 dx < +\infty$,
$\ \cdot\ _{L^2(\Omega)}$	La norme de $L^2(\Omega)$ définie par $\ u\ _{L^2(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} u ^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$,
$L^\infty(\Omega)$	L'espace des fonctions u mesurables sur Ω telles que, $\exists c > 0 : u < c$, p.p., sur Ω ,
$H^1(\Omega)$	L'espace de Sobolev d'ordre 1 sur Ω ,
H_1	L'espace $H^1(\Omega)^d$,
H_Γ	L'espace $\left(H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \right)^d$,
H'_Γ	L'espace dual de H_Γ ,
$\gamma : Y \rightarrow H_\Gamma$	L'application trace pour les fonctions vectorielles,
$\mathbb{H}$	L'espace $L^2(\Omega)^d$,
$W^{1,2}(\Omega)^d$	L'espace $W^{1,2}(\Omega)^d$,
$\mathcal{H}$	L'espace $L^2(\Omega)_s^{d \times d}$,
$\mathcal{H}_1$	L'espace $W^{1,2}(\Omega)_s^{d \times d}$,
Q	L'espace $\{\eta \in H^1(\Omega) \mid \eta = 0 \text{ sur } \Gamma_D \cup \Gamma_N\}$,
$\mathcal{V}$	L'espace $\{v \in (H^1)^d(\Omega) \mid v = 0 \text{ sur } \Gamma_D\}$,
$H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$	L'espace de Sobolev d'ordre $\frac{1}{2}$ sur Γ ,
$H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$	L'espace dual $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$,
$(\cdot, \cdot)_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \Gamma}$	Le produit de dualité entre $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ et $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$,
$C(0, T; H)$	L'espace des fonctions continues de $[0, T]$ dans H ,
$C(\overline{\Omega})$	L'espace $\{\psi _\Omega : \psi \in C(\mathbb{R}^d)\}$,
$AC(0, T; H)$	L'espace de toutes les fonctions absolument continues de $(0, T)$ dans H ,
$C^1(0, T; H)$	L'espace des fonctions continûment dérivables sur $[0, T]$ dans H ,
$L^p(0, T; H)$	L'espace des fonctions u mesurables sur $[0, T]$ telles que $\int_0^T \ u(t)\ _H^p dt < +\infty$,
$\ \cdot\ _{L^p(0, T; H)}$	La norme de $L^p(0, T; H)$ définie par $\ u\ _{L^p(0, T; H)} = \left(\int_0^T \ u(t)\ _H^p dt \right)^{\frac{1}{p}}$,

$W^{k,p}(0, T; H)$	L'espace de Sobolev de paramètres k et p sur $[0, T]$ dans H ,
$\ \cdot \ _{W^{k,p}(0, T; H)}$	La norme de $W^{k,p}(0, T; H)$ définie par
	$\ u \ _{W^{k,p}(0, T; H)} = \ u \ _{L^p(0, T; H)} + \sum_{\alpha=1}^{\alpha=k} \ u^{(\alpha)} \ _{L^p(0, T; H)},$

Notations élasticité

Γ	La frontière de Ω : $\Gamma = \partial\Omega$,
$\Gamma_D, \Gamma_N, \Gamma_C$	Les parties de $\Gamma = \overline{\Gamma_D \cup \Gamma_N \cup \Gamma_C}$,
u	Vecteur de déplacement dans le domaine Ω , on écrit u_i le composante du vecteur dans la base canonique,
u_ν	La composante normale du déplacement u sur la frontière du domaine définie par $u_\nu = u \cdot \nu$,
u_τ	La composante tangentielle du déplacement u sur la frontière du domaine définie par $u_\tau = u - u_\nu \nu$,
$\varepsilon(u)$	Tenseur linéarisé des déformations : $\varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$,
σ	Tenseur des contraintes correspondant au déplacement u , on écrit σ_i les composantes du tenseur dans la base canonique,
σ_ν	La composante normale du contrainte σ sur la frontière du domaine définie par $\sigma_\nu = \sigma \nu \cdot \nu$,
σ_τ	La composante tangentielle du contrainte σ sur la frontière du domaine définie par $\sigma_\tau = \sigma \nu - \sigma_\nu \nu$,
$\sigma \cdot u$	Produit tensoriel (matriciel) de u par σ : $(\sigma \cdot u)_i = \sigma_{ij} u_j$,
q	vecteur du flux de chaleur dans le domaine Ω ,
θ	La température absolue dans le domaine Ω .

Introduction

La viscoélasticité est la propriété des matériaux qui présentent à la fois des caractéristiques visqueuses et élastiques lorsqu'ils subissent une déformation, de sorte qu'un matériau visqueux présente un comportement dépendant du temps lorsqu'une contrainte est appliquée alors qu'il est soumis à une contrainte constante et qu'il se déforme à une vitesse constante, et lorsque la charge est supprimée, le matériau transforme sa configuration d'origine et reste dans l'état déformé. D'autre part, le matériau élastique (qui définie par le scientifique Robert Hooke en 1678) est déformé instantanément lorsqu'il est prolongé et se rappelle de sa configuration initiale, revenant instantanément à son état d'origine une fois la contrainte supprimée. Les matériaux viscoélastiques sont utilisés couramment dans des applications vibro-acoustiques pour atténuer les vibrations et le bruit grâce à leurs facultés de dissipation de l'énergie mécanique.

Des modèles généraux pour les problèmes de contact avec frottement d'un corps viscoélastique avec fondation peuvent être dans [2, 14]. Dans [9] un modèle mathématique un problème quasi-statique décrivant le contact avec frottement et usure entre un corps piézoélectrique et une fondation en mouvement. A. Amassad et al. considéré dans [1], la modélisation d'un problème thermo-viscoélastique quasi-statique avec contact bilatéral et avec une condition dépendante du taux de glissement, ils ont également prouvé l'existence de la solution faible et ont étudié la version régularisée du problème. Les fondements de la théorie du calcul fractionnaire ont été posés par Gottfried Leibniz, Guillaume de l'Hôpital et Johann Bernoulli à la fin du 17e siècle [7]. Après les publications de Joseph Liouville et de Bernhard Riemann, plusieurs résultats sur cette théorie ont été introduits au milieu du 19ème siècle, voir [13]. Parmi les applications du calcul fractionnaire, il y a la modélisation mécanique des matériaux de type caoutchouc. En ce sens, [6, 3] à des modèles impliquant des matériaux particuliers ayant de propriétés viscoélastiques. Modèles qui incluent des matériaux particuliers ayant des propriétés viscoélastiques, où les lois constitutives fractionnaires de Kelvin-Finger et le modèle fractionnaire de Maxwell sont prises en compte. Dans [5], les auteurs ont étudié un problème général de contact quasi-statique sans frottement pour un corps viscoélastique modélisé par la loi de Kelvin-Voigt fractionnaire, pour un corps viscoélastique modélisé par la loi fractionnaire de Kelvin-Voigt et les conditions de contact décrites par le sous-différentiel

de Clarke d'une fonctionnelle non convexe et non lisse et aussi formulation variationnelle de ce problème est fournie sous la forme d'une inégalité variationnelle fractionnaire en temps. Z. Zeng et Migórski [16] ont introduit une classe d'inégalités elliptiques hémivariantes impliquant l'opérateur intégral d'ordre fractionnaire de temps.

Dans cette mémoire, nous considérons un problème mathématique de contact quasi-statique avec frottement entre un corps thermo-viscoélastique et un base thermoconducteur. La relation constitutive est construite par un modèle fractionnaire de Kelvin-Voigt. La conduction thermique est régie par le paramètre de température fractionnaire dans le temps θ . Le contact est décrit par la condition de la compliance normale et de frottement est décrit par la loi de Coulomb.

Le mémoire comporte deux chapitres est structurés de la manière suivante :

- **Premier chapitre :** nous présentons le cadre physique décrivons le problème mécanique, nous introduisons quelques notations avec des résultats, quelques définitions et théorèmes aussi de plus propriétés qui seront d'une grande utilité pour les démonstrations.
- **Deuxième chapitre :** nous écrivons une formulation du problème à résoudre, listons les hypothèses sur ses données, dérivez la formulation variationnelle du modèle et nous énonçons notre principal résultat d'existence d'une solution faible.

MODÉLISATION ET QUELQUES RAPPELS MATHÉMATIQUES

1

Dans ce chapitre, on commence par définir le cadre physique, les lois de comportement des différents matériaux, les conditions aux limites ainsi que la formulation mécanique d'un problème étudiant. Ensuite, nous passons en revue quelques résultats concernant les espaces fonctionnels, les équations et inéquations variationnelles, quelques définitions concernant la Dérivée fractionnaire, lemme de Gronwall et quelques théorèmes qui seront d'une grande utilité pour les démonstrations.

1.1 MODÉLISATION

Dans cette section, nous allons introduire le cadre physique et le modèle mathématique. Ensuite, nous indiquerons la formulation mathématique d'un problème de contact frictionnel quasi-statique entre un corps thermo-viscoélastique et une fondation thermoconductrice.

1.1.1 Cadre physique

Cadre physique n^o1 (*Problème mécanique avec adhésion.*)

Nous considérons un corps qui occupe un domaine borné et ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d = 2, 3$, avec une frontière régulière $\partial\Omega = \Gamma$. Cette frontière est divisée en trois parties ouvertes et disjointes, et aussi mesurables Γ_D, Γ_N , et Γ_C telle que $mes(\Gamma_D) > 0$. Nous notons que ν la normale unitaire sortante à Γ . Le corps encastré sur Γ_D dans une structure fixe. La traction de

surface de densité f_1 agit sur Γ_N , et dans Ω agissent de force volumique de densité f_0 , et un flux de chaleur volumique de densité q_0 . Le corps est également soumis à des constantes mécaniques et thermiques sur la frontière, frottement quasi-statique sur la partie Γ_C avec ce que l'on appelle la fondation thermiquement conductrice et nous supposons que le potentiel thermique est maintenu fixe de θ_F . Nous supposons f_1 et f_0 varient très lentement par rapport au temps. Soient $T > 0$ et $[0, T]$ l'intervalle de temps concernée dans problème.

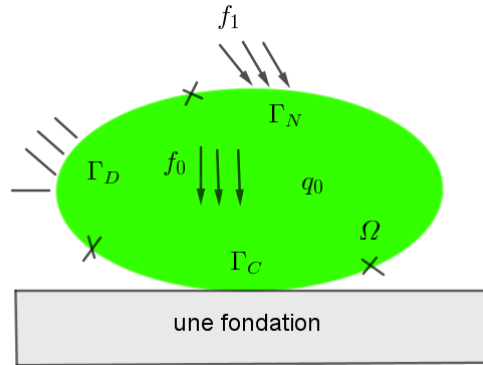


FIGURE 1.1 – Cadre physique1

Cadre physique n°2 (*Problème mécanique sans adhésion* .)

Nous considérons un corps qui occupe un domaine borné et ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d = 2, 3$, avec une frontière régulière $\partial\Omega = \Gamma$. Cette frontière est divisée en trois parties ouvertes et disjointes, et aussi mesurables Γ_D, Γ_N , et Γ_C telle que $\text{mes}(\Gamma_D) > 0$. Nous notons que ν la normale unitaire sortante à Γ . Le corps encastré sur Γ_D dans une structure fixe. La traction de surface de densité f_1 agit sur Γ_N , et dans Ω agissent de force volumique de densité f_0 , et un flux de chaleur volumique de densité q_0 . Nous supposons f_1 et f_0 varient très lentement par rapport au temps. Soient $T > 0$ et $[0, T]$ l'intervalle de temps concernée dans problème. Le corps est en état de non-adhésion avec la fondation que l'on appelle lacune normalisé entre Γ_C est noté g .

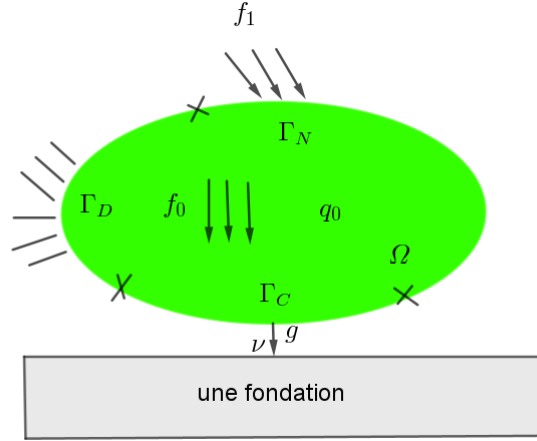


FIGURE 1.2 – Cadre physique2

Avant d'obtenir les modèles mathématiques qui correspondent au cadre physique présenté, voici quelques notations et conventions que nous utiliserons dans notre mémoire. Nous désignons par $\mathbb{S}^d$ l'espace des tenseurs symétriques d'ordre deux sur $\mathbb{R}^d$ ($d = 2, 3$), $(\cdot, \cdot)$ et $\|\cdot\|$ représentent respectivement le produit scalaire et la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^d$ et $\mathbb{S}^d$. Ainsi, nous avons

$$\begin{aligned} u \cdot v &= u_i \cdot v_i, & \|v\| &= \sqrt{v \cdot v}, & \forall u, v \in \mathbb{R}^d, \\ \sigma \cdot \tau &= \sigma_{ij} \cdot \tau_{ij}, & \|\tau\| &= \sqrt{\tau \cdot \tau}, & \forall \sigma, \tau \in \mathbb{S}^d. \end{aligned}$$

ici et ci-dessous, les indices i et j courent entre 1 et d et la convention de sommation sur les indices répétés est adoptée. Nous notons par v_ν et v_τ les composantes normale et tangentielle à la frontière définies par

$$v_\nu = v \cdot \nu, \quad v_\tau = v - v_\nu \nu. \quad (1.1)$$

Nous désignons par $\sigma = \sigma(x, t)$ le champ des contraintes, par $u = u(x, t)$ le champ des déplacements et par $\varepsilon(u)$ le champ des déformations infinitésimales. Pour simplifier les notations, nous n'indiquons pas explicitement la dépendance des fonctions par rapport à $x \in \bar{\Omega}$ et $t \in [0, T]$.

Pour un champ des contraintes σ nous dénotons par σ_ν et σ_τ les composantes normale et tangentielle à la frontière données par

$$\sigma_\nu = (\sigma \nu) \cdot \nu, \quad \sigma_\tau = \sigma \nu - \sigma_\nu \nu. \quad (1.2)$$

En utilisant (1.1) et (1.2), nous obtenons la relation

$$(\sigma\nu) \cdot v = \sigma_\nu v_\nu + \sigma_\tau \cdot v_\tau. \quad (1.3)$$

Qui va intervenir, dans la formulation variationnelle de problème mécanique de contact.

1.1.2 Modèle mathématique

Nous rappellerons la relation déformation de déplacement dans l'hypothèse des petites transformations

$$\varepsilon(u) = (\varepsilon_{ij}(u)), \quad \varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad 1 \leq i, j \leq d.$$

Notons un indice qui suit une virgule indique une dérivation partielle par rapport à la composante correspondante à la variable spatiale.

Passons maintenant à la description des modèles mathématiques associées aux cadres physiques ci-dessus.

Modèle mathématique n°1 . Le premier modèle mathématique étudié dans cette thèse décrit l'évolution du corps dans le cadre physique n^01 (page 1). Les fonctions inconnues du problème sont le champ des déplacements $u : \Omega \times [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}^d$ et les champs des contraintes $\sigma : \Omega \times [0, T] \longrightarrow \mathbb{S}^d$. Notons la densité de force volumique par $f_0 : \Omega \times [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}^d$. L'évolution du corps est décrite par l'équation d'équilibre suivante

$$\text{Div } \sigma + f_0 = 0 \quad \text{dans } \Omega \times (0, T). \quad (1.4)$$

Ici "Div" représente l'opérateur divergence pour les tenseurs, $\text{Div } \sigma = (\sigma_{ij,j})$. Le processus d'évolution défini par (1.4) s'appelle processus quasi-statique. Nous rappelons que dans le cadre physique n^01 , f_0 et f_1 varient très lentement par rapport au temps.

La condition aux limites en tractions est

$$\sigma\nu = f_1 \quad \text{sur } \Gamma_N \times (0, T). \quad (1.5)$$

Nous allons compléter ultérieurement le modèle mathématique (1.4) et (1.5) par les conditions de contact sur la partie .

Modèle mathématique n°2.

Le deuxième modèle mathématiques étudié dans cette mémoire décrit l'évolution du corps dans le cadre physique n°2. C'est un modèle mécanique sans adhésion. Les inconnues mécaniques du problème sont les champs des déplacements u et les champs des contraintes σ satisfaisant les égalités (1.4) et (1.5). A celles-ci se rajoutent le inconnue les champs des températures du problème, le champ de température $\theta : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, et le vecteur du flux de chaleur $q : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$. L'évolution du corps est représentée par l'équation suivante

$${}_0^C D_t^\alpha \theta + \operatorname{div} q = q_0 \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (1.6)$$

où "div" est l'opérateur de divergence des vecteurs, $\operatorname{div} q = (q_{i,i})$, et q_0 représente un flux de chaleur volumique de densité.

1.1.3 Loi de Kelvin-Voigt

Dans cette mémoire, on utilise modèle fractionnaire de Kelvin-Voigt, connu sous le nom de modèle de Kelvin-Voigt généralisé, qui est développé en remplaçant le dashpot du modèle classique de Kelvin-Voigt par un opérateur de dérivée fractionnaire, connu sous le nom de springpot. L'identification des paramètres du modèle fractionnaire a été soulevée au fur et à mesure que le calcul fractionnaire a été utilisé dans le cadre de l'étude de la qualité de l'air. Le calcul fractionnaire a été utilisé en viscoélasticité. Différentes méthodes ont été utilisées, telles que la méthode des algorithmes génétiques, la méthode d'estimation spectrale des paramètres, les erreurs dans les variables, etc. méthode d'estimation spectrale des paramètres, la méthode des erreurs dans les variables la méthode de l'appartenance à un ensemble.

Nous considérons corp viscoélastique qui occupent domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^d (d = 2, 3)$ avec une surface frontière régulière Γ subdivisée en trois parties mesurables $\Gamma_D, \Gamma_N, \Gamma_C$ telles que $\operatorname{mes}(\Gamma_D) > 0$, Soit $T > 0$ nous étudions l'évolution du corps due à l'application de force de volume et de tractions de surfaces dans l'intervalle de temps $[0, T]$. Dans ce qui suit, pour simplifier les notations, nous n'indiquons pas explicitement la dépendance des fonctions par rapport à $x \in \Omega \cup \Gamma$, et $t \in [0, T]$. Dans ce qui suit, pour simplifier les notations, nous n'indiquons pas explicitement la dépendance des fonctions par rapport à $x \in \Omega \cup \Gamma$, et $t \in [0, T]$.

Afin de décrire le comportement viscoélastique, un modèle rhéologique est nécessaire.

Les modèles généralisés de type Kelvin-Voigt et Maxwell sont couramment utilisés mais ils nécessitent un grand nombre de paramètres à identifier. Au cours des dernières années, les modèles fractionnaires sont permettent de décrire le comportement viscoélastique sur une large gamme de fréquences avec peu de paramètres. La loi viscoélastique est une des premières applications du calcul fractionnaire et la relation entre le tenseur des contraintes et le tenseur des déformations est définie comme suit :

$$\sigma = \mathcal{C}\varepsilon \left({}^C D_t^\alpha u \right) + \mathcal{E}\varepsilon(u) - \theta \mathcal{M} \quad \text{dans } \Omega \times (0, T).$$

Où est ${}^C D_t^\alpha u$ dénote la dérivée de Caputo d'ordre α telle que $0 < \alpha \leq 1$ par rapport au temps. L'utilisation de la dérivée fractionnaire dans la loi de comportement nécessite l'introduction d'un élément rhéologique nommé spring-pot . Cet élément correspond à une représentation asymptotique d'assemblage d'éléments élastiques (springs) et viscoélastiques traditionnels (dash-pots) connectés en série et en parallèle. L'élément spring-pot permet ainsi de modéliser différents comportements mécaniques en changeant l'ordre de dérivation α . Si $\alpha \rightarrow 0$, le comportement de l'élément fractionnaire tend vers la réponse élastique ; dans le cas où $\alpha \rightarrow 1$, la viscosité prédomine.

1.1.4 Conditions aux limites

Définissons maintenant les conditions aux limites sur chacune des trois parties de Γ .

A-La condition à la limites de déplacement

Le corps est encastré dans une position fixe sur la partie Γ_D , le champ des déplacements u est par conséquent nul

$$u = 0 \quad \text{sur } \Gamma_D \times [0, T].$$

B-La condition à la limites de traction

Une traction surfacique de densité f_1 agit sur Γ_N et par conséquent le vecteur des contraintes de Cauchy $\sigma\nu$ satisfait

$$\sigma\nu = f_1 \quad \text{sur } \Gamma_N \times [0, T].$$

C-Les conditions aux limites de contact avec frottement

Par condition de contact nous comprenons une relation impliquant les composantes normales du champ des déplacements, des vitesses ou des contraintes. Par loi de frottement nous comprenons une relation entre la contrainte tangentielle σ_τ et le déplacement tangentiel u_τ . Notons ici que σ_τ s'appelle aussi force de frottement.

Nous commençons par présenter les conditions aux limites de contact utilisées dans cette mémoire. Les égalités et les inégalités qui suivent sont considérées vraies presque partout sur $\Gamma_C \times [0, T]$.

Contact avec compliance normale.

Dans ce cas, la fondation est supposée déformable et la zone de contact n'est pas connue à priori. La contrainte σ_ν satisfait la condition dite de compliance normale

$$-\sigma_\nu = p_\nu(u_\nu - g) \quad \text{sur } \Gamma_C \times [0, T]. \quad (1.7)$$

Où u_ν est le déplacement normal, g représente l'interstice entre le corps et la fondation et p_ν est une fonction positive donnée, appelée fonction de compliance normale. Cette condition indique que la fondation exerce une action sur le corps en fonction de sa pénétration $u_\nu - g$.

Loi de frottement de type Coulomb.

C'est une des lois de frottement les plus répandues dans la littérature mathématiques. Elle se caractérise par l'intervention de la contrainte normale dans le seuil de glissement et peut s'énoncer comme suit :

$$\begin{cases} \|\sigma_\tau\| \leq |\sigma_\nu|, \\ \|\sigma_\tau\| < |\sigma_\nu| \Rightarrow u_\tau = 0, \\ \|\sigma_\tau\| = |\sigma_\nu| \Rightarrow \exists \lambda \geq 0, \quad \sigma_\tau = -\lambda u_\tau(t), \end{cases} \quad (1.8)$$

c'est une version statique de la loi de Coulomb qui intervient dans la description du contact frottement des problèmes étudiés dans la deuxième partie du mémoire.

Maintenant, nous remplaçons le seuil de frottement σ_ν de la loi (1.8), par la condition de compliance normale (1.7), de façon à obtenir les conditions suivantes

$$\begin{cases} \|\sigma_\tau(t)\| \leq p_\tau(u_\nu(t) - g), \\ \|\sigma_\tau(t)\| < p_\tau(u_\nu(t) - g) \Rightarrow u_\tau(t) = 0, \\ \|\sigma_\tau(t)\| = p_\tau(u_\nu(t) - g) \Rightarrow \exists \lambda \geq 0, \quad \sigma_\tau(t) = -\lambda u_\tau(t). \end{cases} \quad (1.9)$$

Où p_τ est une fonction positive. Dans (1.9), la contrainte tangentielle ne peut pas excéder le seuil de frottement $p_\tau(u_\nu - g)$. De plus, quand le seuil de frottement est atteint, le corps se

met à glisser et la contrainte tangentielle tend à s'opposer au mouvement. Cette condition de frottement a été utilisée dans différents papiers.

1.2 QUELQUES RAPPELS MATHÉMATIQUES

1.2.1 Espaces de Hilbert

Soit H un espace vectoriel réel et $(\cdot, \cdot)_H$ un produit scalaire sur H .

On note par $\|\cdot\|_H$ l'application de $H \rightarrow \mathbb{R}_+$ définie par

$$\|u\|_H = \sqrt{(u, u)_H}, \quad (1.10)$$

et on rappelle que $\|\cdot\|_H$ est une norme sur H qui vérifie l'inégalité de Cauchy-Schwartz

$$|(u, v)_H| \leq \|u\|_H \|v\|_H, \quad \forall u, v \in H,$$

on dit que H est un espace de Hilbert si H est complet pour la norme défini par (1.10).

Soit H' l'espace dual de H

$$\|\eta\|_{H'} = \sup_{v \in H - \{0\}} \frac{(\eta, v)_{H' \times H}}{\|v\|_H},$$

où $(\cdot, \cdot)_{H' \times H}$ représente la produit dual entre H' et H .

Théorème 1.2.1. (*Représentation de Riesz-Fréchet*)

Soit H un espace de Hilbert et soit H' son espace dual, alors pour tout $\phi \in H'$ il existe un unique $f \in H$ tel que

$$(\phi, v)_{H' \times H} = (f, v)_H \quad \forall v \in H,$$

de plus

$$\|\phi\|_{H'} = \|f\|_H.$$

L'importance de ce théorème est que tout forme linéaire continue sur H peut se représenter à l'aide du produit scalaire. L'application $\phi \mapsto f$ est un isomorphisme isométrique qui permet d'identifier H et H' .

1.2.2 Triplet de Gelfand

Dans ce paragraphe nous rappelons la définition d'un triplet de Gelfand. Pour cela on va utiliser le Théorème 1.2.1 de représentation de Riesz-Fréchet. Soit V un espace de Hilbert réel tel que V dense dans H et l'injection $V \subset H$ est continue, et on identifie H et H' . Soit V' le dual de V , on peut alors prolonger H dans V' grâce au procédé suivant : étant donné $f \in H$, l'application $v \in V \mapsto (f, v)_H$ est une forme linéaire continue sur H et a fortiori sur V , on la note $Tf \in V'$ de sorte que

$$(Tf, v)_{V' \times V} = (f, v)_H, \quad \forall f \in H, \quad \forall v \in V.$$

On vérifie que $T : H \rightarrow V'$ possède les propriétés suivantes

- 1) $\|Tf\|_{V'} \leq C\|f\|_H, \quad \forall f \in H,$
- 2) T est injective,
- 3) $T(H)$ est dense dans V' .

En général T n'est pas surjective de H sur V' . A l'aide de T on prolonge H dans V' et on a le schéma suivant

$$V \subset H \equiv H' \subset V'$$

où les injections canoniques sont continues et denses. Ce triplet est appelé Triplet de Gelfand, on dit que H est l'espace pivot.

1.2.3 Espaces de Lebesgue $L^p(\Omega)$

On a $L^1(\Omega)$ l'espace des fonctions intégrables sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$. On a

$$\|v\|_{L^1(\Omega)} = \int_{\Omega} |v(x)| dx.$$

On va rappeler des résultats d'intégration très utiles sur tout pour la dernière partie de cette mémoire.

Lemme 1.2.1. (Lemme de Fatou)

Soit (v_n) une suite des fonctions de $L^1(\Omega)$ telle que

- 1) pour chaque $n, v_n \geq 0$ p.p. sur Ω ,
- 2) $\sup_n \int_{\Omega} v_n(x) < \infty$. Pour chaque $x \in \Omega$ on pose $v(x) = \liminf_{n \rightarrow \infty} v_n(x)$.

Alors $v \in L^1(\Omega)$ et $\int_{\Omega} v(x)dx \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} v_n(x)dx$.

Définition 1.2.1. Soit $p \in \mathbb{R}, 1 \leq p < \infty$. On appelle l'espace de Lebesgue $L^p(\Omega)$ l'ensemble

$$L^p(\Omega) = \{v : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable, et } |v|^p \in L^1(\Omega)\},$$

muni de la norme définie par

$$\|v\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |v(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

On rappalans l'espace de Lebesgue $L^\infty(\Omega)$ c'est l'ensemble

$$L^\infty(\Omega) = \{v : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable ; } \exists C > 0, |v(x)| \leq C \text{ p.p. sur } \Omega\},$$

muni de la norme définie par

$$\|v\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf \{C, \text{ telle que } |v(x)| \leq C \text{ p.p. sur } \Omega\} = \sup_{\text{ess}}(v).$$

1.2.4 Quelques outils dans l'espace $L^p(\Omega)$

Théorème 1.2.2. (Convergence faible)

Une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset H$ converge faiblement vers $x \in H$ si

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n, y) \rightarrow (x, y) \quad \forall y \in H.$$

On écrit souvent $x_n \rightharpoonup x$.

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz, il résulte que si $x_n \rightarrow x$ dans H , alors $x_n \rightharpoonup x$.

Définition 1.2.2. (Convergence faible*)

soit E un espace Banach, et soit E' l'espace dual, une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de E' converge faible* vers f dans E' , et on note $f_n \xrightarrow{*} f$, si

$$(f_n, x)_{E' \times E} \rightarrow (f, x)_{E' \times E} \quad \text{pour tout } x \in E.$$

Théorème 1.2.3. Soit (x_n) une suite bornée de H . Alors il existe un élément $x \in H$ et une sous-suite de (x_n) encore notée par (x_n) telle que $x_n \rightarrow x$.

Théorème 1.2.4. (Convergence dominée de Lebesgue)

Soit (v_n) une suite de fonctions de $L^1(\Omega)$. On suppose que

- 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n(x) = v(x)$, p.p. sur Ω ,
- 2) il existe une fonction positive $g \in L^1(\Omega)$ telle que pour chaque $n \in \mathbb{N}$, $|v_n(x)| \leq g(x)$ p.p. sur Ω .

Alors $v \in L^1(\Omega)$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} \|v_n - v\|_{L^1(\Omega)} = 0$.

1.2.5 Espaces de Sobolev

Les espaces de Sobolev ont été introduits au début du siècle et ont permis de résoudre bon nombre de problèmes concernant les équations aux dérivées partielles. On commence par un bref rappel de quelques résultats sur l'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ défini par

$$H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega); \partial_i u \in L^2(\Omega) \ i = 1, \dots, d \right\},$$

on note par ∇u le vecteur des composantes $\partial_i u$, on a $\nabla u \in L^2(\Omega)^d$ pour tout $u \in H^1(\Omega)$. On sait que $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = (u, v)_{L^2(\Omega)} + (\partial_i u, \partial_i v)_{L^2(\Omega)},$$

et la norme associée $\|u\|_{H^1(\Omega)} = \sqrt{(u, u)_{H^1(\Omega)}}$, et on écrit

$$\|u\|_{H^1(\Omega)}^2 = \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)^d}^2, \quad (1.11)$$

on a les résultats suivants

$$C^1(\overline{\Omega}) \text{ est dense dans } H^1(\Omega).$$

Théorème 1.2.5. (*Injection continue de Sobolev*)

Soient I un ouvert borné de classe C^1 de $\mathbb{R}^N$, et $r, s \in \mathbb{R}$. Alors, les injections suivantes sont continues

1. si $s \leq r$: on a $H^r(I) \hookrightarrow H^s(I)$;

c'est à dire qu'il existe un réel $C > 0$ tel que :

$$\|u\|_{H^s(I)} \leq C \|u\|_{H^r(I)} \quad \forall u \in H^r(I). \quad (1.12)$$

2. si $s > \frac{N}{2}$; on a $H^{s+j}(I) \hookrightarrow C_b^j(\bar{I}) \quad \forall j \in \mathbb{N}$;

c'est à dire qu'il existe un réel $C > 0$ tel que :

$$\|u\|_{C_b^j(\bar{I})} \leq C \|u\|_{H^{s+j}(I)} \quad \forall u \in H^{s+j}(I).$$

Théorème 1.2.6. (*Injection compact de Rellich*)

Soient I un ouvert borné de classe C^1 de $\mathbb{R}^N$, et $r, s \in \mathbb{R}$. Alors, les injections suivantes sont compactes

1. si $s \leq r$; on a $H^r(I) \subset\subset H^s(I)$;

c'est à dire toute suite bornée de $H^r(I)$ admet une sous-suite convergente dans $H^s(I)$.

2. si $s > \frac{N}{2}$; on a $H^{s+j}(I) \subset\subset C_b^j(\bar{I}) \quad \forall j \in \mathbb{N}$;

c'est à dire toute suite bornée de $H^s(I)$ admet une sous-suite convergente dans $C_b^j(\bar{I})$.

L'affirmation $H^r(I) \subset\subset H^s(I)$ signifie que l'inclusion $H^r(I) \subseteq H^s(I)$ est compacte.

Définition 1.2.3. (Frontière lipschitzienne)

Un ouvert borné Ω de $\mathbb{R}^N$ est dit à frontière lipschitzienne s'il existe des ouverts $(\Omega_0, \Omega_1, \dots, \Omega_n)$ de $\mathbb{R}^N$ et des applications $(\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_n)$ telles que :

1) $\bar{\Omega} \subset \bigcup_{i=0}^n \Omega_i$ et $\Omega_0 \subset \Omega$,

2) $\phi_0 : \Omega_0 \rightarrow B_{1,N} = \{x \in \mathbb{R}^N, \|x\| < 1\}$ est bijective et ϕ_0 et ϕ_0^{-1} sont lipschitziennes,

3) Pour tout $i \geq 1, \phi_i : \Omega_i \rightarrow B_{1,N}$ est bijective et ϕ_i et ϕ_i^{-1} sont lipschitziennes, et $\phi_i(\Omega_i \cap \Omega) = B_{1,N} \cap \mathbb{R}_+^N$ et $\phi_i(\Omega_i \cap \partial\Omega) = B_{1,N} \cap \{(0, y), y \in \mathbb{R}^{N-1}\}$.

Théorème 1.2.7. si I est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ à Frontière "assez régulière" (lipschitzienne) alors, le injection suivante est compact

$$\text{on a } H^m(I) \hookrightarrow L^p(I) \text{ pour tout } m \in \mathbb{N}^* \text{ telle que } m - \frac{N}{2} > -\frac{N}{p}.$$

Théorème 1.2.8. (trace de Sobolev)

Soit Ω un domaine Lipschitzien de $\mathbb{R}^d$ de frontière Γ et $1 < p < \infty$. Il existe une application linéaire et continue γ définie sur l'espace $W^{1,p}(\Omega)$ à valeurs dans l'espace $L^p(\Gamma)$ telle que :

1) $\gamma v = v|_{\Gamma}$ si $v \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$,

2) l'application γ est une application compact,

3) il existe une constante $C > 0$, provenant de la continuité de l'application γ , tel que

$$\|\gamma v\|_{L^p(\Gamma)} \leq C \|v\|_{W^{1,p}(\Omega)} \quad \forall v \in W^{1,p}(\Omega).$$

L'application γ s'appelle application de trace sur $W^{1,p}(\Omega)$, on a :

" γ est définie comme le prolongement par densité de l'application $v \mapsto v|_{\Gamma}$ définie pour $v \in C(\bar{\Omega})$ ".

Définition 1.2.4. Pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $p \in [1, +\infty]$, nous définissons l'espace de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ par

$$W^{k,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) \mid \forall \alpha, |\alpha| \leq k; \exists v_\alpha \in L^p(\Omega), \text{ tel que } v_\alpha = D^\alpha u \right\}.$$

Où $D^\alpha u$ est la α^{ime} dérivée faible de u .

Remarque 1.2.1. Nous ferons très souvent l'abus d'écriture qui consiste à identifier $D^\alpha u$ et v_α .

La norme sur l'espace $W^{k,p}(\Omega)$ est donnée par

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}} & \text{si } 1 \leq p < \infty, \\ \max_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)} & \text{si } p = \infty, \end{cases}$$

pour $p = 2$, on note par $H^k(\Omega)$ l'espace $W^{k,2}(\Omega)$ et la norme précédente provient d'un produit scalaire.

Théorème 1.2.9. Les espaces de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$, pour $k \in \mathbb{N}$ et $p \in [1, +\infty]$, munis de la norme $\|\cdot\|$, sont des espaces de Banach. De plus, les espaces $H^k(\Omega)$, pour tout k entier, sont des espaces de Hilbert.

Pour des détails supplémentaires sur les espaces de Sobolev nous renvoyons le [18].

Théorème 1.2.10. Soit $u \in W^{1,2}(\Omega)^d$ Alors $\varepsilon(u) = 0$ si seulement si $u \in \mathbf{R}$ où

$$\mathbf{R} = \{u \in H_1 / \varepsilon(u) = 0\}. \quad (1.13)$$

Théorème 1.2.11. (Inégalité de Korn)

Soit $\mathbf{V}$ un sous-espace fermé de $W^{1,2}(\Omega)^d$ tel que :

$$\mathbf{V} \cap \mathbf{R} = \{0\}. \quad (1.14)$$

Alors, il existe $C > 0$ ne dépendant que Ω et $\mathbf{V}$ tel que

$$\|\varepsilon(u)\|_{\mathcal{H}} \geq C \|u\|_{W^{1,2}(\Omega)^d} \quad \forall u \in \mathbf{V}. \quad (1.15)$$

Exemple : Dans les parties mécaniques, la frontière Γ est subdivisée en trois parties mesurables disjointes Γ_D , Γ_N , et Γ_C , tels que $\text{mes}(\Gamma_D) > 0$. Nous aurons constamment besoin de l'espace des déplacements admissibles $\mathcal{V}$ défini par

$$\mathcal{V} = \{v \in H^1(\Omega)^d \mid v = 0 \text{ sur } \Gamma_D\}, \quad (1.16)$$

et $H^1(\Omega)^d = H_1$, et aussi soit $\mathcal{V}_{ad}$ l'ensemble des déplacements admissibles définis par

$$\mathcal{V}_{ad} = \{v \in \mathcal{V} \mid v_\nu - g \leq 0 \text{ sur } \Gamma_C\}.$$

Puisque $mes(\Gamma_D) > 0$, il vient $\mathcal{V} \cap \mathbf{R} = \{0\}$, d'où l'inégalité de Korn s'applique sur $\mathcal{V}$; alors, il existe une constante $c_K > 0$ dépendant uniquement de Ω et Γ_D telle que

$$\|\varepsilon(v)\|_{\mathcal{H}} \geq c_K \|v\|_{H_1}, \quad \forall v \in \mathcal{V}. \quad (1.17)$$

Sur l'espace $\mathcal{V}$ nous considérons le produit scalaire donnée par

$$(u, v)_{\mathcal{V}} = (\varepsilon(u), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}}, \quad \forall u, v \in \mathcal{V}, \quad (1.18)$$

et soit $\|\cdot\|_{\mathcal{V}}$ la norme associée

$$\|v\|_{\mathcal{V}} = \|\varepsilon(v)\|_{\mathcal{H}}, \quad \forall v \in \mathcal{V}. \quad (1.19)$$

Par l'inégalité de Korn (1.17), il vient que $\|\cdot\|_{H_1}$ et $\|\cdot\|_{\mathcal{V}}$ sont des normes équivalentes sur $\mathcal{V}$ et ainsi $(\mathcal{V}, \|\cdot\|_{\mathcal{V}})$ est un espace de Hilbert réel.

En outre, par le Théorème de trace de Sobolev et (1.17), il existe une constante c_d dépendant uniquement de Ω, Γ_D et Γ_C , pour tout $v \in \mathcal{V}$, telle que

$$\|v\|_{L^2(\Gamma_C)^d} \leq c_d \|v\|_{\mathcal{V}}. \quad (1.20)$$

1.2.6 Espaces fonctionnels

On introduit dans cette section les espaces du type Sobolev utilisés en mécanique et associés aux opérateurs divergence et déformation, on montre leurs principales propriétés, notamment les théorèmes de trace, aussi quelques espaces de fonctions définies sur un intervalle réel et à valeur dans l'espace de Hilbert.

Maintenant, pour procéder à la formulation variationnelle, nous avons besoin des les espaces de Hilbert suivants, associés aux inconnues mécaniques u , et σ :

$$\begin{cases} \mathbb{H} = \{u = (u_i); \ u_i \in L^2(\Omega)\} = L^2(\Omega)^d, \\ \mathbb{H}_1 = \{u = (u_i); \ u_i \in W^{1,2}(\Omega)\} = W^{1,2}(\Omega)^d, \\ \mathcal{H} = \{\sigma = (\sigma_{ij}); \ \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \in L^2(\Omega)\} = L^2(\Omega)_s^{d \times d}, \\ \mathcal{H}_1 = \{\sigma = (\sigma_{ij}) \in \mathcal{H}; \ \text{Div } \sigma \in \mathbb{H}\} = W^{1,2}(\Omega)_s^{d \times d}. \end{cases}$$

Les espaces $\mathbb{H}, \mathbb{H}_1, \mathcal{H}$ et $\mathcal{H}_1$ sont des espaces réels de Hilbert munis des produits scalaires respectivement, donnés par

$$\begin{cases} (u, v)_{\mathbb{H}} = \int_{\Omega} u_i \cdot v_i dx, \\ (u, v)_{\mathbb{H}_1} = \int_{\Omega} u_i \cdot v_i dx + \int_{\Omega} \nabla u_i \cdot \nabla v_i dx, \\ (\sigma, \theta)_{\mathcal{H}} = \int_{\Omega} \sigma_{ij} \cdot \theta_{ij} dx, \\ (\sigma, \theta)_{\mathcal{H}_1} = \int_{\Omega} \sigma_i \cdot \theta_i dx + \int_{\Omega} \text{Div } \sigma \cdot \text{Div } \theta dx. \end{cases}$$

où $\nabla : \mathbb{H}_1 \rightarrow \mathbb{H}$, $\varepsilon : \mathbb{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}$ et $\text{Div} : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathbb{H}$ sont respectivement les opérateurs de gradient, de déformation et de divergence, définis par

$$\begin{aligned} \nabla u &= (u_{i,j}), \quad \varepsilon(u) = (\varepsilon_{i,j}(u)), \quad \varepsilon_{i,j}(u) = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad \forall u \in \mathbb{H}_1, \\ \text{Div } \sigma &= (\sigma_{ij,j}), \quad \forall \sigma \in \mathcal{H}_1. \end{aligned}$$

Les normes sur les espaces $\mathbb{H}, \mathbb{H}_1, \mathcal{H}$, et $\mathcal{H}_1$ sont notées par $\|\cdot\|_{\mathbb{H}}, \|\cdot\|_{\mathbb{H}_1}, \|\cdot\|_{\mathcal{H}}, \|\cdot\|_{\mathcal{H}_1}$ respectivement.

Puisque la frontière Γ est Lipschitzienne, le vecteur normal extérieur ν à la frontière est défini p.p. Pour tout champ de vecteur $v \in \mathbb{H}_1$ nous utilisons la notation v pour désigner la trace de v sur Γ . Désignons par $\mathbb{H}'_{\Gamma}$ le dual de $\mathbb{H}_{\Gamma} = H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^d$ et $(\cdot, \cdot)_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \Gamma}$ le produit de dualité entre $\mathbb{H}'_{\Gamma}$ et $\mathbb{H}_{\Gamma}$.

Pour q assez régulier nous avons la formule de Green suivante

$$(q, \nabla \eta)_{\mathbb{H}} + (\text{div } q, \eta)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Gamma} q \nu \cdot \eta \, da, \quad \forall \eta \in \mathbb{W}. \quad (1.21)$$

Pour tout $\sigma \in \mathcal{H}_1$, il existe un élément $\sigma \nu \in \mathbb{H}'_{\Gamma}$ tel que

$$(\sigma \nu, v)_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \Gamma} = (\sigma, \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + (\text{Div } \sigma, v)_{\mathbb{H}} \quad \forall v \in \mathbb{H}_1,$$

en outre, si σ est continûment différentiable sur $\Omega \cup \Gamma$, tel que

$$(\sigma \nu, v)_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \Gamma} = \int_{\Gamma} \sigma \nu \cdot v \, da, \quad \forall v \in \mathbb{H}_1,$$

donc, pour σ assez régulier nous avons la formule de Green suivante

$$(\sigma, \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + (\text{Div } \sigma, v)_{\mathbb{H}} = \int_{\Gamma} \sigma \nu \cdot v \, da, \quad \forall v \in \mathbb{H}_1, \quad (1.22)$$

où da est un élément de mesure de surface.

Dans ce qui suit, nous définissons le espace de Sobolev de nos problème :

$$Q = \{ \eta \in H^1(\Omega) \mid \eta = 0 \text{ sur } \Gamma_D \cup \Gamma_N \}. \quad (1.23)$$

Le espace Q définis par (1.23) est espace de Hilbert réel muni d'un produit scalaire donnés par

$$(\theta, \eta)_Q = (\nabla \theta, \nabla \eta)_{\mathbb{H}} \quad \forall \theta, \eta \in Q. \quad (1.24)$$

Puisque $\text{mes } \Gamma_D > 0$, l'inégalité de Friedrichs-Poincaré est vérifiée, ainsi il existe une constante $c_K > 0$ dépendant uniquement de Ω telle que :

$$\|\nabla \eta\|_{\mathbb{H}} \geq c_p \|\eta\|_Q, \quad \forall \eta \in Q. \quad (1.25)$$

De plus, par le Théorème de trace de Sobolev 1.2.8, il existe une constante c_t dépendant uniquement de Ω, Γ_D et Γ_C , pour tout $\eta \in Q$, telle que

$$\|\eta\|_{L^2(\Gamma_C)} \leq c_t \|\eta\|_Q. \quad (1.26)$$

Soit $0 < T < \infty$ et soit $(X, \|\cdot\|_X)$ un espace de Banach réel, nous notons par $C(0, T; X)$ et $C^1(0, T; X)$ les espaces des fonctions continues et continûment différentiables sur $[0, T]$ avec valeur sur X , respectivement, avec les normes

$$\|\pi\|_{C(0, T; X)} = \max_{t \in [0, T]} \|\pi(t)\|_X,$$

$$\|\pi\|_{C^1(0, T; X)} = \max_{t \in [0, T]} \|\pi(t)\|_X + \max_{t \in [0, T]} \|\dot{\pi}(t)\|_X.$$

De plus, nous utilisons le point ci-dessus pour indiquer la dérivée par rapport à la variable de temps.

1.2.7 Espaces $L^p(0, T; X)$ et $W^{k,p}(0, T; X)$

Définition 1.2.5. Soit $1 \leq p \leq \infty$, l'espace de Lebesgue $L^p(0, T; X)$ est l'ensemble des classes de fonctions $u : (0, T) \rightarrow X$ mesurables telle que l'application $t \rightarrow \|u(t)\|_X$ appartient à $L^p(0, T)$. On sait que $L^p(0, T; X)$ est un espace vectoriel normé avec la norme

$$\begin{cases} \|u\|_{L^p(0, T; X)} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}} & \text{si } 1 \leq p < \infty, \\ \|u\|_{L^\infty(0, T; X)} = \inf \{ C > 0 : \|u(t)\|_X \leq C, \text{ p.p. } t \in (0, T) \} & \text{si } p = \infty. \end{cases}$$

Par ailleurs, on a les résultats suivants.

Propriété 1.2.1.

(1) $L^p(0, T; X)$ ($1 \leq p \leq \infty$) est un espace de Banach.

(2) Si X est un espace de Hilbert avec le produit scalaire $(\cdot, \cdot)_X$ alors $L^2(0, T; X)$ est aussi un espace de Hilbert avec le produit scalaire

$$(u, v)_{L^2(0, T; X)} = \int_0^T (u(t), v(t))_X dt.$$

(3) $L^r(0, T; X) \subset L^q(0, T; X)$ avec injection continue $1 \leq q \leq r \leq \infty$.

(4) Si X est un espace de Hilbert, alors

$$L^p(0, T; X)' = L^q(0, T; X) \quad \text{si } 1 < p, q < \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

$$L^1(0, T; X)' = L^\infty(0, T; X),$$

où $L^p(0, T; X)'$ représente le dual de l'espace $L^p(0, T; X)$, $1 \leq p \leq \infty$.

Définition 1.2.6. Soit $u, v \in L^1(0, T; X)$. La fonction v s'appelle la dérivée généralisée d'ordre n de u sur $(0, T)$ si

$$\int_0^T \varphi^{(n)}(t) u(t) dt = (-1)^n \int_0^T \varphi(t) v(t) dt, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(0, T).$$

$C_c^\infty(0, T)$ étant l'espace des fonctions réelles indéfiniment dérivables, à support compact dans $(0, T)$. Nous écrivons $v = \dot{u}$ pour $n = 1$ et $v = u^{(n)}$ pour $n \geq 2$.

Définition 1.2.7. Soit $1 \leq p \leq \infty$. L'espace de Sobolev $W^{1,p}(0, T; X)$ est l'espace des fonctions $u : [0, T] \rightarrow X$ telles que $u \in L^p(0, T; X)$ et $\dot{u} \in L^p(0, T; X)$. Notons que $W^{1,p}(0, T; X)$ est un espace de Banach muni de la norme

$$\|u\|_{W^{1,p}(0, T; X)} = \|u\|_{L^p(0, T; X)} + \|\dot{u}\|_{L^p(0, T; X)}.$$

En particulier, $W^{1,2}(0, T; X)$ muni de la norme précédente est un espace de Hilbert.

Définition 1.2.8. Étant donné un entier $k \geq 2$ et un réel $1 \leq p \leq \infty$, on définit par récurrence l'espace

$$W^{k,p}(0, T; X) = \{u \in W^{k-1,p}(0, T; X) \mid \dot{u} \in W^{k-1,p}(0, T; X)\}.$$

On vérifie aisément que $u \in W^{k,p}(0, T; X)$ si et seulement s'il existe k fonctions $g_1, \dots, g_k \in L^p(0, T; X)$ telle que

$$\int_0^T u(t) \varphi^{(j)}(t) dt = (-1)^j \int_0^T g_j(t) \varphi(t) dt \quad \forall \varphi \in C_c^\infty([0, T]), \forall j = 1, 2, \dots, k,$$

où $\varphi^{(j)}$ désigne la dérivée d'ordre j de φ . On peut donc considérer les dérivées successives $\dot{u} = g_1, u^{(2)} = g_2, \dots, u^{(k)} = g_k$. L'espace $W^{k,p}(0, T; X)$ est un espace de Banach muni de la norme

$$\|u\|_{W^{k,p}(0,T;X)} = \|u\|_{L^p(0,T;X)} + \sum_{\alpha=1}^{\alpha=k} \|u^{(\alpha)}\|_{L^p(0,T;X)}.$$

Théorème 1.2.12. Si la fonction u appartient à l'espace $W^{1,p}(0, T; X)$, $p \in [1, \infty]$. Nous avons alors :

$$1. \|u(t) - u(s)\|_X \leq \int_s^t \|\dot{u}(r)\|_X dr \quad 0 \leq s \leq t \leq T,$$

2. si de plus $p < \infty$, on a

$$\|u(t) - u(s)\|_X^p \leq (t-s)^p \int_s^t \|\dot{u}(r)\|_X^p dr \quad 0 \leq s \leq t \leq T,$$

3. si $p = \infty$, on a

$$\|u(t) - u(s)\|_X \leq \|\dot{u}\|_{L^\infty(0,T;X)} \quad 0 \leq s \leq t \leq T.$$

Théorème 1.2.13. Dans le cas où l'espace $(X, (\cdot, \cdot)_X)$ est un espace de Hilbert et si la fonction u appartient à l'espace $W^{1,2}(0, T; X)$, alors

1. la fonction $t \mapsto \frac{1}{2} \|u(t)\|_X^2$ est une fonction absolument continue sur l'intervalle $]0, T[$,

2. $\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u(t)\|_X^2 = (\dot{u}(t), u(t))_X$, p.p. $t \in]0, T[$,

3. $\frac{1}{2} \|u(t)\|_X^2 = \frac{1}{2} \|u(0)\|_X^2 + \int_0^t (\dot{u}(s), u(s))_X ds$, $\forall t \in [0, T]$.

Ces quelques propriétés achèvent cette section. Pour plus de détails sur les résultats dans ce paragraphe nous renvoyons le lecteur par exemple aux références [18].

1.2.8 Rappels d'analyse non linéaire dans les espaces de Hilbert

Dans ce paragraphe, nous rappelons quelques éléments d'analyse non linéaire dans les espaces de Hilbert et quelques résultats concernant les équations et les inéquations variationnelles d'évolution qui interviennent dans l'étude des problèmes mécaniques.

I-Opérateur fortement monotone

Nous commençons ici par un bref rappel sur les opérateurs frottements monotones et de Lipschitz. Pour cela, on considère un espace de Hilbert H munit du produit scalaire $(\cdot, \cdot)_H$ et de la norme associé $\|\cdot\|_H$.

Définition 1.2.9. Soient $A : H \rightarrow H$ un opérateur non linéaire, l'opérateur A est dit

1. monotone si

$$(Au - Av, u - v)_H \geq 0, \quad \forall u, v \in H,$$

2. fortement monotone s'il existe $m > 0$ tel que

$$(Au - Av, u - v)_H \geq m\|u - v\|_H^2, \quad \forall u, v \in H,$$

3. Lipschitz s'il existe $L > 0$ tel que

$$\|Au - Av\|_H \leq L\|u - v\|_H, \quad \forall u, v \in H,$$

4. hémicontinu si pour toute suite numérique (t_n) tel que $t_n \rightarrow t$ lorsque $n \rightarrow \infty$ on a :

$$(A(u + t_nv), w)_H \rightarrow (A(u + tv), w)_H \quad n \rightarrow \infty, \quad \forall u, v, w \in H.$$

Définition 1.2.10. Soit la fonction $j : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ et soit Ω ouvert dans $H \times H$, on dit que j est localement Lipschitzienne par rapport à la deuxième variable si, pour tout $(t_0, x_0) \in \Omega$, il existe un voisinage $U \subset \Omega$ de (t_0, x_0) et une constante $C > 0$ tels que, pour tous (t, x_1) et $(t, x_2) \in U$, on a

$$|j(t, x_1) - j(t, x_2)| \leq C\|x_1 - x_2\|.$$

Théorème 1.2.14. (Théorème de point fixe de Banach)

Soit K un sous ensemble fermé et non vide de l'espace de Banach $(X, \|\cdot\|_X)$. Supposons que $\Lambda : K \rightarrow K$ est une contraction, c'est à dire il existe $c \in]0, 1[$ telle que

$$\|\Lambda(u) - \Lambda(v)\|_X \leq c\|u - v\|_X \quad \forall u, v \in K.$$

Alors, il existe un unique élément $u \in K$ tel que $\Lambda(u) = u$, i.e, possède un point fixe unique dans K .

Pour l'opérateur $\Lambda^n : K \rightarrow K$ défini par la relation

$$\Lambda^n = \Lambda(\Lambda^{n-1}) \quad n \geq 2,$$

nous avons la version suivante du théorème de point fixe.

Théorème 1.2.15. Sous les mêmes conditions du Théorème 1.2.14. Supposons que $\Lambda^n : K \rightarrow K$ est une contraction pour n un entier positif. Alors Λ admet un point fixe unique dans K .

Définition 1.2.11. Une forme bilinéaire $a : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue s'il existe un réel $M > 0$ tel que

$$|a(u, v)| \leq M \|u\|_X \|v\|_X, \quad \forall u, v \in X.$$

Définition 1.2.12. Une forme bilinéaire $a : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite coercive s'il existe une constante $m > 0$ telle que

$$a(u, u) \geq m \|u\|_X^2, \quad \forall u \in X.$$

Théorème 1.2.16. (Théorème du Lax-Milgram)

Soient H un espace de Hilbert, $a : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire continue coercive, et $l : H \longrightarrow \mathbb{R}$ une forme linéaire continue. Alors, il existe une solution unique $u \in H$ qui satisfait

$$a(u, v) = l(v), \quad \forall v \in H.$$

De plus, si $a(., .)$ est symétrique, alors u est caractérisé par la propriété

$$\frac{1}{2}a(u, u) - (u, u)_X \leq \frac{1}{2}a(v, v) - (v, v)_X, \quad \forall v \in X.$$

II- Équation différentielle ordinaire

Théorème 1.2.17. (Cauchy-Lipschitz)

Soit $(X, \|\cdot\|_X)$ un espace de Banach réel et soit $F(t, \cdot) : X \rightarrow X$ un opérateur défini p.p. sur $[0, T]$, qui satisfait les propriétés suivantes

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \text{ Il existe } L_F > 0 \text{ tel que} \\ \|F(t, x) - F(t, y)\|_X \leq L_F \|x - y\|_X \quad \forall x, y \in X, p.p. t \in [0, T], \\ (b) \text{ Il existe } 1 \leq p \leq \infty \text{ tel que } F(\cdot, x) \in L^p(0, T; X) \quad \forall x \in X. \end{array} \right.$$

Alors, pour tout $x_0 \in X$, il existe une fonction unique $x \in W^{1,p}(0, T; X)$ tel que

$$\dot{x}(t) = F(t, x(t)), \quad p.p. \quad t \in [0, T],$$

$$x(0) = x_0.$$

III- Équation aux dérivées partielles d'évolution

Théorème 1.2.18. Soit $\mathcal{V} \subset \mathbb{H} \subset \mathcal{V}'$ un triplet de Gelfand. Soit $A : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}'$ un opérateur hemicontinu et monotone qui satisfait

$$(Av, v)_{\mathcal{V}' \times \mathcal{V}} \geq w \|v\|_{\mathcal{V}}^2 + \lambda, \quad \forall v \in \mathcal{V}, \quad (1.27)$$

$$\|Av\|_{\mathcal{V}'} \leq C_1(\|v\|_{\mathcal{V}} + 1), \quad \forall v \in \mathcal{V}. \quad (1.28)$$

Pour des constantes $w > 0$, $C_1 > 0$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, étant donnée $u_0 \in \mathbb{H}$ et $F \in L^2(0, T; \mathcal{V}')$, alors il existe une fonction unique u satisfait

$$u \in L^2(0, T; \mathcal{V}) \cap C^1(0, T; \mathbb{H}), \quad \dot{u} \in L^2(0, T; \mathcal{V}'),$$

$$\dot{u}(t) + Au(t) = F(t) \quad \text{p.p. } t \in [0, T],$$

$$u(0) = u_0.$$

IV- Inégalités variationnelles paraboliques

Théorème 1.2.19. Soit $\mathcal{V} \subset \mathbb{H} \subset \mathcal{V}'$ un triplet de Gelfand, K est un sous-ensemble non vide fermé et convexe de $\mathcal{V}$, et supposons que $a(., .) : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ est une forme bilinéaire, continue et symétrique telle que

$$\exists \alpha > 0 \text{ et } c_0 \quad a(v, v) + c_0 \|v\|_H^2 \geq \alpha \|v\|_{\mathcal{V}}^2 \quad \forall v \in \mathcal{V}.$$

Alors, pour tout $u_0 \in K$ et $F \in L^2(0, T; \mathbb{H})$, il existe une unique fonction u qui satisfait

$$u \in H^1(0, T; \mathbb{H}) \cap L^2(0, T; \mathcal{V}), \quad u(t) \in K, \quad \forall t \in [0, T],$$

$$(\dot{u}(t), v - u(t))_{\mathcal{V}' \times \mathcal{V}} + a(u(t), v - u(t)) \geq (F(t), v - u(t))_{\mathbb{H}} \quad \forall v \in K, \text{ p.p. } t \in [0, T],$$

$$u(0) = u_0.$$

1.2.9 Dérivée fractionnaire de Caputo

Définition 1.2.13. Une fonction $u : [0, T] \rightarrow X$ est dite absolument continue si quelque soit $\epsilon > 0$, il existe $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tel que pour toute suite d'intervalles (a_j, b_j) disjoints, inclus dans $[0, T]$, tel que $\sum_j (b_j - a_j) < \delta$ on a $\sum_j \|u(b_j) - u(a_j)\|_X < \epsilon$.

L'espace des fonctions absolument continues sur $[0, T]$ noté par $AC([0, T]; X)$.

Définition 1.2.14. (*L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville*).

Soit X un espace de Banach et $(0, T)$ un intervalle de temps fini. L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha > 0$ pour une fonction donnée $f \in L^1(0, T; X)$ est définie par

$${}_0I_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds \quad \text{pour tout } t \in (0, T),$$

où $\Gamma(\cdot)$ représente la fonction Gamma définie par $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} dt$.

Pour compléter la définition, nous fixons ${}_0I_t^0 = I$, où I est l'opérateur d'identité, ce qui signifie que ${}_0I_t^0 f(t) = f(t)$ pour p.p. $t \in (0, T)$.

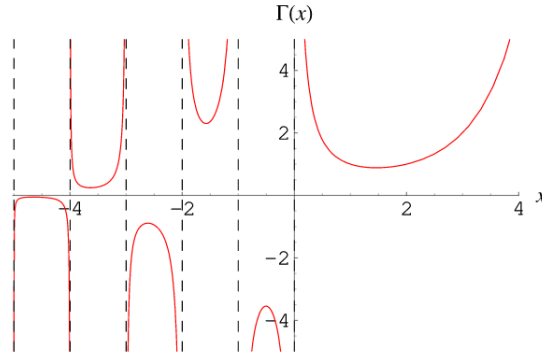


FIGURE 1.3 – courbe fonction gamma

Définition 1.2.15. (*La dérivée Caputo de l'ordre, $0 < \alpha \leq 1$*). Soit X un espace de Banach, $0 < \alpha \leq 1$ et $(0, T)$ un intervalle de temps fini. Pour une fonction donnée $f \in AC(0, T; X)$, la dérivée fractionnaire de Caputo de f est définie par

$${}_0^C D_t^\alpha f(t) = {}_0I_t^{1-\alpha} f'(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} f'(s) ds \quad \text{pour tout } t \in (0, T).$$

Il est évident que si $\alpha = 1$, la dérivée de Caputo se réduit à la dérivée classique du premier ordre, c'est-à-dire que nous avons

$${}_0^C D_t^1 f(t) = I f'(t) = f'(t) \quad \text{pour p.p. } t \in (0, T).$$

Propriété 1.2.2. . Soit X un espace de Banach et $\alpha, \beta > 0$. Les énoncés suivants sont alors valables :

(i) pour $y \in L^1(0, T; X)$, nous avons

$${}_0I_t^\alpha {}_0I_t^\beta y(t) = {}_0I_t^{\alpha+\beta} y(t) \quad \text{pour p.p. } t \in (0, T),$$

(ii) pour $y \in AC(0, T; X)$ et $\alpha \in (0, 1]$, nous avons

$${}_0I_t^\alpha {}_0^C D_t^\alpha y(t) = y(t) - y(0) \quad \text{pour p.p. } t \in (0, T),$$

(iii) pour $y \in L^1(0, T; X)$, nous avons

$${}_0^C D_t^\alpha {}_0I_t^\alpha y(t) = y(t) \quad \text{pour p.p. } t \in (0, T).$$

Définition 1.2.16. (La dérivée directionnelle généralisée de Clarke et le gradient généralisé). Soit $J : X \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction localement Lipschitz. on note $J^0(u, v)$ la dérivée directionnelle généralisée de Clarke de J au point $x \in X$ dans la direction $y \in X$ définie par

$$J^0(x, y) = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \sup_{z \rightarrow x} \frac{J(z + \lambda y) - J(z)}{\lambda}.$$

Le gradient généralisé de $J : X \rightarrow \mathbb{R}$ en $x \in X$ est défini par

$$\partial J(x) = \{\xi \in X' \mid \forall y \in X, J^0(x, y) \geq (\xi, y)_{X' \times X}\}.$$

Propriété 1.2.3. [10] Soit $-\infty \leq \alpha < \beta \leq \infty$. Supposons que $f : [0, \infty) \times (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ soit continue et localement Lipschitz dans la seconde variable. En d'autres termes, $\forall A > 0$ et $K \subset (\alpha, \beta)$ compacte, il existe $L_{A,K} > 0$ telle que

$$\sup_{0 \leq t \leq A} |f(t, v_1) - f(t, v_2)| \leq L_{A,K} |v_1 - v_2|, \quad \forall v_1, v_2 \in K.$$

Soit $0 < \alpha < 1$ and $v_0 \in (\alpha, \beta)$. alors

$${}_0^C D_t^\alpha v(t) = f(t, v(t)), v(0) = v_0,$$

a une unique solution continue $v(\cdot)$ sur $[0, T_*)$, où

$$T_* = \sup\{h > 0 \text{ le solution } v \in C([0, h)), v(t) \in (\alpha, \beta), \forall t \in [0, h)\}.$$

Est le plus grand temps d'existence satisfaisant $T_* \in (0, \infty]$. Si $T_* < \infty$, alors on a

$$\liminf_{t \rightarrow T_*^-} v(t) = \alpha, \text{ où } \limsup_{t \rightarrow T_*^-} v(t) = \beta.$$

Soit le problème suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in W^{1,2}(0, T; \mathcal{V}) \text{ tel que} \\ (\mathcal{C}\varepsilon({}_0^C D_t^\alpha u(t)), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + (\mathcal{E}\varepsilon(u(t)), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} \\ \quad + \int_{\Gamma_C} j_\nu^0(u_\nu(t), v_\nu) da + \int_{\Gamma_C} j_\tau^0(u_\tau(t), v_\tau) da \geq (f(t), v)_{\mathcal{V}}, \\ \text{pour tout } v \in \mathcal{V}, \text{ p.p. } t \in (0, T), \\ u(0) = u_0 \in \Omega \end{array} \right. \quad (1.29)$$

Dans l'étude du problème, nous supposons que l'opérateur de viscosité $\mathcal{C} : \Omega \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{S}^d$, l'opérateur d'élasticité $\mathcal{E} : \Omega \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{S}^d$, le potentiel non convexe $j_\nu : \Gamma_C \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, et la

fonction tangentielle $j_\tau : \Gamma_C \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, satisfont aux hypothèses suivantes.

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{C} : \Omega \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{S}^d \text{ est tel que} \\ \text{(a) } \mathcal{C}(x, \varepsilon) = c(x)\varepsilon \text{ pour p.p. } x \in \Omega \text{ et tout } \varepsilon \in \mathbb{S}^d, \\ \text{(b) } c(x) = (c_{ijkl}(x)) \text{ avec } c_{ijkl} \in L^\infty(\Omega), \\ \text{(c) } c_{ijkl}(x)\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} \geq m_c \|\varepsilon\|_{\mathbb{S}^d}^2 \text{ pour p.p. } x \in \Omega, \\ \text{et tout } \varepsilon = (\varepsilon_{ij}) \in \mathbb{S}^d \text{ avec } m_c > 0. \end{array} \right. \quad (1.30)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{E} : \Omega \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{S}^d \text{ est tel que} \\ \text{(a) } \mathcal{E}(x, \varepsilon) = e(x)\varepsilon \text{ pour p.p. } x \in \Omega \text{ et tout } \varepsilon \in \mathbb{S}^d, \\ \text{(b) } e(x) = (e_{ijkl}(x)) \text{ avec } e_{ijkl} \in L^\infty(\Omega). \end{array} \right. \quad (1.31)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} j_\nu : \Gamma_C \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ est tel que} \\ \text{(a) } j_\nu(\cdot, r) \text{ est mesurable sur } \Gamma_C \text{ pour tout } r \in \mathbb{R}, \text{ et} \\ \text{il existe } e_\nu \in L^1(\Gamma_C) \text{ telle que } j_\nu(\cdot, e_\nu(\cdot)) \in L^1(\Gamma_C), \\ \text{(b) } j_\nu(x, \cdot) \text{ est localement Lipschitz sur } \mathbb{R} \text{ pour p.p. } x \in \Gamma_C, \\ \text{(c) il existe } c_{j_\nu} > 0 \text{ telle que} \\ |\partial j_\nu(x, r)| \leq c_{j_\nu}(1 + |r|) \text{ pour tout } r \in \mathbb{R}. \end{array} \right. \quad (1.32)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} j_\tau : \Gamma_C \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R} \text{ est tel que} \\ \text{(a) } j_\tau(\cdot, \xi) \text{ est mesurable sur } \Gamma_C \text{ pour tout } \xi \in \mathbb{R}^d, \text{ et} \\ \text{il existe } e_\tau \in L^1(\Gamma_C; \mathbb{R}^d) \text{ telle que } j_\tau(\cdot, e_\tau(\cdot)) \in L^1(\Gamma_C), \\ \text{(b) } j_\tau(x, \cdot) \text{ est localement Lipschitz sur } \mathbb{R}^d \text{ pour p.p. } x \in \Gamma_C, \\ \text{(c) il existe } c_{j_\tau} > 0 \text{ telle que} \\ \|\partial j_\tau(x, \xi)\|_{\mathbb{R}^d} \leq c_{j_\tau}(1 + \|\xi\|_{\mathbb{R}^d}) \text{ pour tout } \xi \in \mathbb{R}^d. \end{array} \right. \quad (1.33)$$

$$u_0 \in \mathcal{V}, \quad f \in L^2(0, T; \mathcal{V}). \quad (1.34)$$

Théorème 1.2.20. [16] *Supposons que les hypothèses (1.30)-(1.34) se vérifient. Alors le problème (1.29) admet au moins une solution $u \in W^{1,2}(0, T; \mathcal{V})$.*

Théorème 1.2.21. *Soit $T > 0, \alpha \in (0, 1)$ et $p \in [1, \infty)$. Soit $Q, L^2(0, T; Q)$ et Q' des espaces de Banach. $Q \hookrightarrow L^2(0, T; Q)$ de façon compacte et $L^2(0, T; Q) \hookrightarrow Q'$ de façon continue. Supposons que $W \subset L^1_{loc}((0, T); Q)$ satisfasse :*

(i). *Il existe $r_1 \in [1, \infty)$ et $c > 0$ tels que $\forall u \in W$,*

$$\sup_{t \in (0, T)} {}_0I_t^\alpha (\|u\|_Q^{r_1}) = \sup_{t \in (0, T)} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \|u(s)\|_Q^{r_1} ds \leq c.$$

(ii). Il existe $p_1 \in (p, \infty]$ tels que W est borné dans $L^{p_1}((0, T); L^2(0, T; Q))$.

(iii). There exist $r_2 \in [1, \infty)$ and $c_s > 0$ tels que $\forall u \in W$, il existe une affectation de la valeur initiale u_0 telle que la dérivée faible de Caputo satisfasse :

$$\| {}^C_0 D_t^\alpha u \|_{L^{r_2}((0, T); Q')} \leq c_s,$$

Alors, W est relativement compact dans $L^p((0, T); L^2(0, T; Q))$.

Propriété 1.2.4. Soit $\alpha \in (0, 1)$. Si l'application $u : [0, T] \rightarrow Q$ satisfait

$$u \in C^1((0, T); Q) \cap C([0, T]; Q),$$

et $u \rightarrow E(u) \in \mathbb{R}$ est une fonctionnelle convexe C^1 sur Q , alors

$${}_0^C D_t^\alpha u(t) = \frac{1}{1-\alpha} \left(\frac{u(t) - u(0)}{t^\alpha} + \alpha \int_0^t \frac{u(t) - u(s)}{(t-s)^{\alpha+1}} ds \right),$$

et

$${}_0^C D_t^\alpha E(u(t)) \leq ({}_0^C D_t^\alpha E(u), {}_0^C D_t^\alpha(u)),$$

où ${}_0^C D_t^\alpha E(\cdot) : Q \rightarrow Q'$ est la différentielle de Fréchet et $(\cdot, \cdot)$ est compris comme l'appariement dual entre Q' et Q .

Résultat 1.2.1. Notons que si nous supposons que la proposition 1.2.4 est valable pour u et que $\frac{1}{2} \|u(t)\|_Q^2$ est une fonctionnelle convexe, nous avons

$${}_0^C D_t^\alpha \left\| \frac{1}{2} u(t) \right\|_Q^2 \leq (u(t), {}_0^C D_t^\alpha u(t)).$$

1.2.10 Lemme de Gronwall

Nous rappelons ici les lemmes classiques du type Gronwall qui interviennent problèmes de contact, en particulier pour établir l'unicité de la solution.

Lemme 1.2.2. Soient $m, n \in C([0, T]; \mathbb{R})$ telles que $m(t) \geq 0$ et $n(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0, T]$, $a \geq 0$ une constante et $\psi \in C([0, T]; \mathbb{R})$

(1) Si

$$\psi(t) \leq a + \int_0^t m(s) ds + \int_0^t n(s) \psi(s) ds \quad \forall t \in [0, T],$$

alors

$$\psi(t) \leq \left(a + \int_0^t m(s) ds \right) \exp \left(\int_0^t n(s) ds \right) \quad \forall t \in [0, T].$$

(2) Si

$$\psi(t) \leq m(t) + a \int_0^t \psi(s) ds \quad \forall t \in [0, T],$$

alors

$$\int_0^t \psi(s) ds \leq e^{aT} \int_0^t m(s) ds \quad \forall t \in [0, T].$$

Pour le cas particulier $m = 0$, la partie (1) de ce lemme devient.

Corollaire 1.2.1. Soit $n \in C([0, T]; \mathbb{R})$ telles que $n(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0, T]$ et soit $a \geq 0$, si $\psi \in C([0, T]; \mathbb{R})$ est une fonction telle que

$$\psi(t) \leq a + \int_0^t n(s) \psi(s) ds \quad \forall t \in [0, T],$$

alors

$$\psi(t) \leq a \exp \left(\int_0^t n(s) ds \right) \quad \forall t \in [0, T].$$

1.2.11 Les inégalités de Hölder et de Young

Lemme 1.2.3. (Inégalité de Young)

Soit $1 < p < \infty$ alors pour tous $a, b \geq 0$, on a

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q},$$

où $q \in]1, +\infty[$ est l'exposant conjugué à p définie par $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Lemme 1.2.4. (Inégalité de Hölder)

Soient p et q deux exposants conjugués ($\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$), $1 \leq p \leq \infty$. Soient $f \in L^p(\Omega)$, $g \in L^q(\Omega)$. Alors, $f.g \in L^1(\Omega)$, et

$$\|fg\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

De plus l'inégalité de Cauchy-Schwarz correspondant à l'inégalité de Hölder pour $p = q = 2$ est vérifiée, i.e.

$$\int_{\Omega} |f(x)g(x)| dx \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|g\|_{L^2(\Omega)}.$$

ANALYSE D'UN PROBLÈME DE CONTACT AVEC COMPLIANCE NORMALE ET FROTTEMENT EN MATÉRIAUX THERMO-VISCOÉLASTIQUES

2

Dans ce chapitre, nous étudions d'un problème de contact frictionnel quasi-statique entre un corps thermo-viscoélastique et une fondation thermoconductrice et modélisé avec la loi de frottement Coulomb. Notre intérêt est de décrire un processus dynamique, et démontrer que le modèle résultant se ramène à un problème mathématique bien posé. Ce chapitre est organisé de la manière suivante : dans la première section, nous posons et décrivons le problème mécanique puis nous indiquons les hypothèses sur les données, dans la deuxième section, en utilisant les formules de Green, on propose une formulation variationnelle du problème, et dans la troisième section, on démontre l'existence d'une solution faible. Enfin, nous énonçons notre résultat principal d'existence, est en utilisant théorème des opérateurs monotones, la dérivée de Caputo, la sous-différentielle de Clark, la méthode Galerkin et le théorème du point fixe de Banach.

2.1 FORMULATION DU PROBLÈME

Le modèle mécanique que l'on étudie peut se formuler de la manière suivante :

Problème ($\mathcal{P}$). Trouver le champ de déplacement $u = (u_i) : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$, le champ de contrainte $\sigma = (\sigma_{ij}) : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{S}^d$, le champ de température $\theta : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, et le vecteur du flux de chaleur $q = (q_i) : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ telle que :

$$\sigma(t) = \mathcal{C}\varepsilon({}_0^C D_t^\alpha u(t)) + \mathcal{E}\varepsilon(u(t)) - \theta(t)\mathcal{M} \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (2.1)$$

$$q(t) = -\mathcal{K}\nabla\theta(t) \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (2.2)$$

$$\text{Div } \sigma(t) + f_0(t) = 0 \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (2.3)$$

$${}_0^C D_t^\alpha \theta(t) + \text{div } q(t) = q_0(t) \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (2.4)$$

$$u(t) = 0 \quad \text{sur } \Gamma_D \times (0, T), \quad (2.5)$$

$$\sigma(t)\nu = f_1(t) \quad \text{sur } \Gamma_N \times (0, T), \quad (2.6)$$

$$\theta(t) = 0 \quad \text{sur } (\Gamma_D \cup \Gamma_N) \times (0, T), \quad (2.7)$$

$$u(0) = u_0, \quad \theta(0) = \theta_0 \quad \text{dans } \Omega, \quad (2.8)$$

$$-\sigma_\nu(t) = p_\nu(u_\nu(t) - g) \quad \text{sur } \Gamma_C \times (0, T), \quad (2.9)$$

$$\|\sigma_\tau(t)\| \leq p_\tau(u_\nu(t) - g) \quad \text{sur } \Gamma_C \times (0, T), \quad (2.10)$$

$$\|\sigma_\tau(t)\| < p_\tau(u_\nu(t) - g) \Rightarrow u_\tau(t) = 0 \quad \text{sur } \Gamma_C \times (0, T), \quad (2.11)$$

$$\|\sigma_\tau(t)\| = p_\tau(u_\nu(t) - g) \Rightarrow \exists \lambda \geq 0, \sigma_\tau(t) = -\lambda u_\tau(t) \quad \text{sur } \Gamma_C \times (0, T), \quad (2.12)$$

$$q(t)\nu = k_c(u_\nu(t) - g)\phi_L(\theta(t) - \theta_F) \quad \text{sur } \Gamma_C \times (0, T). \quad (2.13)$$

Nous décrivons maintenant le problème (2.1)-(2.13). Premièrement, les équations (2.1) et (2.2) sont la loi constitutive thermo-viscoélastique de Kelvin-Voigt fractionnée pour le temps de Caputo, voir [14]. dans laquelle $\mathcal{E} = (e_{ijkl})$, $\mathcal{M} = (m_{ij})$, $\mathcal{C} = (c_{ijkl})$, $\mathcal{K} = (k_{ij})$ sont respectivement, le tenseur d'élasticité, le tenseur de dilatation thermique, le tenseur de viscosité et le tenseur thermique de conductivité. Les équations (2.3)-(2.4) représentent la contrainte d'équilibre et la Loi de Fourier de conduction thermique avec fraction de temps. Les conditions (2.5)-(2.7) sont le déplacement et les conditions aux limites thermiques. Les conditions initiales sont représenté par l'équation (2.8). De plus, l'équation (2.9) représente la condition de contact à compliance normale, où p_ν est une fonction prescrite. Lorsqu'il est positif, $u_\nu - g$ représente la pénétration des aspérités de la surface dans celles de la Fondation. La loi frottement de coulomb est considérée dans (2.10)-(2.12), où p_τ est une fonction non

négative prescrite, appelée limite de friction. Finalement, la relation (2.13) représente une condition de contact thermique régularisée, où $q\nu$ définie par :

$$\phi_L(s) = \begin{cases} -L & \text{si } s < -L \\ s & \text{si } -L \leq s \leq L, \\ L & \text{si } s > L \end{cases}, \quad \begin{cases} k_c(r) = 0 & \text{si } r < 0 \\ k_c(r) > 0 & \text{si } r \geq 0 \end{cases}$$

où L est une grande constante positive, voir [8].

Nous introduisons les formes bilinéaires suivantes $a(\cdot, \cdot) : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$, $c(\cdot, \cdot) : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$, $d(\cdot, \cdot) : Q \times Q \rightarrow \mathbb{R}$, et $m(\cdot, \cdot) : Q \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ par :

$$a(u, v) := (\mathcal{E}\varepsilon(u), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}}, \quad (2.14)$$

$$c(u, v) := (\mathcal{C}\varepsilon(u), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}}, \quad (2.15)$$

$$d(\theta, \eta) := (\mathcal{K}\nabla\theta, \nabla\eta)_H, \quad (2.16)$$

$$m(\theta, v) := (\mathcal{M}\theta, \varepsilon(v))_{\mathcal{H}}. \quad (2.17)$$

De plus, on définit les opérateurs $J : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$, et $\chi : \mathcal{V} \times Q \times Q \rightarrow \mathbb{R}$, le potentiel non convexe $j_\nu : \Gamma_C \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, et la fonction tangentielle $j_\tau : \Gamma_C \times \mathbb{R}^{d-1} \rightarrow \mathbb{R}$, comme suivant :

$$J(u, v) := \int_{\Gamma_C} p_\nu(u_\nu - g)v_\nu \, da + \int_{\Gamma_C} p_\tau(u_\nu - g)\|v_\tau\| \, da, \quad (2.18)$$

où

$$J(u, v) = \int_{\Gamma_C} j_\nu(v_\nu) + j_\tau(v_\tau) \, da,$$

tel que

$$j_\nu(\cdot, v_\nu) = p_\nu(u_\nu - g)v_\nu, \quad j_\tau(\cdot, v_\tau) = p_\tau(u_\nu - g)\|v_\tau\|.$$

Et

$$\chi(u, \theta, \eta) := \int_{\Gamma_C} k_c(u_\nu - g)\phi_L(\theta - \theta_F)\eta \, da. \quad (2.19)$$

Pour tout u, v dans $\mathcal{V}$ et θ, η dans Q .

Pour l'étude du problème ($\mathcal{P}$), nous considérons les hypothèses suivantes :

H(1) : a) Les opérateurs $a(\cdot, \cdot)$, $c(\cdot, \cdot)$, $d(\cdot, \cdot)$ et $m(\cdot, \cdot)$ sont bilinéaire et satisfont la propriété habituelle de symétrie

$$e_{ijkl} = e_{jikl} = e_{lkij} \in L^\infty(\Omega), \quad c_{ijkl} = c_{jikl} = c_{lkij} \in L^\infty(\Omega),$$

$$k_{ij} = k_{ji} \in L^\infty(\Omega), \quad m_{ij} = m_{ji} \in L^\infty(\Omega);$$

b) les opérateurs $a(\cdot, \cdot)$, $c(\cdot, \cdot)$ et $d(\cdot, \cdot)$ satisfont à la propriété d'ellipticité, c'est-à-dire qu'il existe constantes positive m_a, m_c et m_d telles que :

$$a(v, v) \geq m_a \|v\|_{\mathcal{V}}^2, \quad c(v, v) \geq m_c \|v\|_{\mathcal{V}}^2, \quad d(\eta, \eta) \geq m_d \|\eta\|_Q^2.$$

H(2) : Les opérateurs $a(\cdot, \cdot)$, $c(\cdot, \cdot)$, $d(\cdot, \cdot)$ et $m(\cdot, \cdot)$ satisfont la propriété habituelle de limite

$$\begin{aligned} |a(u, v)| &\leq M_a \|u\|_{\mathcal{V}} \|v\|_{\mathcal{V}}, & |c(u, v)| &\leq M_c \|u\|_{\mathcal{V}} \|v\|_{\mathcal{V}}, \\ |d(\theta, \eta)| &\leq M_d \|\theta\|_Q \|\eta\|_Q, & |m(\theta, v)| &\leq M_m \|\theta\|_Q \|v\|_{\mathcal{V}}. \end{aligned}$$

où $M_a = \|\mathcal{E}\|_\infty$, $M_c = \|\mathcal{C}\|_\infty$, $M_d = \|\mathcal{K}\|_\infty$ et $M_m = \|\mathcal{M}\|_\infty$.

H(3) : Les forces, traction et flux thermique satisfont

$$f_0 \in C(0, T; L^2(\Omega)), \quad f_1 \in C(0, T; L^2(\Gamma_N)^d), \quad \text{et} \quad q_0 \in C(0, T; L^2(\Omega)).$$

H(4) : La fonction d'intervalle, les conditions initiales et le potentiel thermique satisfont :

$$g \geq 0, \quad g \in L^\infty(\Gamma_C), \quad u_0 \in \mathcal{V}_{ad}, \quad \theta_0 \in Q, \quad \text{et} \quad \theta_F \in L^2(0, T; L^2(\Gamma_C)).$$

H(5) : Le coefficient d'échange thermique $k_c : \Gamma_C \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ remplit les conditions :

- a) il existe $M_{k_c} > 0$ tel que $|k_c(x, r)| < M_{k_c}$ pour tout $r \in \mathbb{R}$ et $x \in \Gamma_C$,
tel que $x \mapsto k_c(x, r)$ soit mesurable sur Γ_C pour tout $r \in \mathbb{R}$ et s'annule
pour tout $r \leq 0$ et p.p. $x \in \Gamma_C$;
- b) il existe $L_{k_c} > 0$ tel que

$$|k_c(x, r_1) - k_c(x, r_2)| \leq L_{k_c} |r_1 - r_2| \quad \text{pour tout } r_1, r_2 \in \mathbb{R}.$$

H(6) : La fonction de conformité normale p_ν et la limite de frottement p_τ satisfont à la hypothèses suivantes pour $\delta = \nu, \tau$:

- (a) $p_\delta : \Gamma_C \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$;
- (b) $x \mapsto p_\delta(x, r)$ est mesurable sur Γ_C pour tout $r \in \mathbb{R}$;
- (c) $x \mapsto p_\delta(x, r) = 0$ pour $r \leq 0$ p.p. $x \in \Gamma_C$;
- (d) il existe $c_\delta > 0$ tel que $|p_\delta(x, r)| \leq c_\delta$;

il existe $L_\delta > 0$ tel que

$$|p_\delta(\cdot, r_1) - p_\delta(\cdot, r_2)| \leq L_\delta |r_1 - r_2| \quad \text{pour tout } r_1, r_2 \in \mathbb{R}_+.$$

- H(7) : (a) La fonctionnelle j_ν satisfait $|\partial j_\nu(\cdot, r_\nu)| \leq c_{j_\nu}(1 + |r_\nu|)$,
 pour tout $r_\nu \in \mathbb{R}$ et p.p. $t \in (0, T)$ avec $c_{j_\nu} \geq 0$,
 (b) La fonctionnelle j_τ satisfait $\|\partial j_\tau(\cdot, \xi_\tau)\| \leq c_{j_\tau}(1 + \|\xi_\tau\|_{\mathbb{R}^{d-1}})$,
 pour tout $\xi_\tau \in \mathbb{R}^{d-1}$ et p.p. $t \in (0, T)$ avec $c_{j_\tau} \geq 0$.

En utilisant le théorème de représentation de Riesz, nous concluons qu'il existe les éléments $f(t) \in \mathcal{V}$ et $q_t(t) \in Q$ donnés par

$$(f(t), v)_\mathcal{V} = \int_\Omega f_0(t) \cdot v \, dx + \int_{\Gamma_N} f_1(t) v \nu \, da \quad \text{pour tout } v \in \mathcal{V}, \quad (2.20)$$

$$(q_t(t), \eta)_Q = \int_\Omega q_0(t) \cdot \eta \, dx \quad \text{pour tout } \eta \in Q, \quad (2.21)$$

les conditions H(3), impliquent :

$$f \in C(0, T; \mathcal{V}), \quad q_t \in C(0, T; Q).$$

De toutes ces hypothèses et notations, nous obtenons la formulation variationnelle du problème $(\mathcal{P})$.

2.2 FORMULATION VARIATIONNELLE

En utilisant des formules de Green (1.22) si nous supposons que u et σ sont des fonctions suffisamment régulières qui satisfont (2.3), (2.5) et (2.6), pour tout $v \in \mathcal{V}$, et $t \in [0, T]$ on déduit que :

$$(\sigma(t), \varepsilon(v) - \varepsilon(u(t)))_\mathcal{H} + (\text{Div } \sigma(t), v - u(t))_\mathbb{H} = \int_\Gamma \sigma(t) \nu \cdot (v - u(t)) \, da.$$

On a

$$\begin{aligned} \int_\Omega \sigma(t) (\varepsilon(v) - \varepsilon(u(t))) \, dx + \int_\Omega \text{Div } \sigma(t) \cdot (v - u(t)) \, dx &= \int_{\Gamma_D} \sigma(t) \nu \cdot (v - u(t)) \, da \\ &+ \int_{\Gamma_N} \sigma(t) \nu \cdot (v - u(t)) \, da + \int_{\Gamma_C} \sigma(t) \nu \cdot (v - u(t)) \, da, \end{aligned}$$

d'après (2.3), (2.5), (2.6) et $v \in \mathcal{V}$ on a

$$\int_\Omega \sigma(t) (\varepsilon(v) - \varepsilon(u(t))) \, dx - \int_\Omega f_0(t) \cdot (v - u(t)) \, dx = \int_{\Gamma_N} f_1(t) \cdot (v - u(t)) \, da + \int_{\Gamma_C} \sigma(t) \nu \cdot (v - u(t)) \, da,$$

et moyennant (2.20), on a

$$\int_\Omega \sigma(t) (\varepsilon(v) - \varepsilon(u(t))) \, dx = (f(t), v - u(t))_\mathcal{V} + \int_{\Gamma_C} \sigma(t) \nu \cdot (v - u(t)) \, da, \quad (2.22)$$

et aussi de equation (2.1) on a

$$\int_{\Omega} (\mathcal{C}\varepsilon({}_0^C D_t^\alpha u(t)) + \mathcal{E}\varepsilon(u(t)) - \theta(t)\mathcal{M})(\varepsilon(v) - \varepsilon(u(t)))dx = (f(t), v - u(t))_{\mathcal{V}} + \int_{\Gamma_C} \sigma(t)\nu \cdot (v - u(t))da,$$

d'après (2.14), (2.15) et (2.17) on obtient

$$c({}_0^C D_t^\alpha u(t), v - u(t)) + a(u(t), v - u(t)) - m(\theta(t), v - u(t)) - \int_{\Gamma_C} \sigma(t)\nu \cdot (v - u(t))da = (f(t), v - u(t))_{\mathcal{V}}. \quad (2.23)$$

On calcule le terme d'integral :

$$- \int_{\Gamma_C} \sigma(t)\nu \cdot (v - u(t))da = - \int_{\Gamma_C} \sigma_\nu(t) \cdot (v_\nu - u_\nu(t))da - \int_{\Gamma_C} \sigma_\tau(t) \cdot (v_\tau - u_\tau(t))da. \quad (2.24)$$

D'après (2.9), on obtient

$$- \int_{\Gamma_C} \sigma(t)\nu \cdot (v - u(t))da = \int_{\Gamma_C} p_\nu(u_\nu(t) - g)(v_\nu - u_\nu(t))da - \int_{\Gamma_C} \sigma_\tau(t) \cdot (v_\tau - u_\tau(t))da, \quad (2.25)$$

et aussi en calculant $-\int_{\Gamma_C} \sigma_\tau(t) \cdot (v_\tau - u_\tau(t))da$:

nous supposons $\Gamma = \Gamma_C^+ \cup \Gamma_C^-$, où

$$\Gamma_C^+ = \{x \in \Gamma_C, \|\sigma_\tau(t)\| < p_\tau(u_\nu(t) - g)\} \text{ et } \Gamma_C^- = \{x \in \Gamma_C, \|\sigma_\tau(t)\| = p_\tau(u_\nu(t) - g)\}.$$

On a

$$- \int_{\Gamma_C} \sigma_\tau(t) \cdot (v_\tau - u_\tau(t))da = - \int_{\Gamma_C^+} \sigma_\tau(t) \cdot (v_\tau - u_\tau(t))da - \int_{\Gamma_C^-} \sigma_\tau(t) \cdot (v_\tau - u_\tau(t))da,$$

a l'aide la définition de Γ_C^+ et (2.11), on obtient

$$\int_{\Gamma_C^+} \sigma_\tau(t) \cdot u_\tau da = 0. \quad (2.26)$$

Alors

$$- \int_{\Gamma_C} \sigma_\tau(t) \cdot (v_\tau - u_\tau(t))da = - \int_{\Gamma_C^+} \sigma_\tau(t) \cdot v_\tau da - \int_{\Gamma_C^-} \sigma_\tau(t) \cdot (v_\tau - u_\tau(t))da,$$

et de lui

$$- \int_{\Gamma_C} \sigma_\tau(t) \cdot (v_\tau - u_\tau(t))da = - \int_{\Gamma_C} \sigma_\tau(t) \cdot v_\tau da + \int_{\Gamma_C^-} \sigma_\tau(t) \cdot u_\tau(t)da,$$

d'après (2.12), on obtient

$$- \int_{\Gamma_C} \sigma_\tau(t) \cdot v_\tau da + \int_{\Gamma_C^-} \sigma_\tau(t) \cdot u_\tau(t)da \leq \int_{\Gamma_C} \|\sigma_\tau\| \|v_\tau\| da - \lambda \int_{\Gamma_C^-} u_\tau(t)u_\tau(t)da$$

$$\leq \int_{\Gamma_C} \|\sigma_\tau\| \|v_\tau\| da - \lambda \int_{\Gamma_C^-} \|u_\tau\|^2 da,$$

maintenant, en utilisant (2.10) et (2.12)

$$- \int_{\Gamma_C} \sigma_\tau(t) \cdot v_\tau da + \int_{\Gamma_C^-} \sigma_\tau(t) \cdot u_\tau(t) da \leq \int_{\Gamma_C} p_\tau(u_\nu - g) \|v_\tau\| da - \int_{\Gamma_C^-} p_\tau(u_\nu - g) \|u_\tau\| da,$$

et de (2.26), il vient

$$- \int_{\Gamma_C} \sigma_\tau(t) \cdot v_\tau da + \int_{\Gamma_C^-} \sigma_\tau(t) \cdot u_\tau(t) da \leq \int_{\Gamma_C} p_\tau(u_\nu - g) \|v_\tau\| da - \int_{\Gamma_C} p_\tau(u_\nu - g) \|u_\tau\| da,$$

alors

$$- \int_{\Gamma_C} \sigma_\tau(t) \cdot (v_\tau - u_\tau(t)) da \leq \int_{\Gamma_C} p_\tau(u_\nu - g) \|v_\tau\| da - \int_{\Gamma_C} p_\tau(u_\nu - g) \|u_\tau\| da,$$

de (2.25), nous concluons

$$- \int_{\Gamma_C} \sigma(t) \nu \cdot (v - u(t)) da \leq \int_{\Gamma_C} p_\nu(u_\nu(t) - g)(v_\nu - u_\nu(t)) da + \int_{\Gamma_C} p_\tau(u_\nu - g) \|v_\tau\| da - \int_{\Gamma_C} p_\tau(u_\nu - g) \|u_\tau\| da,$$

par définition (2.18), on obtient

$$- \int_{\Gamma_C} \sigma(t) \nu \cdot (v - u(t)) da \leq J(u(t), v) - J(u(t), u(t)). \quad (2.27)$$

On a

$$\begin{aligned} & c_0^C D_t^\alpha u(t), v - u(t) + a(u(t), v - u(t)) - m(\theta(t), v - u(t)) - \int_{\Gamma_C} \sigma(t) \nu \cdot (v - u(t)) da \\ & \leq c_0^C D_t^\alpha u(t), v - u(t) + a(u(t), v - u(t)) - m(\theta(t), v - u(t)) + J(u(t), v) - J(u(t), u(t)), \end{aligned}$$

et l'inégalité (2.23), on obtient

$$\begin{aligned} & c_0^C D_t^\alpha u(t), v - u(t) + a(u(t), v - u(t)) - m(\theta(t), v - u(t)) \\ & + J(u(t), v) - J(u(t), u(t)) \geq (f(t), v - u(t))_\nu. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Maintenant, nous utilisons la formule de Green (1.21) pour l'inconnue q du problème, il en résulte pour tout $t \in (0, T)$, on a

$$(q(t), \nabla \eta)_\mathbb{H} + (\operatorname{div} q(t), \eta)_{L^2(\Omega)} = \int_\Gamma q(t) \nu \eta da, \quad \forall \eta \in Q,$$

alors :

$$\int_\Omega q(t) \nabla \eta dx + \int_\Omega \operatorname{div} q(t) \eta dx = \int_\Gamma q(t) \nu \eta da,$$

et on a :

$$\int_\Omega q(t) \nabla \eta dx + \int_\Omega \operatorname{div} q(t) \eta dx = \int_{\Gamma_D} q(t) \nu \eta da + \int_{\Gamma_N} q(t) \nu \eta da + \int_{\Gamma_C} q(t) \nu \eta da,$$

et, d'après (2.2), (2.4) et (1.23) on obtient :

$$- \int_{\Omega} \mathcal{K} \nabla \theta(t) \nabla \eta \, dx + \int_{\Omega} q_0(t) \cdot \eta \, dx - \int_{\Omega} {}^C D_t^{\alpha} \theta(t) \eta \, dx = \int_{\Gamma_C} q(t) \nu \eta \, da,$$

et d'aussi d'équation (2.13) alors

$$- \int_{\Omega} \mathcal{K} \nabla \theta(t) \nabla \eta \, dx + \int_{\Omega} q_0(t) \cdot \eta \, dx - \int_{\Omega} {}^C D_t^{\alpha} \theta(t) \eta \, dx = \int_{\Gamma_C} k_c(u_{\nu}(t) - g) \phi_L(\theta(t) - \theta_F) \eta \, da,$$

par définition (2.16), (2.19) et (2.21), on obtient

$$({}^C D_t^{\alpha} \theta(t), \eta)_{Q' \times Q} + d(\theta(t), \eta) + \chi(u(t), \theta(t), \eta) = (q_t(t), \eta)_Q. \quad (2.29)$$

Finalement, de (2.28) et (2.29) on obtient la formulation variationnelle du problème de contact ($\mathcal{P}$).

Problème $\mathcal{PV}$: Trouver le champ des déplacements $u : [0, T] \rightarrow \mathcal{V}$, et le champ de température $\theta : [0, T] \rightarrow Q$, tels que, pour tout $t \in [0, T]$, on a

$$\begin{aligned} & c({}^C D_t^{\alpha} u(t), v - u(t)) + a(u(t), v - u(t)) - m(\theta(t), v - u(t)) \\ & + J(u(t), v) - J(u(t), u(t)) \geq (f(t), v - u(t))_{\mathcal{V}}, \quad \forall v \in \mathcal{V} \end{aligned} \quad (2.30)$$

$$({}^C D_t^{\alpha} \theta(t), \eta)_{Q' \times Q} + d(\theta(t), \eta) + \chi(u(t), \theta(t), \eta) = (q_t(t), \eta)_Q, \quad \forall \eta \in Q \quad (2.31)$$

$$u(0) = u_0, \quad \theta(0) = \theta_0. \quad (2.32)$$

Nous notons que le problème variationnel $\mathcal{PV}$ est formulé en termes de champ des déplacements, et champ de température .

2.3 EXISTENCE DE LA SOLUTION

L'existence du problème variationnel $\mathcal{PV}$ est donnée par le Théorème suivant :

Théorème 2.3.1. *Sous les hypothèses H(1) – H(7), et les conditions*

$$m_a > c_d^2(L_{\nu} + L_{\tau}), \quad \text{et} \quad m_d > M_{k_c} c_t^2. \quad (2.33)$$

Le problème variationnel $\mathcal{PV}$ admet au moins une solution ayant la régularité suivante :

$$u \in W^{1,2}(0, T; \mathcal{V}), \quad (2.34)$$

$$\theta \in W^{1,2}(0, T; Q). \quad (2.35)$$

Démonstration du Théorème 2.3.1

La démonstration du Théorème 2.3.1 s'effectue en plusieurs étapes que nous prouvons dans ce qui suit. Par tout dans cette section, nous supposons ce qui suit que tenir H(1) à H(7) avec (2.33) et nous considérons que c_s est une constante positive générique qui dépend de $\Omega, \Gamma_D, \Gamma_N, \Gamma_C, \mathcal{C}, \mathcal{E}, \mathcal{M}, \mathcal{K}, p_\nu, p_\tau, g, k_c, L, m_a, m_c, m_d, c_{j_\tau}, c_{j_\nu}, M_a, M_c, M_d, M_m, M_{k_c}, L_{k_c}, L_\nu, L_\tau, c_\nu, c_\tau$ et T . Et la démonstration basée l'argument de l'opérateur monotone, la dérivée de Caputo, la sous-différentielle de Clarke, la méthode Galerkin et le théorème du point fixe de Banach.

Première étape : Soit $\beta \in L^2(0, T; \mathcal{V})$ donné, et nous considérons le problème intermédiaire suivant :

Problème $\mathcal{PV}_{u_\beta}$. Trouver les champs des déplacements $u_\beta : [0, T] \rightarrow \mathcal{V}$ tels que :

$$\begin{aligned} & c({}_0^C D_t^\alpha u_\beta(t), v - u_\beta(t)) + a(u_\beta(t), v - u_\beta(t)) - (\beta(t), v - u_\beta(t))_\mathcal{V} \\ & + J(u_\beta(t), v) - J(u_\beta(t), u_\beta(t)) \geq (f(t), v - u_\beta(t))_\mathcal{V} \quad \forall v \in \mathcal{V}, \text{ p.p. } t \in (0, T), \end{aligned} \quad (2.36)$$

$$u_\beta(0) = u_0. \quad (2.37)$$

Nous obtenons le resultat suivant :

Lemme 2.3.1. *Le problème $\mathcal{PV}_{u_\beta}$ possède au moins une solution qui satisfait la régularité (2.34).*

Démonstration. Le théorème de représentation de Riesz nous permet de définir les fonctions $f_\beta : [0, T] \rightarrow \mathcal{V}$ comme suit :

$$(f_\beta(t), v)_\mathcal{V} = (f(t), v)_\mathcal{V} + (\beta(t), v)_\mathcal{V}, \quad \forall v \in \mathcal{V}. \quad (2.38)$$

Le problème $\mathcal{PV}_{u_\beta}$ peut s'écrire comme suit :

$$\begin{aligned} & c({}_0^C D_t^\alpha u_\beta(t), v - u_\beta(t)) + a(u_\beta(t), v - u_\beta(t)) \\ & + J(u_\beta(t), v) - J(u_\beta(t), u_\beta(t)) \geq (f_\beta(t), v - u_\beta(t))_\mathcal{V}, \end{aligned} \quad (2.39)$$

$$u_\beta(0) = u_0. \quad (2.40)$$

On a

$$\begin{aligned} j_\nu^0(u_{\beta_\nu}(t), v_\nu) &= p_\nu(u_{\beta_\nu} - g)v_\nu, \\ j_\tau^0(u_{\beta_\tau}(t), v_\tau) &\leq p_\tau(u_{\beta_\tau} - g)\|v_\tau\|, \end{aligned}$$

et de lui

$$J(u_\beta(t), v) - J(u_\beta(t), u_\beta(t)) \leq \int_{\Gamma_C} (j_\nu^0(u_{\beta_\nu}(t), v_\nu - u_{\beta_\nu}(t)) + j_\tau^0(u_{\beta_\tau}(t), v_\tau - u_{\beta_\tau}(t))) \, da;$$

L'opérateur $c(\cdot, \cdot)$ bilinéaire, continu et coercive d'après (2.15), H(1)(b) et H(2), et d'après (2.14), H(2), l'opérateur $a(\cdot, \cdot)$ bilinéaire et continu.

L'hypothèse H(3), avec (2.20), (2.38) et la régularité du β , on a $f_\beta \in L^2(0, T; \mathcal{V})$. Il est clair d'après définition 1.2.10 et l'hypothèse H(6)(d) que $j_\tau(\cdot), j_\nu(\cdot)$ sont des fonctions localement Lipschitz.

Nous combinons ces résultats des opérateurs $c(\cdot, \cdot), a(\cdot, \cdot), j_\tau(\cdot), j_\nu(\cdot)$ et de la fonction $f_\beta(\cdot)$ avec l'hypothèse H(7) et le résultat fourni par le théorème 1.2.20, nous trouvons que Le Problème $\mathcal{PV}_{u_\beta}$ a au moins une solution $u_\beta \in W^{1,2}(0, T; \mathcal{V})$.

Deuxième étape :

Soit $\beta \in L^2(0, T; \mathcal{V})$ donné, et nous utilisons le champ de déplacement u_β obtenu dans le Lemma (2.3.1) pour prouver le résultat d'existence du champ de température θ_β du problème suivant.

Problème $\mathcal{PV}_{\theta_\beta}$. Trouver un champ de température $\theta_\beta : [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}$ tel que :

$$\begin{aligned} ({}_0^C D_t^\alpha \theta_\beta(t), \eta)_{Q' \times Q} + d(\theta_\beta(t), \eta) &+ \chi(u_\beta(t), \theta_\beta(t), \eta) \\ &= (q_t(t), \eta)_Q, \quad \forall \eta \in Q, \text{ p.p. } t \in (0, T), \end{aligned} \quad (2.41)$$

$$\theta_\beta(0) = \theta_0. \quad (2.42)$$

Pour résoudre le problème $\mathcal{PV}_{\theta_\beta}$, nous avons le résultat suivant :

Lemme 2.3.2. *Le problème $\mathcal{PV}_{\theta_\beta}$ possède au moins une solution qui satisfait la régularité (2.35).*

Démonstration.

Nous mettrons par méthode d'approximation Galerkin. Pour $k = 1, 2, \dots$, soit $(w_k)_{k \geq 1}$ la forme de base hilbertienne de $H^1(\Omega)$.

Nous devons trouver une fonction $\theta_{\beta_n} : [0, T] \longrightarrow H^1(\Omega)$ de la forme

$$\theta_{\beta_n}(t) := \sum_{i=1}^n x_n^i(t) w_i. \quad (2.43)$$

Nous désignons par F_n l'espace vectoriel engendré par $w_1, w_2, \dots, w_n$, d'où $\theta_{\beta_n}(t) \in F_n$.

Pour chaque entier $n \geq 1$, considérons le problème approximation suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \theta_{\beta_n}(t) \in L^2(0, T; F_n) \text{ tq :} \\ (a) \quad {}^C D_t^\alpha \theta_{\beta_n}(t) \in L^2(0, T; F_n), \\ (b) \quad ({}^C D_t^\alpha \theta_{\beta_n}(t), w_k)_{Q' \times Q} + d(\theta_{\beta_n}(t), w_k) + \chi(u_\beta(t), \theta_{\beta_n}(t), w_k) = (q_t(t), w_k)_Q, \\ (c) \quad \theta_{\beta_n}(0) = \theta_0. \end{array} \right. \quad (2.44)$$

En utilisant (2.43), alors pour tout $k = 1, 2, \dots, n$, on a

$$({}^C D_t^\alpha \theta_{\beta_n}(t), w_k)_{Q' \times Q} = {}^C D_t^\alpha x_n^k(t), \quad (2.45)$$

$$d(\theta_{\beta_n}(t), w_k) = \mathcal{K}x_n^k(t), \quad (2.46)$$

$$\chi(u_\beta(t), \theta_{\beta_n}(t), w_k) = \chi\left(u_\beta(t), \sum_{i=1}^n x_n^i(t)w_i, w_k\right), \quad (2.47)$$

noté par q_t^k la fonction définie par :

$$q_t^k(t) = (q_t(t), w_k)_Q. \quad (2.48)$$

D'après (2.43), (2.44), nous avons

$$(\theta_0, w_k) = x_n^k(0), \quad (2.49)$$

Parce que

$$(\theta_{\beta_n}(0), w_k) := \left(\sum_{i=1}^n x_n^i(0)w_i, w_k\right) = x_n^k(0).$$

Maintenant, nous définissons l'opérateur $h : [0, T] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, comme suivant :

$$h(t, x_n^k(t)) = q_t^k(t) - \mathcal{K}x_n^k(t) - \chi\left(u_\beta(t), \sum_{i=1}^n x_n^i(t)w_i, w_k\right). \quad (2.50)$$

D'après (2.45), on a

$${}^C D_t^\alpha x_n^k(t) = h(t, x_n^k(t)). \quad (2.51)$$

En raison de l'hypothèse H(2), nous trouvons

$$|\mathcal{K}x_{n_1}^k(t) - \mathcal{K}x_{n_2}^k(t)| \leq M_d |x_{n_1}^k(t) - x_{n_2}^k(t)|. \quad (2.52)$$

D'après la définition (2.19), il vient

$$\left| \chi\left(u_\beta(t), \sum_{i=1}^n x_{n_1}^i(t)w_i, w_k\right) - \chi\left(u_\beta(t), \sum_{i=1}^n x_{n_2}^i(t)w_i, w_k\right) \right|$$

$$= \left| \int_{\Gamma_C} k_c(u_\nu(t) - g)(\phi_L(\theta_{\beta_{n_1}}(t) - \theta_F) - \phi_L(\theta_{\beta_{n_2}}(t) - \theta_F))w_k \, da \right|,$$

en utilisant (1.26) et l'hypothèse H(5),

avec $|\phi_L(\theta_{\beta_{n_1}}(t) - \theta_F) - \phi_L(\theta_{\beta_{n_2}}(t) - \theta_F)| \leq |\theta_{\beta_{n_1}}(t) - \theta_{\beta_{n_2}}(t)|$, on a

$$\begin{aligned} & \left| \chi \left(u_\beta(t), \sum_{i=1}^n x_{n_1}^i(t)w_i, w_k \right) - \chi \left(u_\beta(t), \sum_{i=1}^n x_{n_2}^i(t)w_i, w_k \right) \right| \\ & \leq M_{k_c} \int_{\Gamma_C} |\theta_{\beta_{n_1}}(t) - \theta_{\beta_{n_2}}(t)| \, da \\ & \leq M_{k_c} c_t (mes(\Gamma_C))^{\frac{1}{2}} \|\theta_{\beta_{n_1}}(t) - \theta_{\beta_{n_2}}(t)\|_Q, \end{aligned}$$

alors

$$\left| \chi \left(u_\beta(t), \sum_{i=1}^n x_{n_1}^i(t)w_i, w_k \right) - \chi \left(u_\beta(t), \sum_{i=1}^n x_{n_2}^i(t)w_i, w_k \right) \right| \leq M_{k_c} C |x_{n_1}^k(t) - x_{n_2}^k(t)|. \quad (2.53)$$

En combinant les inégalité (2.50)-(2.52) et (2.53), on voit qu'il existe une constante positive $c = M_d + M_{k_c} C$, telle que

$$|h(t, x_{n_1}^k(t)) - h(t, x_{n_2}^k(t))| \leq c |x_{n_1}^k(t) - x_{n_2}^k(t)|. \quad (2.54)$$

Alors, en appliquant le proposition 1.2.3, il existe une unique fonction absolument continue $x_n(t) = (x_n^1(t), x_n^2(t), \dots, x_n^n(t))$ sur $[0, T_*)$ qui satisfait le système d'équations différentielles ordinaires fractionnaires (2.48)-(2.51).

Estimations : Multiplier (2.50) par $x_n^i(t)$, additionner pour $i = 1, \dots, n$ et le fait que $\theta_{\beta_n} \longrightarrow \frac{1}{2} \|\theta_{\beta_n}\|_Q^2$ est une fonction convexe, et en appliqué résultat (1.2.1) on obtient

$$\begin{aligned} {}^C D_t^\alpha \left(\frac{1}{2} \|\theta_{\beta_n}(t)\|_Q^2 \right) & \leq ({}_0^C D_t^\alpha \theta_{\beta_n}(t), \theta_{\beta_n}(t))_{Q' \times Q} = (q_t(t), \theta_{\beta_n}(t))_{Q' \times Q} \\ & \quad - d(\theta_{\beta_n}(t), \theta_{\beta_n}(t)) - \chi(u_\beta(t), \theta_{\beta_n}(t), \theta_{\beta_n}(t)), \end{aligned} \quad (2.55)$$

alors

$$\begin{aligned} {}^C D_t^\alpha \left(\frac{1}{2} \|\theta_{\beta_n}(t)\|_Q^2 \right) + d(\theta_{\beta_n}(t), \theta_{\beta_n}(t)) & \leq (q_t(t), \theta_{\beta_n}(t))_{Q' \times Q} \\ & \quad - \chi(u_\beta(t), \theta_{\beta_n}(t), \theta_{\beta_n}(t)). \end{aligned} \quad (2.56)$$

D'après l'hypothèse H(2), on a

$$m_d \|\theta_{\beta_n}(t)\|_Q^2 \leq d(\theta_{\beta_n}(t), \theta_{\beta_n}(t)), \quad (2.57)$$

en utilisant (2.19)

$$|\chi(u_\beta(t), \theta_{\beta_n}(t), \theta_{\beta_n}(t))| = \left| \int_{\Gamma_C} k_c(u_{\beta_n}(t) - g)\phi_L(\theta_{\beta_n}(t) - \theta_F)\theta_{\beta_n}(t) da \right|,$$

il s'agit d'une hypothèse H(5)(a), avec $|\phi_L(\theta_{\beta_n}(t) - \theta_F)| \leq L$, alors

$$|\chi(u_\beta(t), \theta_{\beta_n}(t), \theta_{\beta_n}(t))| \leq M_{k_c} L \int_{\Gamma_C} |\theta_{\beta_n}(t)| da,$$

et grâce l'inégalité du Cauchy Shwartz et de(1.26), on obtient

$$\begin{aligned} |\chi(u_\beta(t), \theta_{\beta_n}(t), \theta_{\beta_n}(t))| &\leq M_{k_c} L \left(\int_{\Gamma_C} (\theta_{\beta_n}(t))^2 da \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Gamma_C} da \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq M_{k_c} c_t L (mes(\Gamma_C))^{\frac{1}{2}} \|\theta_{\beta_n}(t)\|_Q \\ &\leq M_{k_c} c_t M_L \|\theta_{\beta_n}(t)\|_Q. \end{aligned} \quad (2.58)$$

où $M_L = L(mes(\Gamma_C))^{\frac{1}{2}}$.

Et aussi d'après (2.21), et grâce l'inégalité du Cauchy Shwartz, on a

$$|(q_t(t), \theta_{\beta_n}(t))_Q| \leq \|q_t(t)\|_Q \|\theta_{\beta_n}(t)\|_Q, \quad (2.59)$$

pour tout $\varepsilon > 0$, en applique l'inégalité $\alpha\beta \leq \frac{\alpha^2}{\varepsilon} + \varepsilon\beta^2$, tel que $\alpha, \beta \geq 0$,

avec (2.58),(2.59),il en résulte que :

$$|\chi(u_\beta(t), \theta_{\beta_n}(t), \theta_{\beta_n}(t))| \leq \frac{M_{k_c}^2 M_L^2}{2\varepsilon} + \frac{\varepsilon c_t^2}{2} \|\theta_{\beta_n}(t)\|_Q^2, \quad (2.60)$$

$$|(q_t(t), \theta_{\beta_n}(t))_Q| \leq \frac{1}{2\varepsilon} \|q_t(t)\|_Q^2 + \frac{\varepsilon}{2} \|\theta_{\beta_n}(t)\|_Q^2. \quad (2.61)$$

D'après (2.56),(2.60) et (2.61), il vient

$${}_0^C D_t^\alpha \left(\frac{1}{2} \|\theta_{\beta_n}(t)\|_Q^2 \right) + c_1 \|\theta_{\beta_n}(t)\|_Q^2 \leq c_2 \|q_t(t)\|_Q^2 + c_3, \quad (2.62)$$

où $c_1 = m_d - \frac{\varepsilon c_t^2}{2} - \frac{\varepsilon}{2}$, $c_2 = \frac{1}{2\varepsilon}$, $c_3 = \frac{M_{k_c}^2 M_L^2}{2\varepsilon}$.

En appliquant l'opérateur ${}_0 I_t^\alpha$ défini dans le Définition (1.2.14) à l'inégalité (2.62), il s'agit d'une proposition 1.2.2(ii), on a

$${}_0 I_t^\alpha \left({}_0^C D_t^\alpha \left(\frac{1}{2} \|\theta_{\beta_n}(t)\|_Q^2 \right) + c_1 \|\theta_{\beta_n}(t)\|_Q^2 \right) \leq {}_0 I_t^\alpha (c_2 \|q_t(t)\|_Q^2) + {}_0 I_t^\alpha c_3,$$

d'où

$$\begin{aligned}
 & \|\theta_{\beta_n}(t)\|_Q^2 + \frac{2c_1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \|\theta_{\beta_n}(s)\|_Q^2 ds \\
 & \leq \|\theta_0\|_Q + \frac{2c_2}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \|q_t(s)\|_Q^2 ds + \frac{2c_3}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} ds \\
 & \leq \|\theta_0\|_Q + \frac{2c_2}{\Gamma(\alpha)} \|q_t\|_Q^2 \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} ds + \frac{2c_3 T^\alpha}{\alpha \Gamma(\alpha)} \\
 & \leq \|\theta_0\|_Q + \frac{T^\alpha}{\alpha} \frac{2c_2}{\Gamma(\alpha)} \|q_t\|_Q^2 + \frac{2c_3 T^\alpha}{\alpha \Gamma(\alpha)},
 \end{aligned}$$

alors il existe $c = \max \left\{ 1, \frac{2c_2 T^\alpha}{\alpha \Gamma(\alpha)}, \frac{2c_3 T^\alpha}{\alpha \Gamma(\alpha)} \right\}$, vérifie

$$\|\theta_{\beta_n}(t)\|_Q^2 + \frac{2c_1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{1-\alpha} \|\theta_{\beta_n}(s)\|_Q^2 ds \leq c(\|q_t\|_Q^2 + \|\theta_0\|_Q^2 + 1). \quad (2.63)$$

$$\|\theta_{\beta_n}\|_{L^2(0,T;Q)} \leq C. \quad (2.64)$$

Par conséquent, nous trouvons que $T_* = +\infty$.

Soit $\eta \in Q$, avec $\|\eta\|_Q \leq 1$, et écrivons $\eta = \eta_1 + \eta_2$, où $\eta_1 \in F_n$, $\eta_2 \in F_n^\perp$ sont orthogonales dans Q et

$$\|\eta_1\|_Q \leq \|\eta\|_Q \leq 1. \quad (2.65)$$

En utilisant (2.44), nous concluons que

$$({}_0^C D_t^\alpha \theta_{\beta_n}(t), \eta_1)_{Q' \times Q} + d(\theta_{\beta_n}(t), \eta_1) + \chi(u_\beta(t), \theta_{\beta_n}(t), \eta_1) = (q_t(t), \eta_1)_Q. \quad (2.66)$$

De H(2), (2.58) et (2.59) nous avons

$$|d(\theta_{\beta_n}(t), \eta_1)| \leq M_d \|\theta_{\beta_n}(t)\|_Q, \quad (2.67)$$

$$|\chi(u_\beta(t), \theta_{\beta_n}(t), \eta_1)| \leq M_{k_c} M_L c_t, \quad (2.68)$$

$$|(q_t(t), \eta_1)_Q| \leq \|q_t(t)\|_Q. \quad (2.69)$$

Maintenant, d'après (2.66) on obtient

$$\sup_{\|\eta_1\| \leq 1} |({}_0^C D_t^\alpha \theta_{\beta_n}(t), \eta_1)_{Q' \times Q}| \leq \sup_{\|\eta_1\| \leq 1} |d(\theta_{\beta_n}(t), \eta_1)| + \sup_{\|\eta_1\| \leq 1} |\chi(u_\beta(t), \theta_{\beta_n}(t), \eta_1)| + \sup_{\|\eta_1\| \leq 1} |(q_t(t), \eta_1)_Q|,$$

ainsi

$$\|{}_0^C D_t^\alpha \theta_{\beta_n}(t)\|_{Q'} \leq c_1 + c_2 \|\theta_{\beta_n}(t)\|_Q + \|q_t(t)\|_Q, \quad (2.70)$$

on a

$$\int_0^T \|{}_0^C D_t^\alpha \theta_{\beta_n}(t)\|_{Q'}^2 dt \leq \int_0^T (c_1 + c_2 \|\theta_{\beta_n}(t)\|_Q + \|q_t(t)\|_Q)^2 dt,$$

par l'inégalité (2.63), il existe une constante positive c , telle que

$$\| {}^C_0 D_t^\alpha \theta_{\beta_n} \|_{L^2(0,T;Q')} \leq c. \quad (2.71)$$

Alors ${}^C_0 D_t^\alpha \theta_{\beta_n} \in L^2(0,T;Q')$.

Passage à la limite : De l'inégalité (2.64) et en utilisant les inégalités précédentes et en appliquant le résultat de compacité Théorème 1.2.21 pour la dérivée de Caputo.

Donc extraire une sous-suite notée encore θ_{β_n} et $\theta_\beta \in L^2(0,T;Q)$ telle que

$$\begin{cases} \theta_{\beta_n} \longrightarrow \theta_\beta & \text{fortement dans } L^2(0,T;Q), \\ {}^C_0 D_t^\alpha \theta_{\beta_n} \rightharpoonup {}^C_0 D_t^\alpha \theta_\beta & \text{faiblement dans } L^2(0,T;Q'). \end{cases} \quad (2.72)$$

Alors

$$\begin{aligned} \theta_{\beta_n} &\rightharpoonup \theta_\beta && \text{faiblement dans } W^{1,2}(0,T;Q). \\ d(\theta_{\beta_n}(t), \eta) &\longrightarrow d(\theta_\beta(t), \eta) && \forall \eta \in Q, \text{ p.p. } t \in (0,T), \end{aligned} \quad (2.73)$$

De plus,

$$({}^C_0 D_t^\alpha \theta_{\beta_n}(t), \eta)_{Q' \times Q} \longrightarrow ({}^C_0 D_t^\alpha \theta_\beta(t), \eta)_{Q' \times Q} \quad \forall \eta \in Q \text{ p.p. } t \in (0,T). \quad (2.74)$$

Par (2.19) et l'hypothèse H(5), on obtient

$$|\chi(u_\beta(t), \theta_{\beta_n}(t), \eta_1)| \leq M_{k_c} M_L \|\eta\|_{L^2(\Gamma_C)}. \quad (2.75)$$

Puisque $\{\chi(u_\beta(t), \theta_{\beta_n}(t), \eta)\}_{n=1}^\infty$ est borné dans $\mathbb{R}$, nous pouvons passer à une sous-suite si cela est nécessaire. Pour $\eta = \theta_\beta - \theta_{\beta_n}$, en utilisant (2.19) et (2.58), nous avons

$$\begin{aligned} &|\chi(u_\beta(t), \theta_\beta(t), \theta_\beta(t) - \theta_{\beta_n}(t)) - \chi(u_\beta(t), \theta_{\beta_n}(t), \theta_\beta(t) - \theta_{\beta_n}(t))| \\ &\leq M_{k_c} M_L \|\theta_\beta(t) - \theta_{\beta_n}(t)\|_{L^2(\Gamma_C)} \\ &\leq c_t^2 M_{k_c} M_L \|\theta_\beta(t) - \theta_{\beta_n}(t)\|_Q^2. \end{aligned} \quad (2.76)$$

Par la compacité de la trace $\gamma : Q \longrightarrow L^2(\Gamma_C)$, il existe une sous-séquence de θ_{β_n} , notée à nouveau θ_{β_n} , telle que

$$\theta_{\beta_n} \longrightarrow \theta_\beta \quad \text{fortement en } L^2(0,T;L^2(\Gamma_C)). \quad (2.77)$$

Alors

$$\chi(u_\beta(t), \theta_{\beta_n}(t), \eta) \longrightarrow \chi(u_\beta(t), \theta_\beta(t), \eta) \quad \text{dans } \mathbb{R}. \quad (2.78)$$

Finalement, en utilisons (2.72)-(2.74) et (2.78), on obtient

$$\begin{cases} \theta_\beta \in W^{1,2}(0, T; Q), \\ ({}_0^C D_t^\alpha \theta_{\beta_n}(t), \eta)_{Q' \times Q} + d(\theta_{\beta_n}(t), \eta) + \chi(u_\beta(t), \theta_{\beta_n}(t), \eta) = (q_t(t), \eta)_Q, \quad \forall \eta \in Q, \\ \theta_\beta(0) = \theta_0. \end{cases} \quad (2.79)$$

Le lemme est prouvé.

Troisième étape : pour la fonction $\beta \in L^2(0, T; \mathcal{V})$ et la fonction θ_β obtenue dans le Lemme 2.3.2, nous considérons l'opérateur $\Lambda : L^2(0, T; \mathcal{V}) \longrightarrow L^2(0, T; \mathcal{V})$ défini par

$$(\Lambda\beta(t), v)_\mathcal{V} := m(\theta_\beta(t), v) \quad \text{pour tout } v \in \mathcal{V} \quad \text{p.p. } t \in (0, T). \quad (2.80)$$

Nous avons le lemme suivant.

Lemme 2.3.3. *L'opérateur Λ admet une point fixé $\beta^* \in L^2(0, T; \mathcal{V})$.*

Démonstration . Soit $\beta \in L^2(0, T; \mathcal{V})$ et $t_1, t_2 \in]0, T[$. En utilisant (2.80) et l'hypothèse H(2), on a

$$\begin{aligned} (\Lambda\beta(t_1) - \Lambda\beta(t_2), \Lambda\beta(t_1) - \Lambda\beta(t_2))_\mathcal{V} &:= m(\theta_\beta(t_1) - \theta_\beta(t_2), \Lambda\beta(t_1) - \Lambda\beta(t_2)) \\ &\leq M_d \|\theta_\beta(t_1) - \theta_\beta(t_2)\|_Q \|\Lambda\beta(t_1) - \Lambda\beta(t_2)\|_\mathcal{V}, \end{aligned}$$

nous déduisons que

$$\|\Lambda\beta(t_1) - \Lambda\beta(t_2)\|_\mathcal{V} \leq c \|\theta_\beta(t_1) - \theta_\beta(t_2)\|_Q. \quad (2.81)$$

Depuis $\theta_\beta \in L^2(0, T; Q)$, nous concluons que $\Lambda\beta \in C(0, T; \mathcal{V})$.

Soit maintenant $\beta_1, \beta_2 \in L^2(0, T; \mathcal{V})$. De la même manière que pour (2.81), on obtient

$$\|\Lambda\beta_1(t) - \Lambda\beta_2(t)\|_\mathcal{V} \leq c \|\theta_{\beta_1}(t) - \theta_{\beta_2}(t)\|_Q. \quad (2.82)$$

Par conséquent, à partir de (2.36), nous obtenons

$$\begin{aligned} &c ({}_0^C D_t^\alpha u_{\beta_1}(t) - {}_0^C D_t^\alpha u_{\beta_2}(t), u_{\beta_1}(t) - u_{\beta_2}(t)) \\ &+ a(u_{\beta_1}(t) - u_{\beta_2}(t), u_{\beta_1}(t) - u_{\beta_2}(t)) \\ &+ J(u_{\beta_1}(t), u_{\beta_1}(t)) - J(u_{\beta_1}(t), u_{\beta_2}(t)) \\ &+ J(u_{\beta_2}(t), u_{\beta_2}(t)) - J(u_{\beta_2}(t), u_{\beta_1}(t)) \leq 0. \end{aligned} \quad (2.83)$$

D'après (2.19) et l'hypothèse H(6), nous avons

$$\begin{aligned}
 & | J(u_{\beta_1}(t), u_{\beta_1}(t)) - J(u_{\beta_1}(t), u_{\beta_2}(t)) + J(u_{\beta_2}(t), u_{\beta_2}(t)) - J(u_{\beta_2}(t), u_{\beta_1}(t)) | \\
 = & | \int_{\Gamma_C} (p_\nu(u_{\beta_{1\nu}}(t) - g) - p_\nu(u_{\beta_{2\nu}}(t) - g))(u_{\beta_{1\nu}}(t) - u_{\beta_{2\nu}}(t)) da \\
 & + \int_{\Gamma_C} (p_\tau(u_{\beta_{1\tau}}(t) - g) - p_\tau(u_{\beta_{2\tau}}(t) - g))(\|u_{\beta_{1\tau}}(t)\| - \|u_{\beta_{2\tau}}(t)\|) da | \\
 \leq & L_\nu \int_{\Gamma_C} |u_{\beta_{1\nu}}(t) - u_{\beta_{2\nu}}(t)|^2 da + L_\tau \int_{\Gamma_C} |u_{\beta_{1\tau}}(t) - u_{\beta_{2\tau}}(t)| |\|u_{\beta_{1\tau}}(t)\| - \|u_{\beta_{2\tau}}(t)\|| da \\
 \leq & L_\nu c_d^2 \|u_{\beta_1}(t) - u_{\beta_2}(t)\|_{(L^2(\Gamma_C))^d}^2 + L_\tau \|u_{\beta_1}(t) - u_{\beta_2}(t)\|_{(L^2(\Gamma_C))^d}^2,
 \end{aligned}$$

et en utilisant l'inégalité (1.23), on obtient

$$\begin{aligned}
 & | J(u_{\beta_1}(t), u_{\beta_1}(t)) - J(u_{\beta_1}(t), u_{\beta_2}(t)) + J(u_{\beta_2}(t), u_{\beta_2}(t)) - J(u_{\beta_2}(t), u_{\beta_1}(t)) | \\
 & \leq c_d^2 (L_\tau + L_\nu) \|u_{\beta_1}(t) - u_{\beta_2}(t)\|_{\mathcal{V}}^2. \quad (2.84)
 \end{aligned}$$

Par la définition 1.2.14, nous déduisons que

$$\begin{aligned}
 & \| {}_0^C D_t^\alpha u_{\beta_1}(t) - {}_0^C D_t^\alpha u_{\beta_2}(t) \|_{\mathcal{V}} \\
 = & \left\| \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} \dot{u}_{\beta_1}(s) ds - \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} \dot{u}_{\beta_2}(s) ds \right\|_{\mathcal{V}} \\
 = & \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left\| \int_0^t (t-s)^{-\alpha} (\dot{u}_{\beta_1}(s) - \dot{u}_{\beta_2}(s)) ds \right\|_{\mathcal{V}} \\
 \leq & C \|\dot{u}_{\beta_1}(t) - \dot{u}_{\beta_2}(t)\|_{\mathcal{V}}, \quad (2.85)
 \end{aligned}$$

$$\text{où } C = \frac{T^{1-\alpha}}{1 - \alpha\Gamma(1-\alpha)},$$

d'une manière similaire que (2.85), nous constatons

$$\| {}_0^C D_t^\alpha \theta_{\beta_1}(t) - {}_0^C D_t^\alpha \theta_{\beta_2}(t) \|_Q \leq C \|\dot{\theta}_{\beta_1}(t) - \dot{\theta}_{\beta_2}(t)\|_Q. \quad (2.86)$$

D'après (2.36), on a

$$\begin{aligned}
 & c({}_0^C D_t^\alpha (u_{\beta_2}(t) - u_{\beta_1}(t)), u_{\beta_1}(t) - u_{\beta_2}(t)) + a(u_{\beta_2}(t) - u_{\beta_1}(t), u_{\beta_1}(t) - u_{\beta_2}(t)) \\
 & + (\beta_1(t) - \beta_2(t), u_{\beta_1}(t) - u_{\beta_2}(t))_{\mathcal{V}} + j(u_{\beta_1}(t), u_{\beta_2}(t)) - j(u_{\beta_1}(t), u_{\beta_1}(t)) \\
 & + j(u_{\beta_2}(t), u_{\beta_1}(t)) - j(u_{\beta_2}(t), u_{\beta_2}(t)) \geq 0,
 \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}
 a(u_{\beta_1}(t) - u_{\beta_2}(t), u_{\beta_1}(t) - u_{\beta_2}(t)) & \leq | c({}_0^C D_t^\alpha (u_{\beta_1}(t) - u_{\beta_2}(t)), u_{\beta_1}(t) - u_{\beta_2}(t)) | \\
 & + |(\beta_1(t) - \beta_2(t), u_{\beta_1}(t) - u_{\beta_2}(t))_{\mathcal{V}}| + |j(u_{\beta_1}(t), u_{\beta_2}(t)) - j(u_{\beta_1}(t), u_{\beta_1}(t)) \\
 & + j(u_{\beta_2}(t), u_{\beta_1}(t)) - j(u_{\beta_2}(t), u_{\beta_2}(t))|,
 \end{aligned}$$

on utilise l'inégalité de Cauchy-Schwartz, H(1)(b) et H(2), on obtient

$$\begin{aligned} m_a \|u_{\beta_1}(t) - u_{\beta_2}(t)\|_{\mathcal{V}}^2 &\leq a(u_{\beta_1}(t) - u_{\beta_2}(t), u_{\beta_1}(t) - u_{\beta_2}(t)) \\ &\leq M_c \left\| {}^C D_t^\alpha u_{\beta_1}(t) - {}^C D_t^\alpha u_{\beta_2}(t) \right\|_{\mathcal{V}} \|u_{\beta_1}(t) - u_{\beta_2}(t)\|_{\mathcal{V}} + \|\beta_1(t) - \beta_2(t)\|_{\mathcal{V}} \|u_{\beta_1}(t) - u_{\beta_2}(t)\|_{\mathcal{V}} \\ &+ c_d^2(L_\tau + L_\nu) \|u_{\beta_1}(t) - u_{\beta_2}(t)\|_{\mathcal{V}}^2, \end{aligned}$$

et moyennant la condition (2.33), il s'ensuit

$$\begin{aligned} (m_a - c_d^2(L_\tau + L_\nu)) \|u_{\beta_1}(t) - u_{\beta_2}(t)\|_{\mathcal{V}}^2 &\leq M_c \left\| {}^C D_t^\alpha u_{\beta_1}(t) - {}^C D_t^\alpha u_{\beta_2}(t) \right\|_{\mathcal{V}} \|u_{\beta_1}(t) - u_{\beta_2}(t)\|_{\mathcal{V}} \\ &+ \|\beta_1(t) - \beta_2(t)\|_{\mathcal{V}} \|u_{\beta_1}(t) - u_{\beta_2}(t)\|_{\mathcal{V}}, \end{aligned}$$

et de (2.85), il vient

$$\|u_{\beta_1}(t) - u_{\beta_2}(t)\|_{\mathcal{V}}^2 \leq c_1 \|\beta_1(t) - \beta_2(t)\|_{\mathcal{V}}^2 + c_2 \|\dot{u}_{\beta_1}(t) - \dot{u}_{\beta_2}(t)\|_{\mathcal{V}}^2. \quad (2.87)$$

d'après proposition 1.2.2 (iii), on obtient

$$\|u_{\beta_1}(t) - u_{\beta_2}(t)\|_{\mathcal{V}}^2 \leq c_1 \|\beta_1(t) - \beta_2(t)\|_{\mathcal{V}}^2 + c \int_0^t \|u_{\beta_1}(s) - u_{\beta_2}(s)\|_{\mathcal{V}}^2 ds. \quad (2.88)$$

L'inégalité précédente combinée à l'inégalité de Gronwall conduit à

$$\|u_{\beta_1}(t) - u_{\beta_2}(t)\|_{\mathcal{V}}^2 \leq c \int_0^t \|\beta_1(s) - \beta_2(s)\|_{\mathcal{V}}^2 ds. \quad (2.89)$$

En utilisant (2.41), nous avons

$$\begin{aligned} &({}^C D_t^\alpha \theta_{\beta_1}(t) - {}^C D_t^\alpha \theta_{\beta_2}(t), \theta_{\beta_1}(t) - \theta_{\beta_2}(t))_{Q' \times Q} + d(\theta_{\beta_1}(t) - \theta_{\beta_2}(t), \theta_{\beta_1}(t) - \theta_{\beta_2}(t)) \\ &+ \chi(u_{\beta_1}(t), \theta_{\beta_1}(t), \theta_{\beta_1}(t) - \theta_{\beta_2}(t)) - \chi(u_{\beta_2}(t), \theta_{\beta_2}(t), \theta_{\beta_1}(t) - \theta_{\beta_2}(t)) = 0. \end{aligned} \quad (2.90)$$

De (2.19), on a

$$\begin{aligned} &\chi(u_{\beta_1}(t), \theta_{\beta_1}(t), \theta_{\beta_1}(t) - \theta_{\beta_2}(t)) - \chi(u_{\beta_2}(t), \theta_{\beta_2}(t), \theta_{\beta_1}(t) - \theta_{\beta_2}(t)) \\ &= \int_{\Gamma_C} (k_c(u_{\beta_{1\nu}}(t) - g)(\phi(\theta_{\beta_1}(t) - \theta_F) - k_c(u_{\beta_{2\nu}}(t) - g)(\phi(\theta_{\beta_2}(t) - \theta_F)) (\theta_{\beta_1}(t) - \theta_{\beta_2}(t)) da \\ &= \int_{\Gamma_C} k_c(u_{\beta_{1\nu}}(t) - g) (\phi(\theta_{\beta_1}(t) - \theta_F) - \phi(\theta_{\beta_2}(t) - \theta_F) + \phi(\theta_{\beta_2}(t) - \theta_F)) (\theta_{\beta_1}(t) - \theta_{\beta_2}(t)) \\ &+ \phi(\theta_{\beta_2}(t) - \theta_F) (k_c(u_{\beta_{1\nu}}(t) - g) - k_c(u_{\beta_{2\nu}}(t) - g) - k_c(u_{\beta_{1\nu}} - g)) (\theta_{\beta_1}(t) - \theta_{\beta_2}(t)) da \\ &= \int_{\Gamma_C} k_c(u_{\beta_{1\nu}}(t) - g) (\phi(\theta_{\beta_1}(t) - \theta_F) - \phi(\theta_{\beta_2}(t) - \theta_F)) (\theta_{\beta_1}(t) - \theta_{\beta_2}(t)) da \\ &+ \int_{\Gamma_C} \phi(\theta_{\beta_2}(t) - \theta_F) (k_c(u_{\beta_{1\nu}}(t) - g) - k_c(u_{\beta_{1\nu}}(t) - g)) (\theta_{\beta_1}(t) - \theta_{\beta_2}(t)) da, \end{aligned}$$

en utilisant (1.20) et (1.26), et aussi l'hypothèse H(5), nous concluons que

$$\begin{aligned}
 & |\chi(u_{\beta_1}(t), \theta_{\beta_1}(t), \theta_{\beta_1}(t) - \theta_{\beta_2}(t)) - \chi(u_{\beta_2}(t), \theta_{\beta_2}(t), \theta_{\beta_1}(t) - \theta_{\beta_2}(t))| \\
 & \leq M_{k_c} \|\theta_{\beta_1}(t) - \theta_{\beta_2}(t)\|_{L^2(\Gamma_C)}^2 + LL_{k_c} \|\theta_{\beta_1}(t) - \theta_{\beta_2}(t)\|_{L^2(\Gamma_C)} \|u_{\beta_1}(t) - u_{\beta_2}(t)\|_{L^2(\Gamma_C)^d} \\
 & \leq M_{k_c} c_t^2 \|\theta_{\beta_1}(t) - \theta_{\beta_2}(t)\|_Q^2 + LL_{k_c} c_t c_d \|\theta_{\beta_1}(t) - \theta_{\beta_2}(t)\|_Q \|u_{\beta_1}(t) - u_{\beta_2}(t)\|_{\mathcal{V}}. \quad (2.91)
 \end{aligned}$$

D'après H(1)(b), (2.90) et (2.91), il vient

$$\begin{aligned}
 & m_d \|\theta_{\beta_1}(t) - \theta_{\beta_2}(t)\|_Q^2 \leq \left| ({}_0^C D_t^\alpha \theta_{\beta_1}(t) - {}_0^C D_t^\alpha \theta_{\beta_2}(t), \theta_{\beta_1}(t) - \theta_{\beta_2}(t))_{Q' \times Q} \right| \\
 & + |\chi(u_{\beta_1}(t), \theta_{\beta_1}(t), \theta_{\beta_1}(t) - \theta_{\beta_2}(t)) - \chi(u_{\beta_2}(t), \theta_{\beta_2}(t), \theta_{\beta_1}(t) - \theta_{\beta_2}(t))| \\
 & \leq \|{}_0^C D_t^\alpha \theta_{\beta_1}(t) - {}_0^C D_t^\alpha \theta_{\beta_2}(t)\|_Q \|\theta_{\beta_1}(t) - \theta_{\beta_2}(t)\|_Q + M_{k_c} c_t^2 \|\theta_{\beta_1}(t) - \theta_{\beta_2}(t)\|_Q^2 \\
 & + L_{k_c} L c_t c_d \|\theta_{\beta_1}(t) - \theta_{\beta_2}(t)\|_Q \|u_{\beta_1}(t) - u_{\beta_2}(t)\|_{\mathcal{V}},
 \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}
 & m_d \|\theta_{\beta_1}(t) - \theta_{\beta_2}(t)\|_Q^2 \leq \|{}_0^C D_t^\alpha \theta_{\beta_1}(t) - {}_0^C D_t^\alpha \theta_{\beta_2}(t)\|_Q \|\theta_{\beta_1}(t) - \theta_{\beta_2}(t)\|_Q \\
 & + M_{k_c} c_t^2 \|\theta_{\beta_1}(t) - \theta_{\beta_2}(t)\|_Q^2 + L_{k_c} L c_t c_d \|\theta_{\beta_1}(t) - \theta_{\beta_2}(t)\|_Q \|u_{\beta_1}(t) - u_{\beta_2}(t)\|_{\mathcal{V}},
 \end{aligned}$$

Et de (2.86), avec la condition (2.33), on obtient

$$(m_d - M_{k_c} c_t^2) \|\theta_{\beta_1}(t) - \theta_{\beta_2}(t)\|_Q \leq c_1 \|\dot{\theta}_{\beta_1}(t) - \dot{\theta}_{\beta_2}(t)\|_Q^2 + c_2 \|u_{\beta_1}(t) - u_{\beta_2}(t)\|_{\mathcal{V}}^2,$$

alors

$$\|\theta_{\beta_1}(t) - \theta_{\beta_2}(t)\|_Q^2 \leq c_2 \|u_{\beta_1}(t) - u_{\beta_2}(t)\|_{\mathcal{V}}^2 + c_3 \int_0^t \|\theta_{\beta_1}(s) - \theta_{\beta_2}(s)\|_Q^2 ds, \quad (2.92)$$

l'inégalité précédente combinée à l'inégalité de Gronwall conduit à

$$\|\theta_{\beta_1}(t) - \theta_{\beta_2}(t)\|_Q^2 \leq c_4 \int_0^t \|u_{\beta_1}(s) - u_{\beta_2}(s)\|_{\mathcal{V}}^2 ds, \quad (2.93)$$

avec argument de l'opérateur monotone, on obtient

$$\|\theta_{\beta_1}(t) - \theta_{\beta_2}(t)\|_Q^2 \leq c \|u_{\beta_1}(t) - u_{\beta_2}(t)\|_{\mathcal{V}}^2. \quad (2.94)$$

En combinant (2.82), (2.89) et (2.94), alors il existe $c_s > 0$, tel que

$$\|\Lambda \beta_1(t) - \Lambda \beta_2(t)\|_{\mathcal{V}}^2 \leq c_s \int_0^t \|\beta_1(s) - \beta_2(s)\|_{\mathcal{V}}^2 ds. \quad (2.95)$$

De plus, on a

$$\begin{aligned}
 \|\Lambda^2 \beta_1(t) - \Lambda^2 \beta_2(t)\|_{\mathcal{V}}^2 &= \|(\Lambda(\Lambda\beta_1))(t) - (\Lambda(\Lambda\beta_2))(t)\|_{\mathcal{V}}^2 \\
 &\leq c_s \int_0^t \|\Lambda\beta_1(s) - \Lambda\beta_2(s)\|_{\mathcal{V}}^2 ds \\
 &\leq c_s \int_0^t \left(c_s \int_0^s \|\beta_1(r) - \beta_2(r)\|_{\mathcal{V}}^2 dr \right) ds \\
 &\leq (c_s)^2 \int_0^t \left(\int_0^T \|\beta_1(r) - \beta_2(r)\|_{\mathcal{V}}^2 dr \right) ds \\
 &\leq (c_s)^2 \|\beta_1 - \beta_2\|_{L^2(0,T;\mathcal{V})}^2 \int_0^t ds \\
 &\leq (c_s)^2 t \|\beta_1 - \beta_2\|_{L^2(0,T;\mathcal{V})}^2,
 \end{aligned}$$

Répéter cette inégalité n fois conduit à

$$\|\Lambda^n \beta_1(t) - \Lambda^n \beta_2(t)\|_{\mathcal{V}}^2 \leq (c_s)^n \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \|\beta_1 - \beta_2\|_{L^2(0,T;\mathcal{V})}^2$$

en intégrant de 0 à t , on obtien

$$\|\Lambda^n \beta_1 - \Lambda^n \beta_2\|_{L^2(0,T;\mathcal{V})}^2 \leq \frac{(c_s)^n T^n}{n!} \|\beta_1 - \beta_2\|_{L^2(0,T;\mathcal{V})}^2,$$

comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{C^n T^n}{n!} = 0$, ce qui implique que pour n suffisamment grand la puissance Λ^n de Λ est une contraction dans $L^2(0, T; \mathcal{V})$.

D'après le théorème 1.2.15, alors il existe un élément unique $\beta^* \in L^2(0, T; \mathcal{V})$ tel que $\Lambda\beta^* = \beta^*$. Nous sommes maintenant prêts à prouver le théorème 2.3.1.

Démonstration du théorème 2.3.1 soit $\beta^* \in L^2(0, T; \mathcal{V})$ soit un point fixe de l'opérateur Λ . Dénotez par u_{β^*} une solution du problème $(\mathcal{PV}_{u_{\beta^*}})$ et laissez θ_{β^*} soit une solution du problème $(\mathcal{PV}_{\theta_{\beta^*}})$ pour $\beta = \beta^*$. En utilisant la définition de Λ , (2.36), (2.37), (2.41) et (2.42), nous constatons que $(u_{\beta^*}, \theta_{\beta^*})$ est une solution du problème $(\mathcal{PV})$.

CONCLUSION GÉNÉRALE

Dans ce mémoire, on a étudié théoriquement d'un problème du contact avec frottement du Coulomb et compliance normale entre un corps thermo-viscoélastique et une fondation thermiquement conductrice. Nous avons présenté le modèle de processus quasi-statique. Loi de comportement des matériaux est construite par un modèle Kelvin-Voigt fractionnaire. On a utilisé les formules de Green pour obtenir la formulation variationnelle de ce problème. On a montré l'existence de la solution de problème faible par l'utilisation des arguments suivants : dérivée de Caputo, sous-différentielle de Clarke, méthode de Galerkin et théorème du point fixe de Banach.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. Amassad, K.L. Kuttler, M. Rochdi, and M. Shillor, Quasi-static thermoviscoelastic contact problem with slip dependent friction coefficient, *Math. Comput. Model.* **36** (2002), 839-854.
- [2] B. Awbi, EL H. Essoufi, and M. Sofonea, A viscoelastic contact problem with normal damped response and friction, *Ann. Polon. Math.* **75** (2000), 233-246.
- [3] B. Douib, T. Hadj Ammar, A. Azeb Ahmed, Analysis of a dynamic contact problem for electro-viscoelastic materials with tresca's friction, *TWMS Journal Applied and Engineering Mathematics*, **12** (4), 2022, 1490-1505.
- [4] K. Diethelm, The Analysis of Fractional Differential Equations, **2004**, Lecture Notes in Mathematics. Springer, Berlin, 2010.
- [5] J. Han, S. Migórski, and H. Zeng, Weak solvability of a fractional viscoelastic frictionless contact problem, *Appl. Math. Comput.* **303** (2017), 1-18
- [6] Meziane, Said Ameer, et al. On the problem of dynamic bi-frictional contact of thermo-electro-viscoelastic materials. *Discrete and Continuous Dynamical Systems-S*, 2024, 0-0.
- [7] G. L'Hôpital, *Analyse des infiniment petits*, François Montalant, Paris, 1715.
- [8] A.A. Kilbas, H.M. Srivastava, and J.J. Trujillo, Theory and applications of fractional differential equations, **204**, Elsevier, New York, 2006.

-
- [9] M.S. Mesai Aoun, M. Selmani and A. Azeb Ahmed, Variational Analysis of a Frictional Contact Problem with Wear and Damage. *Mathematical Modelling and Analysis* **26** (2) : 170-187, 2021.
 - [10] L. Li and J.-G. Liu, Some compactness criteria for weak solutions of time fractional PDEs, *SIAM J. Math. Anal.* **50** (2018), 3963-3995.
 - [11] S. Migórski, A. Ochal, M. Sofonea, Nonlinear inclusions and hemivariational inequalities : models and analysis of contact problems, *Advances in Mechanics and Mathematics*, **26**, Springer, New York-Heidelberg-Dordrecht-London, 2013.
 - [12] I. Podlubny, *Fractional Differential Equations*, Academic, San Diego, 1999.
 - [13] B. Riemann, Versuch einer Allgemeinen Auffassung der Integration und Differentiation (1847), In : R. Dedekind and H. Weber (Eds.), *Bernard Riemann's Gesammelte Mathematische Werke und Wissenschaftlicher Nachlass* (Cambridge Library Collection—Mathematics), Cambridge University Press, Cambridge, 2014, 331-344 (German).
 - [14] M. Rochdi, M. Shillor, and M. Sofonea, A quasistatic contact problem with directional friction and damped response, *Appl. Math.* **68** (1998), 409-422.
 - [15] F. Zeng, C. Li, F. Liu, and I. Turner, The use of finite difference/element approaches for solving the time-fractional subdiffusion equation, *SIAM J. Sci. Comput.* **35** (2013), 2976-3000.
 - [16] S. Zeng and S. Migórski, A class of time-fractional hemivariational inequalities with application to frictional contact problem, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* **56** (2018), 34-48.
 - [17] M. Frémond, *Equilibre des structures qui adhèrent à leur support*, *Comptes Rendus des Seances de L'academie des Sciences*, **295** (2) 1982, 913-916.
 - [18] H. Brézis, *Analyse fonctionnelle, Théorie et Application*, MASSON Paris New York Barcelone Milan Mexico Sao Paulo 1987.

Résumé

L'objectif de ce mémoire est l'analyse d'un problème de contact frottement quasi-statique entre un corps thermo-viscoélastique et une fondation thermoconductrice. La relation constitutive est construite par un modèle fractionnaire de Kelvin-Voigt. La conduction thermique est régie par le paramètre de température θ fractionnaire dans le temps. Le contact est décrit par la condition de compliance normale et le frottement est décrit par la loi de Coulomb. Nous dérivons une formulation variationnelle du problème et prouvons l'existence d'une solution faible au modèle en utilisant le théorème de l'opérateur monotone, la dérivée de Caputo, la sous-différentielle de Clark, la méthode Galerkin et le théorème du point fixe de Banach.

Mots clés : Contact thermo-viscoélastique, loi constitutive viscoélastique fractionnaire, frottement, dérivée de Caputo, méthode de Galerkin, théorème du point fixe de Banach.

Abstract

The objective of this memoir is the analysis of a quasistatic frictional contact problem between a thermo-viscoelastic body and a thermally conductive foundation. The constitutive relation is built by a fractional Kelvin-Voigt model. The heat conduction is governed by time-fractional of temperature parameter θ . The contact is described by the normal compliance condition and the friction is described by Coulomb's law. We derive a variational formulation of the problem and prove the existence of a weak solution to the model by using the theory of monotone operator, Caputo derivative, Clark subdifferential, Galerkin method and Banach fixed point theorem.

Key words : Thermo-viscoelastic contact, fractional viscoelastic constitutive law, friction, Caputo derivative, Galerkin method, Banach fixed point theorem.

ملخص

الهدف من هذه المذكرة تحليل مسألة إتصال إحتكاكي شبه ساكن بين جسم مرن حراري-لزج وأساس موصل للحرارة. يتم بناء العلاقة التكوينية بواسطة نموذج كلفن-فويغت الجزئي. يخضع التوصيل الحراري لبارامتر درجة الحرارة الكسرية الزمنية θ . يوصف التلامس بشرط الامتثال العمودي والاحتكاك موصوف بقانون كولوم. نشق صيغة متغيرة للمشكلة ونثبت وجود حل ضعيف للنموذج باستخدام نظرية المؤثر الرتيب ، مشتقة كابوتو، وتفاضل كلارك الجزئي، وطريقة جاليركين ونظرية النقطة الثابتة لبناخ.

الكلمات المفتاحية : التلامس الحراري اللزج، القانون التكويني اللزج المرن الكسري، الاحتكاك، مشتق كابوتو، طريقة جاليركن، نظرية النقطة الثابتة لبناخ.