الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة الشهيد حمة لخضر الوادي
كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير

مطبوعة بيداغوجية بعنوان:

الرياضيات المالية

موجهة لطلبة سنة ثانية ليسانس جميع الشعب

إعداد:
د. سميحة جديدي

السنة الجامعية
2024/2023

تقديم

مقياس الرياضيات المالية هو أحد مقاييس الوحدة الاستكشافية موجه لطلبة السنة الثانية ليسانس جميع الشعب، وضمت المطبوعة جميع المحاور وفقا لدليل المادة التعليمية الجديد المقرر من الوزارة. وقد تم تدعيمها بمجموعة من الأمثلة والتمارين المحلولة.

تم تقسيم المطبوعة لستة محاور، تناول المحور الأول الفائدة البسيطة وحساب الجملة، والمحور الثاني حول الخصم وتكافؤ الأوراق التجارية أما المحور الثالث فتناول العمليات طويلة الأجل ممثلة في الفائدة المركبة، والمحور الرابع تناول الدفعات بفائدة مركبة، والمحور الخامس كان حول استهلاك القروض بنوعيها، المجزأة وغير المجزأة، أما المحور السادس والأخير فتم فيه التطرق بإيجار لموضوع اختيار الاستثمارات.

وقد حاولنا تبسيط الطرح ليسهل على الطالب فهم واستيعاب المقياس آملين أن ينتفع الطلاب بما جاء فيها، كما نرحب بكل الملاحظات الهادفة لتحسين العمل وتنقيحه.

الدكتورة: سميحة جديدي

إن المعاملات التي تقوم بها البنوك التجارية التي تتعامل بالإقراض والاقتراض عن طريق اضـــافة نســـبة مئوية الى قيمة الدين لأجل معين تعد ربا قرض وهو محرم شـــرعا بالنص القرآني ودليله قوله تعالى في محكم تنزيله:

﴿الَّذِينَ يَأْكُلُونَ الرِّبَا لَا يَقُومُونَ إِلَّا كَمَا يَقُومُ الَّذِي يَتَخَبَّطُهُ الشَّـــيْطَانُ مِنَ الْمَسِّ ذَلِكَ بِأَنَّهُمْ قَالُوا إِنَّمَا الْبَيْعُ مِثْلُ الرِّبَا وَأَحَلَّ اللَّهُ الْبَيْعَ وَحَرَّمَ الرِّبَا فَمَنْ جَاءَهُ مَوْعِظَةٌ مِنْ رَبِّهِ فَانْتَهَى فَلَهُ مَا سَـــلَفَ وَأَمْرُهُ إِلَى اللَّهِ وَمَنْ عَادَ فَأُولَئِكَ أَصْحَابُ النَّارِ هُمْ فِيهَا خَالِدُونَ ٢٧٥ يَمْحَقُ اللَّهُ الرِّبَا وَيُرْبِي الصَّدَقَاتِ وَاللَّهُ لَا يُحِبُّ كُلَّ كَفَّارٍ أَثِيمٍ ٢٧٦ إِنَّ الَّذِينَ آمَنُوا وَعَمِلُوا الصَّالِحَاتِ وَأَقَامُوا الصَّلَاةَ وَآتَوُا الزَّكَاةَ لَهُمْ أَجْرُهُمْ عِنْدَ رَبِّهِمْ وَلَا خَوْفٌ عَلَيْهِمْ وَلَا هُمْ يَحْزَنُونَ ٢٧٧ يَا أَيُّهَا الَّذِينَ آمَنُوا اتَّقُوا اللَّهَ وَذَرُوا مَا بَقِيَ مِنَ الرِّبَا إِنْ كُنْتُمْ مُؤْمِنِينَ ٢٧٨ فَإِنْ لَمْ تَفْعَلُوا فَأْذَنُوا بِحَرْبٍ مِنَ اللَّهِ وَرَسُـــولِهِ وَإِنْ تُبْتُمْ فَلَكُمْ رُءُوسُ أَمْوَالِكُمْ لَا تَظْلِمُونَ وَلَا تُظْلَمُونَ ٢٧٩﴾

البقرة 275-279

المحتويات

تقديم	
المحور الأول: الفائدة البسيطة	
أولا: حساب الفائدة البسيطة	**04**
ثانيا: حساب الجملة المكتسبة	**10**
ثالثا: المعدل الوسطي لعدة توظيفات	**18**
رابعا: المعدل الفعلي والفائدة المسبقة	**19**
تمارين محلولة	**21**
المحور الثاني: الخصم وتكافؤ الأوراق التجارية	
أولا: الخصم التجاري والخصم العقلاني	**32**
ثانيا: الآجيو والقيمة الصافية للورقة التجارية:	**35**
ثالثا: الخصم وتكافؤ الأوراق التجارية	**36**
رابعا: تاريخ الاستحقاق المتوسط وتاريخ الاستحقاق المشترك	**41**
تمارين محلولة	**44**
المحور الثالث: الفائدة المركبة، الخصم، والتكافؤ بفائدة مركبة	
أولا: الفائدة المركبة	**57**
ثانيا: الخصم والتكافؤ بفائدة مركبة	**61**
ثالثا: المعدلات المتناسبة والمعدلات المتكافئة	**63**
تمارين محلولة	**66**
المحور الرابع: الدفعات	
أولا: الدفعات الثابتة نهاية المدة:	**61**
ثانيا: الدفعات الثابتة بداية المدة	**76**
تمارين محلولة	**83**
المحور الخامس: استهلاك القروض	
أولا: اهتلاك القروض غير المجزأة	**86**
ثانيا: اهتلاك القروض المجزأة	**90**
تمارين محلولة	**97**
المحور السادس: اختيار الاستثمارات	
أولا: معيار صافي القيمة الحالية	**103**
ثانيا: معيار معدل العائد الداخلي	**104**
ثالثا: طريقة مؤشر الربحية	**105**
المراجع	**107**

المحور الأول: الفائدة البسيطة

أولا: حساب الفائدة البسيطة

1- **تعريف الفائدة:** وهي المبلغ الذي يدفعه المقترض مقابل الحصـــول على مبلغ معين من المال لمدة زمنية معينة متفق عليها، أو هو المبلغ الذي يتحصل عليه الشخص مقابل إيداعه مبلغا من المال في البنك أو في المؤسسات المالية وعادة ما تكون نسبة محددة من رأس المال.

والفائدة نوعان هما:

- **الفائدة البســيطة:** تتعلق بالمعاملات المالية قصــيرة الأجل حيث تحســب الفائدة على أساس المبلغ الأصلي فقط أي المبلغ المقترض أو المودع في البنك.
- **الفائدة المركبة:** وتتعلق بالمعاملات المالية طويلة الأجل وتحســب على أســاس المبلغ الأصلي مضافا إليه الفوائد.

فالفائدة دالة لثلاث متغيرات هي:

- رأس المال (القرض أو أصل المبلغ)
- معدل الفائدة (العائد عن كل وحدة رأس مال تستثمر خلال وحدة الزمن)
- فترة الاستثمار (مدة الاستثمار أو فترة الاقتراض)

2- طريقة حساب الفائدة البسيطة:

الفائدة البسيطة = أصل المبلغ *معدل الفائدة *المدة

$$I = a * t * n$$

حيث أن:

I: الفائدة البسيطة

a: أصل المبلغ (رأس المال): وهو المبلغ المقترض أو المبلغ المستثمر أو المودع في البنك.

t: معدل الفائدة وهو النسبة التي يحسب على أساسها مبلغ الفائدة وعادة ما يكون سنوي كما يمكن أن يكون سداسي أو ثلاثي أو شهري ويقسم على 100.

n: مدة التوظيف: وهو الفترة الفاصلة بين تاريخ اقتراض (أو إيداع المبلغ) وتاريخ السداد (أو السحب) .

✓ إذا كانت المدة بالسنوات

$$n = 1an$$

فإن علاقة الفائدة تكتب كالتالي:

$$I = \frac{a * t * n}{100}$$

✓ أما إذا كانت المدة بالأشهر يجب قسمتها على 12 لتحويلها إلى سنوات

$$n = \frac{\text{عدد الأشهر}}{12}$$

وعليه تصبح علاقة الفائدة بالشكل التالي:

$$I = \frac{a * t * n}{1200}$$

✓ فإذا كانت بالأيام نقوم بقسمتها على 360 عند حساب الفائدة التجارية

$$n = \frac{\text{عدد الأيام}}{360}$$

بالتالي فعلاقة الفائدة تكتب كالتالي:

$$I = \frac{a * t * n}{36000}$$

وتقسم على 365 عند حساب الفائدة الصحيحة إذا كانت السنة بسيطة

$$n = \frac{\text{عدد الأيام}}{365}$$

فتكتب علاقة الفائدة كالتالي:

$$I = \frac{a * t * n}{36500}$$

وتقسم على 366 عند حساب الفائدة الحقيقية إذا كانت السنة كبيسة.

$$n = \frac{\text{عدد الأيام}}{366}$$

وتصبح علاقة الفائدة كالتالي:

$$I = \frac{a * t * n}{36600}$$

ملاحظات:

- لمعرفة ما إذا كانت السنة بسيطة أو كبيسة نقوم بقسمتها على العدد 4، فإذا كان الناتج عددا صحيحا فالسنة كبيسة (عدد أيام شهر فيفري 29 يوما) وإذا كان الناتج عدد غير صحيح فالسنة بسيطة (عدد أيام شهر فيفري 28 يوما)
- تحسب الفائدة على أساس تجاري إلا إذا كان المطلوب هو حساب الفائدة الحقيقية وعندها يتم حساب كل شهر بعدد أيامه الحقيقية. الأشهر: جانفي-مارس-ماي-جويلية-أوت-أكتوبر-ديسمبر عدد أيامها 31 يوما. الأشهر: أفريل-جوان-سبتمبر-نوفمبر، عدد أيامها 30 يوما. أما شهر فيفري فيحسب 28 أو 29 حسب السنة كبيسة أو بسيطة.
- عند حساب المدة فإنه يحسب اليوم الأول (يوم الإيداع أو الاقتراض) أو اليوم الأخير (يوم السحب أو التسديد) وعادة ما يتم حساب اليوم الأخير ويسقط اليوم الأول من الحساب.
- عند حساب الفائدة البسيطة يجب أن يتناسب معدل الفائدة مع المدة أي عندما يكون معدل الفائدة سنوي فإن المدة يجب أن تكون بالسنوات وهكذا وفي حالة عدم تناسبهما فإنه يجب تغيير المدة لتتناسب مع معدل الفائدة. أو تغيير المعدل ليتناسب مع المدة
- لإيجاد معدل الفائدة السداسي أو الثلاثي أو الشهري نقوم بقسمة معدل الفائدة السنوي على 2، 4، 12 على التوالي والتي تمثل عدد مرات التوظيف خلال سنة. فإذا كان لدينا معدل فائدة 10 بالمئة سنويا ولإيجاد المعدل السداسي نقوم بقسمة المعدل 10 على 2 والتي تمثل عدد مرات التوظيف خلال السنة (السنة يوجد بها 2 سداسي)، وبالنسبة لمعدل الفائدة الثلاثي نقسم 10 على 4 على اعتبار أن السنة بها أربع ثلاثيات وعليه يكون معدل الفائدة الثلاثي المتناسب مع المعدل 10 السنوي يساوي2.5 وإجمالا يحسب المعدل المتناسب عند التحويل من معدل سنوي الى معدل سداسي، ثلاثي أو شهري بالعلاقة التالية:

$$i_k = \frac{\mathrm{i}}{\mathrm{k}}$$

$\mathrm{i_k}$: المعدل السداسي، الثلاثي أو الشهري

i: المعدل السنوي

k: عدد مرات التوظيف خلال السنة

مثال 1: بتاريخ 2022/01/05 أودع شـخص مبلغا من المال مقداره 10000 دج في البنك بمعدل فائدة سنوي 5%

- **أحسب الفائدة التي يحصل عليها عند سحب المبلغ بتاريخ 2022/06/27**

الحل:

سنة 2022 هي سنة بسيطة إذا عدد أيام شهر فيفري 28 يوم

نقوم بحساب عدد الأيام من تاريخ الإيداع إلى غاية تاريخ السحب:

n= (31-05)+28+31+30+31+27=173

$$i = a * t * n$$

$$i = 10000 * \frac{5}{100}\frac{173}{360} = 240.27$$

مثال2 : وظف شخص مبلغ 10000 دج في البنك بمعدل فائدة سداسي 3%

- أحسب الفائدة التي يتحصل عليها بعد سنة واحدة من التوظيف

الحل: نلاحظ عدم تناسب المعدل والفائدة فالمدة بالسنوات والمعدل بالسداسي لذلك يجب تغيير المدة لتتناسب مع السداسي.

المدة سنة واحدة ويقابلها 2 سداسي إذن n=2

$$i = 10000 * \frac{3}{100}2 = 600$$

مثال 3: أودع شخص مبلغ 1000 ون في بنك بمعدل فائدة سنوي 9% أحسب الفوائد المستحقة إذا كانت مدة الإيداع:

- 8 شهور - 200 يوم -سنة وثلاث شهور وعشرون يوما
- تاريخ الإيداع 18 سبتمبر 2015 وتاريخ السداد 22 مارس 2016

الحل:

الحالة الأولى:

$$i = a * t * \frac{n}{12}$$

$$i = 1000 * \frac{9}{100} * \frac{8}{12} = 60$$

الحالة الثانية: بما أنه لم يذكر نوع الفائدة المطلوبة كما لم يحدد في أي سنة تقع مدة الاستثمار لذلك تحسب الفوائد على أساس أنها تجارية

$$i = a * t * \frac{n}{360}$$

$$i = 1000 * \frac{9}{100} * \frac{200}{360} = 50$$

الحالة الثالثة: نقوم بحساب الفوائد عن السنة ثم فوائد الثلاث شهور ثم فائدة عشرون يوما ونجمع المبالغ الثلاث للحصول على الفائدة الكلية

$$i1 = 1000 * \frac{9}{100} * 1 = 50$$

$$i2 = 1000 * \frac{9}{100} * \frac{3}{12} = 22.5$$

$$i3 = 1000 * \frac{9}{100} * \frac{20}{360} = 5$$

$$i = i1 + i2 + i3 = 77.5$$

الحالة الرابعة: نقوم بحساب فترة الأيام التي تقع بين تاريخ الاقتراض (أو الإيداع) وتاريخ السداد (أو السحب) حيث نقوم بحساب عدد الأيام المتبقية من شهر الإيداع (أو الاقتراض) ثم نضيف لها عدد الأيام في الأشهر الى غاية تاريخ السحب أو السداد.

n=(30-18)+31+30+31+31+28+22=185

$$i = 1000 * \frac{9}{100} * \frac{185}{360} = 46.25$$

3- العلاقة بين الفائدة التجارية والفائدة الصحيحة:

- **حالة السنة البسيطة:**

لدينا الفائدة التجارية =أصل المبلغ*المعدل*عدد الأيام (360يوم)

الفائدة الحقيقية= أصل المبلغ*المعدل*عدد الأيام (365يوم)

$$I_C = a * t\frac{\mathrm{n}}{360}$$

$$I_R = a * t\frac{\mathrm{n}}{365}$$

بقسمة الفائدة التجارية على الفائدة الحقيقية:

$$\frac{I_C}{I_R} = \frac{a * t\frac{\mathrm{n}}{360}}{a * t\frac{\mathrm{n}}{365}} = \frac{\frac{1}{360}}{\frac{1}{365}} = \frac{1}{360}\frac{365}{1}$$

$$\frac{I_C}{I_R} = \frac{73}{72}$$

من العلاقة أعلاه نستنتج أن:

$$I_C = \mathrm{I}_R\frac{73}{72}$$

$$I_R = \mathrm{I}_C \frac{72}{73}$$

- **حالة السنة الكبيسة:**

لدينا الفائدة التجارية =أصل المبلغ*المعدل*عدد الأيام (360يوم)

الفائدة الحقيقية= أصل المبلغ*المعدل*عدد الأيام (366يوم)

$$I_C = a * t \frac{\mathrm{n}}{360}$$

$$I_R = a * t \frac{\mathrm{n}}{366}$$

بقسمة الفائدة التجارية على الفائدة الحقيقية:

$$\frac{I_C}{I_R} = \frac{a * t \frac{\mathrm{n}}{360}}{a * t \frac{\mathrm{n}}{366}} = \frac{\frac{1}{360}}{\frac{1}{366}} = \frac{1}{360}\frac{366}{1}$$

$$\frac{I_C}{I_R} = \frac{61}{60}$$

من العلاقة أعلاه نستنتج أن:

$$I_C = \mathrm{I}_R \frac{61}{60}$$

$$I_R = \mathrm{I}_C \frac{60}{61}$$

مثال1: الفرق بين الفائدة التجارية والفائدة الصحيحة لمبلغ مودع لمدة 60 يوم بمعدل فائدة 4% هو 0.4 دج

- ما هي قيمة هذا المبلغ؟

$$I_C - \mathrm{I}_R = 0.4 \dots \dots 1$$

$$I_C = a * t \frac{\mathrm{n}}{360} = a * 0.04 * \frac{60}{360} \dots \dots 2$$

$$I_R = a * t \frac{\mathrm{n}}{365} = a * 0.04 \frac{60}{365} \dots \dots 3$$

بتعويض 2 و3 في العبارة 1 نجد:

$$a * 0.04 * \frac{60}{360} - a * 0.04 \frac{60}{365} = 0.4$$

$$a * \frac{2.4}{360} - a * \frac{2.4}{365} = 0.4$$

$$a\left(\frac{2.4}{360} - \frac{2.4}{365}\right) = 0.4$$

$$\frac{876 - 864}{131400} a = 0.4$$

$$a = 4380$$

ثانيا: حساب الجملة المكتسبة:

1- جملة مبلغ واحد

عند ايداع مبلغ معين في البنك لمدة محددة (أو اقتراض مبلغ من البنك) وبمعدل فائدة معلوم فإنه وفي نهاية المدة يتحصل المودع (أو يدفع المقترض) على **المبلغ** المودع (أو المقترض) مضافا إليه **الفوائد المستحقة** على هذا المبلغ وهو ما يطلق عليه الجملة أو القيمة المكتسبة والتي تعطى بالصيغة التالية:

$$A = a + I$$
$$A = a + (a * t * n)$$
$$A = a\,(1 + t * n)$$

مثال1: أحسب القيمة المكتسبة لمبلغ 1000 وظف لمدة 70 يوم بمعدل فائدة بسيطة 8% سنويا

الحل:

$$A = a\,(1 + t * n)$$
$$A = 1000\left(1 + \frac{8}{100}\frac{70}{360}\right)$$
$$A = 1015.55$$

2- جملة عدة مبالغ بمعدلات فائدة مختلفة:

عند إيداع عدة مبالغ مالية غير متساوية القيمة ولفترات زمنية مختلفة وبمعدلات فائدة مختلفة فإنه في نهاية المدة يحصل المودع إضافة إلى المبالغ المودعة على فائدة بسيطة عن كل مبلغ. ولحساب الجملة المكتسبة يجب حساب مجموع الفوائد المستحقة على هذه المبالغ مضافا إليها مجموع المبالغ الموظفة وذلك على النحو التالي:

- اجمالي الفوائد المستحقة يحسب بالعلاقة التالية:

$$I_G = I_1 + I_2 + I_3 \dots \dots \dots \dots + I_K$$

$$I_G = a_1 * t_1 * n_1 + a_2 * t_2 * n_2 + \cdots + a_K * t_K * n_K$$

$$\sum_{k}^{i=1} I_i = a_1 * t_1 * n_1 + a_2 * t_2 * n_2 + \cdots + a_K * t_K * n_K$$

- ومجموع المبالغ يساوي:

$$\sum_{k}^{i=1} a_i = a_1 + a_2 + \cdots a_k$$

- وعليه فإن القيمة المكتسبة تعطى وفق الصيغة الرياضية التالية:

$$\mathrm{A} = \sum_{k}^{i=1} a_i + \sum_{k}^{i=1} I_i$$

مثال2: أودع شخص ثلاث مبالغ مالية مختلفة القيمة وبمعدلات فائدة مختلفة ولفترات زمنية متباينة كالتالي:

- المبلغ الأول مقداره 7500 بمعدل فائدة 7% سنويا ولمدة سنة واحدة
- المبلغ الثاني مقداره 5000 بمعدل فائدة 5% ولمدة 6 أشهر
- المبلغ الثالث مقداره 9000 بمعدل فائدة 4% ولمدة 120 يوما

أوجد القيمة المكتسبة في نهاية المدة:

الحل:

$$\mathrm{A} = \sum_{k}^{i=1} a_i + \sum_{k}^{i=1} I_i$$

$$\mathrm{A} = a_1 + a_2 + a3 + a_1 * t_1 * n_1 + a_2 * t_2 * n_2 + a_3 * t_3 * n_3$$

$$\mathrm{A} = 7500 + 5000 + 9000 + 7500 * \frac{7}{100} * 1 + 5000 * \frac{5}{100}\frac{6}{12} + 9000 * \frac{4}{100}\frac{120}{360}$$

$$A = 21500 + 525 + 125 + 120$$

$$A = 22270$$

3- جملة عدة مبالغ وبمعدل فائدة متساوي:

إذا كانت المبالغ المودعة غير متساوية والمدة الزمنية لتوظيف المبالغ غير متساوية أما معدلات الفائدة متساوية فإنه في هذه الحالة يفضل استخدام طريقة النمر والقاسم (طريقة الأعداد والقاسم) وهي طريقة مبسطة وتختصر الحساب، حيث يساوي النمر حاصل ضرب كل مبلغ في مدته محسوبة **بالأيام**. والقاسم يساوي العدد 36000 على معدل الفائدة **بالنسبة المئوية**.

لدينا مجموع الفوائد المستحقة على عدد من المبالغ تساوي:

$$I_G = I_1 + I_2 + I_3 \dots\dots\dots\dots + I_K$$

$$I_G = a_1 \frac{t}{100}\frac{n_1}{360} + a_1 \frac{t}{100}\frac{n_1}{360} + a_1 \frac{t}{100}\frac{n_1}{360} \dots\dots a_K \frac{t}{100}\frac{n_K}{360}$$

$$I_G = \frac{a_1 t n_1}{36000} + \frac{a_2 t n_2}{36000} + \frac{a_3 t n_3}{36000} \dots\dots\dots\dots + \frac{a_k t n_k}{36000}$$

$$I_G = \frac{t}{36000}[a_1 * n_1 + a_1 * n_1 + a_1 * n_1 + \cdots \dots + a_K * n_K]$$

$$I_G = \frac{t\%}{36000}\left[\sum_{k}^{i=1}(a_i * n_i)\right] \dots\dots .1$$

باعتبار أن N النمر يساوي:

$$N = \sum_{k}^{i=1}(a_i * n_i)$$

والقاسم D يساوي:

$$D = \frac{36000}{t\%}$$

فإنه يمكن كتابة الصيغة الرياضية 1 على النحو التالي:

$$I_G = \frac{N}{D}$$

وتحسب الجملة المكتسبة بطريقة النمر والقاسم وفق الصيغة الرياضية التالية:

$$\mathrm{A} = \sum_{k}^{i=1} a_i + \sum_{k}^{i=1} I_i$$

حيث أن:

$$\sum_{k}^{i=1} I_i = \frac{N}{D}$$

مثال3: بالعودة إلى المثال السابق وعلى افتراض أن معدل الفائدة متساوي بالنسبة للمبالغ الثلاث ويساوي 5%

- أحسب الجملة المكتسبة في نهاية المدة بطريقة النمر والقاسم

الحل:

لدينا:

$$a_1 = 7500,\ a_2 = 5000,\ a_3 = 9000$$

- يجب تحويل المدد إلى الأيام وذلك بضرب المدة بالسنوات في 360، وضرب المدة بالأشهر في 30:

$$\mathrm{n}_1 = 1\mathrm{an} = 360\ \mathrm{jours}$$
$$\mathrm{n}_2 = 6\mathrm{mois} = 180\ \mathrm{jours}$$
$$\mathrm{n}_3 = 120\ \mathrm{jours}$$
$$t = 5\%$$

$$N = \sum_{k}^{i=1} (a_i * n_i) = 7500 * 360 + 5000 * 180 + 9000 * 120$$

$$\mathrm{N} = 4680000$$

$$D = \frac{36000}{t\%}$$

$$D = \frac{36000}{5} = 7200$$

مجموع الفوائد المستحقة عن جملة المبالغ يساوي:

$$\sum_{k}^{i=1} I_i = \frac{N}{D} = \frac{4680000}{7200} = 650$$

ومنه فإن جملة المبالغ تساوي مجموع الفوائد مضافا إلى مجموع المبالغ:

$$A = \sum_{k}^{i=1} a_i + \sum_{k}^{i=1} I_i$$

$$A = 7500 + 5000 + 9000 + 650 = 22150$$

4- جملة الدفعات المتساوية:

إذا كانت المبالغ متساوية وفترات الإيداع متساوية ومعدلات الفائدة المطبق على كل مبلغ متساوية فإننا بصدد **جملة دفعات متساوية** حيث تكون المبالغ المقترضة أو المستثمرة تأخذ طابع الدورية في التدفق والتساوي في المبالغ، ويتم تسديد الدفعات دوريا سواء بداية كل وحدة زمنية سواء بداية الشهر، بداية الثلاثي أو بداية سداسي ويطلق عليها الدفعات الفورية أو دفعات الاستثمار أو دفعات بداية المدة. أو قد يتم تسديدها في نهاية الوحدة الزمنية وتسمى الدفعات العادية أو دفعات السداد أو دفعات نهاية المدة.

حيث أن جملة الدفعات تساوي مجموع مبالغ الدفعات مضافا إليه مجموع فوائد الدفعات.

جملة الدفعات = مجموع مبالغ الدفعات + مجموع فوائد الدفعات

حيث أن مجموع الدفعات يساوي قيمة الدفعة الواحدة مضروبا في عدد الدفعات:

$$\sum_{k}^{i=1} a_i = a * k$$

أما مجموع الفوائد المستحقة فيشكل متتالية حسابية ويحسب وفق الصيغة التالية:

$$\sum_{k}^{i=1} I_i = a * t * \frac{k}{2}\left(\frac{n_1 + n_k}{12}\right)$$

حيث أن:

a: قيمة الدفعة الواحدة

t: معدل الفائدة على الدفعات

k: عدد الدفعات، وهو يساوي المدة كاملة بالشهور مقسومة على مدة الدفعة الواحدة بالشهور

n_1: مدة الدفعة الأولى و n_k مدة الدفعة الأخيرة. وهي المدة التي تقضيها الدفعة في الاستثمار لغاية حساب الجملة.

ويتم قسمة مجموع المدة الأولى والمدة الأخيرة على 12 لتحويل المدة من الشهور إلى السنوات.

وعليه فإن الصيغة العامة لحساب جملة دفعات متساوية كالتالي:

$$A = \sum_{k}^{i=1} a_i + \sum_{k}^{i=1} I_i$$

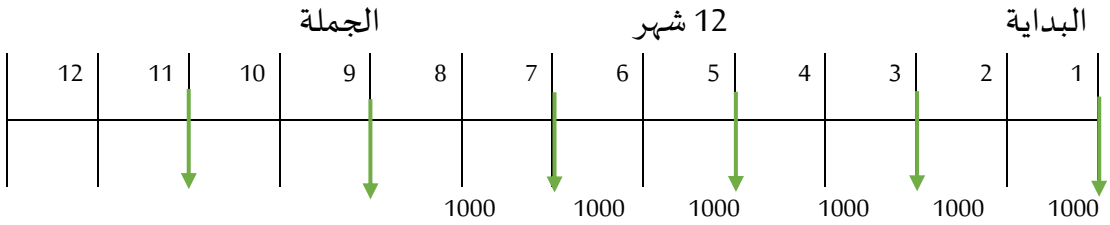
$$A = a * k + a * t * \frac{k}{2}\left(\frac{n_1 + n_k}{12}\right)$$

مثال4: يودع شخص دفعة مقدارها 1000 دج أول كل شهرين لمدة سنة بمعدل فائدة بسيطة 7%سنويا

- أحسب الجملة في نهاية المدة في حالتي دفعات الاستثمار (الدفعات الفورية) ودفعات السداد (الدفعات الآجلة)

الحل:

- حالة دفعات الاستثمار: يتم الدفع بداية كل فترة زمنية،



لدينا:

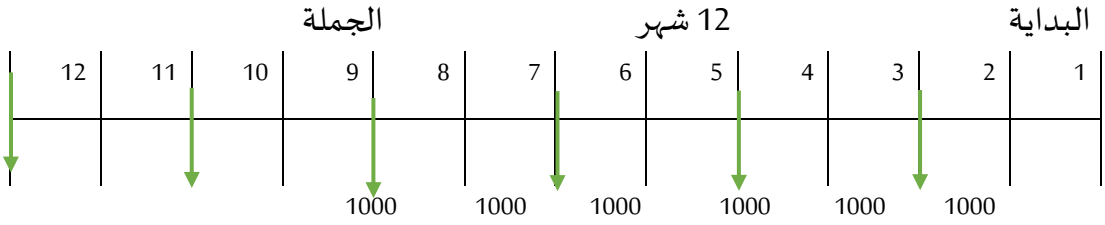
a=1000 t=7% k=12/2=6 n_1= 12 n_6=02

$$A = a * k + a * t * \frac{k}{2}\left(\frac{n_1 + n_k}{12}\right)$$

$$A = 1000 * 6 + 1000 * 0.07 * \frac{6}{2}\left(\frac{12 + 02}{12}\right)$$

$$A = 6245$$

- حالة دفعات السداد: يتم الدفع نهاية كل فترة زمنية:



لدينا:

a=1000 t=7% k=12/2=6 n_1= 10 n_6=00

$$A = a * k + a * t * \frac{k}{2}\left(\frac{n_1 + n_k}{12}\right)$$

$$A = 1000 * 6 + 1000 * 0.07 * \frac{6}{2}\left(\frac{10 + 00}{12}\right)$$
$$A = 6175$$

5- فوائد التأخير:

تحسب فوائد التأخير إذا لم يتم دفع المبالغ في مواعيد استحقاقها سواء كانت المبالغ عبارة عن أقساط متساوية، أو أصل المبلغ أو فوائد بسيطة، ويكون معدل حساب فوائد التأخير يساوي أو أكبر من معدل الفائدة المطبق.

مثال1: اقترض شخص مبلغ 3000 على أن يسدده بعد سنتين بمعدل فائدة 4% غير أنه قبل انقضاء المدة اتفق هذا الشخص مع الدائن على تأخير موعد التسديد لمدة ستة أشهر على أن تحسب فوائد التأخير بمعدل 5%

جملة المبلغ بعد سنتين

$$A = a + (a * t * n)$$
$$A = 3000 + (3000 * 0.04 * 2) = 3240$$

فوائد التأخير وتحسب من جملة المبلغ:

$$I = A * t * n$$
$$I = 3240 * 0.05 * \frac{6}{12}$$
$$I = 81$$

المبلغ الاجمالي الواجب دفعه= أصل المبلغ وفوائده (جملة المبلغ) + فوائد التأخير

المبلغ الإجمالي= 3240+81=3321

مثال2: اقترض شخص مبلغ 10000 لمدة 4 سنوات بمعدل فائدة 6% على أن يدفع الفوائد على أقساط دورية في نهاية كل 3 شهور، غير أن هذا الشخص وبعد دفع فوائد السنوات الثلاث الأولى عجز عن تسديد باقي الفوائد وأصل القرض نتيجة كساد تجارته فأتفق مع الدائن على تأجيل باقي الفوائد الدورية وأصل القرض لمدة 6 شهور بعد التاريخ المحدد لتسديد أصل القرض **المطلوب** حساب ما يدفعه التاجر عند انتهاء مدة التأجيل علما أن فوائد التأخير تحسب على أساس 8%.

- حساب الفائدة الاجمالية

$$I = a * t * n$$
$$I = 10000 * 0.06 * 4$$
$$I = 2400$$

- حساب مقدار الفائدة الدورية: تدفع الفائدة كل ثلاث أشهر ولمدة أربع سنوات أي أن عدد الدفعات الكلية يساوي عدد الدفعات للسنة الواحدة مضروبا في أربع سنوات ويساوي 16

وبالتالي فإن قيمة الدفعة من الفوائد الواحدة تحسب كالتالي

$$I = \frac{2400}{16} = 150$$

- حساب الدفعات المتأخرة +فوائد تأخيرها:

تم تسديد فوائد ثلاث سنوات وتبقى فوائد سنة واحدة أي ما يعادل أربع دفعات من الفوائد حيث قيمة الدفعة الواحدة 150 ون وتم تأجيل الدفع لستة أشهر أي أن الدفعة الأولى ستكون بعد 6 أشهر أما الدفعة الثانية فتكون بعد (6أشهر+3أشهر=9أشهر) لأن التسديد كل ثلاثة أشهر، أما الدفعة الثالثة فتكون بعد 12 شهر والدفعة الرابعة والأخيرة فهي بعد 15 شهر من التاريخ المحدد لتسديد القرض.

ويمكن حساب الدفعات المتأخرة وفوائده التأخير كالتالي:

$$\mathrm{A1} = a * k + a * t * \frac{k}{2}\left(\frac{n_1 + n_k}{12}\right)$$

n_1=6 / n_4=15

$$\mathrm{A1} = 150 * 4 + 150 * 0.08 * \frac{4}{2}\left(\frac{6 + 15}{12}\right)$$

$$\mathrm{A1} = 642$$

- حساب أصل المبلغ + فوائد التأخير:

$$A = a + I$$

$$A = a + a * t * n$$

A=10000 n=6 mois t=8%

$$A2 = 10000 + 10000 * 0.08 * \frac{6}{12}$$

$$A2 = 10400$$

اذن ما يدفعه الشخص بعد 4 سنوات وستة أشهر يساوي:

أصل المبلغ وفوائد تأخيره+ الدفعات الأربعة المتأخرة وفوائد تأخيرها

$$A = A1 + A2 = 642 + 10400$$

$$A = 11042$$

ثالثا: المعدل الوسطي لعدة توظيفات:

اذا قام شخص بتوظيف مجموعة من رؤوس الأموال (a_1,a_2,a_3) بمعدلات فائدة بسيطة مختلفة (t_1,t_2,t_3) ولفترات زمنية مختلفة (n_1,n_2,n_3) فإن المعدل المتوسط لهذه التوظيفات والذي نرمز له بـT هو المعدل الذي يعوض المعدلات (t_1,t_2,t_3) بحيث يتحصل الشخص على نفس المبلغ الإجمالي للفائدة البسيطة.

اذن المعدل المتوسط لعدة توظيفات هو المعدل الذي يعوض مجموعة من المعدلات بحيث تكون الفوائد المحصلة بهذا المعدل الوحيد مساوية لمجموع الفوائد المحصلة بالمعدلات المختلفة.

$$I = I_1 + I_2 + I_3 + \cdots + I_n$$
$$I = a_1 * t_1 * n_1 + a_2 * t_2 * n_2 + a_3 * t_3 * n_3 + \cdots + a_k * t_k * n_k$$

بتعويض المعدلات ($t_1,t_2,t_3 \ldots t_n$) بالمعدل الوحيد T تكتب المساواة أعلاه على النحو التالي

$$a_1 * T * n_1 + a_2 * T * n_2 + a_3 * T * n_3 + \cdots + a_k * T * n_k = a_1 * t_1 * n_1 + a_2 * t_2 * n_2 + a_3 * t_3 * n_3 + \cdots + a_k * t_k * n_k$$

ومنه:

$$T = \frac{a_1 * t_1 * n_1 + a_2 * t_2 * n_2 + a_3 * t_3 * n_3 + \cdots + a_k * t_k * n_k}{a_1 * n_1 + a_2 * n_2 + a_3 * n_3 + \cdots + a_k * n_k}$$
$$T = \frac{\sum_K^{i=1} a_K * t_K * n_K}{\sum_K^{i=1} a_K * n_K}$$

مثال: وظف شخص ثلاث مبالغ بتاريخ 20 ماي 2022 قيمتها على الترتيب 50000، 60000 ،30000 وبمعدلات فائدة 4%، 6.5%، 5% الى غاية 15 أوت، 12 جويلية و9سبتمبر على الترتيب.

ما هو المعدل الوسطي للتوظيفات الثلاثة؟

الحل:

نقوم أولا بحساب مدد التوظيف:

$$n_1 = (31 - 20) + 30 + 31 + 15 = 87 \text{ يوم}$$
$$n_1 = (31 - 20) + 30 + 12 = 53 \text{ يوم}$$
$$n_1 = (31 - 20) + 30 + 31 + 31 + 9 = 112 \text{ يوم}$$

$$T = \frac{a_1 * t_1 * n_1 + a_2 * t_2 * n_2 + a_3 * t_3 * n_3}{a_1 * n_1 + a_2 * n_2 + a_3 * n_3}$$

$$T = \frac{50000 * 4 * 87 + 60000 * 6.5 * 53 + 30000 * 5 * 112}{50000 * 87 + 60000 * 53 + 30000 * 112}$$

$$T = \frac{54870000}{10890000} = \mathbf{5.038}\%$$

رابعا: المعدل الفعلي والفائدة المسبقة: المعدل الفعلي أو الحقيقي هو المعدل المحسوب على أساس معطيات حقيقية أي رأس مال فعلي، مدة فعلية عكس المعدل الاسمي الذي يحسب بناء على معطيات اسمية مقدمة من طرف البنك.

لحساب المعدل الفعلي نقوم بحساب الفائدة الفعلية والتي تساوي الفائدة مضافا اليها المكافأة في حال حصول المستثمر على مكافاة في نهاية مدة التوظيف أو الفائدة مطروحا منها الرسوم في حالة قيام المستثمر بتسديد رسوم في نهاية المدة.

أما الفائدة المسبقة فهي الفائدة التي تمنح لصاحب المبلغ في بداية المدة (خلافا للمعتاد وهو الحصول على الفائدة في نهاية مدة التوظيف) وفي هذه الحالة فإن المبلغ المستثمر a_r هو المبلغ a مطروحا منه الفوائد المسحوبة في بداية الإيداع. وهنا نقوم بحساب المعدل الفعلي بناء على المبلغ الفعلي a_r

مثال 1: أودع شخص مبلغ 90000 ون في بنك لمدة 150 يوم بمعدل فائدة 8% وحصل في نهاية مدة التوظيف على الفوائد إضافة الى مكافأة قدرها 600 ون

- أحسب المعدل الفعلي

الحل: لحساب المعدل الفعلي نقوم بحساب الفائدة الفعلية وهي الفائدة عن المبلغ الموظف مضافا اليها المكافأة.

$$I_r = I + Bonus$$

$$I = \frac{a * t * n}{36000} = \frac{90000 * 8 * 150}{36000} = 3000$$

$$I_r = 3000 + 600 = 3600$$

لدينا:

$$I_r = \frac{a * t_r * n}{36000} \rightarrow t_r = \frac{I_r * 36000}{a * n} = \frac{3600 * 36000}{90000 * 150} = \mathbf{9.6}\%$$

مثال 2: أودع شـخص مبلغ 50000 ون في بنك لمدة 120 يوم بمعدل فائدة 6% علما أنه في نهاية مدة التوظيف سدد رسوم على الفائدة مقدارها 200 ون

- أحسب المعدل الفعلي

الحل: لحســاب المعدل الفعلي نقوم بحســاب الفائدة الفعلية وهي الفائدة عن المبلغ الموظف مطروحا منها الرسوم

$$I_r = I - taxes$$

$$I = \frac{a * t * n}{36000} = \frac{50000 * 6 * 120}{36000} = 1000$$

$$I_r = 1000 - 200 = 800$$

لدينا:

$$I_r = \frac{a * t_r * n}{36000} \rightarrow t_r = \frac{I_r * 36000}{a * n} = \frac{800 * 36000}{50000 * 120} = \mathbf{4.8}\%$$

مثال 3: قام شـخص بإيداع مبلغ 10000 ون في بنك لمدة 120 يوم بمعدل فائدة 6% مع العلم أن الشخص قام بسحب الفوائد في اليوم الأول للتوظيف.

- أحسب المعدل الفعلي للتوظيف

الحل: نقوم بحســاب المبلغ الفعلي ويســاوي المبلغ المســتثمر مطروحا منه الفوائد المسـحوبة في اليوم الأول ثم نحسب المعدل الفعلي.

$$a_r = a - I$$

$$I = \frac{a * t * n}{36000} = \frac{10000 * 6 * 120}{36000} = 200$$

إذا المبلغ الفعلي يساوي

$$a_r = 10000 - 200 = 9800$$

لدينا:

$$I = \frac{a_r * t_r * n}{36000} \rightarrow t_r = \frac{I * 36000}{a_r * n} = \frac{200 * 36000}{9800 * 120} = \mathbf{6.12}\%$$

تمرينات محلولة حول محور الفائدة البسيطة

التمرين رقم 01: ما مقدار الفائدة البسيطة لمبلغ400 000 ون أقترض لمدة 4 سنوات بمعدل 5% وأحسب الجملة المكتسبة في نهاية المدة.

التمرين رقم 02: ما هو المبلغ الذي فائدته المحصلة تساوي 180 ون في نهاية سنة ونصف من التوظيف بمعدل فائدة بسيطة 4%

التمرين رقم 03: استثمر شخص مبلغ قدره 6000 ون بمعدل فائدة سنوي 6% فكانت الفائدة التجارية 100 ون والمطلوب حساب مدة الاستثمار بالأيام.

التمرين رقم 04: حسبت الفائدة التجارية لمبلغ ما استثمر لمدة 160 يوم بمعدل فائدة 6% سنويا فكانت 80 ون المطلوب حساب أصل المبلغ المستثمر.

التمرين رقم 05:

وظف شخص مبلغ مالي قدره 500000 ون بمعدل فائدة 8%

أحسب الفائدة الناتجة في الحالات التالية:

1) n = 2a, 2) n = 3s, 3) n = 6m, 4) n = 9m et 15j,

التمرين رقم 06:

وظف شخص مبلغا من المال بقيمة 300000 في البنك لمدة سنة ونصف، أحسب الفائدة إذا كان

1) $t_a = 10\ \%$, 2) $t_s = 4\ \%$, 3) $t_t = 3\ \%$,

التمرين رقم 07: أوجد مبلغ الفائدة بطريقة المعدلات المتناسبة للحالات التالية:

- المبلغ: 320000 المعدل: 6% سداسي المدة: 1.5 سنة
- المبلغ: 550000 المعدل: 15% سنوي المدة: 3فصول
- المبلغ: 732000 المعدل: 4.5% فصلي المدة: 8أشهر
- المبلغ: 800000 المعدل: 1% شهري المدة: 1سداسي

التمرين رقم08: باستخدام طريقة النمر والقاسم أحسب مجموع الفوائد الناتجة عن توظيف المبالغ التالية بمعدل فائدة سداسي9%.

- المبلغ:100000 مدة التوظيف: 3أشهر 15 يوم
- المبلغ:180000 مدة التوظيف: 2سداسي
- المبلغ:300000 مدة التوظيف:1 سداسي وشهرين
- المبلغ:140000 مدة التوظيف:4أشهر

التمرين رقم 09: أودع شخص مبلغ 1000 ون بمعدل فائدة 6% سنويا لمدة 120 يوم
أحسب الفائدة التجارية والفائدة الصحيحة

التمرين رقم 10: الفرق بين الفائدة التجارية والفائدة الصحيحة لمبلغ ما استثمر لمدة ما وبمعدل فائدة معين يساوي 2.4 ون
أحسب كلا من الفائدتين الصحيحة والتجارية

التمرين رقم 11: وظف شخص مبلغ بمعدل فائدة ،12 % لمدة شهرين وبعد مرور شهرين قام بتوظيف مبلغ آخر يمثل ضعف الأول بنفس المعدل السابق ليتحصل في نهاية التوظيف على فوائد قدرها 270000 ون، 480000 ون للعمليتين على التوالي. أحسب مدة التوظيف للمبلغ الثاني والأصل الموظف لكل عملية.

التمرين رقم 12: وظف شخص في بنك مبلغ لمدة سداسي واحد بمعدل فائدة سنوي ،15% وبعد انتهاء عملية التوظيف أضيف إلى الجملة المكتسبة مبلغ قيمته 720000 دينار ووظفت في بنك آخر لمدة أربعة أشهر بمعدل فائدة سداسي 12% ليتحصل الشخص على فائدة من البنك الثاني قدرها 80000 دينار .

- أحسب الأصل الموظف في البنك الأول والفائدة المتحصل عليها من عملية التوظيف
- أحسب الأصل الموظف في البنك الثاني

التمرين رقم13 وظف شخص مبلغ 58400 لمدة 250 يوم فكان الفرق بين الفائدة التجارية والفائدة الصحيحة 120
أحسب معدل الفائدة ثم أحسب الجملة المكتسبة بالفائدة التجارية

التمرين رقم 14: مبلغ مقداره 90000 تم ايداعه بمعدل فائدة 10% بتاريخ 6 مارس 2015

- أحسب تاريخ نهاية التوظيف وأحسب الجملة في هذا التاريخ.
- أحسب الجملة بعد100 يوم من التوظيف.

التمرين رقم 15: أودع شخص مبلغ 25000 لدى البنك ولمدة 8 شهور بنسبة فائدة بسيطة تقدر ب10% فما هي الجملة المكتسبة في نهاية المدة.
وإذا تم استثمار نفس المبلغ لمدة 75 يوما بمعدل فائدة 12% سنويا فكم ستكون الجملة المكتسبة

التمرين رقم 16 أوجد قيمة رأس المال المستثمر بمعدل 4.2% و لمدة 162 يوم إذا بلغت الجملة المكتسبة 7743.64 دج

التمرين رقم17: أودعت مؤسسة مبلغا 57600 دج في بنك لمدة أيام معينة فبلغت الفائدة المحصلة 2688دج أحسب المدة اذا كان المعدل المطبق 14%

وإذا تم إيداع الجملة المحصلة لنفس المبلغ السابق في بنك آخر لمدة 5 شهور فحققت فائدة تقدر ب4019.2 فما هو المعدل المطبق في هذه الحالة

التمرين رقم 18: قام شخص بايداع 4000 دج أول كل شهر لمدة 5 شهور منذ بداية سنة 2022 ثم قام بايداع 6000 دج أول كل شهر من شهور السنة المتبقية.

أوجد رصيد الشخص بتاريخ 2022/12/31 اذا كان معدل الفائدة البسيطة المطبق يساوي 4% سنويا

التمرين رقم 19 دفعات ربع سنوية قيمتها 4500 ومدتها ثلاث سنوات وثلاث أشهر فإذا بلغت الجملة المكتسبة 79560 فما هو معدل الفائدة المطبق في حالتي الدفعات الفورية والدفعات العادية

التمرين رقم 20: أقترض مبلغ 100000 بمعدل فائدة 12% سنويا ابتداء من 15 مارس الى 30 جوان من نفس السنة

أحسب الجملة المكتسبة.

التمرين رقم 21: بتاريخ 24 ماي اقترض شخص مبلغ 20000 لمدة 90 يوم بمعدل فائدة 10 %

أحسب الجملة ثم حدد تاريخ الاستحقاق.

التمرين رقم 22: استثمر شخص مبلغ معين لمدة 90 يوم فتحصل على فائدة بسيطة 3000 إذا علمت أنه إذا استثمر نفس المبلغ وبنفس المعدل لمدة 120 يوم لتحصل على جملة مكتسبة قدرها 154000

أحسب المبلغ المستثمر ومعدل الفائدة

حلول التمارين:

حل التمرين رقم 01:

t=5% a=400000 n=4ans

المطلوب حساب الجملة المكتسبة

$$A = a(1 + t * n)$$
$$A = 400000(1 + 0.05 * 4) = 480000$$

حل التمرين رقم 02:

t=4% I=180 n= 1.5ans

المطلوب حساب أصل المبلغ

$$I = a * t * n \rightarrow a = \frac{I}{t * n} = \frac{180}{1.5 * 0.04}$$
$$a = 3000$$

حل التمرين رقم 03:

t=6% Ic=100 a=6000

المطلوب حساب المدة

$$Ic = a * \frac{t}{100} * \frac{n}{360}$$
$$100 = 6000 * \frac{6}{100} * \frac{n}{360}$$
$$36000n = 3600000 \rightarrow n = 100j$$

حل التمرين رقم 04:

t=6% Ic=80 n=160j

المطلوب حساب أصل المبلغ

$$Ic = a * \frac{t}{100} * \frac{n}{360}$$
$$80 = a * \frac{6}{100} * \frac{160}{360}$$
$$960a = 2880000 \rightarrow a = 3000$$

حل التمرين رقم 05:

aالمبلغ	tالمعدل	nالمدة	Iالفائدة
500000	8%	n=2a	I=500000*0.08*2=80000
500000	8%	n=3s	I=500000*0.08*1.5=60000
500000	8%	n=6m	I=500000*0.08*0.5=20000
500000	8%	n=9m et 15j	I=500000*0.08*285/360=31666.66

حل التمرين رقم 06:

aالمبلغ	tالمعدل	nالمدة	Iالفائدة
300000	Ta=10%	1.5ans	I=300000*0.01*1.5=4500
300000	Ts=4%	1.5ans	I=300000*0.08*1.5=36000
300000	Tt=3%	1.5ans	I=300000*0.12*1.5=54000

حل التمرين رقم 7:

المبلغ a	المعدل t	المدة n	الفائدة I
320000	Ts=6%	1.5ans	I=320000*0.12*1.5=57600
550000	Ta=15%	3trimestre	I=550000*0.0375*3=61875
732000	Tt=4.5%	8 mois	I=732000*0.15*8=87840
800000	Tm=1%	1semestre	I=800000*0.06*1=48000

حل التمرين رقم 8:

Ta=9*2=18% n1=105j n2=360j n3=240j

المطلوب إيجاد مجموع الفوائد الحل باستخدام طريقة النمر والقاسم:

$$\sum I = \frac{N}{D}$$

حيث أن النمر N يساوي مجموع المبالغ a مضروبة في مدتها n بالأيام

والقاسم D يساوي العدد 36000 على معدل الفائدة بالنسبة المئوية

N=(100000*105)+(180000*360)+(300000*240)= 147300000

D=36000/18=2000

$$\sum I = \frac{N}{D} = \frac{147300000}{2000} = 73650$$

حل التمرين رقم 9:

t=6% a=1000 n=120j

المطلوب حساب الفائدتين الصحيحة والتجارية

$$Ic = a * \frac{t}{100} * \frac{n}{360}$$

$$Ic = 1000 * \frac{6}{100} * \frac{120}{360} = 20$$

$$\frac{Ic}{Ir} = \frac{73}{72} \rightarrow Ir = Ic\frac{72}{73}$$

حل التمرين رقم 10:

Ic-Ir=2.4

المطلوب حساب الفائدتين التجارية والصحيحة

$$Ic - Ir = Ic\frac{1}{73}$$

$$2.4 = Ic\frac{1}{73} \rightarrow Ic = 2.3 * 73 = 175.2$$

$$Ic - Ir = 2.4 \rightarrow Ir = Ic - 2.4 = 175.2 - 2.4 = 172.8$$

حل التمرين رقم 11:

t=12% a_2=2 a_1 n_1=2 m I1=270000 I2=480000

حساب المبلغين المستثمرين

$$I_1 = a_1 * t * n_1$$

$$270000 = a_1 * 0.12 * \frac{2}{12} \rightarrow a_1 = \frac{270000}{0.02} = 13500000$$

$$a_2 = 2a_1 = 27000000$$

حساب المدة للمبلغ الثاني

$$I_2 = a_2 * t * n_2$$

$$480000 = 27000000 * 0.12 * n_2$$

$$n_2 = \frac{480000}{3240000} = 0.148ans = 53.28j$$

حل التمرين رقم 12:

t_1=15% n_1=6m a_2=A_1+720000 n_2=4m t_2=12% I_2=80000

حساب الأصل والفائدة للمبلغ الأول:

لدينا من المعطيات

$$a_2 = \mathrm{A1} + 720000 \qquad \ldots.1$$

ولدينا

$$I_2 = a_2 * t_2 * n_2$$

$$80000 = a_2 * 0.12 * \frac{4}{12} \qquad \ldots.2$$

بتعويض المعادلة 1 في 2

$$80000 = \text{A1} + 720000 * \frac{24}{100} * \frac{4}{12}$$

$$\text{A1} = \frac{80000 * 12 * 100}{24 * 4} - 720000 = 280000$$

<u>بالتعويض في 1 نجد:</u>

$$a_2 = 280000 + 720000 = 1000000$$

لدينا :

$$\text{A1} = a_1(1 + t * n) \rightarrow a_1 = \frac{280000}{1 + 0.15 * 0.5} = 260465.1163$$

<u>حل التمرين رقم 13:</u>

Ic-Ir=120 a=58400 n=250j

إيجاد مقدار الفائدة التجارية

$$Ic - Ir = Ic\frac{1}{73}$$

$$120 = Ic\frac{1}{73} \rightarrow Ic = 120 * 73 = 8760$$

لدينا

$$Ic = a * \frac{t}{100} * \frac{n}{360}$$

$$8760 = 58400 * \frac{t}{100} * \frac{250}{360}$$

$$t = \frac{8760 * 100 * 360}{58400 * 250} = 21.6\%$$

<u>حل التمرين رقم 14:</u>

t=10% a=90000 I=7150

المطلوب حساب تاريخ نهاية التوظيف والجملة المكتسبة

$$I = a * \frac{t}{100} * \frac{n}{360} \rightarrow 90000 * 0.1 * \frac{n}{360}$$

$$n = \frac{7150 * 360}{90000 * 0.1} = 286j$$

لإيجاد تاريخ نهاية التوظيف نقسم المدة 286 على 30 لتحديد عدد الأشهر وتساوي 9 أشهر و16يوم

لدينا تاريخ الإيداع 6 مارس 2015 اذن عدد أيام الاستثمار من شهر مارس هي:

31-6=25

نطرح أيام الأشهر من مدة التوظيف بداية من شهر مارس الى غاية شهر نوفمبر للحصول على تاريخ نهاية التوظيف

286-(25+30+31+30+31+31+30+31+30)=17

اذن 17 ديسمبر 2015 هو تاريخ حساب الجملة أو تاريخ نهاية التوظيف

حساب الجملة في هذا التاريخ

$$\mathrm{A} = \mathrm{a} + \mathrm{I} = 90000 + 7150 = 97150$$

حساب الجملة بعد 100 يوم

$$\mathrm{A} = a + a * \frac{t}{100} * \frac{n}{360} = 90000 + \frac{90000 * 10 * 10}{36000} = 92500$$

<u>حل التمرين رقم 15:</u>

m8% a=25000 n=10t=

المطلوب حساب الجملة

$$A = a(1 + \frac{t}{100}\frac{n}{12})$$

$$A_1 = 25000\left(1 + \frac{10}{100}\frac{8}{12}\right) = 26666.66$$

$$A_2 = 25000\left(1 + \frac{10}{100}\frac{75}{360}\right) = 25625$$

<u>حل التمرين رقم 16:</u>

% A+7743.64 n=162j4.2t=

$$A = a(1 + \frac{t}{100} * \frac{162}{360})$$

$$a = \frac{A}{(1 + \frac{t}{100}\frac{n}{360})} = \frac{7743.64}{(1 + \frac{4.2}{100}\frac{162}{360})} = \frac{7743.64}{1.0189} = 7600$$

حل التمرين رقم 17:

00 I=2688576% a=14t=

حساب المدة

$$I = a * \frac{t * n}{36000} \rightarrow I * 36000 = a * t * n$$

$$n = \frac{2688 * 36000}{57600 * 14} = 120j$$

حساب الجملة

$$A = a + I = 57600 + 2688 = 60288$$

حساب المعدل

$$I = a * \frac{t * n}{1200} \rightarrow 4019.2 = 60288 * \frac{t * 5}{1200}$$

$$t = \frac{4019.2 * 100 * 12}{60288 * 5} = 16\%$$

حل التمرين رقم 18: لإيجاد الرصيد نقوم بقسمة المدة الى قسمين من الدفعات متساوية الأولى خمس دفعات مبلغها 4000 لمدة 5 أشهر والثانية سبع دفعات مبلغها 6000 لمدة 7 أشهر

$$\mathrm{A} = a * k + a * t * \frac{k}{2}\left(\frac{n_1 + n_k}{12}\right)$$

$$\mathrm{A_1} = 4000 * 5 + 4000 * 0.04 * \frac{5}{2}\left(\frac{12 + 8}{12}\right) = 20666.66$$

$$\mathrm{A_2} = 6000 * 7 + 6000 * 0.04 * \frac{7}{2}\left(\frac{7 + 1}{12}\right) = 42560$$

$$\mathrm{A} = \mathrm{A_1} + \mathrm{A_2} = 63226.67$$

حل التمرين رقم 19:

n=3a+3m=39m k=36/3=13

المطلوب حساب المعدل: حالة الدفعات العادية(نهاية المدة)

$$\mathrm{A} = a * k + a * t * \frac{k}{2}\left(\frac{n_1 + n_k}{12}\right)$$

$$79560 = 4500 * 13 + 4500 * t * \frac{13}{2}\left(\frac{36 + 00}{12}\right)$$
$$79560 = 58500 + 87750t$$
$$t = 0.24 = 24\%$$

حالة الدفعات الفورية (بداية المدة)

$$\mathrm{A} = a * k + a * t * \frac{k}{2}\left(\frac{n_1 + n_k}{12}\right)$$

$$79560 = 4500 * 13 + 4500 * t * \frac{13}{2}\left(\frac{39 + 03}{12}\right)$$
$$79560 = 58500 + 102375t$$
$$t = 0.20 = 20\%$$

حل التمرين رقم 20:

a=100000 t=12% n=(31-15)+30+31+30=107 jours

حساب الجملة المكتسبة

$$A = a(1 + \frac{t}{100} * \frac{n}{360})$$

$$A = 100000\left(1 + \frac{12}{100} * \frac{107}{360}\right) = 103566.7$$

حل التمرين رقم 21:

$$A = a(1 + \frac{t}{100} * \frac{n}{360})$$

$$A = 20000\left(1 + \frac{10}{100} * \frac{90}{360}\right) = 20500$$

تاريخ الاستحقاق

ماي +(24-31) جوان +30جويلية +31اوت90=x

75x=90

x=90-78=22

تاريخ الاستحقاق هو 22 أوت

حل التمرين رقم 22:

المطلوب حساب المبلغ والمعدل

$$I = a * t * n \rightarrow 3000 = a * \frac{t}{100} * \frac{90}{360} \dots\dots 1$$

$$A = a(1 + t * n) \rightarrow 154000 = a\left(1 + \frac{t}{100} * \frac{120}{360}\right) \dots\dots 2$$

بضرب المعادلة 1 في العدد 12 والمعادلة 2 في العدد 9 نجد

$$36000 = a * \frac{t}{100} * \frac{108}{360} \dots\dots 1$$

$$1386000 = 9a * \frac{t}{100} * \frac{108}{360} \dots\dots 2$$

بطرح 1 من 2 نجد

$$1350000 = 9a \rightarrow a = 150000$$

بتعويض قيمة a في المعادلة 1 نجد المعدل

$$3000 = 150000 * \frac{t}{100} * \frac{90}{360}$$

$$t = \frac{3000 * 100 * 360}{90 * 150000} = 8\%$$

المحور الثاني: الخصم وتكافؤ الأوراق التجارية

يستخدم المتعاملون الاقتصاديون الى جانب النقود والشيكات وسائل دفع أخرى تسمى الأوراق التجارية كالسفتجة والسند لأمر، حيث يتم تحريرها بتاريخ استحقاق محدد يسمح لصاحبها بالحصول على القيمة الأسمية للورقة التجارية المدونة عليها سواء في تاريخ الاستحقاق المحدد، أو قبل موعد استحقاقها فيما يسمى بعملية خصم الأوراق التجارية.

أولا: الخصم التجاري والخصم العقلاني:

قد يحتاج المدين للسيولة النقدية فيلجأ الى تحصيل الأوراق التجارية قبل تاريخ استحقاقها، ويقوم البنك بعملية الخصم وهي نسبة معينة يتم اقتطاعها من القيمة الاسمية للورقة التجارية تسمى نسبة الخصم وهي تساوي الفائدة في المدة المحصورة بين تاريخ الخصم وتاريخ الاستحقاق. وبالتالي يحصل حامل الورقة التجارية على مبلغ مالي أقل من القيمة الاسمية للورقة التجارية ويساوي القيمة الحالية للورقة التجارية. **فالخصم هو مبلغ معين يتم التنازل عنه من القيمة الأسمية للورقة التجارية مقابل الحصول على الدين قبل تاريخ استحقاقه. وهو أيضا المبلغ الذي يخصم من الدين إذا قام المدين بتسديد الدين قبل موعد استحقاقه.**

1- الخصم التجاري:

وهو يحسب من القيمة الأسمية للورقة التجارية وذلك وفق الصيغة الرياضية التالية:

$$E_c = VN * t * n$$

E_c: الخصم التجاري

VN: القيمة الاسمية وهي القيمة المستحقة الدفع في تاريخ معين (المبلغ المدون على الورقة التجارية أو قيمة الدين)

n: مدة الخصم

t: معدل الخصم وهو نسبة مئوية يتم اقتطاعها من القيمة الاسمية للورقة التجارية أو الدين

أ- القيمة الحالية للورقة التجارية:

القيمة الحالية للورقة التجارية VA_c هي القيمة المتبقية بعد طرح قيمة الخصم وتحسب كالتالي:

القيمة الحالية للورقة التجارية= القيمة الاسمية-قيمة الخصم التجاري

$$VA_C = VN - E_C$$

لدينا:

$$E_c = VN * t * n$$

وبتعويض قيمة الخصم التجاري في المعادلة نجد:

$$VA_C = VN - VN * t * n$$

$$VA_C = VN(1 - t * n)$$

مثال: أحسب القيمة الحالية لورقة تجارية قيمتها الاسمية 20000 قدمت للخصم قبل تاريخ استحقاقها ب 60 يوم وبمعدل خصم 6%

$$VA_C = VN(1 - t * n)$$

$$VA_C = 20000\left(1 - \frac{6}{100} * \frac{60}{360}\right) = 19800$$

ملاحظات:

- تحسب القيمة الحالية لمجموع العدد K من الأوراق التجارية كالتالي:

$$VA = VA_1 + VA_2 + \cdots + VA_K$$

$$VA = VN_1(1 - t * n_1) + VN_2(1 - t * n_2) + \cdots + VN_k(1 - t * n_k)$$

- تحسب القيمة الحالية للدفعات المتساوية كالتالي:

$$VA = a * k - a * t * \frac{k}{2}\left[\frac{n_1 + n_k}{12}\right]$$

2- الخصم العقلاني (الخصم الصحيح):

وهو الخصم الذي يحسب على أساس القيمة الحالية الصحيحة للورقة التجارية وذلك كالتالي:

$$E_r = VA_r * t * n$$

حيث أن:

E_r: الخصم العقلاني أو الخصم الصحيح

VA_r: القيمة الحالية الصحيحة

n: مدة الخصم

t: معدل الخصم

أ- القيمة الحالية الصحيحة للورقة التجارية:

هي الفرق بين القيمة الاسمية للورقة التجارية وقيمة الخصم الصحيح (العقلاني)

القيمة الحالية الصحيحة= القيمة الاسمية-الخصم الصحيح

$$VA_r = VN - E_r$$

بتعويض قيمة الخصم الصحيح في المعادلة أعلاه نجد:

$$VA_r = VN - VA_r * t * n$$
$$VA_r + VA_r * t * n = VN$$
$$VA_r(1 - t * n) = VN$$
$$VA_r = \frac{VN}{1 + t * n}$$

3- العلاقة بين الخصم التجاري والخصم الصحيح:

أ- الخصم الصحيح بدلالة الخصم التجاري:

من العلاقة الرياضية للقيمة الحالية الصحيحة يمكن أن نستنتج قيمة الخصم التجاري الصحيح والتي تساوي القيمة الاسمية مطروحا منها الخصم الصحيح.

$$VA_r = VN - E_r$$
$$E_r = VN - VA_r$$

نقوم بتعويض القيمة الحالية الصحيحة بما يساويها في المعادلة أعلاه:

$$VA_r = \frac{VN}{1 + t * n}$$
$$E_r = VN - \frac{VN}{1 + t * n}$$
$$E_r = \frac{VN + VN * t * n - VN}{1 + t * n}$$
$$E_r = \frac{VN * t * n}{1 + t * n}$$

لدينا:

$$E_c = VN * t * n$$

وبتعويض الخصم التجاري في المعادلة أعلاه نجد:

$$E_r = \frac{E_c}{1 + t * n}$$

وهي تمثل الخصم العقلاني بدلالة الخصم التجاري

ب-نسبة الخصم التجاري إلى الخصم الصحيح:

لدينا:

$$E_c = VN * t * n \dots \dots 1$$
$$E_r = VA_r * t * n \dots \dots 2$$

بقسمة 1 على 2 نجد:

$$\frac{E_C}{E_r} = \frac{VN * t * n}{VA_r * t * n}$$

$$\frac{E_C}{E_r} = \frac{VN}{VA_r}$$

ومن الصيغة أعلاه يمكن استنتاج العلاقات التالية:

$$VN = VA_r \frac{E_c}{E_r}$$

$$VA_r = VN \frac{E_r}{E_c}$$

ج- الفرق بين الخصم التجاري والخصم الصحيح:

لدينا:

$$E_c = VN * t * n \dots \dots 1$$
$$E_r = VA_r * t * n \dots \dots 2$$

بطرح 2 من 1 نجد:

$$E_c - E_r = VN * t * n - VA_r * t * n$$
$$E_c - E_r = t * n\ (VN - VA_r)$$
$$E_c - E_r = E_r * t * n$$

ومن الصيغة أعلاه نستنتج أن:

$$E_c = E_r(1 + t * n)$$

ثانيا: الآجيو والقيمة الصافية للورقة التجارية:

1- حساب الآجيو:

يتقاضى البنك الى جانب الخصم التجاري مجموعة من العمولات والرسوم تسمى بإجمالي تكاليف عملية الخصم وتعرف بالآجيو، وهو يشمل العناصر التالية

- الخصم التجاري:
- العمولات: والتي بدورها تنقسم الى نوعين:
  - عمولات ثابتة: وتبقى ثابتة مهما تغيرت قيمة الورقة التجارية، ومهما كانت مدة الخصم.
  - عمولات متغيرة: تتغير حسب قيمة الورقة التجارية أو حسب مدة الخصم.
- الرسوم: يقتطعها البنك كنسبة مئوية من مجموع العمولات لصالح الضرائب كالرسم على القيمة المضافة.

وعليه فإن:

الآجيو = الخصم+العمولات+الرسوم

$$Agios = Ec + com + tax$$

2- **القيمة الصافية للورقة التجارية:** وهي القيمة الحقيقية المحصلة من طرف المستفيد من الخصم وهي تساوي القيمة الاسمية مطروحا منها الآجيو وتسمى صافي القيمة الحالية للورقة التجارية *Van*

$$VA_n = VN - Agios$$

كما أن معدل الخصم الإجمالي الذي حققه البنك سوف يختلف عن معدل الخصم المعلن، فمعدل الخصم الحقيقي يكون أكبر من معدل الخصم الاسمي (معدل الخصم المعلن).

لدينا الخصم التجاري يحسب بالعلاقة التالية

$$Ec = VN * t * r$$

من المعادلة أعلاه نستنتج معدل الخصم الاسمي:

$$t = \frac{E_c}{VN * n_r}$$

أما المعدل الحقيقي فيحسب بالعلاقة التالية:

$$t_r = \frac{Agios}{VN * n_r}$$

حيث أن:

tr. معدل الخصم الحقيقي

nr. مدة الخصم الحقيقية حيث يضيف البنك يوم أو يومين كمهلة سداد لمدة الخصم

ثالثا: تكافؤ الأوراق التجارية:

تكافؤ الأوراق التجارية أو تسوية الديون قصيرة الأجل هو تساوي القيم الحالية لهذه الأوراق في تاريخ التسوية (تاريخ التكافؤ). حيث يمكن استبدال ورقة تجارية مع ورقة تجارية أخرى أو عدة أوراق تجارية وذلك في ظل الشرطين التاليين:

- يجب أن تكون معدلات الخصم متساوية.
- يجب أن يتم حساب القيم الحالية للأوراق في نفس التاريخ وهو تاريخ التسوية.

1- تكافؤ ورقتين تجاريتين:

نقول عن ورقتين تجاريتين أنهما متكافئتين في تاريخ معين إذا تم خصم الورقتين في ذلك التاريخ وبنفس معدل الخصم وكانت القيمتين الحاليتين للورقتين متساويتين أي أن:

$VA_1=VA_2$

لدينا:

VN_1, VN_2 القيم الأسمية للورقتين

n_1,n_2: المدة للورقتين وهي الفترة الزمنية الفاصلة بين تاريخ التكافؤ وتاريخ الاستحقاق.

VA_1,VA_2 القيم الحالية للورقتين

نقول أن الورقتين التجاريتين متكافئتين إذا كانت:

القيمة الحالية للورقة الأولى=القيمة الحالية للورقة الثانية في تاريخ التكافؤ المشترك.

أي أن:

$$VA_{C1} = VA_{C2} \rightarrow VN_1 - E_{C1} = VN_2 - E_{C2}$$
$$VN_1 - VN_1 * n_1 * t = VN_2 - VN_2 * n_2 * t$$
$$VN_1(1 - n_1 * t) = VN_2(1 - n_2 * t)$$

مثال:

القيمة الاسـمية لورقة تجارية 2000 دج تسـتحق في 20 ماي 2020، وفي 5 ماي من نفس السـنة اتفق المدين مع الدائن على تأجيل الدفع إلى 15 جوان من نفس السنة.

فإذا كان معدل الخصم 4% فما هي القيمة الاسمية للورقة الجديدة؟

الحل:

أولا نقوم بإيجاد المدة وهي الفترة الزمنية بين تاريخ التكافؤ المشترك وتاريخ الاستحقاق.

<u>الورقة الأولى:</u>

- تاريخ الاستحقاق 20 ماي 2020
- تاريخ التكافؤ: 5 ماي 2020

$n_1=20-5=15\,j$

<u>الورقة الثانية:</u>

- تاريخ الاستحقاق:15 جوان 2020
- تاريخ التكافؤ: 5 ماي 2020

$n_2=(31-5)+15=41\,j$

$$VA_{C1} = VA_{C2}$$
$$VN_1(1 - n_1 * t) = VN_2(1 - n_2 * t)$$
$$VN_2 = \frac{VN_1(1 - n_1 * t)}{(1 - n_2 * t)}$$

$$VN_2 = \frac{2000\left(1 - \frac{15 * 4}{36000}\right)}{\left(1 - \frac{41 * 4}{36000}\right)}$$

$$VN_2 = 2006.7$$

2- تكافؤ ورقة تجارية مع مجموع عدة أوراق تجارية:

نقول عن ورقة تجارية أنها متكافئة مع مجموع عدة أوراق تجارية أخرى في تاريخ معين إذا كانت القيمة الحالية التجارية لهذه الورقة مساوية لمجموع القيم الحالية للأوراق الأخرى.

ليكن لدينا ورقة تجارية قيمتها الاسمية VN ، وقيمتها الحالية VA

وعدد K من الأوراق التجارية ذات القيم الاسمية التالية:

$$VN_1, VN_2, \ldots\ldots, VN_K$$

وذات مدد زمنية بين تاريخ الاستحقاق وتاريخ التكافؤ المشترك:

$$n_1, n_2, \ldots, n_k$$

حيث القيم الحالية لهذه الأوراق التجارية معرفة كالتالي:

$$VA_1, VA_2, \ldots VA_K$$

إن تكافؤ الورقة التجارية مع مجموع الأوراق التجارية معرف بالصيغة التالية:

القيمة الحالية للورقة الأولى=مجموع القيم الحالية للأوراق التجارية في تاريخ التكافؤ المشترك.

أي أن:

$$VA_C = VA_{C1} + VA_{C2} + \cdots + VA_{CK}$$

$$VN(1 - n * t) = VN_1(1 - n_1 * t) + VN_2(1 - n_2 * t) + \cdots + VN_k(1 - n_k * t)$$

مثال:

في 15 جوان 2021 اتفق مدين مع دائنه على تسـديد ديونه المتمثلة في 3 أوراق تجارية بواسـطة ورقة تجارية واحدة مستحقة في 10 جويلية 2019 حيث أن معدل الخصم 5%

أوجد القيمة الأسمية لهذه الورقة التجارية إذا علمت أن:

- الورقة الأولى قيمتها الاسمية 2000 تستحق في 2021/06/30
- الورقة الثانية قيمتها الاسمية 2500 تستحق في 2021/07/15
- الورقة الثالثة قيمتها الاسمية 4000 تستحق في 2021/07/05

الحل:

n=(30-15)+10=25 j

n_1=(30-15)=15 j

n_2=(30-15)+15=30 j

n_3=(30-15)+5=20 j

$$VA_C = VA_{C1} + VA_{C2} + VA_{C3}$$

$$VN(1 - n * t) = VN_1(1 - n_1 * t) + VN_2(1 - n_2 * t) + VN_3(1 - n_3 * t)$$

$$VN\left(1 - \frac{5 * 25}{36000}\right) = 2000\left(1 - \frac{5 * 15}{36000}\right) + 2500\left(1 - \frac{5 * 30}{36000}\right) + 4000\left(1 - \frac{5 * 20}{36000}\right)$$

$$VN = 8503.83$$

3- حساب معدل التكافؤ:

يمكن إيجاد معدل التكافؤ بمعرفة القاسم الثابت $D = \frac{36000}{t\%}$ كالتالي:

$$\boldsymbol{VA_1 = VA_2} \rightarrow VN_1\left(1 - \frac{n_1 * t}{36000}\right) = VN_2\left(1 - \frac{n_2 * t}{36000}\right)$$

$$VN_1\left(\frac{D - n_1}{D}\right) = VN_2\left(\frac{D - n_2}{D}\right)$$

$$VN_1(D - n_1) = VN_2(D - n_2)$$

مثال: ورقتان تجاريتان قيمتاهما على الترتيب 63600 و64100 حيث تاريخ اســتحقاق الأولى بعد 28 يوم والثانية بعد 63 يوم

فما هو معدل التكافؤ؟

$$VN_1(D - n_1) = VN_2(D - n_2)$$

$$63600(D - 28) = 64100(D - 63)$$

$$D = \frac{63600 * 28 + 64100 * 63}{63600 - 64100} 4515 \cong 4500$$

لدينا

$$D = \frac{36000}{t\%}$$

$$t = \frac{36000}{4500} = 8\%$$

4- البحث عن تاريخ التكافؤ:

ليكن لدينا ورقتان تجاريتان قيمتهما الاسمية VA_1 VA_2 على الترتيب وتستحقان بعد مدة زمنية n_1, n_2 على الترتيب اعتمادا على الوقت الحالي فنقول أن الورقتين التجاريتين متكافئتان إذا وجد تاريخ j تكون فيه القيمتان الحاليتان للورقتين التجاريتين متساويتان.

وتحسب بطريقتين:

الطريقة العادية:

$$VA_1 = VA_2 \rightarrow VN_1\left(1 - \frac{n_1 * t}{36000}\right) = VN_2\left(1 - \frac{n_2 * t}{36000}\right)$$

طريقة القاسم الثابت:

$$VA_1 = VA_2 \rightarrow VN_1(D - n_1) = VN_2(D - n_2)$$

مثال: ورقة تجارية قيمتها الاسمية 29700 تستحق يوم 16 اوت وورقة أخرى قيمتها الاسمية 29850 تستحق يوم 15 سبتمبر من نفس السنة ففي أي تاريخ تتكافأ الورقتان بمعدل خصم 6%

الحل: لإيجاد تاريخ التكافؤ المشترك نفترض أن تاريخ التكافؤ سيكون قبل 16 اوت بـ j يوم وبالتالي فإن:

$n_1=j$; $n_2=j+30$ D=36000/6=6000

$$VN_1 = VN_2 \rightarrow VN_1(D - n_1) = VN_2(D - n_2)$$

$$VN_1 = VN_2 \rightarrow VN_1(D - j) = VN_2(D - j - 30)$$

$$29700(6000 - j) = 29850(6000 - j - 30)$$

$$j = 30$$

تاريخ التكافؤ يقع 30 يوما قبل تاريخ استحقاق الورقة الأولى و60 يوما قبل تاريخ استحقاق الورقة الثانية وعليه فإن تاريخ التكافؤ هو 17 جويلية.

رابعا: تاريخ الاستحقاق المتوسط وتاريخ الاستحقاق المشترك:

1- تاريخ الاستحقاق المتوسط:

للبحث عن تاريخ الاستحقاق أو المدة المتوسطة لعدد من الأوراق التجارية تطبق علاقة التكافؤ بين القيمة الحالية لمجموع القيم الاسمية ذات تاريخ متوسط محدد، والقيمة الحالية لمجموع الأوراق المعينة كلا بمدة استحقاقها. ويمكن اعتبار مجموع القيم الاسمية لمختلف الأوراق كقيمة اسمية لورقة واحدة يبحث عن تاريخ استحقاقها مقابل عدد من الأوراق

وبالتالي فإن تاريخ الاستحقاق المتوسط لمجموعة من الأوراق التجارية هو الاستحقاق الموحد لهذه الأوراق في حالة ما إذا كانت القيمة الاسمية للورقة الوحيدة المعوضة يساوي مجموع القيم الاسمية للأوراق المعوضة لها

$$VN = VN_1 + VN_2 + \cdots + VN_n$$

شرط تكافؤ الأوراق التجارية

$$VA = VA_1 + VA_2 + \cdots + VN_n$$

$$VN - VN * \frac{t * n}{36000}$$
$$= VN_1 - VN_1 * \frac{t * n}{36000} + VN_2 - VN_2 * \frac{t * n}{36000} + \cdots$$
$$+ VN_n - VN_n * \frac{t * n}{36000}$$

باستخدام القاسم $D = \frac{36000}{t\%}$ تصبح العلاقة أعلاه من الشكل:

$$VN - \frac{VN * n}{D}$$
$$= VN_1 - \frac{VN_1 * n_1}{D} + VN_2 - \frac{VN_2 * n_1}{D} + \cdots + VN_n$$
$$- \frac{VN_n * n_1}{D} \dots (1)$$

لدينا : القيمة الاسمية للورقة الواحدة يساوي مجموع القيم الاسمية للأوراق:

$$VN = VN_1 + VN_2 + \cdots + VN_n$$

وبالتالي فإنه يمكن كتابة العلاقة (1) كما يلي:

$$\frac{VN * n}{D} = \frac{VN_1 * n_1}{D} + \frac{VN_2 * n_1}{D} + \cdots + \frac{VN_n * n_1}{D}$$

$$n = \frac{VN_1 * n_1 + VN_2 * n_1 + VN_n * n_1}{VN}$$

ويمكن استخراج علاقة حساب تاريخ الاستحقاق المتوسط باستخدام علاقات أخرى للخصم، ويلاحظ بأن حساب تاريخ الاستحقاق المتوسط لا يرتبط بمعدل الخصم.

مثال: تاجر مدين بثلاث أوراق تجارية:

- الورقة الأولى بقيمة 7500 تستحق في 14 جويلية
- الورقة الثانية بقيمة 12500تستحق في 15أوت
- الورقة الثالثة بقيمة 8000 تستحق في 31 أوت

في 30 جوان أراد التاجر استبدال الأوراق السابقة بورقة تجارية وحيدة قيمتها الاسمية تساوي مجموع القيم الاسمية للأوراق الثلاثاء المطلوب تحديد تاريخ استحقاق الورقة.

الحل:

$n_1=(30-30)+14=14j$

$n_2=(30-30)+31+15=46j$

$n_3=(30-30)+31+31=62j$

$VN=7500+12500+8000=28000$

$$n = \frac{VN_1 * n_1 + VN_2 * n_1 + VN_n * n_1}{VN}$$

$$n = \frac{7500 * 14 + 12500 * 46 + 8000 * 62}{28000} = 42j$$

تاريخ التكافؤ هو 30 جوان وتاريخ الاستحقاق يحسب بإضافة 42 يوما ابتداء من 30 جوان وعليه فإن تاريخ استحقاق الورقة الجديدة هو 11 أوت من نفس السنة.

2- **تاريخ الاستحقاق المشترك:** وهو استحقاق الورقة التجارية ذات القيمة الاسمية VN المعوضة لمجموعة من الأوراق التجارية ذات القيم الاسمية $VN_1, VN_2, \dots, VN_n$ والمستحقة في التواريخ $n_1, n_2, \dots n_3$ بحيث تكون القيمة الحالية للورقة الوحيدة تساوي مجموع القيم الحالية للأوراق المعوضة لها وذلك لإيجاد تاريخ الاستحقاق المشترك أو القيمة الإسمية المشتركة

$$VA = VA_1 + VA_2 + \cdots + VA_n$$

$$VN(D-n) = VN_1(D-n_1) + VN_2(D-n_2) + \cdots + VN_n(D-n_n)$$

$$n = \frac{VN * D - [VN_1(D - n_1) + VN_2(D - n_2) + \cdots + VN_3(D - n_3)]}{VN}$$

مثال: بتاريخ 5 جوان قام تاجر باستبدال ثلاث أوراق تجارية قيمها الأسمية على الترتيب 4000، 7000، 8000 وتواريخ استحقاقها 5 جويلية، 7 أوت، 6 سبتمبر على التوالي بورقة وحيدة قيمتها الاسمية 20000

فما هو تاريخ الاستحقاق المشترك إذا كان معدل الخصم 5%

الحل:

$$VA = VA_1 + VA_2 + VA_3$$

$$VN(D - n) = VN_1(D - n_1) + VN_2(D - n_2) + VN_3(D - n_3)$$

$$n = \frac{VN * D - [VN_1(D - n_1) + VN_2(D - n_2) + VN_n(D - n_n)]}{VN}$$

$$D = \frac{36000}{5} = 7200$$

n_1=(30-5)+5=30

n_2=(30-5)+31+7=63

n_3=(30-5)+31+31+6=93

$$n = \frac{20000 * 7200 - [4000(7200 - 30) + 7000(7200 - 63) + 8000(7200 - 93)]}{20000}$$

$$n \cong 425j$$

تمارين حول الخصم وتكافؤ الأوراق التجارية:

التمرين رقم 01: شخص مدين بـــمبلغ 70000 دج تستحق السداد بعد 7 أشهر، أراد سدادها الآن، علما أن معدل الخصـم 5 %، وشخص آخر له دين قيمته الاسـمية 60000 دج تسـتحق الدفع في 20 مارس 2021، أراد ســداده بتاريخ 15 جانفي من نفس الســنة مقابل حصــوله على خصم بمعدل 3 %.

المطلوب: حساب ما يدفعه كل مدين؟

التمرين رقم 02: ورقة تجارية قيمتها الاســمية 30000 دج خصــمت بمعدل 6 % فبلغت قيمة الخصم 100 دج.

أحسب مدة الخصم.

التمرين رقم 03: قدم تاجر للبنك الكمبيالات التالية لخصمها:

الكمبيالة 1 قيمتها الاسمية 14000 دج تستحق بعد شهرين

الكمبيالة 2 قيمتها الاسمية 17000 دج تستحق 3 أشهر

الكمبيالة 3 قيمتها الاسمية 24000 دج تستحق بعد 43 يوم

المطلوب: أحسب المبلغ الذي سيستلمه التاجر، إذا كان معدل الخصم 4.5 %

التمرين رقم 04: يرغب شخص في شـراء آلة حالا وذلك بدفع مبلغ شـهري 10000 دج كل شـهر ولمدة سنة، فبمعدل خصم 6 % سنويا .ما هو ثمن شراء الآلة.

التمرين05 : لشخص دين يسـدد على 6 أقسـاط شـهرية متسـاوية قيمة كل قسـط 7000 دج يستحق القسط الأول في 5/1/ *n* أراد تسديده بتاريخ 1/1/ *n* ، فإذا كان معدل الخصم هو 6 %

المطلوب: حساب: ما يدفعه هذا الشخص في تاريخ السداد.

التمرين 06رقم : إقترض شخص مبلغ 300000 دج تسدد على 13 دفعة شهرية متساوية يكون أولها بعد 6 أشــهر من تاريخ الإقتراض ، فإذا كان معدل الخصــم 8 % . **المطلوب:** أحســب مبلغ الدفعة الواحدة.

التمرين رقم 07: قطعة أرضية تباع بإحدى الطريقتين

1- يدفع المشتري مبلغ 6000 دج فورا و1000 دج تدفع على 6 أقساط شهرية من الآن

2- يدفع المشـتري مبلغ 4000 دج فورا و 1000 دج تدفع على 08 أقسـاط شـهرية أولها بعد شـهر من الآن

فإذا علمت بأن المعدل المطبق هو 3.5 %. أي الطريقتين أفضل للمشتري وللبائع.

التمرين رقم 08:

بتاريخ 2022/10/24 قدمت ورقة تجارية قيمتها الاسمية 84600 للخصم حيث تاريخ استحقاقها 2012/12/11 وذلك وفق الشروط التالية:

- معدل الخصم:7%
- عمولة تحويل المكان: 3/1‰
- عمولة ثابتة: 56.3
- رسم على القيمة المضافة 17% وهي تطبق على العمولة الثابتة وعمولة تحويل المكان

المطلوب حساب الآجيو والقيمة الصافية والمعدل الحقيقي

التمرين رقم 09:

ورقة تجارية تاريخ استحقاقها 8 جوان 2022 خصمت لدى البنك يوم 30 مارس 2022 فبلغ صافي الورقة 2451.84 حيث معدل الخصم 20% والعمولة 0.1% ومصاريف التحصيل 8/1 ‰ مع العلم أن البنك يعطي مهلة يومين عند حساب مدة الخصم

المطلوب حساب القيمة الاسمية للورقة التجارية

التمرين رقم 10:

كمبيالة قيمتها الاسمية 10000 تاريخ استحقاقها 2020/4/17 خصمت لدى البنك بتاريخ 2020/1/10 بمعدل خصم 10% فإذا علمت أن البنك يتقاضى عمولة بنسبة 0.001 من القيمة الاسمية للكمبيالة ومصاريف تحصيل 2 ون عن كل كمبيالة.

أوجد صافي القيمة الحالية التي يتسلمها العميل وأحسب معدل الخصم الحقيقي علما أن البنك يعطي مهلة سداد للمدين مدتها 5 أيام.

التمرين رقم 11:

قام تاجر بخصم ورقة تجارية قيمتها الاسمية 1000 في 2022/1/2 وتستحق السداد في 2022/03/31 والمطلوب إيجاد الصافي المستحق للتاجر أي صافي القيمة الحالية للورقة التجارية إذا علمت بأن:

- معدل الخصم 6%
- يتقاضى البنك عمولة بنسبة 1‰ من القيمة الاسمية للورقة
- تقدر مصاريف التحصيل بنسبة 4/1‰ من القيمة الاسمية للورقة
- البنك يعطي مهلة يومين عند حساب مدة الخصم

التمرين رقم 12:

مؤسسة مطالبة بتسديد سند بقيمة 100000 دج لموردها بتاريخ 06/30 وفي 04/20من نفس السنة طلبت تأجيل الدفع واستبدال السند بسند آخر يستحق السداد في 07/30

فإذا كان معدل الخصم 8% فما هي قيمة السند الجديد.

التمرين رقم 13:

تاجر مدين بالأوراق التجارية التالية:

- كمبيالة قيمتها الاسمية 10000 تستحق في 2019/12/11
- كمبيالة قيمتها الاسمية 30000 تستحق في 2020/01/04
- كمبيالة قيمتها الاسمية 40000 تستحق في 2020/03/04

وقد اتفق التاجر مع دائنه على أن يستبدل هذه الديون الثلاثة بدين واحد يستحق في 2019/11/05

المطلوب إيجاد قيمة الدين الجديد إذا كان المعدل 6%

التمرين رقم 14: بنك يخصم الأوراق بالشروط التالية:

معدل الخصم10 % عمولة غير مرتبطة بالزمن 2 % عمولة ثابتة 10دج للورقة

المطلوب - إكمال الجدول التالي:

	القيمة الاسمية	المدة	الخصم التجاري	الخصم العقلاني	الأجيو
الورقة الأولى		3 أشهر	125		
		6 أشهر			430

التمرين رقم 15: بتاريخ 10 نوفمبر 2022 تم خصم ورقة تجارية قيمتها الاسمية 45000 بمعدل خصم 5% حيث تاريخ استحقاقها 18 فيفري 2023

- أحسب الخصم التجاري والقيمة الحالية التجارية
- أحسب الخصم الصحيح والقيمة الحالية الصحيحة

حلول التمارين:

حل التمرين رقم 01:

الشخص الأول:

t=5% VN=70000 n=7 mois

حساب القيمة الحالية للدين:

$$VA_C = VN - E_C$$

$$VA_C = VN(1 - t * n)$$

$$VA_C = 70000\left(1 - \frac{5}{100} * \frac{7}{12}\right)$$

$$VA_C = 67958.33$$

الشخص الثاني:

t=3% VN=60000

2021/4=505.25

أي أن السنة بسيطة وبالتالي شهر فيفري 28 يوما

n=(31-15)+28+20=64 j

حساب القيمة الحالية للدين:

$$VA_C = VN(1 - t * n)$$

$$VA_C = 60000\left(1 - \frac{3}{100} * \frac{64}{360}\right)$$

$$VA_C = 59680$$

حل التمرين رقم 02:

$$E_c = VN * t * n$$

$$VN = \frac{E_c}{t * n}$$

$$n = \frac{E_c}{VN * t} = \frac{100}{30000 * 0.06}$$

$$n = \frac{100}{1800} = 0.055$$

نقوم بتحويل المدة الى أيام بضربها في 360 :

*n=0.055*360=20 j*

حل التمرين رقم 03:

لدينا معدل الخصم متساوي بالنسبة للأوراق التجارية الثلاثة وبالتالي يمكننا استخدام طريقة النمر والقاسم

$$\sum E_C = \frac{\text{النمر}}{\text{القاسم}} = \frac{\sum N}{D}$$

$$\sum N = (14000 * 2 * 30) + (17000 * 3 * 30) + (24000 * 43)$$

$$\sum N = 3402000$$

$$D = \frac{36000}{t} = \frac{36000}{4.5} = 8000$$

اذن اجمالي خصم الأوراق التجارية الثلاثة يساوي:

$$\sum E_C = \frac{\sum N}{D} = \frac{3402000}{8000} = 425.25$$

وبالتالي فإن اجمالي القيم الحالية للأوراق التجاري يساوي الفرق بين مجموع قيمها الاسمية ومجموع الخصم للأوراق الثلاث:

$$\sum VA = \sum VN - \sum E_C$$

$$\sum VA = (14000 + 17000 + 24000) - 425.25 = 54574.75$$

حل التمرين رقم 04:

المطلوب هو ثمن شراء الآلة في الوقت الحالي وبالتالي نقوم بإيجاد القيمة الحالية حيث نستخدم طريقة الأقساط المتساوية

$$VA = a * k - a * t * \frac{k}{2}\left[\frac{n_1 + n_k}{12}\right]$$

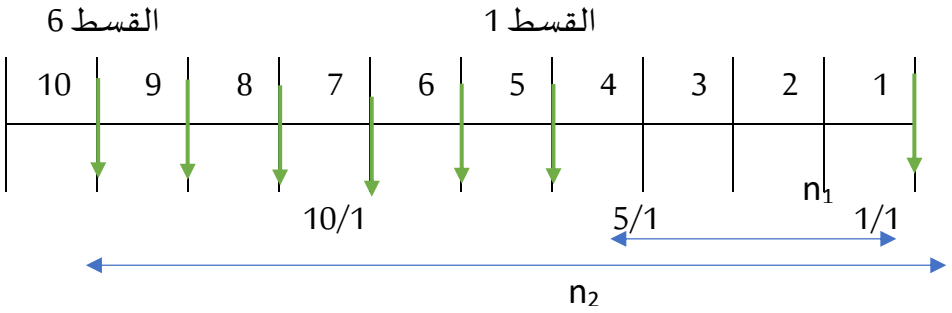
$$VA = 10000 * 12 - 10000 * \frac{6}{100} * \frac{12}{2}\left[\frac{12+1}{12}\right]$$

$$VA = 120000 - 3900 = 116100$$

حل التمرين رقم *05*:

المطلوب هو حساب ما يدفعه الشخص في تاريخ السداد أي تاريخ 1/1

علما أن الشخص له دين يستحق القسط الأول منه في 05/1 وأراد تسديده في 1/1 أي قبل تاريخ الاستحقاق بأربعة أشهر وبالتالي يجب حساب القيمة الحالية للأقساط والتي تساوي الفرق بين مجموع الأقساط والخصم.



$$VA = a * k - a * t * \frac{k}{2}\left[\frac{n_1 + n_k}{12}\right]$$

n_1=4 mois

n_2=9 mois

$$VA = 7000 * 6 - 7000 * \frac{6}{100} * \frac{6}{2}\left[\frac{4+9}{12}\right]$$

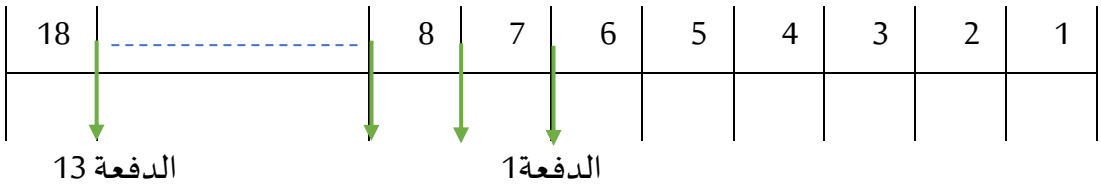
$$VA = 42000 - 1365$$

$$VA = 40635$$

حل التمرين رقم *06*:

المطلوب هو حساب مبلغ الدفعة الواحدة أي حساب a

K=13 t=8% n_1=6 n_{13}=18 a=? VA=300000



$$VA = a * k - a * t * \frac{k}{2}\left[\frac{n_1 + n_k}{12}\right]$$

$$300000 = a * 13 - a * 0.08 * \frac{13}{2}\left[\frac{6 + 18}{12}\right]$$

$$300000 = 13\ a - 1.04\ a$$

$$300000 = a\ (13 - 1.04)$$

$$a = 25083.61$$

ملاحظة: المدة هي الفترة الزمنية بين تاريخ الدفعة وتاريخ الاقتراض.

حل التمرين رقم 07:

المطلوب إيجاد الطريقة الأنسب لبائع والمشتري

الطريقة الأولى: دفع 6000 فورا+ دفع 6 أقساط حيث مقدار القسط الواحد 1000 ابتداء من الآن وعليه فإن:

بما أنها حالة دفعات بداية المدة فإن

n_1=0 n_k=n-1

n_1=0 n_6=5 mois

الطريقة الثانية: دفع 4000 فورا+ دفع 8 أقساط حيث مقدار القسط الواحد 1000 يكون أولها بعد شهر من الآن من الآن وعليه فإن:

بما أنها حالة دفعات نهاية المدة فإن

$n_1=1 \quad n_k=n$

$n_1=1 \quad n_8=8$ mois

لمعرفة الطريقة الأنسب للبائع والمشتري نقوم بحساب القيمة الحالية للأرض في الحالتين:

$$VA = a * k - a * t * \frac{k}{2}\left[\frac{n_1 + n_k}{12}\right]$$

الحالة الأولى:

$$VA = 6000 + 6000 * 6 - 1000 * 0.035 * \frac{6}{2}\left[\frac{0+5}{12}\right]$$

ملاحظة: أضفنا 6000 والتي تمثل المبلغ المدفوع فورا

$$VA = 6000 + 5737.5 = 11737.5$$

الحالة الثانية:

$$VA = 4000 + 1000 * 8 - 1000 * 0.035 * \frac{8}{2}\left[\frac{1+8}{12}\right]$$

ملاحظة: أضفنا 4000 والتي تمثل المبلغ المدفوع فورا

$$VA = 4000 + 7895 = 11895$$

وبالتالي فإن الطريقة الأولى هي الأنسب للبائع والطريقة الثانية هي الأنسب للمشتري.

<u>حل التمرين رقم 8:</u>

المطلوب حساب الآجيو والقيمة الصافية والمعدل الحقيقي.

N= (31-10)+30+11=48 j

$$AGIO = E_C + COM_1 + COM_2 + TVA$$

حساب الخصم

$$E_C = VN * \frac{t * n}{100 * 360} = 84600 * \frac{7 * 48}{36000} = 789.6$$

حساب العمولات والرسوم

$$COM_1 = VN * \frac{1/3}{100} = 84600 * \frac{1/3}{1000} = 28.2$$

$$TVA = (COM_1 + COM_2) * \frac{17}{100} = (28.2 + 56.3) * \frac{17}{100} = 14.365$$

حساب الآجيو

$$AGIO = 789.2 + 28.2 + 56.3 + 14.365 = 888.465$$

حساب صافي القيمة الحالية:

$$VN_n = VN - AGIO = 84600 - 888.465 = 83711.535$$

حساب المعدل الحقيقي:

$$t = \frac{AGIO * 36000}{VN * n} = \frac{888.465 * 36000}{84600 * 48} = 7.87\%$$

<u>حل التمرين رقم 9:</u>

المطلوب حساب القيمة الاسمية للورقة التجارية

n=(31-30)+30+31+8=70+2=72

حساب الخصم والعمولات

$$E_C = VN * \frac{20 * 72}{100 * 360} = 0.04VN$$

$$COM_1 = VN * \frac{0.1}{100} = 0.001VN$$

$$COM_1 = VN * \frac{1/8}{1000} = 0.000125VN$$

حساب الآجيو

$$AGIO = 0.04VN + 0.001VN + 0.000125VN = 0.041125VN$$

حساب القيمة الاسمية للورقة التجارية

$$VN_n = VN - AGIO = VN - 0.041125VN$$

$$VN(1 - 0.041125) = 2451.84$$

$$VN = \frac{2451.84}{0.958875} = 2556.99 \cong 2557$$

حل التمرين رقم 10:

المطلوب حساب صافي القيمة الحالية والمعدل الحقيقي

n= (31-10)+29+31+5=103j

حساب الخصم والعمولات:

$$E_C = 10000 * \frac{10 * 103}{100 * 360} = 286$$

$$COM_1 = 10000 * 0.001 = 10$$

$$COM_2 = 2$$

حساب الآجيو:

$$AGIO = 286 + 10 + 2 = 298$$

حساب صافي القيمة الحالية

$$VN_n = VN - AGIO = 10000 - 289 = 9702$$

حل التمرين رقم 11:

حساب الصافي المستحق للتاجر

n=(31-2)+28+31=88+2=90j

حساب الآجيو:

$$E_C = 1000 * \frac{6 * 90}{100 * 360} = 15$$

$$COM_1 = 1000 * \frac{1}{1000} = 1$$

$$COM_2 = 1000 * \frac{1/4}{1000} = 0.25$$

$$AGIO = 15 + 1 + 0.25 = 16.25$$

حساب صافي القيمة الحالية

$$VN_n = VN - AGIO = 1000 - 16.25 = 983.75$$

حل التمرين رقم12:

المطلوب إيجاد قيمة السند الجديد أي القيمة الاسمية

VN1=100000 VN2=? t=8%

نقوم بحساب المدتين n2، n1 وهي الفترة الزمنية بين تاريخ الاستحقاق وتاريخ التسوية

n1=(30-20)+31+30=71 j

n2=(30-20)+31+30+30=101 j

شرط تكافؤ الأوراق التجارية:

$$VA_{C1} = VA_{C2}$$
$$VN_1(1 - n_1 * t) = VN_2(1 - n_2 * t)$$
$$VN_2 = \frac{VN_1(1 - n_1 * t)}{(1 - n_2 * t)}$$
$$VN_2 = \frac{100000\left(1 - 0.08 * \frac{71}{360}\right)}{\left(1 - 0.08 * \frac{101}{360}\right)}$$
$$VN_2 = 100687.69$$

حل التمرين رقم 13:

t=6%

القيم الاسمية للأوراق التجارية الثلاثة وتواريخ استحقاقها كالتالي

VN1=10000	11/12/2019
VN2=30000	04/01/2020
VN3=40000	04/03/2020

المطلوب حساب قيمة الدين الجديد في تاريخ التسوية: 2019/11/05

n1=(30-5)+11=36 j

n2=(30-5)+31+4=60 j

n3=(30-5)+ 31+31+29+4=120 j

$$VA_C = VA_{C1} + VA_{C2} + VA_{C3}$$
$$VA = VN_1(1 - n_1 * t) + VN_2(1 - n_2 * t) + VN_3(1 - n_3 * t)$$
$$VA = 10000\left(1 - \frac{36}{360} * 0.06\right) + 30000\left(1 - \frac{60}{360} * 0.06\right)$$
$$+ 40000(1 - \frac{120}{360} * 0.06)$$
$$VA = 78840$$

حل التمرين رقم 14:

الورقة الأولى:

- حساب القيمة الأسمية:

$$E_c = VN * \frac{t * n}{1200}$$

$$125 = VN * \frac{10 * 3}{1200} \rightarrow VN = 5000$$

- حساب الخصم العقلاني:

$$E_r = \frac{E_c}{1 + \frac{t * n}{1200}} = \frac{125}{1 + \frac{10 * 3}{1200}} = 121.95$$

- حساب الآجيو:

$$com = VN * \frac{2}{100} = 5000 * \frac{2}{100} = 100$$

$$AGIO = 125 + 100 + 10 = 235$$

الورقة الثانية:

- حساب القيمة الأسمية

$$AGIO = E_c + com_1 + com_2 = 430$$

$$AGIO = VN * \frac{t * n}{1200} + VN\frac{2}{100} + 10 = 430$$

$$AGIO = VN * \frac{10 * 6}{1200} + VN\frac{2}{100} + 10 = 430$$

$$0.07\,VN = 420 \rightarrow VN = 6000$$

- حساب الخصم التجاري:

$$E_c = VN * \frac{t * n}{1200} = 6000 * \frac{10 * 6}{1200} = 300$$

- حساب الخصم العقلاني:

$$E_r = \frac{E_c}{1 + \frac{t * n}{1200}} = \frac{300}{1 + \frac{10 * 6}{1200}} = 285.71$$

	القيمة الاسمية	المدة	الخصم التجاري	الخصم العقلاني	الآجيو
الورقة الأولى	5000	3 أشهر	125	121.95	235
الورقة الثانية	6000	6 أشهر	300	185.71	430

حل التمرين رقم 15:

- حساب الخصم التجاري:

$$n = (30 - 10) + 31 + 31 + 18 = 100j$$

$$E_c = VN * \frac{t * n}{1200} = 45000 * \frac{5 * 100}{36000} = 625$$

- حساب القيمة الحالية التجارية:

$$VA_C = VN - E_C = 45000 - 625 = 44375$$

- حساب الخصم الصحيح:

$$E_r = \frac{E_c}{1 + \frac{t * n}{36000}} = \frac{625}{1 + \frac{5 * 100}{36000}} = 616.44$$

- حساب القيمة الحالية الصحيحة:

$$VA_r = VN - E_r = 45000 - 616.44 = 44383.56$$

المحور الثالث: الفائدة المركبة، الخصم والتكافؤ بفائدة مركبة

أولا: الفائدة المركبة

عند حساب الفائدة المركبة فإنه في نهاية كل فترة يتم إضافة الفائدة الناتجة إلى رأس المال ثم يتم حساب الفائدة على أساس المبلغ الأصلي والفوائد السابقة.

مثال: رأس مال مقداره 100000 أودع في البنك بمعدل فائدة مركبة 6% كم تكون الجملة بعد 3 سنوات؟

السنوات	المبلغ في بداية المدة	الفوائد الناتجة عن السنة	الجملة
1	100000	6000=0.06*100000	106000
2	106000	6360=0.06*106000	112360
3	112360	6741.60=0.06*112360	**119101.6**

جملة المبلغ في السنة الثالثة تساوي **119101.6**

الفرق بين الفائدة البسيطة والفائدة المركبة هو أن الفائدة المركبة تحسب على المبلغ وفائدته على عكس الفائدة البسيطة التي تحسب على أصل المبلغ فقط.

كما أن الفائدة البسيطة تخص القروض قصيرة الأجل التي لا تتجاوز مدتها سنة أما الفائدة المركبة فتخص القروض طويلة الأجل.

1- القانون الأساسي لحساب الجملة (القيمة المكتسبة)

بفرض أن عناصر الفائدة المركبة يرمز لها بالرموز التالية:

a رأس المال المستثمر (المبلغ الأصلي)

n مدة الاستثمار

t معدل الفائدة المركبة

A الجملة المكتسبة

فإن قانون الجملة يعطى بالعلاقة التالية:

$$A = a\,(1+t)^n$$

العلاقة أعلاه يمكن أن تطبق مهما كانت وحدة قياس المدة بشرط تناسب وحدة الزمن مع المعدل المطبق أي إذا كان معدل الفائدة سداسي يجب أن تكون المدة بالسداسي، وإذا كان معدل الفائدة سنوي فتكون المدة بالسنوات وهكذا، وفي حالة عدم تناسبهما يجب تحويل أحدهما ليتناسب مع الآخر

2- قانون حساب الفائدة المركبة:

لدينا الجملة المكتسبة تساوي مجموع أصل المبلغ وفوائده ومنه الفائدة تساوي الفرق بين الجملة وأصل المبلغ:

$$A = a + I$$
$$I = A - a = a(1+t)^n - 1$$
$$I = a[(1+t)^n - 1]$$

مثال1: أودع شخص مبلغ مالي قدره 100000 في بنك بمعدل فائدة مركبة 6% سنويا ولمدة 10 سنوات.

- أحسب الجملة المكتسبة في نهاية المدة
- وما هو مقدار الفائدة المحصل عليها

الحل:

$$A = a\,(1+t)^n$$
$$A = 100000\,(1+0.06)^{10}$$
$$A = 100000 * 1.790848$$
$$A = 179084.8$$

ملاحظة: المقدار $(1+0.06)^{10}$ يمكن ايجاده في الجدول المالي رقم 1 أو يحسب بالآلة الحاسبة العلمية

أما الفوائد فتساوي:

$$I = A - a$$
$$I = 179084.8 - 100000 = 79084.8$$

3- حساب الجملة المكتسبة في حالة المدة عدد غير تام:

عند تطبيق العلاقة السابقة في حساب الجملة فإننا نفترض أن n عددا تاما مثلا n=8 سنوات

إلا أنه قد تكون المدة الزمنية عدد غير تام مثلا المدة 8 سنوات و5 أشهر وفي هذه الحالة يوجد عدة طرق لحساب الجملة منها الطريقة الصحيحة والطريقة التجارية.

- الطريقة الصحيحة: حيث يتم استخدام علاقة جملة الفائدة المركبة في حساب السنوات أو الفترات الكاملة أما ما يتعلق بالأيام أو الشهور نستخدم علاقة الفائدة البسيطة وهذه الطريقة تستخدم عادة من طرف البنوك.

$$A_{n\frac{a}{b}} = a(1+t)^n + a(1+t)^n * t * \frac{a}{b}$$

$$A_{n\frac{a}{b}} = a(1+t)^n * (1 + t * \frac{a}{b})$$

- الطريقة التجارية: وتحسب فائدة مركبة للجزء الصحيح من المدة وفائدة مركبة أيضا للجزء من السنة

$$A_{n\frac{a}{b}} = a(1+t)^n + a(1+t)^{\frac{a}{b}}$$

$$A_{n\frac{a}{b}} = a(1+t)^{a+\frac{a}{b}}$$

مثال: أودع مبلغ 20000 بفائدة مركبة 10% لمدة 7سنوات و4 أشهر

أوجد جملة المبلغ في نهاية مدة الإيداع باستخدام الطريقتين الصحيحة والتجارية.

الحل: الجملة باستخدام الطريقة الصحيحة:

$$A_{n\frac{a}{b}} = a(1+t)^n + \ a(1+t)^n * t * \frac{a}{b}$$

$$A_{2\frac{4}{12}} = 20000(1+0.1)^7 + a(1+t)^n * (1 + 0.1 * \frac{4}{12})$$

$$A_{7\frac{4}{12}} = 38974.342 + 38974.342 * \ 0.36666 = 53264.67424$$

الجملة باستخدام الطريقة التجارية:

$$A_{n\frac{a}{b}} = a(1+t)^n + a(1+t)^{\frac{a}{b}}$$

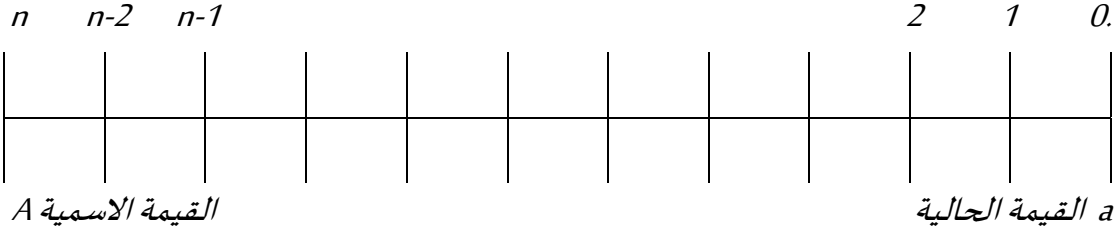
$$A_{n\frac{a}{b}} = 20000(1+0.1)^7 + 20000(1+0.1)^{\frac{4}{12}}$$

$$A_{n\frac{a}{b}} = 38974.342 + 20645.60231 = 59619.94431$$

4- حساب مختلف عناصر الجملة المكتسبة

- **حساب أصل المبلغ *a* (القيمة الحالية):**

القيمة الحالية هي عكس الاستثمار فالاستثمار يحدد لنا القيمة المستقبلية لمبلغ معين وبمعدل ما ويساوي القيمة المحصلة أو المكتسبة أما القيمة الحالية فهي قيمة المبلغ في الوقت الحالي علما أنه يستحق في تاريخ مستقبل



بفرض أن a رأس المال في بداية التوظيف أو الاستثمار وهو يمثل القيمة الحالية للمبلغ المستثمر من قانون حساب الجملة يمكننا استخراج علاقة القيمة الحالية كما يلي:

$$A = a\,(1+t)^n$$

$$a = \frac{A}{(1+t)^n}$$

$$a = A * \,(1+t)^{-n}$$

حيث أن القيمة $(1+t)^{-n}$ تستخرج مباشرة من الجدول المالي 2 أو تحسب بالآلة الحاسبة العلمية.

مثال: أودع شخص مبلغ مالي في بنك معين بمعدل فائدة مركبة 4% وبعد 5 سنوات أصبح في حسابه ما قيمته 4652

- أوجد رأس المال المودع لدى البنك أي القيمة الحالية لهذا المبلغ.

الحل:

$$a = A * \,(1+t)^{-n}$$

$$a = 4652 * \,(1+0.04)^{-5}$$

$$a = 4652 * \,0.8219271 = 3823.60$$

- **حساب معدل الفائدة المركبة:**

انطلاقا من الصيغة الرياضية لحساب الجملة يمكننا تحديد الفائدة المركبة كما يلي:

$$A = a\,(1+t)^n$$

$$(1+t)^n = \frac{A}{a}$$

$$(1+t) = \sqrt[n]{\frac{A}{a}}$$

$$t = \sqrt[n]{\frac{A}{a}} - 1$$

$$t = \left(\frac{A}{a}\right)^{\frac{1}{n}} - 1$$

- **حساب مدة الاستثمار:**

انطلاقا من الصيغة الرياضية لحساب الجملة يمكننا تحديد مدة الاستثمار كما يلي:

$$A = a\,(1+t)^n$$

$$(1+t)^n = \frac{A}{a}$$

بإدخال اللوغاريتم النيبيري على طرفي المعادلة نجد:

$$n\ ln(1+t) = ln\left(\frac{A}{a}\right)$$

$$n = \frac{ln\left(\frac{A}{a}\right)}{ln(1+t)}$$

يمكن حساب مدة الاستثمار دون اللجوء للوغاريتم وذلك باستعمال الجدول المالي رقم 1 باستخدام العلاقة:

$$(1+t)^n = \frac{A}{a}$$

حيث نقوم بحساب القيمة $\frac{A}{a}$ وبمعلومية المعدل يتم تحديد المدة n التي تتقاطع مع القيمة المحسوبة والمعدل t

ثانيا: الخصم والتكافؤ بفائدة مركبة:

1- الخصم بفائدة مركبة:

نعلم أن الخصم هو الفرق بين القيمة الاسمية أو الجملة المكتسبة A والقيمة الحالية أي رأس المال a

$$E = A - a = A - A * (1+t)^{-n}$$

$$E = A[1 - (1+t)^{-n}]$$

مثال: ما هو مبلغ الخصم لمبلغ استثمر لمدة 5 سنوات وبمعدل فائدة 10% فبلغت قيمته المكتسبة 100000

الحل: لإيجاد الخصم نقوم بحساب القيمة الحالية أولا

$$a = A * (1+t)^{-n}$$

$$a = 100000 * (1+0.1)^{-5} = 62092.1323$$

$$E = A - a = 100000 - 62092.1323 = 37907.8677$$

2- **التكافؤ بين رأسمالين:** يكون رأسمالان متكافئين في وقت معين وبمعدل معين إذا تساوت قيمتهما الحالية في تاريخ محدد يسمى تاريخ التكافؤ أي:

$$a_1 = a_2 \rightarrow A_1(1+t)^{-n1} = A_2(1+t)^{-n2}$$

مثال: تم تعويض مبلغ قيمته الاسمية 90000 وظف بمعدل فائدة مركبة 6% لمدة 4 سنوات بمبلغ معين وظف بمعدل فائدة 6% ولمدة 6 سنوات، أحسب قيمة هذا المبلغ

الحل: لدينا من شرط تكافؤ مبلغين من المال:

$$a_1 = a_2 \rightarrow A_1(1+t)^{-n1} = A_2(1+t)^{-n2}$$

$$A_2 = \frac{A_1(1+t)^{-n1}}{(1+t)^{-n2}} = \frac{90000(1+0.06)^{-4}}{(1+0.06)^{-6}}$$

$$A_2 = 90000(1.06)^2 = 101123$$

3- **التكافؤ بين مجموعتين من رؤوس الأموال:** تكون مجموعتين من رؤوس الأموال متكافئتين إذا كان مجموع القيم الحالية للمجموعة الأولى يساوي مجموع القيم الحالية للمجموعة الثانية.

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_k = a'_1 + a'_2 + \cdots + a'_k$$

$$A_1(1+t)^{-n1} + A_2(1+t)^{-n2} + \cdots + A_k(1+t)^{-nk} = A'_1(1+t)^{-n1} + A'_2(1+t)^{-n2} + \cdots + A'_k(1+t)^{-nk}$$

مثال: ثلاثة رؤوس أموال قيمها الاسمية 5000، 7000، 4000 وظفت لمدة 2،3،4 سنوات على التوالي بمعدل فائدة مركب 5% تم تعويضها برأسمالين قيمة الأول 6000 وظف لمدة5 سنوات أحسب القيمة الاسمية للمبلغ الثاني إذا علمت أنه وظف لمدة 3 سنوات

الحل: لدينا شرط تكافؤ مجموعة مبالغ:

$$a_1 + a_2 + a_3 = a'_1 + a'_2$$

$$A_1(1+t)^{-n1} + A_2(1+t)^{-n2} + A_3(1+t)^{-n3} = A'_1(1+t)^{-n1} + A'_2(1+t)^{-n2}$$

$$5000(1.05)^{-2} + 7000(1.05)^{-3} + 4000(1.05)^{-4} = 6000(1.05)^{-5} + A'_2(1.05)^{-3}$$

$$5000 * 0.907029 + 7000 * 0.863837 + 4000 * 0.822702 = 6000 * 0.783526 + A'_2 * (1.05)^{-3}$$

$$A'_2 * (1.05)^{-3} = 9171.656$$

$$A'_2 = \frac{9171.656}{0.863837} = 9171.656$$

أي أن القيمة الاسمية للمبلغ الثاني تساوي 9171.656

4- **تاريخ الاستحقاق المشترك:** هو تاريخ الاستحقاق الذي يسمح بوجود تكافؤ عدد من الديون مع دين قيمته الاسمية معلومة، كما يمكن إيجاد القيمة الاسمية لدين يكافئ عدد من الديون بمعلومية تاريخ استحقاقه الذي يصادف تاريخ التكافؤ المشترك

$$A_1(1+t)^{-n1} = A_2(1+t)^{-n2} + A_2(1+t)^{-n3} + \cdots + A_k(1+t)^{-nk}$$

$$(1+t)^{-n1} = \frac{A_2(1+t)^{-n2} + A_2(1+t)^{-n3} + \cdots + A_k(1+t)^{-nk}}{A_1}$$

بالاستعانة بالجدول المالي رقم 2 نحصل على المدة المقابلة لقيمة الكسر أعلاه بمعلومية معدل الفائدة المركبة. وبحساب قيمة n_1 نحصل على مدة الاستحقاق المشتركة لمجموع الديون.

5- **تاريخ الاستحقاق المتوسط:** يتحقق تاريخ الاستحقاق المتوسط بحساب تاريخ مجموع القيم الاسمية لمختلف الديون باعتبارها كقيمة اسمية لدين أو ورقة.

$$A_1(1+t)^{-n1} + A_2(1+t)^{-n2} + A_3(1+t)^{-n3} = (A_1 + A_1 + A_1)(1+t)^{-n}$$

$$(1+t)^{-n} = \frac{A_1(1+t)^{-n1} + A_2(1+t)^{-n2} + A_3(1+t)^{-n3}}{A_1 + A_1 + A_1}$$

بالعودة إلى الجدول المالي رقم 2 نحصل على المدة المقابلة لقيمة الكسر أعلاه بمعلومية معدل الفائدة المركبة. وبحساب قيمة n نحصل على مدة الاستحقاق المتوسطة لهذه الديون.

ثالثا: المعدلات المتناسبة والمعدلات المتكافئة:

وهما مفهومان مختلفان وفقا للمدة الموظف فيها وعلاقتهما بجملتهما المكتسبة

1- **المعدلات المتناسبة:** تكون المعدلات متناسبة عندما تكون نسبتهما مساوية لنسبة مدتهما الموافقة وبالتالي يمكن إيجاد المعدل المتناسب لفترة ما بقسمة المعدل الموافق لتلك الفترة على عدد الفترات الزمنية خلال الفترة.

ونكتب المعدل $\frac{t}{k}$ هو المعدل المتناسب مع المعدل السنوي t، حيث k يمثل عدد مرات حساب الفائدة خلال السنة.

وعليه فإن المعدل السداسي المناسب للمعدل السنوي 12% هو:

$$t_s = \frac{12}{2} = 6\%$$

المعدل الفصلي المناسب للمعدل السنوي 12% هو:

$$t_t = \frac{12}{4} = 3\%$$

والمعدل الشهري المناسب للمعدل السنوي 12% هو:

$$t_m = \frac{12}{12} = 1\%$$

2- **المعدلات المتكافئة:** نقول عن معدلان أنهما متكافئان لنفس فترة التوظيف عندما يكون لهما نفس القيمة المحصلة (الجملة المكتسبة) بواسطة الفوائد المركبة.

على افتراض أن t_k معدل فترة زمنية، k عدد مرات حساب الفائدة خلال جزء من السنة، بالتالي يكون المعدل t_k معدلا مكافأ للمعدل t إذا تم تطبيقه على نفس المبلغ المستثمر وأعطى لنا نفس الجملة المكتسبة.

$$A_1 = A_2$$
$$a(1+t)^1 = a(1+t_K)^K$$

بقسمة الطرفين على a نجد:

$$1 + t = (1 + t_k)^k$$

بإدخال الجذر من الدرجة k على الطرفين نجد

$$\sqrt[k]{1+t} = \sqrt[k]{(1+t_k)^k}$$

وعليه تكتب عبارة المعدلات المتكافئة بالصيغة التالية:

$$1 + t_k = (1+t)^{\frac{1}{k}}$$

مثال1: ما هو المعدل الشهري المكافئ للمعدل السنوي 12%

الحل:

$$1 + t_m = (1+t)^{\frac{1}{k}}$$

$$t_m = (1+0.12)^{\frac{1}{12}} - 1 = 0.95\%$$

وهو أقل من 1% وهو قيمة المعدل الشهري المتناسب مع المعدل السنوي 12% حيث يكون المعدل المكافئ أقل من المعدل المتناسب دوما.

مثال2: أوجد المعدل الشهري المكافئ للمعدل الفصلي 7%

الحل:

$$(1+t_m)^{12} = (1+t_s)^4$$
$$(1+t_m) = (1+t_t)^{\frac{4}{12}}$$
$$(1+t_m) = (1+0.07)^{\frac{4}{12}}$$
$$t_m = 1.02281 - 1 = 0.2281$$
$$t_m = 2.281\%$$

تمارين حول محور الفائدة المركبة

التمرين رقم 01 : وظف شخص مبلغ قيمته 16000 دج بمعدل فائدة مركبة 6 % سنويا

المطلوب: - حساب جملة هذا المبلغ بعد14 سنة من التوظيف

- حساب الفائدة المحصل عليها بعد العام التاسع من التوظيف
- حساب الجملة إذا كانت الفوائد تحسب كل ستة أشهر بعد 14 سنة من التوظيف

التمرين رقم 02 : وظف مبلغ 10000 دج في بنك بمعدل فائدة مركبة فأصبح بعد 5سنوات 14693.281دج،

المطلوب: أحسب هذا المعدل؟

التمرين رقم 03: إذا أودع شخص مبلغ 40000 دج في البنك لمدة متفق عليها بمعدل فائدة مركبة 5%سنويا، فكان رصيده بعد انتهاء المدة 56284.016دج .

المطلوب: أحسب مدة الاقتراض؟

التمرين رقم 03: أودع شخص مبلغ 30000 دج في بنك بفائدة مركبة بمعدل 6% سنويا لمدة سنتين، ماهي المدة اللازمة لنفس المبلغ إذا أودع بفائدة بسيطة بنفس المعدل ليعطي نفس الفائدة.

التمرين رقم 04: مبلغين مجموعهما 31000 دج وظفا لمدة 6 سنوات، الأول بمعدل فائدة مركبة 6.5% والثاني بمعدل فائدة مركبة 7.5%، فأنتجا معا في نهاية السنة السادسة فوائد قدرها 15369.56 دج.

المطلوب: - أحسب قيمة المبلغين.

- أحسب قيمة الجملة التي يحققها كل مبلغ.

التمرين رقم 05: قسم مبلغ من المال قدره 25000 دج بين ولدين الأول وعمره 10 سنوات ويأخذ المبلغ a1، والثاني عمره 12 سنة ويأخذ المبلغ a2، حيث (a1#a2)، وظف المبلغان في البنك بمعدل فائدة مركبة 9 % سنويا وعند بلوغ الولدين 18 سنة تحصلا على نفس الجملة.

المطلوب: أحسب قيمة كل مبلغ a1، a2

حلول التمارين:

حل التمرين رقم 01:

a=16000 t=6% n=14 ans

1-حساب الجملة بعد 14 سنة من التوظيف:

$$A = a(1+t)^n$$

$$A = 16000(1+0.06)^{14} = 36174.46$$

2- حساب الفائدة بعد العام 9 من التوظيف:

$$A = 16000(1+0.06)^9 = 27031.66$$

$$I = A - a = 27031.66 - 16000 = 11031.66$$

3- حساب الجملة بعد 14 سنة من التوظيف اذا كانت الفوائد تحسب كل 6 أشهر:

لدينا معدل الفائدة المركبة ل 6 أشهر يساوي:

$$t = \frac{6\%}{2} = 3\%$$

والفترات الزمنية:

$$n = 14 * 2 = 28$$

ملاحظة: عند حساب الفائدة المركبة يجب أن يتوافق المعدل مع الفترة الزمنية أي اذا كان معدل الفائدة يحسب بالسداسي يجب أن نقوم بإيجاد الفترة بالسداسي أيضا

$$A = a(1+t)^n = 16000(1+0.03)^{28} = 36606.84$$

حل التمرين رقم 02:

a=10000 n=5 ans A=14693.281

1- حساب معدل الفائدة:

$$A = a(1+t)^n$$

$$(1+t)^n = \frac{A}{a}$$

$$1+t = \sqrt[5]{\frac{A}{a}}$$

$$t = \sqrt[5]{\frac{14693.281}{10000}} - 1$$

$$t = 0.080 = 8\%$$

كما يمكن إيجاد المعدل بطريقة ثانية وذلك باستخدام الجدول المالي رقم 1:

لدينا

$$(1+t)^5 = \frac{A}{a} = \frac{14693.281}{10000} = 1.4693$$

نأخذ السطر الخامس الذي يوافق $n=5$ وعند القيمة 1.4693 نجد أن معدل الفائدة الموافق لها هو: $t = 8\%$

2- حساب المدة n حيث أن:

a=40000 t=5% A=56284.016

$$A = a(1+t)^n$$

$$(1+t)^n = \frac{A}{a}$$

$$n\ln(1+t) = \ln\frac{A}{a}$$

$$n = \frac{\ln\left(\frac{A}{a}\right)}{\ln(1+t)}$$

$$n = \frac{\ln\left(\frac{56284.016}{40000}\right)}{\ln(1+0.05)}$$

$$n = 7$$

حل التمرين رقم 03:

a=300000 t=6% n=2 ans

المطلوب هو إيجاد المدة اللازمة لنفس المبلغ للحصول على نفس مقدار الفائدة اذا كانت الفائدة بسيطة وبنفس المعدل

نقوم بحساب الفائدة المركبة

$$I_1 = a[(1+t)^n - 1] = 30000[(1+0.06)^2 - 1] = 3708$$

إيجاد معدل الفائدة الذي يحقق تساوي الفائدة البسيطة والفائدة المركبة المحسوبة أعلاه

$$I_2 = a * t * n = 30000 * 0.06 * \frac{n}{360} = 3708$$

$$n = 741\ jours = 2\ ans, 21\ jours$$

حل التمرين رقم 04:

a_1+a_2=31000 n=6ans t_1=6.5 t_2= 7.5 I1+I2=15369.56

المطلوب حساب قيمة المبلغين وحساب الجملة لكل مبلغ:

$$I_1 = a_1[(1+t_1)^n - 1]$$
$$I_2 = a_2[(1+t_2)^n - 1]$$

$$I_1 + I_2 = 15369.56 \dots\dots 1$$
$$a_2 = 31000 - a_1 \dots\dots 2$$
$$I_1 + I_2 = a_1[(1+t_1)^n - 1] + a_2[(1+t_2)^n - 1] = 15369.56$$
$$a_1[(1+0.065)^6 - 1] + a_2[(1+0.075)^6 - 1] = 15369.56$$

من المعادلة 2 نجد

$$a_1[(1+0.065)^6 - 1] + (31000 - a_1)[(1+0.075)^6 - 1] = 15369.56$$
$$a_1(1.459142 - 1) + (31000 - a_1)(0.543301) = 15369.56$$

$$0.084159\, a_1 = 1472.78$$
$$a_1 = 17499.97 \approx 17500$$
$$a_2 = 31000 - a_1 = 31000 - 17500 = 13500$$

$$A_1 = a_1(1+t_1)^n = 17500(1+0.065)^6 = 25534.99$$
$$A_2 = a_2(1+t_2)^n = 13500(1+0.075)^6 = 20834.57$$

حل التمرين رقم 05:

$a_1+a_2=25000$ $t=9\%$ $A_1=A_2$ $n_1=18-10=8$ ans $n_2=18-12=6$ ans

المطلوب حساب قيمة المبلغين a_1 ;a_2

$$a_1 + a_2 = 25000$$
$$A_1 = A_2 \rightarrow a_1(1+t)^{n1} = a_2(1+t)^{n2}$$

$$a_1(1+0.09)^8 = a_2(1+0.09)^6 \dots\dots 1$$
$$a_2 = 25000 - a_1 \dots\dots 2$$

من المعادلة (1):

$$a_2 = \frac{a_1(1+0.09)^8}{(1+0.09)^6} = a_1(1+0.09)^2$$

بتعويض 2 في 1 نجد:

$$25000 - a_1 = a_1(1+0.09)^2$$

$$25000 = a_1[(1.09)^2 + 1]$$

$$a_1 = \frac{25000}{2.1881} = 11425.44$$

بالتعويض في المعادلة 2 نجد:

$$a_2 = 25000 - 11425.44 = 13574.44$$

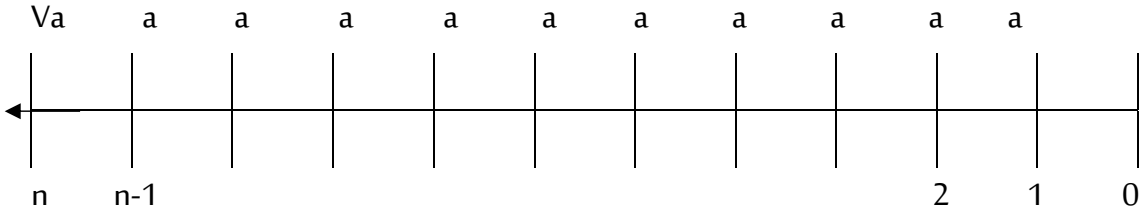
المحور الرابع: الدفعات

تصنف الدفعات المتساوية أو الثابتة حسب طريقة الدفع الى نوعين: دفعات متساوية فورية أو دفعات الاستثمار وتسمى بدفعات بداية المدة وتدفع في بداية كل وحدة زمنية، والنوع الثاني دفعات متساوية عادية أو دفعات السداد وتسمى دفعات نهاية المدة. وتدفع في نهاية كل وحدة زمنية.

أولا: الدفعات الثابتة لنهاية المدة: دفعات نهاية المدة هي مبالغ متساوية تدفع دوريا آخر كل فترة زمنية محددة بهدف تجميع رأسمال في نهاية مدة الاستثمار.

1- القيمة المكتسبة للدفعات الثابتة نهاية المدة:

وهي الجملة التي يتحصل عليها الشخص جراء إيداع أو توظيف أو استثمار مبالغ مالية متساوية القيمة خلال فترات زمنية منتظمة ودورية في نهاية المدة.



وتكون جمل الدفعات منفصلة بتاريخ n وفق الجدول التالي:

الدفعات	المدة	الجملة المكتسبة
1	n-1 فترة	$a(1+t)^{n-1}$
2	n-1 فترة	$a(1+t)^{n-2}$
3	n-3 فترة	$a(1+t)^{n-3}$
.	.	.
.	.	.
.	.	.
n-1	1 فترة	$a(1+t)$
n	0 فترة	$a(1+t)^{0}=a$

إذا رمزنا لعناصر الجملة بالرموز التالية:

a قيمة الدفعة الواحدة

n عدد الدفعات خلال المدة

t معدل الفائدة المركبة

A_n الجملة المكتسبة لمجموع الدفعات

فإن الجملة المكتسبة المحصل عليها بعد جمع القيم المكتسبة لكل الدفعات في نهاية المدة n من آخر دفعة لأول دفعة كالتالي:

$$A_n = a + a(1+t) + \cdots + a(1+t)^{n-2} + a(1+t)^{n-1}$$

نلاحظ أن مجموع هذه القيم المكتسبة تمثل متتالية هندسية متزايدة حدها الأول a وعدد حدودها n وأساسها $(1+t)$

وبتطبيق العلاقة الرياضية لحساب مجموع حدود متتالية هندسية فإن قانون حساب جملة دفعات متساوية يكتب بالشكل التالي:

$$A_n = a\frac{(1+t)^n - 1}{(1+t) - 1}$$

$$A_n = a\frac{(1+t)^n - 1}{t}$$

ملاحظة: القيمة $(1+t)^n - 1$ تستخرج من الجدول المالي رقم 3

مثال: وظف شخص 10 دفعات سنوية متساوية تدفع بداية كل سنة قيمة الدفعة الواحدة 5000 وبمعدل فائدة مركبة 5 % سنويا (رسملة سنوية)

- أوجد الجملة عند آخر دفعة
- أوجد الجملة بعد خمس سنوات من آخر دفعة إذا افترضنا أنه لم يتم سحب المبلغ.
- أوجد الجملة عند آخر دفعة على افتراض أن الشخص استمر بالدفع سنويا لخمسة سنوات إضافية

الحل:

- حساب الجملة عند آخر دفعة:

$$A_n = a\frac{(1+t)^n - 1}{t}$$

$$A_n = 5000\frac{(1+0.05)^{10} - 1}{0.05} = 62889.46268$$

- حساب الجملة بعد خمس سنوات من آخر دفعة أي الجملة المحصلة للدفعات المتساوية لم تسحب وتم استثمارها لخمس سنوات كمبلغ واحد وبالتالي تحسب بالعلاقة التالية:

$$A_n = a\,(1+t)^5$$

حيث رأس المال هو نفسه جملة دفعات المحسوبة في السؤال الأول

$$A_n = 62889.46268\,(1+0.05)^5 = 80264.66169$$

- حســاب الجملة عند آخر دفعة على افتراض اســتمرار الشـخص بتوظيف المبلغ لخمس سنوات إضافية أي أن المدة الاجمالية ستكون 15 سنة:

$$A_n = a\frac{(1+t)^n - 1}{t}$$

$$A_n = 5000\frac{(1+0.05)^{15} - 1}{0.05} = 107892.8179$$

ملاحظة: تعتبر الدفعات مجموعة دفعات متساوية فقط إذا حققت الشروط التالية وهي:

- تساوي قيم الدفعات
- الفترة بين كل دفعتين متتاليتين متساوية
- معدل الفائدة ثابت

وفي حالة اختلال أحد هذه الشــروط يجب تقســيم الدفعات الى مجموعات جزئية بحيث كل مجموعة تحقق الشروط أعلاه ثم نقوم بحساب الجملة بجمع مبالغ القيم المكتسبة الجزئية.

مثال: تم توظيف 10 دفعات فورية متساوية قيمة الدفعة الواحدة 5000 بمعدل 5% للسنوات الأربعة الأولى ومعدل 6% لبقية المدة

- أوجد الجملة في نهاية المدة

$$A_n = 5000\frac{(1+0.05)^4 - 1}{0.05}\,(1+0.06)^6 + 5000\frac{(1+0.06)^6 - 1}{0.06}$$

$$A_n = 30569.97344 + 34876.59269$$

$$A_n = 65446.56613$$

2- تحديد عناصر جملة دفعات نهاية المدة:

- **حساب قيمة الدفعة الثابتة a:**

من الصيغة العامة لحساب جملة دفعات متساوية لنهاية المدة يمكننا استنتاج العلاقة الرياضية لحساب قيمة الدفعة الواحدة

$$A_n = a\frac{(1+t)^n - 1}{t}$$

$$a[(1+t)^n - 1] = A_n * t$$

$$a = \frac{A_n * t}{(1+t)^n - 1}$$

$$a = A_n \frac{t}{(1+t)^n - 1}$$

- **حساب عدد الدفعات n**

$$A_n = a\frac{(1+t)^n - 1}{t}$$

$$a[(1+t)^n - 1] = A_n * t$$

$$a(1+t)^n - a = A_n * t$$

$$a(1+t)^n = A_n * t + \mathrm{a}$$

$$(1+t)^n = \frac{A_n * t + a}{a}$$

$$(1+t)^n = \frac{A_n * t}{a} + 1$$

$$n\ln(1+t) = \ln\left(\frac{A_n * t}{a} + 1\right)$$

$$n = \frac{\ln\left(\frac{A_n * t}{a} + 1\right)}{\ln(1+t)}$$

- **حساب معدل الفائدة t:**

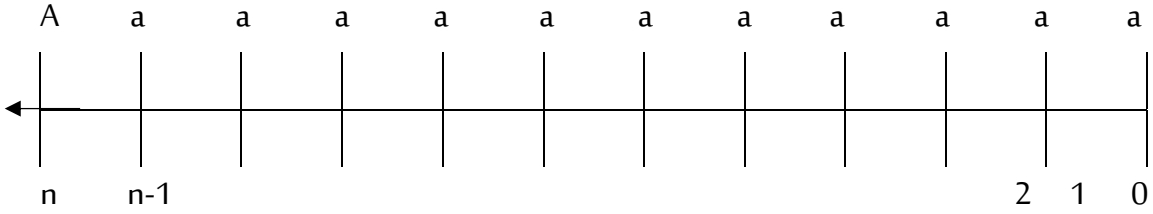
$$A_n = a\frac{(1+t)^n - 1}{t}$$

$$\frac{(1+t)^n - 1}{t} = \frac{A_n}{a}$$

نقوم بحساب المقدار $\frac{A_n}{a}$ ثم نبحث في الجدول المالي رقم 3 فنجد t المقابل له بمعلومية الفترة n

3- القيمة الحالية لدفعات ثابتة نهاية المدة:

القيمة الحالية لسلسلة دفعات متساوية فورية هي العودة بالدفعات لتاريخ توقيع العقد (الزمن صفر) حيث يرمز للقيمة الحالية في هذا التاريخ بالرمز Va وهي عكس الاستثمار والذي يعني تحديد القيمة المستقبلية لمبلغ ما والتي تساوي مجموع رأس المال والفوائد عليه، أم القيمة الحالية فهي تحديد قيمة مبلغ معين في الوقت الحالي علما أنه يسدد أو يستحق في تاريخ لاحق.



وتكون القيم الحالية لدفعات منفصلة بتاريخ 0 وفق الجدول التالي:

الدفعات	المدة	القيمة الحالية
1	1 فترة	$a(1+t)^{-1}$
2	2 فترة	$a(1+t)^{-2}$
3	3 فترة	$a(1+t)^{-3}$
.	.	.
.	.	.
.	.	.
n-1	n-1 فترة	$a(1+t)^{-(n-1)}$
n	n فترة	$a(1+t)^{-n}$

وإذا رمزنا لعناصر الجملة بالرموز التالية:

a قيمة الدفعة الواحدة

n عدد الدفعات

t معدل الفائدة المركبة

Va القيمة الحالية لمجموع دفعات متساوية عادية

$$V_a = a(1+t)^{-1} + a(1+t)^{-2} + \cdots + a(1+t)^{-(n-1)} + a(1+t)^{-n}$$

نلاحظ أن مجموع هذه القيم ابتداء من آخرها الى أولها يكون متتالية هندسية متزايدة حدها الأول $a(1+t)^{-n}$ وأساسها $(1+t)$ وعدد حدودها n

وبتطبيق العلاقة الرياضية لحساب مجموع حدود متتالية هندسية فإن قانون حساب القيمة الحالية لمجموع دفعات متساوية عادية يكتب بالشكل التالي:

$$V_a = a(1+t)^{-n}\frac{(1+t)^n - 1}{(1+t) - 1}$$

$$V_a = a\frac{1-(1+t)^{-n}}{t}$$

4 – تحديد عناصـــر القيمة الحالية لدفعات نهاية المدة: بنفس الطريقة المتبعة في تحديد عناصـر الجملة المكتسـبة لدفعات متسـاوية يمكن اسـتخدام علاقة القيمة الحالية لتحديد كلا من الدفعة a معدل الفائدة t وعدد الفترات n

- **حساب قيمة الدفعة الثابتة:**

$$V_a = a\frac{1-(1+t)^{-n}}{t}$$

$$a = \frac{V_a}{\frac{1-(1+t)^{-n}}{t}}$$

$$a = V_a\frac{\mathrm{t}}{1-(1+t)^{-n}}$$

يمكن استخراج القيمة $\frac{\mathrm{t}}{1-(1+t)^{-n}}$ من الجدول المالي رقم 5

- **حساب معدل الفائدة:**

$$V_a = a\frac{1-(1+t)^{-n}}{t}$$

$$\frac{1-(1+t)^{-n}}{t} = \frac{V_a}{\boldsymbol{a}}$$

نقوم بحساب المقدار $\frac{V_a}{\boldsymbol{a}}$ ثم نبحث في الجدول المالي رقم 4 فنجد t المقابل له بمعلومية الفترة n

- **حساب عدد الدفعات:** لحساب عدد الدفعات نحسب المقدار $\frac{V_a}{a}$ كما سبق ثم بالعودة الى الجدول المالي رقم 4 نبحث عن الفترة n المقابلة له بمعلومية المعدل t

$$V_a = a\frac{1-(1+t)^{-n}}{t}$$

$$\frac{1-(1+\mathrm{t})^{-\mathrm{n}}}{\mathrm{t}} = \frac{\mathrm{V_a}}{\mathrm{a}}$$

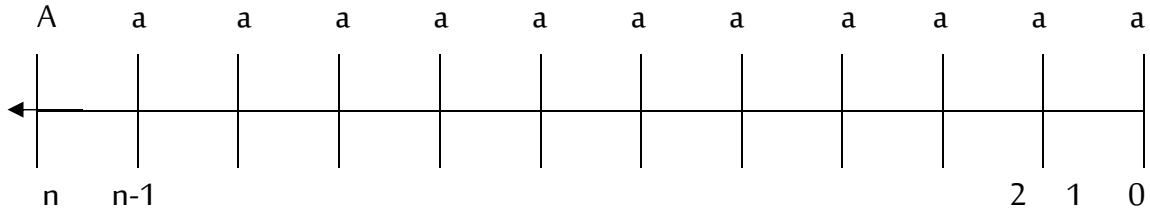
ثانيا: الدفعات الثابتة لبداية المدة:

دفعات بداية المدة هي مبالغ متســاوية تدفع دوريا في بداية كل فترة زمنية محددة بهدف تجميع رأســمال في نهاية مدة الاســتثمار. والفرق بين دفعات بداية المدة ودفعات نهاية المدة هو أن أول دفعة في النوع الأول تدفع في بداية الفترة الأولى وآخرها يدفع في بداية الفترة الأخيرة، أما في النوع

الثاني فإن أول دفعة تدفع في آخر الفترة الأولى وآخر دفعة تدفع في آخر الفترة الأخيرة والتي تمثل نهاية المدة ككل.

1- القيمة المكتسبة للدفعات الثابتة:

وهي الجملة التي يتحصل عليها الشخص جراء إيداع أو توظيف أو استثمار مبالغ مالية متساوية القيمة خلال فترات زمنية منتظمة ودورية في بداية المدة.



وتكون جمل الدفعات منفصلة بتاريخ n وفق الجدول التالي:

الدفعات	المدة	الجملة المكتسبة
1	n فترة	$a(1+t)^n$
2	n-1 فترة	$^1a(1+t)^{n-}$
3	n-2 فترة	$a(1+t)^{n-2}$
.	.	.
.	.	.
.	.	.
n-1	2 فترة	$a(1+t)^2$
n	1 فترة	$a(1+t)$

وإذا رمزنا لعناصر الجملة بالرموز التالية:

a قيمة الدفعة الواحدة

n عدد الدفعات

t معدل الفائدة المركبة

$A_n{}'$ الجملة المكتسبة

وبفرض أن $A_n{}'$ هي الجملة المكتسبة المحصل عليها بعد جمع القيم المكتسبة لكل الدفعات في نهاية المدة n فإننا نتحصل على العلاقة الرياضية التالية.

$$A_n{}' = a(1+t)^n + a(1+t)^{n-1} + \cdots + a(1+t)^2 + a(1+t)$$

نلاحظ أن مجموع القيم المكتسبة للدفعات الفورية بدء من آخر دفعة يمثل متتالية هندسية متزايدة حدها الأول $a(1+t)$ وعدد حدودها n وأساسها $(1+t)$

وبتطبيق العلاقة الرياضية لحساب مجموع حدود متتالية هندسية فإن قانون حساب جملة دفعات متساوية يكتب بالشكل التالي:

$$A_n{}' = a(1+t)\frac{(1+t)^n - 1}{(1+t) - 1}$$

$$A_n{}' = a(1+t)\frac{(1+t)^n - 1}{t}$$

وبالمقارنة مع جملة دفعات نهاية المدة والتي تكتب من الشكل:

$$A_n = a\frac{(1+t)^n - 1}{t}$$

نلاحظ أن:

$$A_n{}' = A_n(1+t)$$

وبالتالي يمكننا عند حساب قيم دفعات بداية المدة استعمال الجدول رقم 3 الخاص بدفعات نهاية المدة مع ضرب القيمة الجدولية في $(1+t)$.

مثال: قرر شخص إيداع مبلغ مالي مقداره 5000 بداية كل سنة ولمدة 10 سنوات متتالية وبمعدل فائدة مركبة 4 %

أحسب الجملة التي يتحصل عليها في نهاية المدة بطريقتين.

الحل:

- حساب جملة الدفعات الفورية:

$$A_n{}' = a(1+t)\frac{(1+t)^n - 1}{t}$$

$$A_n{}' = 5000(1+0.04)\frac{(1+0.04)^{10} - 1}{0.04}$$

$$A_n{}' = 62431.7570$$

- باستعمال علاقة جملة دفعات عادية:

$$A_n = a\frac{(1+t)^n - 1}{t}$$

$$A_n = 5000\frac{(1+0.04)^{10} - 1}{0.04}$$

$$A_n = 60030.53561$$

ومنه فإن:

$$A_n{}' = A_n(1+t)$$
$$A_n{}' = 60030.53561(1+0.04) = 62431.7570$$

2- تحديد عناصر جملة دفعات بداية المدة:

- **حساب قيمة الدفعة الثابتة a:** يمكن حسابها من العلاقة:

$$A_n{}' = a(1+t)\frac{(1+t)^n - 1}{t}$$

$$a = \frac{A_n{}'}{(1+t)\frac{(1+t)^n - 1}{t}}$$

- **حساب معدل الفائدة t:** يمكن حسابها باستخدام العلاقة الثانية:

$$A_n{}' = a\frac{(1+t)^{n+1} - 1}{t} - 1$$
$$\frac{(1+t)^{n+1} - 1}{t} = \frac{A_n{}'}{a} + 1$$

نقوم بحساب قيمة $\frac{A_n{}'}{a} + 1$ ثم نبحث عن قيمة المعدل المقابلة لها عند المدة n=n+1 في الجدول المالي رقم 3.

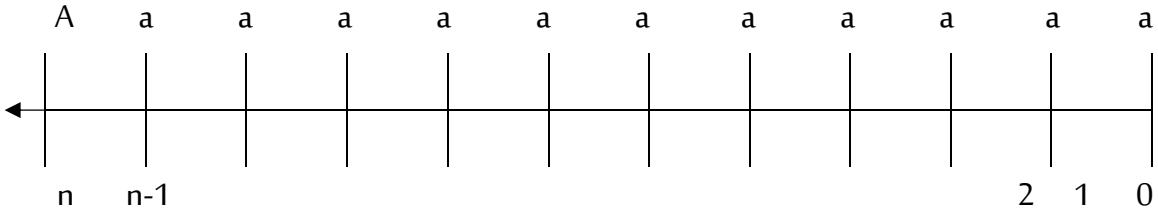
- **حساب عدد الدفعات *n*:** يمكن حسابها بنفس الطريقة وذلك كالتالي:

$$A_n{}' = a\frac{(1+t)^{n+1} - 1}{t} - 1$$
$$\frac{(1+t)^{n+1} - 1}{t} = \frac{A_n{}'}{a} + 1$$

نقوم بحساب قيمة $\frac{A_n{}'}{a} + 1$ ثم نبحث عن المدة المقابلة لها عند بمعلومية المعدل في الجدول المالي رقم 3. والمدة المحصل عليها نطرح منها الواحد الصحيح لنحصل على مدة دفعات بداية المدة.

3- القيمة الحالية لدفعات ثابتة بداية المدة:

القيمة الحالية لسلسلة دفعات متساوية فورية هي العودة بالدفعات لتاريخ توقيع العقد (الزمن صفر) حيث يرمز للقيمة الحالية في هذا التاريخ بالرمز Va'



وتكون القيم الحالية لدفعات منفصلة بتاريخ 0 وفق الجدول التالي:

الدفعات	المدة	القيمة الحالية
1	1 فترة	a
2	2 فترة	$a(1+t)^{-1}$
3	3 فترة	$a(1+t)^{-2}$
.	.	.
.	.	.
.	.	.
n-1	n-1 فترة	$a(1+t)^{-(n-2)}$
n	n فترة	$a(1+t)^{-(n-1)}$

وإذا رمزنا لعناصر الجملة بالرموز التالية:

a قيمة الدفعة الواحدة

n عدد الدفعات

t معدل الفائدة المركبة

Va' القيمة الحالية لمجموع الدفعات الفورية

$$V_a' = a + a(1+t)^{-1} + a(1+t)^{-2} + \cdots + a(1+t)^{-(n-1)}$$

نلاحظ أن مجموع هذه القيم ابتداء من آخرها الى أولها يكون متتالية هندسية متزايدة حدها الأول $a(1+t)^{-(n-1)}$ وأساسها $(1+t)$ وعدد حدودها n

وبتطبيق العلاقة الرياضية لحساب مجموع حدود متتالية هندسية فإن قانون حساب القيمة الحالية يكتب بالشكل التالي:

$$V_a' = a(1+t)^{-(n-1)} \frac{(1+t)^n - 1}{(1+t) - 1}$$

$$V_a' = a(1+t)(1+t)^{-n} \frac{(1+t)^n - 1}{(1+t) - 1}$$

$$V_a' = a(1+t) \frac{1 - (1+t)^{-n}}{(1+t) - 1}$$

$$V_a' = a(1+t) \frac{1 - (1+t)^{-n}}{t}$$

وبالمقارنة مع القيمة الحالية لدفعات نهاية المدة والتي تكتب من الشكل:

$$V_a = a \frac{1 - (1+t)^{-n}}{t}$$

نلاحظ أن:

$$V_a' = V_a(1+t)$$

وعليه يمكن استخدام الجدول المالي رقم 4 في حساب القيمة الحالية لدفعات بداية المدة بحيث نقوم بضرب القيمة الحالية لمجموع دفعات عادية المحصلة في $(1+t)$ لنحصل على القيمة الحالية لمجموع دفعات فورية.

4- تحديد عناصر القيمة الحالية لدفعات بداية المدة:

بنفس الطريقة المستخدمة في حالة الدفعات العادية يمكن لنا استخراج مختلف عناصر القيمة الحالية للدفعات الفورية:

- **حساب قيمة الدفعة الثابتة:**

$$V_a' = a(1+t) \frac{1 - (1+t)^{-n}}{t}$$

$$a = (1+t)^{-1} \frac{V_a'}{\frac{1 - (1+t)^{-n}}{t}}$$

$$a = V_a'(1+t)^{-1} \frac{\mathrm{t}}{1 - (1+t)^{-n}}$$

يمكن استخراج القيمة $\frac{\mathrm{t}}{1-(1+t)^{-n}}$ من الجدول المالي رقم 5

- **حساب معدل الفائدة:**

$$V_a' = a(1+t)\frac{1-(1+t)^{-n}}{t}$$

$$V_a' = a\frac{1+t-(1+t)^{-n+1}}{t}$$

$$V_a' = a\left[1+\frac{1-(1+t)^{-(n-1)}}{t}\right]$$

$$\frac{1-(1+t)^{-(n-1)}}{t} = \frac{\mathrm{V_a}'}{\mathrm{a}} - 1$$

نقوم بحســاب المقدار $\frac{\mathrm{V_a}'}{\mathrm{a}} - 1$ ثم نبحث في الجدول المالي رقم 4 فنجد t المقابل له بمعلومية الفترة n-1

- **حســاب عدد الدفعات:** لحســاب عدد الدفعات نحســب المقدار $\frac{\mathrm{V_a}}{\mathrm{a(1+t)}}$ كما ســبق ثم بالعودة الى الجدول المالي رقم 4 نبحث عن الفترة n المقابلة له بمعلومية المعدل t

$$V_a' = a(1+t)\frac{1-(1+t)^{-n}}{t}$$

$$\frac{1-(1+\mathrm{t})^{-\mathrm{n}}}{\mathrm{t}} = \frac{\mathrm{V_a}}{\mathrm{a}(1+\mathrm{t})}$$

تمارين حول الدفعات

التمرين رقم 01: سلسلة متكونة من 15 دفعة تم إيداعها في البنك بمعدل فائدة مركبة 6 % سنويا، كانت هذه الدفعات كالتالي:

5 دفعات أولى بقيمة 10000 دج

5 دفعات ثانية بقيمة 15000 دج

5 دفعات ثالثة بقيمة 20000 دج

المطلوب: أحسب جملة هذه الدفعات في تاريخ دفع أخر مبلغ من هذه المبالغ.

التمرين رقم 02: قام شخص بإيداع مبلغ 10000دج في حسابه في نهاية كل سنة ابتداء من سنة 2008 ثم توقف عن الإيداع وبدأ بسحب 8000دج في نهاية كل سنة ابتداء من سنة 2012.

المطلوب: ما هو رصيد هذا الشخص في نهاية 2016 إذا كان معدل الفائدة الذي يحتسبه البنك عن الإيداعات والمسحوبات يساوي 10%سنويا.

التمرين رقم 03: قام شخص بإيداع مبلغ 10000 دج في حسابه في بداية كل سنة ابتداء من 2008، وفي نهاية سنة 2015 وجد أن رصيده قد وصل إلى 104913.18 دج

المطلوب: ما هو معدل الفائدة المركبة الذي يحتسبه البنك؟

حل التمارين:

حل التمرين رقم 01: لدينا 15 دفعة يتم ايداعها لدى البنك بمعدل سنوي 6%

5 دفعات سنوية قيمة الدفعة الواحدة 10000 وبعد نهاية الخمس سنوات تظل في البنك لمدة 10 سنوات أخرى أي أن n_1=10 ans وخلال هذه المدة سيطبق على المبلغ والذي يساوي الجملة المحصل عليها خلال السنوات الخمسة قانون جملة مبلغ واحد

$$A = a(1+t)^{n1}$$

- 5 دفعات سنوية قيمة الدفعة الواحدة 15000 وبعد نهاية الخمس سنوات تظل في البنك لمدة خمس سنوات n_2=5 ans وخلال هذه المدة سيطبق على المبلغ قانون جملة مبلغ واحد
- 5 دفعات سنوية قيمة الدفعة الواحدة 20000 وبعد نهاية الخمس سنوات يتم حساب الجملة

$$A_n = \left[a_1 \frac{(1+t)^n - 1}{t}\right] * (1+t)^{n1} + \left[a_2 \frac{(1+t)^n - 1}{t}\right] * (1+t)^{n2} + \left[a_3 \frac{(1+t)^n - 1}{t}\right]$$

$$A_n = \left[10000\frac{(1+0.06)^5-1}{0.06}\right]*(1+0.06)^{10} + \left[15000\frac{(1+0.06)^5-1}{0.06}\right]*(1+0.06)^5 + \left[20000\frac{(1+0.06)^5-1}{0.06}\right]$$

$$A_n = 10000(5.637093)(1.790848) + 15000(5.637093)(1.338225) + 20000(5.637093)$$

$$A_n = 326828.63$$

حل التمرين رقم 02:

الرصيد= جملة الايداعات – جملة المسحوبات

أولا حساب جملة الدفعات المودعة:

t=10% a_1=10000

الإيداع من سنة 2008 الى سنة 2011 اذا عدد الدفعات يساوي 4 دفعات وبعد الدفعة الرابعة تظل جملة المبلغ في البنك الى غاية سنة 2016 أي تاريخ حساب الجملة وبالتالي يتم تطبيق قانون جملة مبلغ واحد على الجملة المحصل عليها وذلك للسنوات من 2012 الى 2016 أي أن n_1=5

$$A_1 = \left[a_1\frac{(1+t)^n-1}{t}\right]*(1+t)^{n1}$$

$$A_1 = \left[10000\frac{(1+0.1)^4-1}{0.1}\right]*(1+0.1)^5 = 74743.77$$

ثانيا حساب جملة الدفعات المسحوبة:

t=10% a_1=8000

السحب من سنة 2012 الى سنة 2016 اذا عدد الدفعات يساوي 5 دفعات وبعد الدفعة الخامسة يتم حساب الجملة

$$A_2 = \left[a_2\frac{(1+t)^n-1}{t}\right]$$

$$A_1 = \left[8000\frac{(1+0.1)^5-1}{0.1}\right] = 48840.8$$

الرصيد في نهاية المدة:

$$A = A_1 - A_2 = 74743.77 - 48840.8 = 25902.97$$

حل التمرين رقم 03:

a=10000 n=5 A=104913.18

المطلوب حساب معدل الفائدة الذي يحتسبه البنك:

الصيغة الرياضية لحساب جملة دفعات بداية المدة:

$$A_n = a(1+t)\left[\frac{(1+t)^n - 1}{t}\right]$$

$$A_n = a\left[\frac{(1+t)^{n+1} - 1}{t} - 1\right]$$

$$\frac{A_n}{a} + 1 = \left[\frac{(1+t)^{n+1} - 1}{t}\right]$$

$$\left[\frac{(1+t)^9 - 1}{t}\right] = \frac{104913.18}{10000} + 1$$

$$\left[\frac{(1+t)^9 - 1}{t}\right] = 11.4913$$

من الجدول المالي رقم 3 نجد المدة 9 سنوات والقيمة 11.4913 يقابلها المعدل 6 بالمئة

المحور الخامس: اهتلاك القروض

أولا: القروض غير المجزأة:

القرض العادي هو قرض يتم بين طرفين طبيعيين أو معنويين ويسمى القرض غير المجزأ حيث يضم القرض مقرض واحد بحيث يلتزم المقترض بالشروط التالية:

- تسديد فوائد دورية تحسب على رأس المال المقترض
- تسديد رأس المال المقترض على دفعات ويسمى باستهلاك القروض

وبالتالي فإن المقترض يقوم دوريا بتسديد دفعة تضم الاستهلاك إضافة لفائدة رأس المال المتبقي

وسنتناول نوعين من القروض النوع الأول هو القروض بدفعات ثابتة والنوع الثاني هو القروض باستهلاكات ثابتة.

1- القروض بدفعات ثابتة:

وهو أن يتم سداد القرض وفوائده بدفعات متساوية في نهاية فترات زمنية منتظمة ومبلغ الدفعة هنا يشتمل على فائدة رأس المال في نهاية كل فترة زمنية كما تشتمل على ما تم استهلاكه من أصل القرض في نهاية كل فترة زمنية

بمعنى أن المدين في نهاية كل فترة زمنية يكون قد سدد الفوائد المستحقة على رصيد القرض وجزءا من القرض يسمى الاستهلاك بحيث أنه في نهاية مدة القرض يكون المدين قد قام بسداد القرض وفوائده المركبة.

وطبقا لهذه الطريقة فإن المشكلة تكمن في حساب القسط المتساوي، ولذلك نستخدم الرموز التالية:

C_0 قيمة أصل القرض في الزمن 0

a الدفعة الثابتة

n مدة القرض

t معدل القرض

M_i الاستهلاك

I_i فائدة رأس المال المتبقي

الدفعة أو القسط المتساوي= فائدة رأس المال المتبقي+ الاستهلاك

$$a = I_i + M_i$$

نظرا لأن مبلغ القرض يتم سداده في أقساط متساوية أي دفعات متساوية فإن

أصل القرض= القيمة الحالية للدفعات المتساوية لنهاية المدة

وبالتالي فإن الصيغة الرياضية لحساب أصل القرض تكون بالشكل التالي:

$$C_0 = a\frac{1-(1+t)^{-n}}{t}$$

ومن المعادلة أعلاه يمكننا استنتاج الصيغة الرياضية لحساب الدفعة الثابتة بدلالة أصل القرض:

$$a = C_0\frac{t}{1-(1+t)^{-n}}$$

كما أن الصيغة الرياضية لأصل القرض بدلالة الدفعة الأولى تكون كالتالي:

$$C_0 = M_1\frac{(1+t)^{n}-1}{t}$$

2- جدول استهلاك القروض بدفعات ثابتة:

بفرض أن عناصر استهلاك القرض يرمز لها بالرموز التالية:

C_0 قيمة أصل القرض في الزمن 0 أي في بداية السنة الأولى

a_1، a_2، ... a_n هي الدفعات الثابتة أو الأقساط المتساوية لنهاية المدة

M_1 ، M_1، ... M_n الاستهلاكات المتتالية للدفعات من الأولى الى الأخيرة

C_1 ، C_1، ... C_n رأس المال المتبقي بعد تسديد كل دفعة

I_1 ، I_2 ، ... I_n الفوائد المستحقة على رأس المال المتبقي بعد كل فترة

n مدة القرض

t معدل القرض

فإن جدول استهلاك القروض يكون بالشكل التالي:

المدة	الأصل في بداية الفترة	الفائدة	الدفعة	الاستهلاك	الرصيد في نهاية الفترة
1	C_0	$I_1=C_0*t$	$a_1=I_1+M_1$	M_1	$C_1=C_0-M_1$
2	C_1	$I_2=C_1*t$	$a_2=I_2+M_2$	M_2	$C_2=C_1-M_2$
...					
n-1	C_{n-1}	$I_{n-1}=C_{n-2}*t$	$a_{n-1}=I_{n-1}+M_{n-1}$	M_{n-1}	$C_{n-1}=C_{n-2}-M_{n-1}$
n	C_n	$I_n=C_{n-1}*t$	$a_n=I_n+M_n$	M_n	$C_n=C_{n-1}-M_n$

ملاحظات:

- رأس المال المتبقي بعد تسديد القسط الأخير أي في نهاية المدة يساوي الصفر
- الدفعات ثابتة ومتساوية القيمة
- أصل القرض يساوي مجموع الاستهلاكات
- مجموع الأقساط الثابتة يساوي مجموع الفوائد زائد مجموع الاستهلاكات

3- العلاقة بين عناصر جدول استهلاك القروض:

- العلاقة بين استهلاكين متعاقبين:

الاستهلاك في أي سطر يساوي الاستهلاك السابق له مضروبا في (1+t)

$$\mathrm{M_n} = \mathrm{M_{n-1}}(1+\mathrm{t})$$

- العلاقة بين استهلاكين متتاليين:

$$\mathrm{M_n} = \mathrm{M}_P(1+\mathrm{t})^{n-p}$$

- العلاقة بين أي استهلاك والاستهلاك الأول:

$$\mathrm{M_n} = \mathrm{M_1}(1+\mathrm{t})^{n-1}$$

- العلاقة بين الدفعة والاستهلاك الأخير:

$$\mathrm{a} = \mathrm{M_n}(1+\mathrm{t})$$

- العلاقة بين الدفعة والاستهلاك الأول

$$a = \mathrm{M_1}(1+\mathrm{t})^{n}$$

- العلاقة بين الدفعة واستهلاك ما:

$$a = \mathrm{M}_P(1+\mathrm{t})^{n-p+1}$$

- الفرق بين فائدتين متتاليتين:

$$I_{n-1} - I_n = M_{n-1} * t$$

الفرق بين استهلاكين متتاليين:

$$M_n - M_{n-1} = I_{n-1} - I_n$$

4- القروض باستهلاكات متساوية:

وفقا لهذه الطريقة فإنه يتم سداد القروض على أقساط متساوية من القرض مع دفع الفوائد المستحقة بصفة دورية على رصيد القرض. وتضمن هذه الطريقة سداد القرض على أقساط متساوية تدفع بصفة دورية في آخر كل فترة زمنية متفق عليها كما يضاف لهذا القسط المتساوي (الاستهلاك المتساوي) قسط الفائدة المستحقة على الرصيد المتبقي.

ووفقا لهذه الطريقة يقسم القرض إلى أجزاء متساوية تسمى استهلاكات بقدر عدد وحدات الزمن ثم تضاف الفائدة المستحقة على رصيده في آخر كل فترة الى كل استهلاك على التوالي.

ويترتب عن ذلك ثبات الاستهلاك في كل الفترات وتناقص الفوائد المستحقة بمقدار ثابت، كما أن الدفعات تكون متناقصة بمقدار ثابت أيضا.

والمثال التالي يوضح طريقة اعداد جدول استهلاك القرض بطريقة الاستهلاكات الثابتة.

مثال: اقترضت مؤسسة مبلغ 25000 على أن تسدده بدفعات نهاية المدة بطريقة الاستهلاكات الثابتة ولمدة 5 سنوات وبمعدل فائدة 8%

- انجز جدول استهلاك القرض بهذه الطريقة.
- قيمة الاستهلاك الثابت:

$$M = \frac{C_0}{n} = \frac{25000}{5} = 5000$$

$$C_n = C_{n-1} - M$$

$$I_n = C_{n-1} * t$$

$$a_n = I_n + M$$

حسابات السطر الأول:

$$I_1 = C_0 * t = 25000 * 0.08 = 2000$$

$$a_1 = I_1 + M = 2000 + 5000 = 7000$$

$$C_1 = C_0 - M = 25000 - 5000 = 20000$$

حسابات السطر الثاني:

$$I_2 = C_1 * t = 20000 * 0.08 = 1600$$

$$a_2 = I_2 + M = 1600 + 5000 = 6600$$

$$C_2 = C_1 - M = 20000 - 5000 = 15000$$

نفس العمليات لبقية الأسطر

n	القرض في بداية المدة	الفائدة I	الاستهلاك M	الدفعة a	القرض في نهاية المدة
1	25000	2000	5000	7000	20000
2	20000	1600	5000	6600	15000
3	15000	1200	5000	6200	10000
4	10000	800	5000	5800	5000
5	5000	400	5000	5400	00

ثانيا: اهتلاك القروض المجزأة: هي عبارة عن قروض سندية تضم عدة مقرضين حيث يتم تجزئة المبلغ المالي الكبير إلى حصص صغيرة ومتساوية تسمى السندات، فعندما تحتاج المؤسسة الى التمويل تقوم بإصدار سندات وطرحها للبيع والأطراف التي تقتنيها تصبح ممولة أو مقرضة لهذه المؤسسة.

والسندات هي عبارة عن أوراق مالية ذات قيمة متنقلة يمكن أن تصدرها مؤسسات خاصة أو عامة عن طريق البورصة أو عن طريق البنوك، وتتميز السندات بالقيمة الاسمية المدونة على السند والتي تدفع عند حلول تاريخ استحقاقه، أما قيمة الإصدار فهي ثمن الشراء الذي يدفعه المقترض عند شراء السند.

عند اصدار السندات بقيمة أقل من قيمتها الاسمية فإن المقرض يستفيد من الفرق والذي يسمى علاوة الإصدار إضافة الى الفوائد المحسوبة على أساس القيمة الاسمية للسند. وعند اصدار السندات يمكن أن يتساوى سعر الإصدار مع القيمة الاسمية ويسمى الإصدار المتساوي أو يكون سعر الإصدار أكبر من القيمة الاسمية ويسمى الإصدار غير المتساوي.

1- **الإصدار المتساوي:** حيث تكون القيمة الاسمية للسند مساوية لقيمة تسديد السند ويمكن أن يتم تسديد القرض السندي بشكلين هما التسديد بأقساط ثابتة (متساوية)والتسديد باستهلاكات ثابتة (متساوية).

لنأخذ الرموز التالية:

- C_0: أصل القرض
- **Vn:** القيمة الاسمية للسند
- **N:** عدد السندات الكلي
- **R:** قيمة تسديد السند(قيمة الإصدار)
- **S:** عدد السندات المسددة في السنة X
- **n:** مدة القرض
- **t:** معدل الفائدة

مثال1: أصدرت مؤسسة قرضا سنديا بقيمة 1000000 موزعة على 500 سند تسدد بقيمتها الاسمية وبدفعات متساوية خلال 5 سنوات بمعدل فائدة 12%

المطلوب اعداد جدول استهلاك القرض.

الحل: أولا نقوم بحساب القيمة الاسمية للسند الواحد.

$$VN = \frac{C_0}{N} = \frac{1000000}{500} = 2000$$

- حساب قيمة الدفعة الواحدة:

$$a = C_0 \frac{t}{1-(1+t)^{-n}}$$

$$a = 1000000 \frac{0.12}{1-(1.12)^{-5}} = 277409.73$$

- عدد السندات في حالة القروض السندية يشكل متتالية هندسية أساسها (1+t) وعليه فإن عدد السندات لأي سنة يساوي عدد السندات للسنة التي تسبقها مضروبا في الأساس.

$$S_{x+1} = S_x(1+t)$$

- حساب الاستهلاك الأول:

$$M_1 = a - I_1 = 277409.73 - (1000000 * 0.12) \\ = 157409.73$$

- حساب عدد السندات للسنة الأولى الى الخامسة:

عدد سندات السنة الأولى يساوي استهلاك السنة الأولى مقسوما على القيمة الاسمية للسند الواحد.

$$S_1 = \frac{M_1}{VN} = \frac{157409.73}{2000} = 78.71 \cong 79$$
$$S_2 = S_1(1+t) = 78.71(1.12) = 88.16$$
$$S_3 = S_2(1+t) = 88.16(1.12) = 98.74 \cong 99$$
$$S_4 = S_3(1+t) = 98.74(1.12) = 110.59$$
$$S_5 = S_4(1+t) = 110.59(1.12) = 123.86 \cong 124$$

عملية التقريب تكون كالتالي:

نجمع عدد السندات للسنوات الخمس بأخذ الجزء الصحيح من القيمة المحسوبة أي نأخذ:

$$78 + 88 + 98 + 110 + 123 = 497$$

بمقارنة عدد السندات الفعلي (500 سند) وعدد السندات أعلاه نلاحظ أن الفرق هو 3 سندات وعليه نرجع الى السندات المحسوبة ونقوم بالتقريب بالزيادة بدءا من الرقم الأكبر

فاصـــلة حتى نكمل الســـندات الثلاث. وباقي القيم تقرب بالنقصـــان للحصـــول على أعداد صحيحة.

وتصبح أعداد السندات للسنوات الخمسة على التوالي كالتالي:

79/88/99/110/124

ويكون جدول استهلاك القرض كالتالي:

السنوات	رصيد بداية المدة	عدد السندات	الاستهلاكات المسددة	الفوائد الممنوحة	الأقساط
1	1000000	79	158000	120000	278000
2	842000	88	176000	101040	277040
3	666000	99	198000	79920	277920
4	468000	110	220000	56160	276160
5	248000	124	248000	29520	277760

حيث أن :

- الاستهلاك يساوي عدد السندات مضروبا في القيمة الاسمية للسند الواحد

$$M_i = S_i * VN$$

- الفوائد تساوي الرصيد مضروبا في معدل الفائدة

$$I_n = C_{n-1} * t$$

- القسط يساوي مجموع الفائدة والاستهلاك

$$a = I_i + M_i$$

مثال 2: أصدرت مؤسسة قرضا بشكل سندات عددها 5000 سند قيمة كل منها 2000 دج بمعدل فائدة 5% سنويا بحيث تسدد باستهلاكات متساوية لمدة 5 سنوات

الحل:

بما أن الاستهلاكات ثابتة إذن عدد السندات المسددة في كل سنة متساوي ويساوي:

$$\boldsymbol{S = \frac{N}{n} = \frac{5000}{5} = 1000}$$

ويتم حساب الاستهلاكات، الفوائد والأقساط بنفس الطريقة كما في القروض ذات المصدر الوحي.

حسابات السطر الأول:

- رصيد بداية المدة= 2000*5000=10000000
- الاستهلاكات=عدد السندات في قيمة السند=1000*2000=2000000 وهي ثابتة

- الفائدة= الرصيد بداية المدة*المعدل=10000000*0.05=500000
- القسط=رصيد بداية المدة-الاستهلاك=10000000-2000000=8000000

حسابات السطر الثاني:

- الفائدة= الرصيد بداية المدة*المعدل=8000000*0.05=400000
- القسط=الاستهلاك+ الفائدة=2000000+400000=2400000
- رصيد نهاية المدة=رصيد بداية المدة-الاستهلاك=8000000-2000000=6000000

حسابات السطر الثالث:

- الفائدة= الرصيد بداية المدة*المعدل=6000000*0.05=300000
- القسط=الاستهلاك+ الفائدة=2000000+300000=2300000
- رصيد نهاية المدة=رصيد بداية المدة-الاستهلاك=6000000-2000000=4000000

حسابات السطر الرابع:

- الفائدة= الرصيد بداية المدة*المعدل=4000000*0.05=200000
- القسط=الاستهلاك+ الفائدة=2000000+200000=2200000
- رصيد نهاية المدة=رصيد بداية المدة-الاستهلاك=4000000-2000000=2000000

حسابات السطر الخامس:

- الفائدة= الرصيد بداية المدة*المعدل=2000000*0.05=100000
- القسط=الاستهلاك+ الفائدة=2000000+100000=2100000
- رصيد نهاية المدة=رصيد بداية المدة-الاستهلاك=2000000-2000000=00

السنوات	رصيد بداية المدة	عدد السندات المسددة	الاستهلاكات	الفوائد المسددة	القسط	رصيد نهاية المدة
1	10000000	1000	2000000	500000	2500000	8000000
2	8000000	1000	2000000	400000	2400000	6000000
3	6000000	1000	2000000	300000	2300000	4000000
4	4000000	1000	2000000	200000	2200000	2000000
5	2000000	1000	2000000	100000	2100000	00

2- **الإصدار غير المتساوي:** حيث تكون قيمة الإصدار R أكبر من القيمة الاسمية VN وفي هذه الحالة فإن علاوة الإصدار P المتمثلة في علاوة التسديد سوف تأثر على معدل الفائدة المطبق ويرمز للمعدل الفعلي المطبق بـ r ويحسب كالتالي:

$$\boldsymbol{r = \frac{VN}{R} * t}$$

وفي هذه الحالة فإن طريقة حساب القسط تتغير لأن أصل القرض تغير ففي حالة الإصدار المتساوي فإن أصل القرض يحسب بالعلاقة:

$$C_0 = VN * N$$

أما قيمة القرض في حالة الإصدار غير المتساوي فتكتب بالعلاقة التالية:

$$C_0 = R * N$$

وعليه يحسب القسط بالعلاقة التالية:

$$a = (N * R)\frac{r}{1-(1+r)^{-n}}$$

كما أن عدد السندات للسنة الأولى يحسب بالعلاقة:

$$S_1 = N\frac{r}{(1+r)^n - 1}$$

أما عدد السندات لأي سنة فيحسب كالتالي:

$$S_n = S_{n-1}(1+r)$$

مثال: أصدرت مؤسسة قرضا سنويا مقسما على 300 سند بقيمة اسمية 100 دج للسند الواحد تسدد بقيمة 120 دج للسند الواحد على خمسة أقساط متساوية سنوية بمعدل 6% المطلوب حساب قيمة القسط الواحد ثم اعداد جدول استهلاك القرض.

الحل:

$$\boldsymbol{r = \frac{VN}{R} * t = \frac{100}{120}0.06 = 5\%}$$

$$a = (N * R)\frac{r}{1-(1+r)^{-n}} = 300 * 120\frac{0.05}{1-(1.05)^{-5}}$$
$$= 8315.90$$

$$S_1 = N\frac{r}{(1+r)^n - 1} = 300\frac{0.05}{(1+0.05)^5 - 1} = 54.29 \cong 54$$

$$S_2 = S_1(1+r) = 54.29(1.05) = 57$$

$$S_3 = 57(1.05) = 59.85 \cong 60$$

$$S_4 = 59.85(1.05) = 62.84 \cong 63$$

$$S_5 = 62.84(1.05) = 65.98 \cong 66$$

نقوم اعداد جدول استهلاك القرض بنفس الطريقة المتبعة في حالة الإصدار المتساوي:

السنوات	رصيد بداية المدة	عدد السندات المسددة	الاستهلاك	الفوائد	القسط	رصيد نهاية المدة
1	36000	54	6480	1800	8280	29520
2	29520	57	6840	1476	8316	22680
3	22680	60	7200	945	8145	15480
4	15480	63	7960	645	8205	7920
5	7920	66	7920	396	8316	00

حسابات السطر الأول:

- رصيد بداية المدة=عدد السندات الكلي*قيمة الإصدار=300*120=36000
- الاستهلاك= عدد السندات للسنة*قيمة الإصدار=57*120=6480
- الفوائد=رصيد بداية المدة* r = 36000*0.05=1800
- القسط=الاستهلاك+ الفوائد=6480+1800=8280
- رصيد نهاية المدة=رصيد بداية المدة-الاستهلاك=36000-6480=29520

حسابات السطر الثاني:

- الاستهلاك= 57*120=6840
- الفوائد=29520*0.05=1476
- القسط=6840+1476=8316
- رصيد نهاية المدة=29520-6840=22680

حسابات السطر الثالث:

- الاستهلاك= 60*120=7200
- الفوائد=22680*0.05=945
- القسط=7200+945=8145
- رصيد نهاية المدة=22680-7200=15480

حسابات السطر الرابع:

- الاستهلاك= 63*1205=7960
- الفوائد=15480*0.05=645
- القسط=7960+645=8205
- رصيد نهاية المدة=15480-7960=7920

حسابات السطر الخامس:

- الاستهلاك=66*120=7920
- الفوائد=7920*0.05=396
- القسط=7920+396=8316
- رصيد نهاية المدة=7920-7920=00

تمارين حول استهلاك القروض

التمرين رقم 01:

تحصلت مؤسسة على قرض بقيمة 2000000 لمدة 5 سنوات بمعدل فائدة 9% ويسدد بدفعات سنوية متساوية

- أحسب قيمة الدفعة a
- أنجز جدول استهلاك القرض

التمرين رقم 02:

لتمويل استثمار اقترضت مؤسسة مبلغا ماليا مقداره 700000 بمعدل فائدة 5% يسدد على 9 دفعات متساوية.

- احسب قيمة الدفعة a
- أنجز السطرين الأول والثالث والسادس والأخير

التمرين رقم 03: اقترضت مؤسسة مبلغا ماليا من أحد البنوك بمعدل فائدة 10% يسدد بواسطة 4 دفعات سنوية متساوية قيمة كل دفعة 151426

- أحسب قيمة القرض C_0
- أنجز جدول استهلاك القرض

التمرين رقم 04:

من أجل تمويل مشروع اقترضت مؤسسة مبلغا على أن يتم تسديدة على 9 دفعات متساوية قيمة كل دفعة 48024 بمعدل فائدة 8%

- أحسب قيمة القرض C_0
- أنجز السطرين الأول والرابع والسابع

التمرين رقم 05:

اقترضت مؤسسة مبلغ 25000 على أن تسدده بدفعات نهاية المدة بطريقة الاستهلاكات الثابتة ولمدة 5 سنوات وبمعدل فائدة 8%

- انجز جدول استهلاك القرض بهذه الطريقة.

حلول التمارين:

حل التمرين رقم 01:

- حساب قيمة الدفعة a

$$C_0 = a\frac{1-(1+t)^{-n}}{t} \rightarrow a = C_0\frac{t}{1-(1+t)^{-n}}$$

$$a = 2000000\frac{0.09}{1-(1+0.09)^{-5}} = 514185$$

- جدول استهلاك القرض:

لحساب الفائدة

$$I_i = C_{i-1} * t$$

لحساب الاستهلاك

$$M_i = a - I_i$$

لحساب القرض في نهاية المدة

$$C_i = C_{i-1} - M_i$$

حسابات السطر الأول:

$$I_1 = C_0 * t = 2000000 * 0.09 = 180000$$
$$M_1 = a - I_1 = 514185 - 180000 = 343185$$
$$C_1 = C_0 - M_1 = 2000000 - 343185 = 1665815$$

حسابات السطر الثاني:

$$I_2 = C_1 * t = 1665815 * 0.09 = 149923.35$$
$$M_2 = a - I_2 = 514185 - 149923.35 = 364261.65$$
$$C_2 = C_1 - M_2 = 1665815 - 364261.65 = 1665815$$

يتم اجراء الحسابات بنفس الطريقة بالنسبة لبقية الأسطر مثلما موضح في الجدول أدناه.

n	القرض في بداية المدة	الفائدة *I*	الاستهلاك *M*	الدفعة *a*	القرض في نهاية المدة
1	2000000	180000	334185	514185	1665815
2	1665815	149923.35	364261.65	514185	1301553.35
3	1301553.35	117139.80	397045.20	514185	904508.15
4	904508.15	81405.70	432779.30	514185	471728.88
5	471728.88	42455.60	471728.88	514185	00

حل التمرين رقم 02:

- حساب قيمة الدفعة a

$$a = C_0 \frac{t}{1-(1+t)^{-n}}$$

$$a = 700000 \frac{0.05}{1-(1+0.05)^{-9}} = 98483$$

- انجاز الأسطر الأول والثالث والسادس والأخير

العلاقة بين استهلاكين متتاليين:

$$M_n = M_p(1+t)^{n-p}$$

- حسابات السطر الأول:

$$I_1 = C_0 * t = 700000 * 0.05 = 35000$$
$$M_1 = a - I_1 = 98483 - 35000 = 63483$$
$$C_1 = C_0 - M_1 = 700000 - 63483 = 636517$$

- حسابات السطر الثالث:

$$M_3 = M_1(1+t)^{3-1} = 63483(1+0.05)^2 = 69960$$
$$I_3 = a - M_3 = 98483 - 69960 = 28493$$
$$I_i = C_{i-1} * t \rightarrow C_2 = \frac{I_3}{t} = \frac{28493}{0.05} = 569860$$
$$C_i = C_{i-1} - M_i \rightarrow C_3 = C_2 - M_3 = 569860 - 69960 = 488838$$

- حسابات السطر السادس:

$$M_6 = M_1(1+t)^{6-1} = 63483(1+0.05)^5 = 81022$$
$$I_6 = a - M_6 = 98483 - 81022 = 17461$$
$$C_5 = \frac{I_6}{t} = \frac{17461}{0.05} = 349220$$
$$C_6 = C_5 - M_6 = 349220 - 81022 = 268198$$

- حسابات السطر التاسع:

$$M_9 = M_1(1+t)^{9-1} = 63483(1+0.05)^8 = 93793$$
$$I_9 = a - M_9 = 98483 - 93793 = 4690$$
$$C_8 = \frac{I_9}{t} = \frac{4690}{0.05} = 93793$$
$$C_9 = C_8 - M_9 = 93793 - 93793 = 00$$

n	القرض في بداية المدة	الفائدة I	الاستهلاك M	الدفعة a	القرض في نهاية المدة
1	700000	35000	63483	98483	636517
...					
3	569860	28490	69960	98483	488838
...					
6	349220	17461	81022	98483	268198
...					
9	93793	4690	93793	98483	00

حل التمرين رقم 03:

- حساب قيمة القرض C_0

$$C_0 = a\frac{1-(1+t)^{-n}}{t} = 151426\frac{1-(1+0.1)^{-4}}{0.1} = 480000$$

- أنجاز جدول استهلاك القرض

n	القرض في بداية المدة	الفائدة I	الاستهلاك M	الدفعة a	القرض في نهاية المدة
1	480000	48000	1.3426	151426	376574
2	376574	37657.4	113768.60	151426	262805.40
3	262805.4	26280.54	125145.46	151426	137659.94
4	137659.94	13765.994	137595.94	151426	00

حل التمرين رقم 04:

- حساب قيمة القرض C_0

$$C_0 = a\frac{1-(1+t)^{-n}}{t} = 48024\frac{1-(1+0.08)^{-9}}{0.08} = 300000$$

- أنجاز السطرين الأول والرابع والسابع

n	القرض في بداية المدة	الفائدة I	الاستهلاك M	الدفعة a	القرض في نهاية المدة
1	300000	24000	24024	48024	275976
...					
2	222008.75	17760.7	30263.30	48024	191745.45
...					
3	123753.75	9900.3	38123.7	48024	85630.05

حل التمرين رقم 05:

- انجاز جدول استهلاك القرض بطريقة الاستهلاكات الثابتة:
- قيمة الاستهلاك الثابت:

$$M = \frac{C_0}{n} = \frac{25000}{5} = 5000$$
$$C_n = C_{n-1} - M$$
$$I_n = C_{n-1} * t$$
$$a_n = I_n + M$$

حسابات السطر الأول:

$$I_1 = C_0 * t = 25000 * 0.08 = 2000$$
$$a_1 = I_1 + M = 2000 + 5000 = 7000$$
$$C_1 = C_0 - M = 25000 - 5000 = 20000$$

حسابات السطر الثاني:

$$I_2 = C_1 * t = 20000 * 0.08 = 1600$$
$$a_2 = I_2 + M = 1600 + 5000 = 6600$$
$$C_2 = C_1 - M = 20000 - 5000 = 15000$$

نفس العمليات لبقية الأسطر

n	القرض في بداية المدة	الفائدة I	الاستهلاك M	الدفعة a	القرض في نهاية المدة
1	25000	2000	5000	7000	20000
2	20000	1600	5000	6600	15000
3	15000	1200	5000	6200	10000
4	10000	800	5000	5800	5000
5	5000	400	5000	5400	00

المحور السادس: اختيار الاستثمارات

يقصد بالاستثمارات مجموع الوسائل المادية واللامادية سواء منقولة أو غير منقولة، سواء انجزتها المؤسسة أو اشترتها، ويشترط أن تكون موجهة للاستعمال الداخلي، وأن تستعمل لأكثر من سنة. ويعرف الاستثمار في المؤسسة بأنه القيام بإنفاق مبالغ محددة في الوقت الحالي بغرض الحصول على إيرادات مهمة مستقبلا.

ويهدف اختيار الاستثمارات الى البحث عن الاستثمار الأكثر نجاعة والأقل تكاليف وهو ما أدى الى ظهور عدة طرق للاختيار والمفاضلة بين عدد من المشاريع ومن بين هذه الطرق نجد:

أولا: معيار صافي القيمة الحالية VAN: وتعتمد على الفرق بين القيمة الحالية للإيرادات والقيمة الحالية للنفقات، حيث تشمل الأولى القيمة الحالية للتدفقات النقدية الداخلة والقيمة الحالية للقيمة المتبقية للاستثمار. أما الثانية فتشمل التكلفة المبدئية للاستثمار والقيمة الحالية للتدفقات النقدية الخارجة.

يتم حساب صافي القيمة الحالية بطرح القيمة الحالية للتدفق النقدي الداخل من القيمة الحالية للتدفق النقدي الخارج

وإذا كانت التدفقات النقدية الداخلة منتظمة يتم حساب صافي القيمة الحالية بالعلاقة التالية:

$$VAN = R\left[\frac{1-(1+t)^{-n}}{t}\right] - I_0$$

حيث أن:

- VAN صافي القيمة الحالية
- R: صافي التدفق النقدي السنوي المنتظم
- I_0: التكلفة المبدئية للاستثمار
- t: معدل الفائدة
- n : عدد التدفقات النقدية السنوية

وعند المفاضلة بين عدد من المشاريع يتم اختيار المشروع الذي يحقق أكبر صافي قيمة حالية. أما عند تقييم مشروع واحد فيقبل إذا كان صافي القيمة الحالية موجب، أما إذا كان صافي القيمة الحالية سالب يرفض المشروع.

مثال: قدرت تكاليف مشروع بـ 3000000 دج وكانت الإيرادات المتوقعة 500000 دج سنويا لمدة 5 سنوات، فهل سيتم اختيار المشروع علما أن معدل الفائدة هو 10% سنويا؟

الحل:

$$VAN = 500000\left[\frac{1-(1+0.1)^{-5}}{0.1}\right] - 3000000$$
$$= -1104606.615$$

بما أن صافي القيمة الحالية أقل من الصفر إذن المشروع غير مربح وبالتالي يرفض.

ثانيا: معيار معدل العائد الداخلي الخام *TRI*: ويسمى أيضا بالمعدل الداخلي للمردودية أو المعدل الحقيقي للفائدة الاقتصادية، ويعرف بأنه معدل الفائدة أو الخصم الذي تتساوى عنده التكلفة المبدئية للمشروع مع القيمة الحالية للتدفقات النقدية المتوقعة وهو كذلك المعدل t الذي يكون فيه VAN معدوما. وبعد تحديد المعدل الداخلي لكل استثمار يتم اختيار المشاريع التي تحقق معدلا أكبر من معدل الفائدة السائد في السوق.

$$VAN = 0 \rightarrow VAR - I_0 = 0$$

أي أن:

$$R(1+t)^{-n} - I_0 = 0$$

أما إذا كانت التدفقات النقدية الداخلة منتظمة فنستخدم العلاقة التالية:

$$VAN = R\left[\frac{1-(1+t)^{-n}}{t}\right] - I_0 = 0 \rightarrow \left[\frac{1-(1+t)^{-n}}{t}\right] = \frac{I_0}{R}$$

المعدل الذي يحقق الشرط أعلاه هو معدل العائد الداخلي

مثال: قررت مؤسسة إنتاجية شراء آلة جديدة ولديها الخيارين التاليين:

- آلة تكلفة شراءها 100000دج والايرادات السنوية المتوقعة 24063.456 سنويا ولمة خمسة سنوات.
- آلة تكلفة شرائها 150000 دج والايرادات المتوقعة 38563.871 سنويا ولمدة 5 سنوات.

فما هي الآلة التي ستشتريها وفقا لطريقة معدل العائد الداخلي علما أن الفائدة السائدة هي 8%

الحل: يتم حساب معدل العائد الداخلي لكل آلة وأحسن آلة هي التي يكون لها معدل داخلي أكبر من معدل السوق السائد.

بالنسبة للآلة الأولى:

$$\left[\frac{1-(1+t)^{-n}}{t}\right] = \frac{I_0}{R} \rightarrow \frac{100000}{24063.456} = 4.155679$$

بالمطابقة مع الجدول المالي رقم 4 نجد: t=6.5%

بالنسبة للآلة الثانية:

$$\left[\frac{1-(1+t)^{-n}}{t}\right]=\frac{I_0}{R}\rightarrow\frac{15000}{38563.871}=3.889651$$

بالمطابقة مع الجدول المالي رقم 4 نجد: t=9%

بالمقارنة مع سعر الفائدة السائد في السوق فإن الخيار الثاني هو الأفضل.

ثالثا: طريقة مؤشر الربحية: وتعتمد هذه الطريقة على حاصل قسمة القيمة الحالية للإيرادات على القيمة الحالية للنفقات وليس الفرق بينهما كما هو الحال في معيار صافي القيمة الحالية.

حيث يحسب معدل الربحية بالعلاقة التالية:

$$TR=\frac{VAR}{VAD}$$

حيث:

TR: معدل الربحية

VAR: القيمة الحالية للإيرادات

VAD: القيمة الحالية للنفقات

فإذا كان مؤشر الربحية أكبر من الواحد فإن المشروع مربح، بينما إذا كان المؤشر أقل من الواحد فالمشروع خاسر. وفي حالة المفاضلة بين عدد من المشاريع يتم اختيار المشروع الأكبر معدل ربحية.

مثال: أمام مؤسسة مشروعين يجب المفاضلة بينهما باستعمال مؤشر الربحية، علما أن المردودية هي *7%* أما التدفقات النقدية الداخلة والخارجة فهي كالتالي:

المشروع الأول: تكاليف الاستثمار 120000، مصاريف نقدية 10000 لمدة 10 سنوات، الربح السنوي 100000.

المشروع الثاني: تكاليف الاستثمار 140000، مصاريف صيانة سنوية 5000 لمدة 10 سنوات ، الربح السنوي 120000

$$TR_1=\frac{VAR}{VAD}$$

$$TR_1 = \frac{100000\dfrac{1-(1.07)^{-10}}{0.07}}{120000+10000\dfrac{1-(1.07)^{-10}}{0.07}} = \frac{702358.1541}{190235.8154}$$
$$= 3.69$$

$$TR_2 = \frac{120000\dfrac{1-(1.07)^{-10}}{0.07}}{140000+5000\dfrac{1-(1.07)^{-10}}{0.07}} = \frac{842829.7849}{175117.9077}$$
$$= 4.81$$

بمقارنة معدل الربحية للمشروعين يتضح بأن المشروع الثاني هو الأفضل.

المراجع المعتمدة:

- ناصر دادي عدون، **تقنيات مر اقبة التسيير: الرياضيات المالية**، الجزء الأول، دار المحمدية العامة، 1995
- صليحة بن طلحة، **الرياضيات المالية**، منشورات الدار الجزائرية، 2015
- محمد بداوي، **الرياضيات المالية**، دار الضحى للنشر والاشهار، الجلفة-الجزائر، 2022
-
- عبد السميع روينة، **دروس في الرياضيات المالية**، جامعة محمد خيضر، بسكرة،2020
- شقيري نوري موسى، محمود إبراهيم نور، وليد أحمد صافي، **الرياضيات المالية**، دار المسيرة، ط2، عمان-الأردن، 2011.
- غازي فلاح المومني، **الرياضيات المالية المعاصرة**، دار المناهج للنشر والتوزيع، عمان-الأردن، 2014.
- خليفة الحاج، **دروس وتمارين محلولة في الرياضيات المالية**، جامعة عبد الحميد بن باديس-مستغانم، السنة الجامعية: 2020/2019.
- بن عميروش صليحة، **الرياضيات المالية**، جامعة الجزائر 3، الجزائر، 2023/2022.
- مناضل الجواري، **مقدمة في الرياضيات المالية**، اليازوري، بدون سنة نشر.
- معوض حسن حسنين وآخرون، **رياضيات التمويل والاستثمار**، كلية التجارة، قسم الرياضو والتأمين، جامعة القاهرة-مصر، 2018
- Valerie Watts, **Business And Financial Mathematics**, Fanshawe College Pressbooks London Ontario.
- M. j. Alhabeeb, **Mathematical Finance**, Wiley, 2012.