الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة الشهيد حمه لخضر الوادي

معهد العلوم الدقيقة

كلية الرياضيات

مذكرة مكملة لنيل شهادة ماستر اكاديمي

تخصص : رياضيات واعلام الي

شعبة : رياضيات

تخصص رياضيات تطبقية

العنوان:

استقرار حلول نظام المعادلات بطريقة ليابنوف وتطبيقاتها على الامراض المعدية

من اعداد :

- علالي الطاهر
- باسي محمد

لجنة المناقشة :

- عادل عيساوي	استاذ	جامعة الشهيد حمه لخضر	رئيس اللجنة
- العرابي حريز بكار	أ.م.أ	جامعة الشهيد حمه لخضر	مؤطر
- احفوظة بالهادي	أ.م.ب	جامعة الشهيد حمه لخضر	مناقش

السنة الجامعية :2023/2022

بِسْمِ ٱللَّهِ ٱلرَّحْمَٰنِ ٱلرَّحِيمِ

ملخص

قد فضّلنا في هذا العمل" الإيجاز عن التفصيل "إذ بدأنا هذه الطريقة التي تهدف أساسا إلى إعطاءبعض المفاهيم الأوّلية, حول استقرار حلول نظام المعادلات بطريقة ليبانوف وتطبيقاتها على الأمراض المعدية نموذج (SIR)

حيث تم تقسيم هذه المذكرة إلى اربعة فصول:

الفصل الاول فضاء هلبرت و بعض خصائص المؤثرات وبعض التكاملات

الفصل الثاني جمل المعادلات التفاضلية والاستقرار ومعادلة ليبانوف .

والفصل الثالث نظام SIR نظري والفصل الرابع جانب تطبيقي .

كلمات مفتاحية : تكامل – معادلات تفاضلية – جمل معادلة تفاضلية –الاستقرار – معادلة المؤثرات فيروس كورونا، ، دالة التوزيع الطبيعي .

Résumé

Dans ce travail, nous avons préféré la «brièveté au détail», car nous avons commencé cette méthode la plus efficace dans un mémorandum qui vise principalement à donner Quelques notions préliminaires sur la stabilité des solutions du système d'équations par la méthode de Libanov et ses applications au modèle des maladies infectieuses (SIR) Cette note a été divisée en quatre chapitres :

Chapitre 1 : Espace de Hardy Hilbert, quelques propriétés des influenceurs et quelques intégrations Chapitre 2 : Équations différentielles, stabilité et équation de Libanov.

Le troisième chapitre est un système SIR théorique et le quatrième chapitre est un aspect appliqué.

Mots clés : intégration - équations différentielles - phrases d'équations différentielles - stabilité - équation des effets

SUMMARY

In this work, we have preferred “briefness over detail,” as we started this most effective method in a memorandum that mainly aims to give
Some preliminary concepts about the stability of the solutions of the system of equations by the Libanov method and its applications to infectious diseases (SIR) model. This note has been divided into four chapters:
The first chapter is Hardy-Hilbert space, some properties of influences, and some integrations. Chapter two is differential equations, stability and Libanov equation.
The third chapter is a theoretical SIR system and the fourth chapter is an applied aspect.

Keywords:
integration - differential equations - differential equation sentences - stability - effect equation

شكر وعرفان

قال تعالى "(وَإِذْ تَأَذَّنَ رَبُّكُمْ لَئِن شَكَرْتُمْ لَأَزِيدَنَّكُمْ ۖ وَلَئِن كَفَرْتُمْ إِنَّ عَذَابِي لَشَدِيد)

. سورة ابراهيم .. اية رقم07

نحمد الله عز وجل الذي أنار لنا درب العلم والمعرفة وأعاننا على أداء هذا الواجب ووفقنا إلى انجاز هذا العمل المتواضع .

وعملا بقوله صلى اللهُ عَليه وسلم: << مَنْ لم يَشكر اُلناَسّ لم يَشكر اُللهّ >>

رواه أحمد الترميذي.

نتوجه بجز يل الشكر والإمتنان إلى كل من ساعدنا من قريب أو من بعيد، في إنجاز هذا العمل وفي تذليل ما واجهته من صعوبات، وأخص بالذكر الأستاذ المشرف "العرابي حريز بكار " الذي لم يبخل علينا بتوجيهاته

ونصائحه القيمة التي كانت عونا لي في اتمام هذه المذكرة فجزاه الله خير الجزاء

كما لا يفوتني ان اشكر كل اساتذة قسم الرياضيات واعضاء اللجنة التي تكرمت بمناقشة هذه المذكرة

اهــــــــداء

إلى من تتسابق الكلمات لتخرج معبرة عن مكنون ذاتها

من علمتني وعانت الصعاب من اجلي

.إلى القلب الناصع بالبياض. .... والدتي الغالية

إلى سبب وجودي في الحياة . ... .روح ابي

الى من كانت سندا لي في الصعوبات.. ...زوجتي

الى سبب سعادتي ونور الطريق.. بناتي واولادي

إلى من كانوا يضيئون لي الطر يق ويساندوني ويتنازلون عن حقوقهم

لإرضائي والعيش في هناء . . . إخوتي

الآن تفتح الأشرعة وترفع المرساة لتنطلق السفينة في عرض بحر واسع

هو بحر الحياة وفي هذه الظلمة لا يضيء إلا قنديل الذكر يات ذكر يات الأخوة البعيدة

إلى الذين أحببتهم وأحبوني أصدقائي

عــــــــــلالــــــي الطـــــاهر

اهـــــــداء

إلى من تتسابق الكلمات لتخرج معبرة عن مكنون ذاتها

من علمتني وعانت الصعاب من اجلي

.إلى القلب الناصع بالبياض. .... والدتي الغالية

إلى سبب وجودي في الحياة . ... .والدي

الى من كانت سندا لي في الصعوبات.. ...زوجتي

إلى من كانوا يضيئون لي الطر يق ويساندوني ويتنازلون عن حقوقهم

لإرضائي والعيش في هناء . . . إخوتي

الآن تفتح الأشرعة وترفع المرساة لتنطلق السفينة في عرض بحر واسع

هو بحر الحياة وفي هذه الظلمة لا يضيء إلا قنديل الذكر يات ذكر يات الأخوة البعيدة

إلى الذين أحببتهم وأحبوني أصدقائي

باسي مــــحمد

الفهرس

ترميزات

الرمز	مدلولـــــــــــــه
$\mathbb{N}$	مجموعة الأعداد الطبيعية.
$\mathbb{Z}$	مجموعة الأعداد الصحيحة.
$\mathbb{R}$	مجموعة الأعداد الحقيقية.
$\mathbb{C}$	مجموعة الأعداد العقدية (المركبة).
$\Vert . \Vert$	النظيم
$\sqrt[n]{\cdot}$	الجذر النوني.
$\Bbbk$	حقل تبديلي
$(X, \langle , \rangle)$	فضاء شبه هيلبرت
SIR	رمز النموذج
$\lim$	نهاية.
Df	المشتقة.
$\dfrac{\partial f}{\partial z}$	المشتقات الجزئية.
$f^{(n)}$	المشتقة من الرتبة n.
$\int$	التكامل.

المقدمة

مقدمة:

الرياضيات ام العلوم كلمة نسمعها كثيرا وها نحن نتطرق في موضوعنا هذا الى صلة الرياضيات بعلم الطب حيث ندرس نموذج S I R المتعلقة بالنمذجة الرياضية الخاصة بالامراض المعدية وكيفية استخدام المعادلات التفاضلية وكذالك معادلات العالم الروسي ليبانوف وكيفية تطبقها على نموذج S I R في الامراض المعدية من هنا اتبعنا في مذكرتنا خطوات منها التعرف على بعض المفاهيم الاولية حول استقرار حلول نظام المعادلات بطريقة ليبانوف وتطبيقاتها على الامراض المعدية حيث تم تقسيم هذه المذكرة الى اربعة فصول :

الفصل الاول: فضاء هلبرت وخصائص بعض المؤثرات و التكاملات وهذا من اجل اجلاء بعض العمليات التي سوف نتعرض لها خلال هذه المذكرة وبعد هذا نذكر

الفصل الثاني : جمل المعادلات التفاضلية والاستقرار وطريقة ليابنوف

وهـذا طبعـا لتـذكير وتوضـيح فعاليـة المعـادلات التفاضـلية امـا بالنسـبة الفصـل الثالـث : فهـو نمـوذج SIR دراسـة نظريـة وكيفيـة سـرعة وانتشـار الامراض المعدية.

الفصـل الرابـع : وهـو دراسـة تطبيقيـة للاسـتقرار فـي نمـوذج SIRباخـذ بعـض الامثلـة التجريبيـة لـبعض العلمـاء

الفصل الاول

سنتطرق في هذا الفصل الى اهمية التعاريف والخواص المتعلقة بالمحاور التالية :

1 - فضـــاء هيلبرت

2- المـؤثرات الخطية

3 - التـــكـــامـــــلات

1-1 : الفضاء الهيلبرتي

1-1-1 : الجداء السلمي

ليكن E فضاءً شعاعيا على الحقل $\mathbb{K}$. $\left(\mathbb{K}=\mathbb{R}\vee\mathbb{K}=\mathbb{C}\right)$

تعريـــف

نسمي شكلا ثنائي الخطية كل تطبيق u منE^2 نحو $\mathbb{K}$ ، يكون خطيا بالنسبة إلى المركبة الأولى وخطيا بالنسبة للمركبة الثانية وبعبارة أخرى نكتب، من أجل y مثبت في E يكون التطبيق الجزئي $u(x,y)\longmapsto x$ خطيا، ومن أجل كل x مثبت في E يكون التطبيق الجزئي $u(x,y)\longmapsto y$ خطيا، يمكن تلخيص ما سبق على النحو التالي

$$\forall\alpha,\beta\in\mathbb{K},\forall x,x_1,x_2,y,y_1,y_2\in E:\quad \begin{aligned}&u(\alpha x_1+\beta x_2;y)=\alpha u(x_1,y)+\beta u(x_2,y)\\&u(x,\alpha y_1+\beta y_2)=\alpha u(x,y_1)+\beta u(x,y_2).\end{aligned}$$

تعريـــف

نقول عن u من E^2 نحو $\mathbb{K}$ إنّه شكل شبه ثنائي الخطية إذا كان خطيًّا بالنسبة للمركبة الأولى ونصف خطي بالنسبة للمركبة الثانية أي

$$\forall\alpha,\beta\in\mathbb{K},\forall x,x_1,x_2,y,y_1,y_2\in E:\quad \begin{aligned}&u(\alpha x_1+\beta x_2,y)=\alpha u(x_1,y)+\beta u(x_2,y)\\&u(x,\alpha y_1+\beta y_2)=\overline{\alpha}u(x,y_1)+\overline{\beta}u(x,y_2).\end{aligned}$$

تعريـــف

نقول عن ثنائي الخطية u إنه هيرميتي إذا وفقط إذا كان

$$\forall x,y\in E:\quad u(y,x)=\overline{u(x,y)}.$$

إضافة إلى ذلك إذا كان $\mathbb{R}=\mathbb{K}$ نقول عن u إنه خطي متناظر.

تعريـــف

نقول عن u من E^2 نحو $\mathbb{K}$ إنّه شكل شبه ثنائي الخطية إذا كان خطيًّا بالنسبة للمركبة الأولى ونصف خطي بالنسبة للمركبة الثانية او العكس

تعريـــف

نقول عن الشكل الهيرميتي u إنه موجب إذا حقق $\forall x \in E : \quad u(x,x) \geq 0$
ونقول إن u معرف موجبا إذا حقق $\forall x \in E-\{0\} : \quad u(x,x) > 0$

تعريـــف

نسمي جداءً سلميا على E كل شكل u شبه ثنائي الخطية هيرميتي معرف وموجب .
نرمز للجداء السلمي عادة بـ $\langle .,. \rangle$ ونكتب عندئذ

$$u \ : E \times E \longrightarrow \mathbb{K}$$
$$(x,y) \longmapsto u(x,y) = \langle x,y \rangle$$

تعريف بصغة اخرى

ليكن X فراغًا شعاعيًا على الحقل $\mathbb{K}$.
يعرف الجداء السلمي على X، بأنه تطبيق h من $X \times X$ في $\mathbb{K}$، يحقق من أجل كل x,y,z من X و α من $\mathbb{K}$، مايلي:

① $h(x,x) \geqslant 0$, $h(x,x)=0 \Longleftrightarrow x=0$

② $h(\alpha x,x) = \alpha h(x,x)$

③ $h(x,y) = \overline{h(y,x)}$

④ $h(x+y,z) = h(x,z) + h(y,z)$

يرمز للجداء السلمي بالرمز $\langle , \rangle$، عندها الزوج $(X, \langle , \rangle)$ يسمى فراغا شبه هيلبرتي .

تعريـــف

إذا كان $\langle .,. \rangle$ جداءً سلميا على فضاء شعاعي E فإن الثنائية $(E;\langle .,. \rangle)$ تدعى فضاء شبه هلبرتي حقيقي أو عقدي حسب الحقل $\mathbb{K}$.

مثال 1.

$E = \mathbb{C}^n$ المزود بالجداء السلمي الإعتيادي $\langle x,y \rangle = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k \overline{y_k}$ فضاء شبه هيلبرتي.

$E = \mathscr{C}\Big([a,b],\mathbb{C}\Big)$ المزود بالجداء السلمي التالي $\langle f,g \rangle = \int\limits_0^1 f(t)\overline{g(t)}dt$ فضاء شبه هيلبرتي.

نتيجة

كل فراغ شبه هيلبرتي، يكون فراغاً شعاعياً نظيمياً مع النظيم: $\|.\| = \sqrt{\langle .,. \rangle}$

قضية

إذا كان X فراغ شبه هيلبرتي، فإن:

① $\forall x, y \in X, |\langle x,y\rangle| \leqslant \|x\|\|y\|$ (متراجحة كوشي شوارتز).

② $\forall x, y \in X, \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|x\|^2)$ (قاعد متوازي الأضلاع).

③ $\forall x, y \in X, \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 = 2(\langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle)$

④ $\forall x, y \in X, 4\langle x,y\rangle = \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i(\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2)$

ومنه فان :

الفراغ الهيلبرتي هو كل فراغ شبه هيلبرتي تام، ونرمز لفراغ هيلبار بالرمز H .

2.1.1 متطابقة متوازي الأضلاع :

من أجل كل x و y من فضاء شبه هيلبرتي حقيقي E فإن

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right).$$

ولدينا

① $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

$$\forall x, y \in E : \quad \langle x,y\rangle = \frac{1}{4}\left[\ \|x+y\|^2 + \|x-y\|\ \right].$$

② $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

$$\forall x, y \in E : \quad \langle x,y\rangle = \frac{1}{4}\left[\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2\right]$$

إثبات

من أجل كل α و β من $\mathbb{C}$ لدينا

$$\mathrm{Re}(\alpha\beta) = \mathrm{Re}(\alpha)\mathrm{Re}(\beta) - \mathrm{Im}(\alpha)\mathrm{Im}(\beta)$$

ليكن λ من $\mathbb{C}$ لدينا

$$\|x+\lambda y\|^2 = \|x\|^2 + 2\mathrm{Re}\left(\overline{\lambda}\langle x,y\rangle\right) + |\lambda|^2\|y\|^2$$

ليكن λ من $\mathbb{C}$ لدينا

$$\begin{aligned}\|x+\lambda y\|^2 &= \|x\|^2 + 2\mathrm{Re}\left(\overline{\lambda}\langle x,y\rangle\right) + |\lambda|^2\|y\|^2\\ &= \|x\|^2 + 2\big(\mathrm{Re}\lambda\mathrm{Re}\langle x,y\rangle + \mathrm{Im}\lambda\mathrm{Im}\langle x,y\rangle\big) + \lambda^2\|y\|^2.\end{aligned}$$

ومنه

$$\begin{cases}\|x+y\|^2 &= \|x\|^2 + 2\mathrm{Re}\langle x,y\rangle + \|y\|^2 \qquad \text{من أجل } \lambda = 1\\ \|x-y\|^2 &= \|x\|^2 - 2\mathrm{Re}\langle x,y\rangle + \|y\|^2 \qquad \text{من أجل } \lambda = -1\end{cases}$$

بالجمع نجد

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\Big(\|x\|^2 + \|y\|^2\Big).$$

- في حالة $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ، لدينا

$$4\mathrm{Re}\langle x,y\rangle = \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2.$$

وبما أن $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ فإن $\langle x,y\rangle = \mathrm{Re}\langle x,y\rangle$، إذن

$$\langle x,y\rangle = \frac{1}{4}\Big[\,\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2\,\Big].$$

- في حالة $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ ، لدينا

$$\begin{cases}\|x+iy\|^2 &= \|x\|^2 + 2\mathrm{Im}\langle x,y\rangle + \|y\|^2 \qquad \text{من أجل } \lambda = i\\ \|x-iy\|^2 &= \|x\|^2 - 2\mathrm{Im}\langle x,y\rangle + \|y\|^2 \qquad \text{من أجل } \lambda = -i\end{cases}$$

ومنه

$$\begin{aligned}\langle x,y\rangle &= \mathrm{Re}\langle x,y\rangle + i\mathrm{Im}\langle x,y\rangle\\ &= \frac{1}{4}\Big(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\Big) + \frac{i}{4}\Big(\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2\Big)\\ &= \frac{1}{4}\Big(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2\Big).\end{aligned}$$

في حالة $\mathbb{K}=\mathbb{R}$، لدينا

$$4\mathrm{Re}\langle x,y\rangle = \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2.$$

وبما أن $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ فإن $\langle x,y\rangle = \mathrm{Re}\langle x,y\rangle$، إذن

$$\langle x,y\rangle = \frac{1}{4}\Big[\,\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2\,\Big].$$

قضية

يكون فضاء نظيمي $(E, \|.\|)$ فضاءً شبه هيلبرتي إذا وفقط إذا حقق نظيمه متطابقة متوازي الأضلاع.

تعريـــف

ليكن $(E; \langle .,. \rangle)$ فضاءً شبه هيلبرتي ، ولتكن متتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية عناصر من E و x عنصرا من E.
نقول إن المتتالية (x_n) متقاربة نحو x في E إذا وفقط إذا كان

$$\forall\varepsilon \geq 0; \exists n_0 \in \mathbb{N}; \forall n \in \mathbb{N} : \quad n \geq n_0 \Rightarrow \|x_n - x\| \leq \varepsilon \ .$$

1-1-3 التعامد :

تعريـــف

نقول إن x و y متعامدان إذا وفقط إذا كان جداؤهما السلمي معدوما ونكتب

$$\langle x, y \rangle = 0 \Longleftrightarrow x \perp y$$

مثال :

نزود الفضاء $E = \mathscr{C}\Big([-\pi, \pi], \mathbb{R}\Big)$ بالجداء السلمي التالي

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t \qquad .$$

لتكن العائلة (f_n) من E حيث $f_n(t) = cosnt$
من أجل عددين طبيعيين مختلفين m و n لدينا

$$\langle f_n, f_m \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \cos nt \cos mt\,\mathrm{d}t$$
$$= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} [\cos(m+n)t + \cos(m-n)t]\ \mathrm{d}t = 0$$

نزود الفضاء $E = \mathscr{C}\Big([-\pi, \pi], \mathbb{R}\Big)$ بالجداء السلمي نزود كلمة مهمة جدا

ملاحظة

علاقة التعامد متناظرة، أي أنه إذا كان $x\perp y$ فإن $y\perp x$ لأن

$$\langle y,x\rangle=\overline{\langle x,y\rangle}\ .$$

خواص

① $\forall x\in E:\quad x\perp o\ .$

② $\forall x,y\in E;\forall\alpha,\beta\in\mathbb{K}^*:\quad x\perp y\Longleftrightarrow \alpha x\perp\beta y\ .$

تعريـــف

نقول عن الجملة $A=\{\,x_n\,;n\geq 1\,\}$ من فضاء شبه هيلبرتي E إنها متعامدة إذا كان من أجل كل x_i و x_j من A

$$\langle x_i,x_j\rangle=0\quad ;\forall\, i\neq j$$

ونقول إنها متجانسة إذا كان من أجل كل x_i من A

$$\langle x_i,x_i\rangle=1\quad ;\forall\, i\in\mathbb{N}$$

نتيجة :

كل جملة $A=\{\,x_n\,;n\geq 1\,\}$ متعامدة في فضاء شبه هيلبرتي E مستقلة خطيا.

إثبات

لتكن الجملة $A=\{\,x_n\,;n\geq 1\,\}$ المتعامدة المتجانسة في فضاء شبه هيلبرتي E ، و $(\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}}$ متتالية سلميات من الحقل $\mathbb{K}$ لدينا

$$\begin{aligned}\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\cdots+\alpha_nx_n=0&\Longrightarrow\langle\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\cdots+\alpha_nx_n,x_j\rangle=0\quad;\forall j\in\mathbb{N}\\&\Longrightarrow\alpha_j\langle x_j,x_j\rangle=0\quad;\forall j\in\mathbb{N}\\&\Longrightarrow\alpha_j=0\quad;\forall j\in\mathbb{N}.\end{aligned}$$

ومنه الجملة $A=\{\,x_n\,;n\geq 1\,\}$ مستقلة خطيا.

1-1-4 الاسقاط العمودي :

- نظرية

ليكن H فراغاً لهيلبار إذا كان X_0 فراغاً جزئياً مغلقاً من H، و x شعاع من H، حيث $x \notin X_0$، فإنه يوجد شعاع وحيد y_0 من X_0 ، يمثل أحسن تقريب للشّعاع x في X_0، يحقق:

$$(x - y_0) \perp X_0$$

في هذه الحالة يسمى y_0 المسقط العمودي للشّعاع x على الفراغ X_0، ويرمز له بالرمز $P_{X_0}x$.

1-2 المؤثرات الخطية :

ليكن $(X, \|.\|_X), (Y, \|.\|_Y)$ فراغين شعاعيين نظيميين على نفس الحقل $\mathbb{K}$، ولتكن D مجموعة غير خالية من X , $(D \subseteq X)$.

1-2-1 تعريف :

إذا أرفق بكل عنصر x من D عنصرا معينا y من Y، يقال أنه قد عرف مؤثرًا من X في Y ، يرمز له

بالرمز F، ونكتب $y = F(x)$ أو $y = Fx$.

- المجموعة D تسمى مجموعة تعريف المؤثر F، ويرمز لها بالرمز $D(F)$.
- مجموعة العناصر y من Y، حيث $y = F(x)$ و $x \in D(F)$ تسمى مجموعة قيم المؤثر F، ويرمز لها بالرمز $E(F)$، و نكتب:

$$E(F) = \{y \in Y \ / \ y = Fx, x \in D(F)\}$$

- صيغة المؤثر F تكتب كالتالي: $X \supset D(F) \xrightarrow{F} E(F) \subset Y$

إختصارا نكتب: $F : X \longmapsto Y$

- مجموعة الأزواج (x, Fx) من فراغ الجداء $X \times Y$، حيث $x \in D(F)$ تسمى بيان المؤثر F، ويرمز لها بالرمز Γ_F، ونكتب:

$$\Gamma_F = \{(x, Fx) \ / \ x \in D(F)\} \subset X \times Y$$

- مجموعة أصفار المؤثر F تسمى نواة المؤثر F، ويرمز لها بالرمز $KerF$، ونكتب:

$$KerF = \{x \in D(F) \ / \ Fx = 0\}$$

نتيجة :

المجموعاتان $KerF$,$E(F)$ فراغان جزئيان من Y,X على التوالي .

تعريفات :

المؤثر F من X في Y يقال أنه خطي، إذا تحقق مايلي:

① المجموعة $D(F)$ فراغ شعاعي جزئي من الفراغ X .

② $F(\alpha x_1+\beta x_2)=\alpha F(x_1)+\beta F(x_2)$ $\forall x_1,x_2\in D(F),\forall\alpha,\beta\in\mathbb{K}\longrightarrow$.

يرمز لمجموعة المؤثرات الخطية من X في Y، بالرمز $L(X,Y)$.

- في حالة $X=Y$، إختصاراً نكتب: $L(X,X)=L(X)$.
- في حالة $Y=\mathbb{K}$، المجموعة $L(X,\mathbb{K})$ تسمى مجموعة الأشكال الخطية على X، وعناصرها تسمى شكل أو دالي خطي، ويرمز لها بالرمز X^*، وتسمى الثنوي الجبري للفراغ X .

1- 2-2 المؤثرات الخطية المحدودة :

ليكن F مؤثرا خطيا من X في Y .

تعريف :

① يقال أن F مستمر في نقطة x_0 من X، إذا تحقق:

$$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall x\in X,\|x-x_0\|_X<\delta\longrightarrow\|Fx-Fx_0\|_Y<\varepsilon$$

② يقال أن F محدود على X أو محدود، إذا حول كل مجموعة محدودة في X إلى مجموعة محدودة في Y.

③ يقال أن F محدود على X أو محدود، إذا تحقق:

$$\exists\alpha>0,\forall x\in X\longrightarrow\|Fx\|_Y\leqslant\alpha\|x\|_X$$

- التعريف 2) يكافئ التعريف 3) .
- نرمز لمجموعة المؤثرات الخطية المحدودة من X في Y، بالرمز $l(X,Y)$، وهي فراغ جزئي من الفراغ $L(X,Y)$.

في حالة $Y=X$، إختصارا نكتب: $l(X,Y)=l(X)$.

في حالة $Y=\mathbb{K}$، المجموعة $l(X,\mathbb{K})$ تسمى مجموعة الأشكال الخطية المحدودة على X، وعناصرها تسمى شكل أو دالي خطي محدود، ويرمز لها بالرمز X'، وتسمى الثنوي التبولوجي للفراغ X .

نظرية 1 :

إذا كان F من $L(X,Y)$ فإن الإثباتات التالية متكافئة

① F مستمر

② F محدود على كرة الوحدة المغلقة

③ F محدود على سطح كرة الوحدة المغلقة

④ Fمحدود

نتيجة 2

إذا كان F من $l(X,Y)$، فإن $KerF$ فراغ جزئي مغلق من X

1-2-3 نظيم المؤثر :

تعريف :

يعرّف نظيم F من $L(X,Y)$ بالصّيغة التّالية :

$$\| F \| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \| Fx \|$$

لكن نشير هنا على أن الحدّ الأعلى قد يكون ،في بعض الحالات، غير منته، أيّ $\|F\| = +\infty$

وعليه إذا زوّد الفضاء $L(X,Y)$ بالنّظيم المعرّف أعلاه حيث يكون فضاءا شعاعيا نظيميا غير عادي.

تعريف :

يعرف نظيم المؤثر F من $l(X,Y)$ بإحدى الصيغ التالية:

① $\|F\| = \sup\limits_{x \neq 0} \dfrac{\|Fx\|_Y}{\|x\|_X}$

② $\|F\| = \sup\limits_{\|x\|_X \leqslant 1} \|Fx\|_Y$

③ $\|F\| = \inf\{c > 0 \;/\; \|Fx\|_Y \leqslant c\|x\|_X\}$

④ $\|F\| = \sup\limits_{\|x\|_X = 1} \|Fx\|_Y$

قضية :

هناك نظيمات أخرى تعرّف نظيم المؤثّر F، منها:

$$\|F\| = \sup_{\|x\|=1} \|Fx\| \quad , \quad \|F\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Fx\|}{\|x\|}$$

1-2-4 عمليات على المؤثرات :

تعريف

من أجل كل مؤثّرين كيفين F_1 وF_2 من $L(X,Y)$ نعرّف:

1. جمع المؤثّرين F_1 وF_2، كالتّالي:

$$F = (F_1 + F_2)x = F_1x + F_2x \qquad ; x \in D(F_1) \cap D(F_2)$$

2. ضرب المؤثّر F_1 بعدد λ من $\mathbb{K}$، كالتّالي:

$$T = (\lambda F_1)x = \lambda F_1 x \qquad ; x \in D(F_1), \lambda \in \mathbb{K}$$

نتيجة :

المؤثّران F وT حيث $F = F_1 + F_2$ و$T = \lambda F_1$ يكونا من $L(X,Y)$.

تعريف :

ليكن X، Y وZ ف.ش .ن على نفس الحقل $\mathbb{K}$، F وT مؤثّرين من $L(X,Y)$ و$L(Y,Z)$ على التّوالي، عندئذ فإنّ جداء (تركيب) المؤثّرين F وT يعرّف كالتّالي $T \circ F = TF$، أيّ أنّ :

$$(TF)x = T(Fx) \qquad ; x \in D(F), F(x) \in D(T)$$

ملاحظة

- الجداء في الحالة العامّة غير معرّف.
- إذا كان $X \equiv Y \equiv Z$ والمؤثّران F وَT معرّفين على كل الفضاء، فإنّ الجداء يكون معرّفا .
- جداء مؤثّرين ليس دوما تبديليا، أيّ $TF \neq FT$ حتى في حالة كان الجداء معرّفا.

1-2-5 عمليات على المؤثرات الخطية المحدودة :

ليكن المؤثّر F من $L(X,Y)$ حيث X و Y ف.ش.ن، على نفس الحقل $\mathbb{K}$.

تعريف :

نقول عن F من $L(X,Y)$ إنّه محدود إذا وفقط إذا كان :

$$\exists k > 0, \| Fx \|_Y \leqslant k \| x \|_X \qquad ; \forall x \in X$$

تعريف :

إذا كان الحدّ الأعلى في التّعريف منتهيا، أيّ $\| F \| < \infty$، نقول إنّ المؤثّر F محدود.

ترميز

نرمز لمجموعة المؤثّرات الخطّيّة المحدودة بـ $\mathcal{L}(X,Y)$.

مثال :

1. المؤثّر المطابق $I : X \longrightarrow X$ على فضاء نظيمي $X \neq \{0\}$ محدود و نظيمه:
$$\| I \| = 1$$
2. المؤثّر الصّفري $0 : X \longrightarrow Y$ على فضاء نظيمي X محدود ونظيمه:
$$\| 0 \| = 0$$

ملاحظة 2 :

- $\mathcal{L}(X,Y) \subset L(X,Y)$
- إذا زوّد $\mathcal{L}(X,Y)$ بأحد النظّيمات فإنّه يعرف فضاءا شعاعيا.
- إذا كان الفضاء Y بناخي فإن $\mathcal{L}(X,Y)$ يكون بناخيا أيضا.
- في حالة $K \equiv Y$ الفضاء $\mathcal{L}(X,Y)$ يسمّى الثّنوي الطّبولوجي ويرمز له بالرّمز X'.
- في حالة $X \equiv Y$ الفضاء $\mathcal{L}(X,X)$ إختصارا يكتب كالتّالي $\mathcal{L}(X)$.

خواص :

$i)$ جمع مؤثّرين خطّيين محدودين هو مؤثر خطّي محدود.

$ii)$ جداء مؤثّر خطّي محدود بعدد حقيقي هو مؤثّر خطّي محدود.

$iii)$ جداء مؤثّرين خطّيّن محدودين هو مؤثّر خطّي محدود.

اثبات :

$i)$ ليكن F وT خطّيّين محدودين من فضاء شعاعي نظيمي X في فضاء شعاعي نظيمي Y.
لدينا من أجل كلّ $1 \leqslant \| x \|$ فإنّ

$$\begin{aligned}\| (F+T)x \| &= \| Fx + Tx \| \\ &\leqslant \| Fx \| + \| Tx \| \\ &\leqslant \|F\| + \|T\|\end{aligned}$$

$ii)$ ليكن F مؤثّر خطّي محدود من فضاء شعاعي نظيمي X في فضاء شعاعي نظيمي Y
لدينا من أجل كلّ α حقيقي ،و من أجل كلّ $1 \leqslant \| x \|$ فإنّ

$$\begin{aligned}\| \alpha F x \| &= |\alpha| \, \| Fx \| \\ &\leqslant |\alpha| \, \|F\|\end{aligned}$$

زيادة على ذلك تبيّن العلاقات السّابقة أنّ:

$$\begin{aligned}\|F+T\| &= \sup_{|x|\leqslant 1} |(F+T)\,x| \\ &\leqslant \| F \| + \| T \|\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\| \alpha F \| &= \sup_{|x|\leqslant 1} |\alpha F x| \\ &= |\alpha| \sup_{|x|\leqslant 1} |Fx| \\ &= |\alpha| \, \|F\|\end{aligned}$$

يمكن القول إذن أنّ الفضاء $\mathcal{L}(X,Y)$ المؤلّف من المؤثّرات الخطّيّة المحدودة من X في Y فضاءا نظيميا عند تزويده بالنّظيم:

$$\|F\| = \sup_{|x|\leqslant 1} |Fx|$$

1-2-6 تقارب متتالية المؤثرات الخطية

ليكن $\{F_n; n \in \mathbb{N}\}$ من $\mathcal{L}(X,Y)$ و F من $\mathcal{L}(X,Y)$

أ) – التقارب بالنظيم

نقول إن $\{F_n; n \in \mathbb{N}\}$ متقاربة بالنّظيم، أو بإنتظام نحو F إذا كانت

$$\lim_{n\to\infty} \| F_n - F \| = 0$$

ونكتب

$$F_n \xrightarrow{\|\cdot\|} F$$

ب) – التقارب البسيط

نقول إنّ $\{F_n; n \in \mathbb{N}\}$ متقاربة ببساطة نحو F إذا كانت

$$\lim_{n\to\infty} F_n x = Fx \qquad ; \forall x \in X$$

ونكتب

$$F_n \xrightarrow{S} F$$

ج) - التقارب الضعيف

نقول إن $\{F_n; n \in \mathbb{N}\}$ تتقارب تقاربا ضعيفا نحو F إذا كانت:

$$x'(F_n x) \to x'(Fx) \quad , \forall x \in X, \forall x' \in X'$$

ونكتب:

$$F_n \xrightarrow{W} F$$

مبرهنة :

ليكن $F : D(F) \subseteq X \longrightarrow Y$ مؤثّرا مغلقا إذا كان $T \in \mathcal{L}(X,Y)$، فإنّ $F+T$ مغلق.

اثبات :

لتكن $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية من $D(F+T)$ (واضح أنّ $D(F+T) = D(F)$)
بحيث تحقّق لمّا n يؤول إلى ∞

$$\varphi_n \longrightarrow \varphi \text{ , } F\varphi_n + T\varphi_n \longrightarrow \psi$$

بما أنّ T محدود، لدينا

$$F\varphi_n \longrightarrow \psi - T\varphi$$

إذن

$$\varphi \in D(F), \psi - T\varphi = F\varphi$$

ومنه

$$\varphi \in D(F+T), \psi = (F+T)\varphi$$

وهذا يعني أنّ $F+T$ مغلق.

1-3 التكاملات :

1-3-1 تعريف التكامل :

التكامل هو العملية العكسية للتفاضل بحيث تستخدم التكاملات في الرياضيات لايجاد العديد من الكميات المفيدة مثل المساحات و الاحجام وغيرهابحيث هناك انواع من التكاملات نذكر منها المعادلات التكاملية و التكامل البسيط وتكامل ريمان وغيرها وسنتطرق الى بعض التعاريف

1-3-2 تكامل ريمان :

بعض المفاهيم والتعاريف

1) لتكن f دالة معرفة على المجال I، نقول أن الدالة F أصلية للدالة f إذا F قابلة للاشتقاق على I وكان

$$\forall x \in I \quad : F'(x) = f(x)$$

2) مجموعة كل الدوال الأصلية للدالة $f(x)$ على مجال I ، تسمى التكامل الغير محدد للدالة f على I ويكتب على الشكل : $\int f(x)dx$.

الرمز $\int$ يسمى التكامل والصيغة $\int f(x)dx$ عنصر التكامل و $f(x)$ تسمى الدالة المكاملة و x متغير التكامل.

3) (أهم خصائص التكامل الغير محدد)

1/ $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$.

2/ $\int f(x)dx = F(x) + c \quad , c \in \mathbb{R}$.

3/ $\int \lambda f(x)dx = \lambda \int f(x)dx \quad , \lambda \in \mathbb{R}$.

4/ $\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$.

تكامل الدوال التي على شكل سلم :

المجموعة $\{x_k\}_{k=0}^{k=n}$ مجموعة نقط القطعة $[a,b]$، بحيث: $a = x_0 \le x_1 \le \dots \le x_{n-1} \le x_n = b$ تسمى تجزئة القطعة $[a,b]$.

تعريف

نقول أن الدالة $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ على شكل سلم ، إذا وجدت تجزئة τ للقطعة $[a,b]$ بحيث f على المجالات $[x_{i-1},x_i]$ دالة ثابتة .

3-3-1 التكاملات الموسعة

تعريف

ليكن X جزء من $\mathbb{R}^n$ نقول عن متتالية $(X_p)_{p\in\mathbb{N}}$ من أجزاء X آنها إفناء لـ X إذا و فقط إذا وجد $p \in \mathbb{N}$ من أجل كل متراص $k \subset X$ تكون $K \subset X_p$

امثلة عن بعض التكاملات الموسعة 3-3-1

1) تكامل على مجموعة غير محدودة:

$X = [0,+\infty[\times [0,+\infty[$ يمكن إختيار: $K_p = \{(x,y) \in X; x^2 + y^2 \le p^2\}, p \in \mathbb{N}$

K_p عبارة عن كرات مغلقة (كرة إتحاد حافتها) هي أجزاء متراصة و إفناء لـ X و هي جوردان قيوسة

ليكن
$$f : [0,+\infty[\times [0,+\infty[\to \mathbb{R}$$
$$(x,y) \to e^{-(x^2+y^2)}$$

f قابل للمكاملة على $\forall p \in \mathbb{N}; K_p$ لأنه مستمر على متراص من أجل كل p

$J = \iint_{K_p} e^{-(x^2+y^2)} dxdy$ بإستعمال الإحداثيات القطبية

$$\begin{cases} x = r\cos\theta & r \ge 0 \\ y = r\sin\theta & \theta \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$$

$$U_p = \{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2; 0 \le r \le p \wedge 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}\}$$

$$\phi : (r,\theta) \to (x,y); K_p = \phi(U_p)$$

إذن

$$J = \iint_{K_p} e^{-(x^2+y^2)} dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big(\int_0^p e^{-r^2} r dr \Big) d\theta$$

(كما وضحنا سابقا في تغير المتغير $Jac\phi = J_{\phi(r,\theta)} = r$)

$$J_p = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\frac{-e^{-r^2}}{2}]_0^p d\theta = [\frac{1-e^{-p^2}}{2}] \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = -\frac{\pi}{4}\big(e^{-p^2-1}\big) \le \frac{\pi}{4}$$

لدينا $(J_p)_{p\in\mathbb{N}}$ محدودة وعليه $\int_X f$ موجود

$$\int_X f = \lim_{p\to\infty} \int_{K_p} f = \lim_{p\to\infty} J_p = \lim_{p\to\infty} -\frac{\pi}{4}\big(e^{-p^2-1}\big) = \frac{\pi}{4}$$

1-3-4 المعادلات الخطية التكاملية وتصنيفها

نعلم أن أي معادلة تكاملية [8] تعطى بالعلاقة التالية:

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} K(x,t)u(t)dt \qquad (1.3)$$

حيث $K(x,t)$ يسمى النواة التكاملية للعلاقة (1.3) ، $\alpha(x)$ و $\beta(x)$ هما حدود التكامل. يمكن للمرء أن يلاحظ بسهولة أن $u(x)$ تابع غير معروف يظهر بشكل لا يتجزأ. وتجدرالإشارة هنا إلى أن نواة $K(x,t)$ و التابع $f(x)$ في العلاقة (1.3) معلمين، و λ هو عدد ثابتة. الهدف من هذا هو تحديد التابع المجهول $u(x)$ الذي من خلاله يمكن حل العلاقة (1.3) وذالك عن طريق استخدام بعض تقنيات الحلول.

1-3-5 المعادلات التكاملية لفولتيرا

الشكل الأكثر تقليدية من المعادلات التكاملية الخطية لفولتيرا هو النموذج التالي

$$\phi(x)u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t)u(t)dt \qquad (2.3)$$

حيث تستند حدود التكامل على المتغير x والعدد a ، التابع غير المجهول $u(x)$ يبدو خطيا.
إذا كان التابع $\phi(x) = 1$ فإن المعادلة (2.3) تصبح ببساطة

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t)u(t)dt \qquad (3.3)$$

1-3-6 المعادلات التكاملية لفريدهو لم :

الشكل الأكثر استعمال للمعادلة التكاملية الخطية لفريدهولم تعطى بالشكل

$$\phi(x)u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)u(t)dt \qquad (5.3)$$

وحدود التكامل a و b ثابتة و التابع المجهول $u(x)$ يظهر بصيغة خطية . إذا كان التابع $\phi(x) = 1$ إذا العلاقة (5.3) تصبح بالشكل التالي

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)u(t)dt \qquad (6.3)$$

هذه المعادلة تسمى المعادلة التكاملية لفريدهولم من النوع الثاني ، من أجل $\phi(x) = 0$ تصبح العلاقة (6.3)

$$f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)u(t)dt = 0 \qquad (7.3)$$

والذي يعرف باسم معادلة فريدهولم من النوع الأول.

ملاحظة 8 $F(u(x)) = u^n(x), n \neq 1$ أو $sinu(x)$ ... الخ، ثم فولتيرا و المعادلة التكاملية لفريدهولم تصنف على أنها غير خطية. كما في الأمثلة التالية المعادلات غير خطية

$$
\begin{aligned}
u(x) = &\quad f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t)u^2(t)dt \\
u(x) = &\; f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t)sin(u(t))dt \\
u(x) = &\; f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t)ln(u(t))dt
\end{aligned}
$$

فيما بعد إذا عرفنا $f(x) = 0$ فولتيرا أوالمعادلة التكاملية لفريدهولم ، و نهاية هذه المعادلة تسمى معادلة تكاملية متجانسة، وخلافا لذالك تسمى بمعادلة تكاملية غير متجانسة.

الفصل الثاني

في هذا الفصل سنقدم عرض لاهم النقاط المتعلقة بالمعادلات التفاضلية التي تعتبر حجر الاساس في علوم البحث مركزين على المحاور التالية :

01 - المعادلات التفاضلية

02- جملة المعادلات التفاضلية

03 - الاستقرار

04 – معادلات ليابنوف

2-1 المعادلات التفاضلية :

2-1-1 تعريف :

هي علاقة بين المتغير التابع وليكن y والمتغير المستقل وليكن x تدخل فيها المشتقات أو التفاضلات ، وتسمى المعادلة التفاضلية عادية إذا كان المتغير التابع دالة في متغير مستقل واحد ، وبالتالي لا تحتوي إلا على مشتقات عادية

مثال 1 :

العلاقات التالية تمثل معادلات تفاضلية عادية .

$$(1)\quad \frac{dy}{dx}+y=3x^2$$

$$(2)\quad x\frac{d^3y}{dx^3}+(2\sin x)\frac{d^2y}{dx^2}\cdot\frac{dy}{dx}=(3-x^2)y$$

$$(3)\quad \frac{d^2y}{dx^2}+\frac{1}{x}\cdot\frac{dy}{dx}+y=0$$

$$(4)\quad (x-y)dx+(x+y)dy=0$$

2-1-2 رتبة المعادلة التفاضلية :

إذا كانت المشتقة النونية $y^{(n)}$ هي أعلى مشتقة تظهر بالمعادلة التفاضلية العادية ، قيل أن هذه المعادلة من **الرتبة** n (تتحدد رتبة المعادلة التفاضلية بأعلى مشتقة داخلة فيها) .

من المثال السابق 1

المعادلة التفاضلية (1) هي معادلة تفاضلية عادية من الرتبة الأولى .

المعادلة التفاضلية (2) هي معادلة تفاضلية عادية من الرتبة الثالثة .

المعادلة التفاضلية (3) هي معادلة تفاضلية عادية من الرتبة الثانية .

المعادلة التفاضلية (4) هي معادلة تفاضلية عادية من الرتبة الأولى .

2-1-3 درجة المعادلة التفاضلية :

هي الأس المرفوع إليها أعلى مشتقة تظهر بالمعادلة التفاضلية ، وقبل تحديد **درجة المعادلة** يجب وضعها على صورة قياسية وصحيحة من حيث المشتقات .

من المثال السابق 1 .

المعادلة (1) و (2) و (3) و (4) هي معادلات تفاضلية عادية من الدرجة الأولى .

بينما المعادلة :

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 + x\left(\frac{dy}{dx}\right) + x^2y^3 = e^x \sin x$$

هي معادلة تفاضلية عادية من الدرجة الثالثة .

ملاحظة (2-1) :

هناك بعض المعادلات التي لا يمكن تحديد درجتها إلا بعد وضعها على صورة خالية من الجذور

فمثلاً:-

$$\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} + 3\frac{d^2y}{dx^2} + xy = 0$$

بتربيع الطرفين :

$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \left(-3\frac{d^2y}{dx^2} - xy\right)^2$$

$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 9\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 + 6xy\frac{d^2y}{dx^2} + x^2y^2$$

$$9\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 + 6xy\frac{d^2y}{dx^2} + x^2y^2 - 1 - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0$$

وأصبحت هذه المعادلة معادلة تفاضلية عادية من الدرجة الثانية والرتبة الثانية .

مثلا : الحل العام للمعادلة التفاضلية $y''' - 5y'' + 6y = 0$ هو :

$$y = c_1 + c_2e^{2x} + c_3e^{3x}$$

حيث c_1, c_2, c_3 ثوابت إختيارية .

مثال (1- 2) :-

إذا كانت $T(x)=Ae^{-x^2+B}$ قد يبدو لأول وهلة أن هناك ثابتين A و B ولكن بإمعان النظر نرى أنه يمكن دمج الثابتين في ثابت جوهري واحد بالتالي :

$$T(x)=Ae^{-x^2+B}=Ae^{B}.e^{-x^2}=ce^{-x^2}$$

حيث :- $c=Ae^{B}$.

2-1-4 حلول المعادلات التفاضلية :

تسمى الدالة $y=y(x)$ **حلاً للمعادلة التفاضلية** $F(x,y(x),y'(x),\dots,y^{n}(x))=0$ إذا كانت :

(1) قابلة للإشتقاق n من المرات .

(2) تحقق المعادلة التفاضلية أي أن $F(x,y(x),y'(x),\dots,y^{n}(x))=0$.

مثال (1- 3) :-

أثبت أن $y(x)=c\sin x$ حلاً للمعادلة $y''+y=0$ حيث c ثابت إختياري

الحل :

$$\begin{aligned}y(x)&=c\sin x\\ y'(x)&=c\cos x\\ y''(x)&=-c\sin x\end{aligned}$$

وعلى ذلك نجد أن :

$$y''(x)+y=-c\sin x+c\sin x=0$$

تعريف : الحل العام

الحل العام لمعادلة تفاضلية من الرتبة n هو حل يحتوي على n من الثوابت الإختيارية، ويحقق المعادلة التفاضلية .

مثال (1- 4) :-

الحل العام للمعادلة التفاضلية $y''' - 5y'' + 6y = 0$ هو :

$$y = c_1 + c_2 e^{2x} + c_3 e^{3x}$$

حيث c_1, c_2, c_3 ثوابت إختيارية .

تعريف : الحل الخاص

هو أي حل يحقق المعادلة التفاضلية ولا يشمل على أي ثوابت إختيارية، وقد نحصل عليه بالتعويض عن الثوابت الإختيارية في الحل العام بقيم محددة .

مثال (1- 5) :-

الحلول الخاصة تكون على الصور :

$$y = e^{2x} + e^{3x}$$
$$y = 3 + 5e^{2x^2}$$
$$y = 5 - 2e^{3x}$$

تعريف : الحل الشاذ (المفرد)

إذا وُجِدَ أحد أو بعض الحلول للمعادلة التفاضلية لا يمكن إستنتاجها من الحل العام بإعطاء قيمة مناسبة للثوابت الإختيارية؛ فإن هذا الحل يسمى **بالحل الشاذ(المفرد)** ونادراً ما تقابلنا هذه الحلول **الشاذة(المفردة)** في المسائل الهندسية .

مثال(1- 6) : المعادلة $y = cx + \frac{c^2}{2}$ تمثل الحل العام للمعادلة التفاضلية $y = xy' + \frac{y'^2}{2}$ ، بينما المعادلة $y = -\frac{x^2}{2}$ تمثل **الحل الشاذ**

مثال(1- 6) :-

المعادلة $y = cx + \frac{c^2}{2}$ تمثل الحل العام للمعادلة التفاضلية $y = xy' + \frac{y'^2}{2}$ ، بينما المعادلة $y = -\frac{x^2}{2}$ تمثل **الحل الشاذ (المفرد)** لها .

تعريف : الحل الكامل

إذا تضمن حل عام للمعادلة التفاضلية كل الحلول لهذه المعادلة **فهو حل كامل** .

ملاحظات(1- 3) :

(1) قد يكون للمعادلة التفاضلية حل وحيد ،وقد يوجد لها حلول عديدة ، وقد لا يوجد لها حل على الإطلاق .

(2) من الممكن أن يكون الحل في الصورة الصريحة $y = f(x)$ ، ومن الممكن أن يكون الحل في الصورة الضمنية $f(x, y) = 0$ ، ومن الممكن أن يكون الحل في الصورة البارامترية $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$.

الشروط الإبتدائية والشروط الحدية :

في بعض مسائل المعادلات التفاضلية العادية تُعطى بعض الشروط التي يجب أن تتحقق بحل المعادلة التفاضلية العادية ، وهذه الشروط هي التي تمكننا من تحديد الثوابت الإختيارية التي تظهر في الحل العام نتيجةً لعمليات التكامل المستخدمة لإيجاد الحل العام .

وإذا كان الحل العام للمعادلة التفاضلية العادية من الرتبة الثانية (مثلاً) يحتوي على ثابتين إختياريين ،لذا يستلزم لتحديد الثابتين وجود شرطان إضافيان للمعادلة، وهذان الشرطان يأخذان صورتان مختلفتان هما :

(1) إذا أعُطي هذان الشرطان عند نفس النقطة x_0 مثل :-

$$y(x_0)=a \quad , \quad y'(x_0)=b$$

فإن تلك الشروط تعرف **بالشروط الإبتدائية** وتُسمى المعادلة التفاضلية بالإضافة إلى **الشروط الإبتدائية مسألة القيمة الإبتدائية**

(2) إذا أعُطي الشرطان عند نقطتين مختلتين $y(x_1)=y_1 , y(x_2)=y_2$ كانت الشروط **شروطاً حدية**، وسُميت المعادلة التفاضلية بالإضافة إلى **الشروط الحدية مسألة القيمة الحدية**

مثال(1- 7) :-

أوجد حل مسألة القيمة الإبتدائية $y''=x \;,\; y(0)=1 \;,\; y'(0)=-1$

الحل :

بإجراء التكامل مرتين نتحصل على : $y=\dfrac{1}{6}x^3+c_1x+c_2$

وهو الحل العام للمعادلة المُعطاة .

حيث : $y'=\dfrac{1}{2}x^2+c_1$

بالتعويض في الشروط الإبتدائية : $y'(0)=-1 \;\Rightarrow c_1=-1$

$$y(0)=1 \;\Rightarrow c_2=1$$

ويكون حل المسألة المُعطاة هو : $y=\dfrac{1}{6}x^3-x+1$

مثال (1- 8) :-

أوجد الحل الخاص للمعادلة التفاضلية $y'' = 6x + 2$ مع الشروط الحدية $y(2) = 8$ ، $y(0) = 2$

الحل :

بإجراء التكامل مرتين نتحصل على :

$$y = x^3 + x^2 + c_1 x + c_2$$

بالتعويض عن الشروط الحدية نتحصل على :

$$y(0) = 2 \quad \Rightarrow c_2 = 2$$

$$y(2) = 8 \quad \Rightarrow 8 = 8 + 4 + 2c_1 + 2 \Rightarrow c_1 = -3$$

ويكون الحل المطلوب هو :

$$y = x^3 + x^2 - 3x + 2$$

مثال :

الحل العام للمعادلة التفاضلية $y''' - 5y'' + 6y = 0$ هو :

$$y = c_1 + c_2 e^{2x} + c_3 e^{3x}$$

حيث c_1, c_2, c_3 ثوابت إختيارية .

2-2 - جملة المعادلات التفاضلية :

2-2-1 تعريف جمل المعادلات التفاضلية :

تعرف جملة المعادلات التفاضلية في شكلها العام، بأنها جملة معادلات من الشكل:

$$i=1,\ldots\ldots,k \quad ، \quad F_i\left(x, y_1, y_1', \ldots\ldots, y_1^{(m_1)}, \ldots\ldots\ldots\ldots y_n, y_n', \ldots\ldots, y_n^{(m_n)}\right)=0 \qquad (1)$$

حيث x المتغير المستقل،و $y_1,\ldots\ldots,y_n$ دوال مجهولة في x،و F_i ، $i=1,\ldots\ldots,k$ دوال معلومة في متغيراتها.

تسمى رتبة الجملة (1) العدد α حيث : $\alpha=\max(m_1, m_2, \ldots\ldots, m_n)$

إذا كانت $m_1=m_2=\ldots\ldots=m_n=1$ فإن الجملة (1) تكتب من الشكل:

$$i=1,\ldots\ldots,k, \qquad F_i(x, y_1, \ldots\ldots, y_n, y_1', \ldots\ldots, y_n')=0 \qquad (2)$$

الجملة (2) تسمى جملة معادلات تفاضلية من الرتبة الأولى. وتكتب إختصاراً كالتالي :

$$F_i(x, y, y')=0 \quad , \qquad i=1,\ldots\ldots,k$$

حيث y هي دالة شعاعية في المتغير x معرفة كالتالي :

$$y(x)=(y_1(x), y_2(x), \ldots\ldots, y_n(x))$$

ومنه

$$y'(x)=(y_1'(x), y_2'(x), \ldots\ldots, y_n'(x))$$

قضية 1: كل جملة من الشكل (1)، تحول إلى جملة من الشكل (2).

البرهان : لتكن الجملة

$$i=1,\ldots\ldots,k, \qquad F_i\left(x, y_1, y'_1, \ldots\ldots, y_1^{(m_1)}, \ldots\ldots\ldots, y_n, y'_n, \ldots\ldots, y_n^{(m_n)}\right)=0$$

نضع $n^*=m_1+\ldots\ldots+m_n$

نستعمل التحويل التالي :

$$(y_1,\dots\dots,y_n)\to(z_1,\dots\dots,z_n)$$

حيث :

$$\begin{cases} z_1 = y_1,\ z_2 = y_1',\dots\dots\dots,z_{m_1} = y_1^{(m_1-1)} \\ z_{m_1+1} = y_2,\ z_{m_1+2} = y_2',\dots\dots\dots,z_{m_1+m_2} = y_2^{(m_2-1)} \\ \vdots \\ \vdots \\ z_{n^*-m_n+1} = y_n,\ z_{n^*-m_n+2} = y_n',\dots\dots\dots,z_{n^*} = y_n^{(m_n-1)} \end{cases} \qquad (3)$$

بالتعويض في (1) نحصل على:

$$i=1,\dots\dots,k \quad ، \quad F_i\left(x,z_1,\dots\dots,z_{m_1},z'_{m_1},\dots\dots\dots,z'_{n^*-m_n+1},\dots\dots,z_{n^*},z'_{n^*}\right)=0 \qquad (4)$$

من الصيغة (3) نحصل على n^*-n معادلة من الرتبة الأولى وهي :

$$\begin{cases} z_1' = z_2 \quad , \quad z_2' = z_3,\dots\dots\dots\dots,z'_{m_1-1} = z_{m_1} \\ \vdots \\ \vdots \\ z'_{n^*-m_n+1} = z_{n^*-m_n+2},\dots\dots\dots\dots\dots\dots,z'_{n^*-1} = z_n \end{cases} \qquad (5)$$

من (4) و (5) نحصل على جملة n^*-n+k معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى، أي جملة من الشكل (2) .

نتيجة1: إذا كان في الجملة (2) عدد المعادلات يساوي عدد الدوال المجهولة $(k=n)$، والمعدلات محلولة بالنسبة للمشتق

فإن (2) تأخذ الشكل :

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, \ldots\ldots, y_n) \\ y_2' = f_2(x, y_1, \ldots\ldots, y_n) \\ \vdots \\ y_n' = f_n(x, y_1, \ldots\ldots, y_n) \end{cases} \qquad (6)$$

أو في الشكل الشعاعي : $y' = f(x, y)$

حيث y دالة شعاعية في المتغير x معرفة كالتالي : $y(x) = (y_1(x), \ldots\ldots, y_n(x))$

و f دالة شعاعية معرفة على فراغ شعاعي بعده $(n+1)$، كالتالي : $f = (f_1, \ldots\ldots, f_n)$

الجملة (6) تسمى جملة معادلات تفاضلية من الرتبة الأولى في الشكل العادي.

مثال1: لتكن جملة المعادلات التفاضلية من الرتبة الثانية

$$y_1'' = 2y_1 - 3y_2$$
$$y_2'' = y_1 - 2y_2$$

نضع $y_3 = y_1'$, $y_4 = y_2'$. بالتعويض في الجملة نجد:

$$\begin{cases} y_1' = y_3 \\ y_2' = y_4 \\ y_3' = 2y_1 - 3y_2 \\ y_4' = y_1 - 2y_2 \end{cases}$$

وهي جملة معادلات تفاضلية من الرتبة الأولى.

2-2-2 حل جملة المعادلات التفاضلية الناظمية

لتكن لدينا جملة المعادلات التفاضلية العادية النظامية التي تحوي n معادلة:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt}&=f_1(t,x_1,x_2,\dots,x_n)\\ \frac{dx_2}{dt}&=f_2(t,x_1,x_2,\dots,x_n)\\ \cdots\quad&\cdots\quad\cdots\\ \frac{dx_n}{dt}&=f_n(t,x_1,x_2,\dots,x_n)\end{aligned}\right\}\qquad(6.2)$$

لتعيين حل هذه الجملة نشتق إحدى معادلاتها ولتكن الأولى مثلاً $(n-1)$ مرة متتالية وفي كل مرة نعوض عن $\frac{dx_i}{dt}$ من أجل $(i=2,3,\dots,n)$ بعبارتها من باقي معادلات الجملة (4.3) فنحصل على الجملة المكافئة التالية:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt}&=g_1(t,x_1,x_2,\dots,x_n)\\ \frac{d^2x_1}{dt^2}&=g_2(t,x_1,x_2,\dots,x_n)\\ \cdots\quad&\cdots\quad\cdots\quad\cdots\\ \frac{d^{(n-1)}x_1}{dt^{n-1}}&=g_{n-1}(t,x_1,x_2,\dots,x_n)\\ \frac{d^{(n)}x_1}{dt^{n}}&=g_n(t,x_1,x_2,\dots,x_n)\end{aligned}\right\}\qquad(6.4)$$

بتعيين عبارة كل من $x_2,x_3,\dots,x_n$ من الـ$(n-1)$ معادلة الأولى في الجملة الناتجة (6.4) وتعويضها في المعادلة الأخيرة من هذه الجملة نحصل على معادلة تفاضلية من المرتبة n بالنسبة للتابع $x_1(t)$ ولتكن:

$$\frac{d^n x_1}{dt^n} = F\left(t, x_1, \frac{dx_1}{dt}, ..., \frac{d^{(n-1)} x_1}{dt^{n-1}}\right)$$

وبحل هذه المعادلة نحصل على عبارة $x_1(t)$ ومن ثم نحصل على باقي التوابع المجهولة في الجملة $x_2(t), x_3(t), ..., x_n(t)$.

مثال 1: عيّن، الحل العام لجملة المعادلتين التفاضليتين:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ax + y \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + ay \end{cases}$$

الحل: نشتق المعادلة الأولى مرة واحدة بالنسبة لـ t فنحصل على:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = a\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt}$$

بالتعويض عن $\frac{dy}{dt}$ من المعادلة الثانية تأخذ المعادلة الجديدة الشكل:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = a\frac{dx}{dt} - x + ay$$

أي أننا حصلنا على الجملة المكافئة التالية:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ax + y \\ \dfrac{d^2 x}{dt^2} = a\dfrac{dx}{dt} - x + ay \end{cases}$$

نعيّن عبارة y من المعادلة الأولى حيث أن:

$$y = \frac{dx}{dt} - ax$$

ونعوض في المعادلة الثانية فنحصل على المعادلة التفاضلية التالية:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} - 2a\frac{dx}{dt} + (1 + a^2)x = 0$$

الحل العام لهذه المعادلة هو:

$$x(t)=e^{at}(c_1\cos t+c_2\sin t)$$

بتعويض هذا الحل في عبارة y نحصل على:

$$y(t)=\frac{dx}{dt}-ax=e^{at}(-c_1\sin t+c_2\cos t)$$

لاحظ وجود ثابتين كيفيين في حل الجملة.

3-2-2 حلول جملة المعادلات التفاضلية الخطية ذات المعاملات الثابتة :

الشكل العام لجملة المعادلات التفاضلية الخطية ذات الأمثال الثابتة هو:

$$\left.\begin{array}{l}
a_{11}\dfrac{d^{k_1}y_1}{dx^{k_1}}+\cdots+a_{1n}\dfrac{d^{k_n}y_n}{dx^{k_n}}+b_{11}y_1+\cdots+b_{1n}y_n=h_1(x)\\
a_{21}\dfrac{d^{m_1}y_1}{dx^{m_1}}+\cdots+a_{2n}\dfrac{d^{m_n}y_n}{dx^{m_n}}+b_{21}y_1+\cdots+b_{2n}y_n=h_2(x)\\
\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\\
a_{n1}\dfrac{d^{s_1}y_1}{dx^{s_1}}+\cdots+a_{nn}\dfrac{d^{s_n}y_n}{dx^{s_n}}+b_{n1}y_1+\cdots+b_{nn}y_n=h_n(x)
\end{array}\right\}\quad (6.6$$

حيث أن $a_{11},a_{12},\ldots a_{nn},\ldots,b_{nn}$ أعداد ثابتة (هل هذه الجملة نظامية.

تحل جمل المعادلات التفاضلية الخطية ذات الأمثال الثابتة بأكثر من طريقة.

بما أن دراسة جملة مؤلفة من n معادلة هي تعميم لدراسة جملة مؤلفة من معادلتين فإننا نقصـــر دراستنا على جملة مؤلفة من معادلتين ونترك التعميم للقارئ.

- طريقة الحذف :

لتكن لدينا جملة المعادلات التفاضلية الخطية ذات الأمثال الثابتة التالية:

$$\left.\begin{array}{l}
a_1\dfrac{d^{n_1}x}{dt^{n_1}}+b_1\dfrac{d^{m_1}y}{dt^{m_1}}+c_1x+d_1y=h_1(t)\\
a_2\dfrac{d^{n_2}x}{dt^{n_2}}+b_2\dfrac{d^{m_2}y}{dt^{m_2}}+c_2x+d_2y=h_2(t)
\end{array}\right\}\quad (6.7$$

حيث أن التابعين المجهولين هما $x(t)$ و $y(t)$ والمتحول المستقل هو t. إذا وضعنا $D \equiv \frac{d}{dt}$ في الجملة نحصل على جملة من الشكل:

$$\left.\begin{aligned} f_1(D)x + g_1(D)y = h_1(t) \\ f_2(D)x + g_2(D)y = h_2(t) \end{aligned}\right\} \quad \textbf{(6.8)}$$

وبالاعتماد على طريقة الحذف نحصل على معادلة تفاضلية بمجهول واحد. نحل المعادلة التفاضلية الناتجة ثم نستفيد من حلها في تعيين التابع المجهول الآخر للجملة علماً أن عدد الثوابت الاختيارية في الحل العام يساوي لدرجة كثيرة الحدود الناتجة عن محدد مصفوفة الأمثال التالي:

$$F(D) = \begin{vmatrix} f_1(D) & g_1(D) \\ f_2(D) & g_2(D) \end{vmatrix}$$

وإذا نتج عدد من الثوابت أكثر من ذلك فإنه يوجد ارتباط بين بعض الثوابت أو كلها. يتعيِّن الارتباط بين الثوابت بتعويض الحل العام في بعض معادلات الجملة أو كلها.

مثال (**1-3-6**): حل الجملة التالية:

$$\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} - x = 2t + 1$$
$$2\frac{dx}{dt} + 2\frac{dy}{dt} + x = t$$

الحل: نكتب الجملة بدلالة المؤثر التفاضلي، $D \equiv \frac{d}{dt}$ فنحصل على:

$$(D-1)x + Dy = 2t + 1$$
$$(2D+1)x + 2Dy = t$$

بضرب المعادلة الأولى بـــ (-2) وجمع المعادلة الناتجة مع المعادلة الثانية نحصل على المعادلة:

$$-2(D-1)x + (2D+1)x = -3t - 2$$

التي ينتج عنها:

$$3x = -3t - 2 \Rightarrow x = -t - \frac{2}{3}$$

نعوض في المعادلة الثانية من الجملة المعطاة فنحصل على:

$$2(-1)+2\frac{dy}{dt}-t-\frac{2}{3}=t \Rightarrow 2\frac{dy}{dt}=2t+\frac{8}{3} \Rightarrow \frac{dy}{dt}=t+\frac{4}{3} \Rightarrow y=\frac{1}{2}t^2+\frac{4}{3}t+c$$

لا حظ أن حل الجملة يحوي ثابتاً كيفياً واحداً وهو درجة $D \equiv \frac{d}{dt}$ نفسه

3-2 الاستقرار :

1-3-2 تعريفات الاستقرار ومفاهيمه :

ليكن لدينا المعادلة التفاضلية من الرتبة الاولي

$$\frac{dx}{dt} = f(t\,,x)\_\_\_\_\_\_(4-1)$$

حيث f دالة متصلة لكل $x \in D$ ، $t \in (a\ ,\infty)$ ولها مشتقة جزئية $\frac{\partial f}{\partial x}$ متصله

ليكن $x = Q\,(t)$ حلا للمعادلة (4-1) الذي يحقق $x(t_0) = Q(t_0)$ حيث

$t_0 > a$ ليكن $x = x(t)$ حلا ايضا لنفس المعادلة و الذي يحقق

$$x\,(t_0) = x\,(t_0)$$

وافترضنا ان الحلين $Q(t)$ و $x(t)$ معرفين لجميع قيم $t \geq t_0$ اي أنه يمكن

امتدادهما بدون حدود الى اليمين.

تعريف :

يسمي الحل $x = Q(t)$ للمعادلة (4-1) بانه مستقر في مفهوم ليبانوف عندما

اذا كان $t \to \infty$ لاي$0 <$ يوجد$\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ بحيث ان لاي حل

$x = x\ (t)$ للمعادلة يكون.

$$|x(t_0) - Q(t_0)| < \delta \_\_\_\_\_\_\_\_ (4-2)$$

$$\to |x(t\ \ ) - Q(t\ \ )| < \varepsilon \_\_\_\_\_\_\_\_ (4-3)$$

ولجميع $t \ \geq t_0$ يمكن دائما أن نفترض أن $\delta \ \leq \varepsilon$.

وهذا يعني أن جميع الحلول التي تكون قيمها الابتدائية قريبة من القيمة الابتدائية للحل $x = Q(t)$ تبقي قريبة ايضا لجميع $t \ \geq t_0$.

تعريف :

يقال أن الحل $x = \ Q(t)$ للمعادلة (1) مستقر تقاربياً إذا كان

i- تقاربياً

ii-يوجد$\delta_1 > 0$ بحيث أن أي حل $x = \ x(t)$ للمعادلة (1) يحقق الشرط

$$|x(t_0) - Q(t_0)| < \delta_1.$$

$$\lim_{t\to\infty}|x(t) - \ Q(t)| = 0$$

وهذا يعني أن جميع الحلول التي شروطها الابتدائية قريبة للحل المستقر تقاربياً $x = \ Q(t)$ لا تبقي فقط بالقرب منه عندما $t \geq t_0$ ولكن تقترب منه بدون حدود عندما $t \to \infty$

مثال :

ادرس استقرار الحل $x \equiv 0$ للمعادلة

$$\frac{dx}{dt} = -a^2 x \_\_\_\_(4-4)$$

الحل:

حل المعادلة (4-4) الذي تحقق الشرط $x(t_0) = x_0$ هو

$$x_0 = x\, e^{-a^2(t-t_0)}$$

ويأخذ ε > 0 نوجد الفرق بين الحل $x(t)$, $Q(t) = 0$

$$x(t) - Q(t) = x_0 e^{-a^2(t-t_0)} - 0 = (x_0 - 0)e^{-a^2(t-t_0)} \_\_\_\_(4-5)$$

وحيث ان $e^{-a^2(t-t_0)} \leq 1$ لجميع $t \geq t_0$ فانه يتضح من (4-5) وجود

$\delta = \varepsilon$، $\delta > 0$ ، بحيث أن $|x - 0| < \delta = \varepsilon$ فيكون لدينا

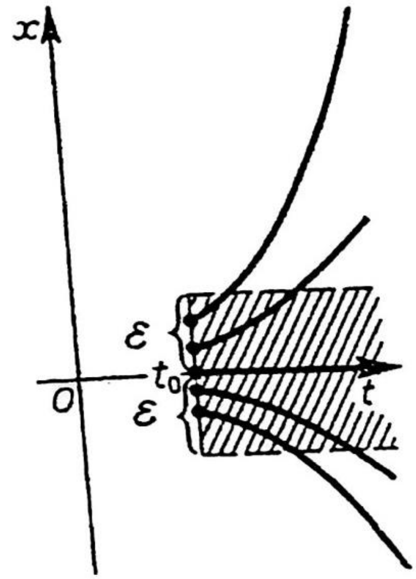
$$|x(t) - Q(t)| = |x_0 - 0|e^{-a^2\,(t-t_0)} < \varepsilon, \forall t \geq t_0$$

ومن التعريف هذا يؤدي الى ان الحل $Q(t) = 0$ للمعادلة (4-4) يكون مستقراً

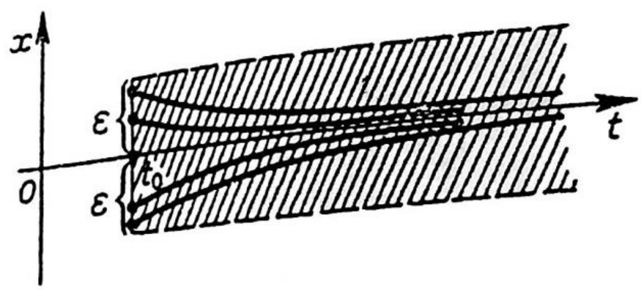
وايضاً حيث ان

$$\lim_{t\to\infty}|x(t) - Q(t)| = \lim_{t\to\infty} |x_0|e^{-a^2(t-t_0)} = 0$$

فإن الحل $Q(t) = 0$ يكون مستقراً تقاربياً انظر الشكل التالي:



شكل (2 – ب)



شكل (2- أ)

2-3-2 الانظمة الخطية وغير الخطية و الاسقرار :

1-2-3-2 الانظمة الخطية والاستقرار :

بالنسبة للأنظمة الخطية أو المعادلات التفاضلية الخطية يجب على القيمة الذاتية ان تكون سالبة أو بالاحرى إذا سلمنا بأن القيمة الذاتية هي عدد مركب فانه يجب ان يكون جزئه الحقيقي سالباً. اذا كان الجزء الحقيقي لهذا فإن النظام يسمى شبه مستقر اي انه لا يعود الى حالته السابقة، إذا قمنا بتغييرها تغيراً طفيفاً بل يبقى في

الحالة التي وضعناه فيها، اما النظام المستقر فيعود الى حالته الأولى إذا ابعدناه عنها إبعاداً طفيفاً، فالنظام غير المستقر يبتعد اكثر فأكثر من حالته الأولية إذا ابعدناه عنها.

2-3-2-2 الانظمة الغير خطية والاستقرار :

بالنسبة للأنظمة غير الخطية من النوع

$$x^{\cdot} = f(x^t , u)$$

حيث f دالة خطية و x, u متجهان يصعب حساب القيمة الذاتية أو ان مفهوم القيمة الذاتية غير متعارف عليه في هذه الأنظمة. في هذه الحالة تكون احدى الطرق التي يمكن من خلالها معرفة إن كان النظام ما مستقر ام لا هو الاستعانة بمبرهنة ليبانوف وقبل تبيين طريقة لبابونوف فإنه يجدر بالذكر انه يمكن إخطاط خاصيات النظام أو المعادلة في نقطة معينة u_1, x_1,حساب القيمة الذاتية لهذا النظام الخطي فيها وعلى اساس القيمة الذاتية المتحصل عليها نقول ان النظام مستقر ام لا

2-3-3 انواع الاستقرار :

- الاستقرار المحلي :

الاستقرار المحلي هوعندما تكون خاصية الاستقرار مرتبطة مدي أو مجال رياضى معين تكون خارجه منتقيه.

- الاستقرار الشامل :

الإستقرار الشامل هو ان تكون خاصية الاستقرار غير مرتبطة بمجال رياضي معين.

- شبه الاستقرار :

هي الحالة التي تعني ان نظاماً ما لا يعود إلى نقطة إنطلاقة إذا ابعدته منها بل بطل في النقطة التي دفعته إليها. يمكن تبسيطاً اعتبار هذه الحالة مستقرة لكن في الحقيقة هذه الحالة يمكن ان تكون مستقرة أو غير مستقرة.

4-2 طريقة ليبانوف لاستقرار الانظمة :

1-4-2 تعريف : تستخدم طريقة ليبانوف للمعادلات التفاضلية الذاتية وللمعادلات التفاضلية غير الذاتية وغير الخطية

وكذلك إمكانية ايجادها. وتستخدم طريقة ليبانوف لدراسة استقرار حلول المعادلات التفاضلية

لدينا في الفيزياء ازن نقطة التوازن هي نقطة الاستقرار ومن هنا يمكننا ان نفترض هذه المنظومة

تصبح هذه المعادلة منظومة معادلاتية بهذا الشكل :

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(x,y) \\ \dfrac{dy}{dt} = G(x,y) \end{cases} \qquad \text{——— . } *$$

ومن هنا تكون لدينا الفرضيات التي تنص مايلي

المعادلة $C= [x(t), y(t)]$ هي إحدى المسارات للمنظومة (*) والدالة $E(x,y)$ وتفاضلاتها الجزئية في هذا المسير متصلة ، بما أن x و y توابع المتغير

فيها t كذلك E إذن يمكن كتابتها بهذا الشكل E(t) وتغيراتها بالنسبة إلى t هي :

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\partial E}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial y}\frac{\partial y}{dt}$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\partial E}{\partial t} f + \frac{\partial E}{\partial y}\ G$$

اذن هذه الصيغة الاساسية التي تعتمد عليها طريقة ليبانوف

ونذكر من اهم الطرق التي تعتمد عليها طريقة ليبانوف : هي في حالة وجود الدالة E(x, y) للمنظومة (*) في هذه الحالة النقطة الحرجة (0.0)

2-4-2 شروط تطبيق طريقة ليبانوف:

ـ يسمي الحل $x = Q(t)$ للمعادلة (4-1) بانه مستقر في مفهوم ليبانوف عندما $t \to \infty$ اذا كان لاي$0 <$ يوجد$\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ بحيث ان لاي حل $x = x\ (t)$ للمعادلة يكون.

$$|x(t_0) - Q(t_0)| < \delta \_\_\_\_\_\_\_\_(4-2)$$

$$\to |x(t\ \ ) - Q(t\ \ )| < \varepsilon \_\_\_\_\_\_\_(4-3)$$

يقال أن الحل $x = Q(t)$ للمعادلة (1) مستقر تقاربياً إذا كان

i- تقاربياً

ii-يوجد$\delta_1 > 0$ بحيث أن أي حل $x = x(t)$ للمعادلة (1) يحقق الشرط

$|x(t_0) - Q(t_0)| < \delta_1.$

$\lim_{t\to\infty}|x(t) - Q(t)| = 0$

وهذا يعني أن جميع الحلول التي شروطها الابتدائية قريبة للحل المستقر تقاريياً $x = Q(t)$ لا تبقى فقط بالقرب منه عندما $t \geq t_0$ ولكن تقترب منه بدون حدود عندما $t \to \infty$

مثال :

استخدم تعريف الاستقرار في مفهوم ليبانوف لاثبات أن حل النظام

$$\frac{dx}{dt} = y \quad , \quad \frac{dy}{dt} = -x \quad \_\_\_\_\_\_\_\_ \quad (4-6)$$

تحت الشروط الابتدائية

$$x(0) = 0 \quad , y(0) = 0 \quad \_\_\_\_\_\_\_\_ \quad (4-7)$$

يكون مستقراً:

الحل :

حل النظام (4-6) والتي يحقق الشروط (4-7) هو $x(t) \equiv 0$, $y(t) = 0$

وحل للنظام الذي يحقق الشرط $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$ يكون على الصورة

$$x(t) = x_0 \, cost + y_0 \sin t \quad , y(t) = -x_0 \, sint + y_0 \, cost$$

ويأخذ $\varepsilon > 0$ نثبت وجود $\delta(\varepsilon) > 0$ بحيث ان

$$|x_0 - 0| < \delta \quad , |y_0 - 0| < \delta$$

يكون لدينا

$$|x(t) - 0| = |x_0 cost + y\ sint| < \varepsilon$$
$$|y(t) - 0| = |-x_0 sint + y_0\ cost| < \varepsilon$$

لجميع $t \geq 0$ وهذا يعني من التعريف ان الحل $x \equiv 0\ ,\ y \equiv 0$ للنظام (*) يكون مستقراً .

الفصل الثالث

تطرقنا في هذا الفصل الى اهم الموضوعات الحساسة المتعلقة بالنمذجة الرياضية كائـدات لحل بعض المشاكل وبالأخص عندما يتعلق الامر بدراسة الحـالات الاجتماعية الصحية واعتمدنا على دراسة احد نماذجها :

نـمـــوذج S.I.R للأمراض المعدية

3-1 لمحة تاريخية عن النموذج SIR:

كانت أولى المحاولات لتصميم النماذج الرياضية للأوبئة على يد كلٍّ من Kermack و McKendrick عام 1927.

تستند أغلب النماذج الرياضية للأوبئة إلى المعادلات التفاضلية العادية، وهي نظم قطعية (حتمية)، لكن من الممكن إدخال عنصر الاحتمالية إلى تلك النماذج وجعلها نظمًا احتمالية، وهي أكثر واقعية من النظم القطعية، ولكنها أشد تعقيدًا وأقل مرونة في التحليل والتنبؤ.

تُستعمل نماذج الأوبئة في التنبؤ بكيفية انتشار الوباء، مثل عدد الأشخاص المصابين ومدة الوباء. وهي تتيح فهم الحالات المختلفة التي تؤثر في الوباء والإجراءات الأشد فعالية للحد من انتشاره.

كما أدخلت جائحة كوفيد-19 تغييرات جوهرية على الطريقة التي يعيش بها الناس حياتهم حاليًا. ولتحديد أفضل السبل اللازمة للحد من تأثيرات الجائحة والبدء في إعادة فتح المجتمعات، استخدمت الحكومات نماذج رياضية تتنبأ بانتشار الأمراض المعدية. وفي هذا المقال، نطرح نوعًا شائعًا من النماذج الرياضية SIRالخاصة بانتشار المرض. حيث نناقش كيف يمكن لنتائج تحليل النماذج الرياضية التأثير على سياسات الحكومات والسلوك البشري

3-2 نمذجة الامراض المعدية وكيفية الانتشار:

تتمثل إحدى طرق النمذجة الرياضية لكيفية انتشار مرض ما في استخدام نموذج مجزأ، مثل نموذج SIR انظر الشكل 1يقوم العلماء في النموذج المجزأ(النموذج الاكثر شيوعا في النماذج الرياضية ويستخدمه العلماء)

بتقسيم السكان إلى فئات يُطلق عليها "أقسام" وفحص كيف يغير الناس فئاتهم بمرور الوقت. تستمد نماذج SIR تسميتها من أقسامها، وهي

كالآتي: قسم الأشخاص ''المعرضين للإصابة(S) ''، وقسم ''المصابين(I) ''، وقسم ''المتعافين .(R) ''
يتألف القسم S من الأشخاص
المعرضين للإصابة بالعدوى، مما يعني أنهم قد يُصابوا بالمرض الآخذ في الانتشار.
ويتألف القسم I من الأشخاص المصابين والذين ينقلون بدورهم العدوى إلى الآخرين.
يتكون القسم R من الأشخاص الذين تعافوا من المرض، على الرغم من أن القسم R قد يشير
أيضًا إلى ''المستبعدين من الإصابة'' تمثيلًا للأشخاص الذين تُوفوا بسبب المرض ونبين في(**الشكل 01**) بعض
مراحل انتشار المرض وطريقة التعافي

الشكل 01

تتمثل إحدى طرق النمذجة الرياضية لكيفية انتشار مرض معدي في استخدام نموذج مجزأ.

في أحد أنواع النماذج الرياضية المُسمى نموذج ، SIRتُقسم أي مجموعة سكانية إلى عدة أقسام:

الأشخاص المعرضون للإصابة (S) ، والأشخاص المصابون (I) ، والأشخاص المتعافون (R) .

عند إعداد نموذج رياضي لانتشار مرض ما، من المستحسن التركيز على العوامل الأكثر أهمية لانتشار هذا المرض، وعلى التساؤلات العلمية المعينة ذات الأهمية، بحيث يكون النموذج بسيطًا ومفيدًا قدر الإمكان. تختلف العوامل باختلاف الأمراض. وتشمل العوامل ذات الصلة معدل تكرار المخالطات الشخصية ومدتها؛ مثل المصافحة أو مشاهدة فيلم معًا أو ممارسة الرياضة تعطي هذه المخالطات فرصة للمرض كي ينتشر. يتطلب انتشار بعض أنواع الأمراض مخالطة لصيقة للغاية، ولكن البعض الآخر قد ينتشر بطرق بسيطة؛ عن طريق لمس السطح نفسه الذي لمسه المصاب أو مجرد التواجد في مكان قريب على سبيل المثال.

مدى سرعة انتشار مرض ما:

لنوضح نمذجة انتشار مرض معد باستخدام نموذجSIR ، قبل أن نستخدم نموذجSIR لدراسة انتشار مرض ما في مجموعة سكانية، يجب علينا معرفة (أو تقدير) بعضالعوامل المهمة:

1. مقدار الوقت (T)الذي يكون خلاله الشخص ناقلًا للعدوى. وهذا يخبرنا بالمدة التي يمكن خلالها للأشخاص المصابين نقل العدوى إلى أشخاص آخرين.
2. معدل المخالطة الشخصية في مجموعة سكانية. وهذا يشير إلى عدد المرات التي يكون

فيها الناس على مقربة من بعضهم بعضًا بدرجة تكفي لانتشار المرض من شخص لآخر.

3. احتمال أن تؤدي المخالطة الشخصية إلى انتقال عدوى.

تسمح تلك العوامل الثلاثة للعلماء بتقدير كمية يطلق عليها عدد التكاثر الأساسي، والذي يُشار له بالرمز R_0 ،وينطق.("R naught") تشير قيمة R_0 إلى متوسط عدد الأشخاص الذين ينقل إليهم شخص مصاب واحد مرض ما ضمن مجموعة من الأشخاص المعرضين للإصابة به. افترض أن مرضًا ما ينتشر في مدينة (البياضة). قبل بدء المرض في الانتشار، يعتبر كل فرد في (البياضة) ضمن قسم "المعرضين للإصابة."

لآن افتراض أن الشخص الحامل للمرض يسافر إلى (البياضة)ويبدأ في نقل العدوى للآخرين. إذا كانت قيمة R_0 تساوي 2 وكانت الفترة التي يكون خلالها الشخص ناقلًا للعدوى تساوي يومًا واحدًا (ويتعافى بعد ذلك)، فسينقل هذا الشخص المرض إلى شخصين آخرين، في المتوسط، قبل أن يتعافى. وبالتالي سوف ينقل هذان الشخصان المرض إلى شخصين آخرين في المتوسط قبل التعافي، وهكذا دواليك. في هذا الطرح المبسط، يمكننا تقدير عدد الأشخاص الذين سوف يصبحون مصابين خلال فترة معينة.

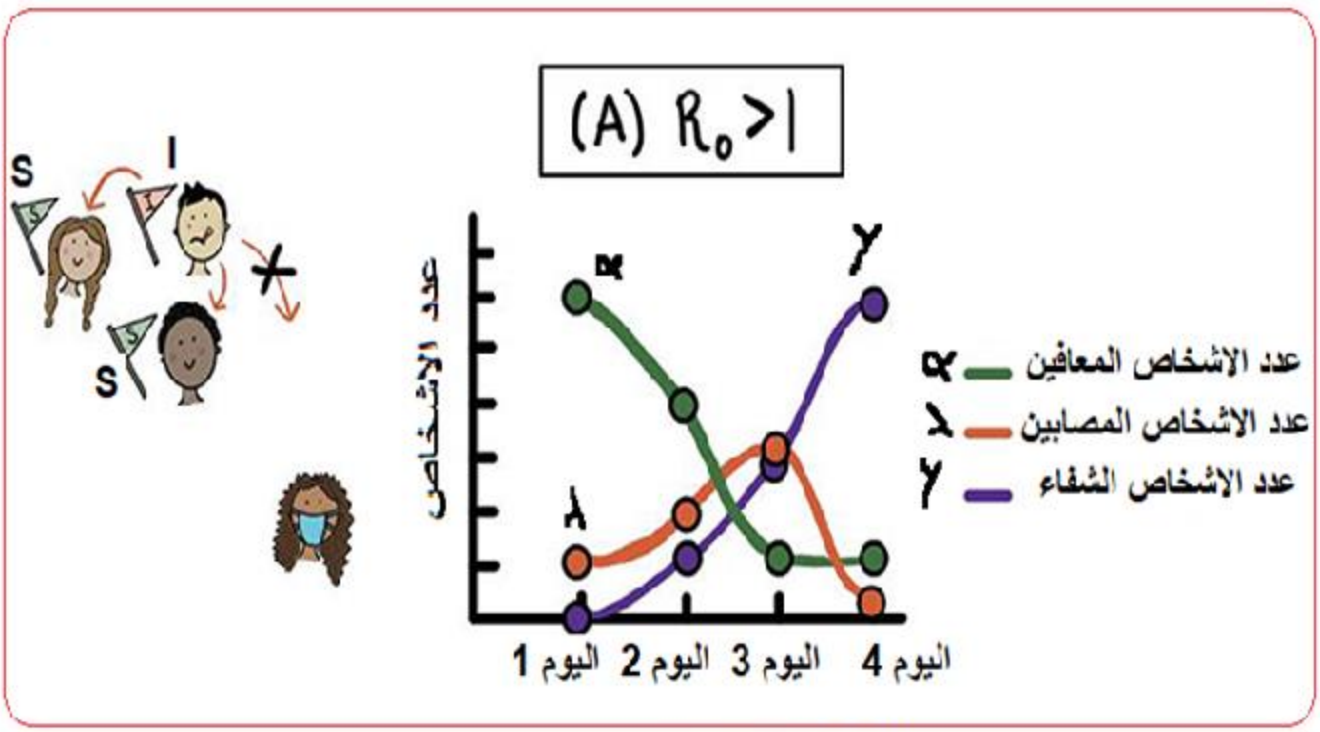
إذا كانت قيمة R_0 أكبر من 1 (والتي نعبر عنها رياضيًا بـــ("$R_0 > 1$") ، فسيزداد عدد الأشخاص المصابين باطراد. لمعرفة كيفية عمل النمو الأسي (الموجود يضرب في 3 ثم

، نستخدم المثال أعلاه $R_0 = 2$ وفترة نقل عدوى مدتها يوم واحد. افترض أن أول شخص مصاب بالعدوى ينقل العدوى إلى شخصين في اليوم الذي يسافر فيه إلى (البياضة)
وينقل كل شخص من هذين الشخصين العدوى إلى شخصين آخرين في اليوم التالي.
وتذكر أن الشخص المصاب سيتعافى في غضون يوم واحد في هذا المثال.
وفي اليوم الذي يلي ذلك، يمكن أن يصيب كل شخص من هؤلاء الأشخاص الأربعة المصابين شخصين آخرين معرضين للإصابة. وفي غضون ثلاثة أيام، نتوقع أن يكون لدينا حوالي $2 \times 2 \times 2 = 8$ أشخاص مصابين. إذا استمر هذا النمط ولا يزال هناك العديد من الأشخاص المعرضين للإصابة، فإننا نضرب العدد في 2 مرة أخرى، لذلك نتوقع أن يكون لدينا حوالي 16 شخصًا مصابًا حديثًا في اليوم التالي تذكر أن حالات العدوى تلك تنتقل من شخص مصاب واحد في البداية لكن إذا بدء نا بـــ 100 مصاب بدلًا من ذلك، فسيمكنك تخيل مدى سوء الوضع وتفاقمه بسرعة كبيرة.

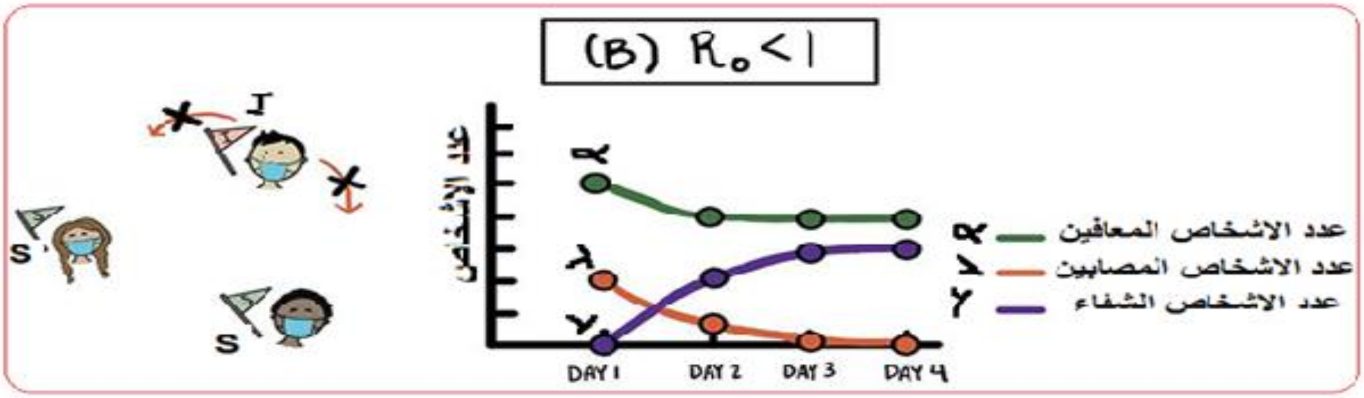
يستمر عدد الأشخاص الذين يصابون بمرض ما في الازدياد حتى يتجاوز معدل تعافي المصابين معدل إصابة الأشخاص المعرضين للعدوى. إذا نقل كل شخص مصاب العدوى إلى أقل من شخص واحد آخر في اليوم في المتوسط، فنتوقع حينئذ وجود عدد أقل من حالات الإصابة كل يوم وسوف يختفي المرض في نهاية المطاف. وبصرف النظر عن حدوث ذلك من عدمه، يعتمد الوقت الذي يستغرقه ذلك على حجم المجموعة السكانية ومقدار المخالطات الشخصية للأشخاص داخل المجموعة السكانية[2].

في الشكل رقم 2، نقارن ما حدث لعدد الأشخاص المعرضين للإصابة والمصابين والمتعافين

ضمن مجموعة سكانية في حالة $R_0 > 1$ في مقابل $R_0 < 1$. في الشكل A2) الذي تكون فيه قيمة R_0 أكبر من 1، يمكن أن يكون عدد الأشخاص الذين يصابون بالعدوى في الوقت ذاته مرتفعًا للغاية (انظر المنحنى البرتقالي)، ويجوز ألا يكون لدى المستشفيات القدرة على علاج كل شخص يُصاب بالعدوى. عندما تكون قيمة R_0 أصغر من 1 ($(R_0 < 1)$) انظر الشكل B2)، لن ينتقل المرض إلى الكثير من الأشخاص في المجموعة السكانية، ومن ثم يصبح منحنى الأشخاص المصابين بمرور الوقت أكثر تسطيحًا. هذا السيناريو مُحبب، فإذا انتشر مرض ما بسرعة، فسنرغب في إبطاء حالات العدوى و"تسطيح المنحنى" [3] انظر الشكل 3



الشكل 2 A



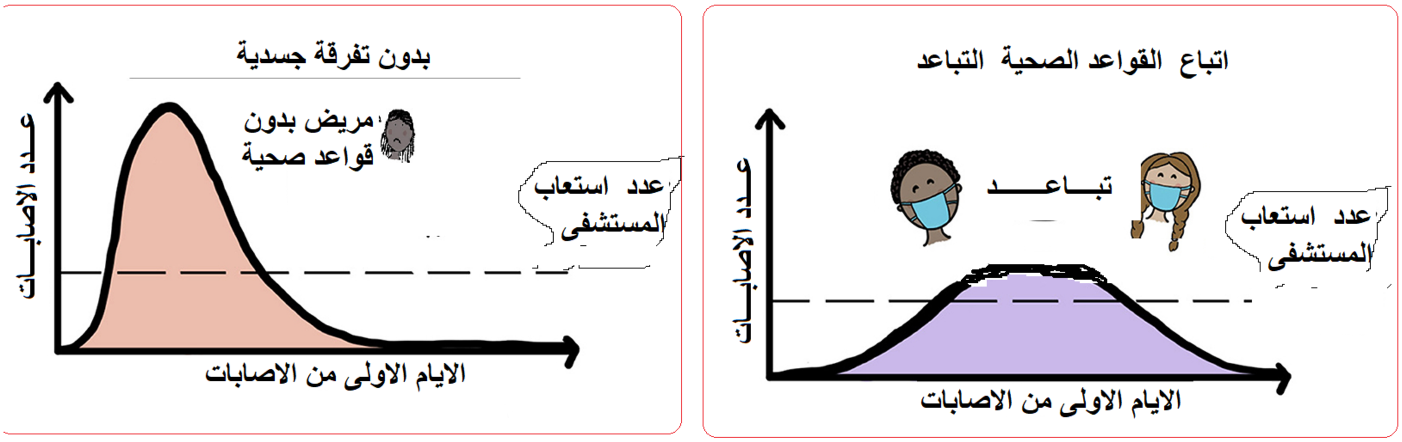
الشكل 2 B

شكل 2 - مقارنة عدد الأشخاص المعرضين للإصابة والمصابين والمتعافيين في نموذج SIR لمرض معدٍ.

تشير القيم الموجودة على المحور الرأسي إلى جميع الأشخاص الموجودين في الأقسام المعرضين للإصابة والمصابين والمتعافيين في كل يوم (وليس فقط حالات العدوى وحالات التعافي الجديدة في ذلك اليوم (A) .(عندما يكون$R_0 > 1$ ، فإن عدد الأشخاص الذين يصابون في الوقت نفسه قد يكون كبير جدًا ويجوز ألا يكون لدى المستشفيات قدرة على علاج كل الأشخاص. نظرًا لأن الجميع تقريبًا يصابون في النهاية في هذه الحالة، يصبح عدد الأشخاص المعرضين للإصابة في النهاية صغيرًا جدًا (B) .عندما تبلغ قيمة R_0 أقل من 1، في الحالات مثل ارتداء الكثير من الأشخاص الكمامات وتطبيق التباعد الجسدي، لن ينتقل المرض إلى العديد من الأشخاص ضمن المجموعة السكنية.

اهمية القواعد الصحية :

تسطيح المنحنـــــــــــــى



الشكل 3

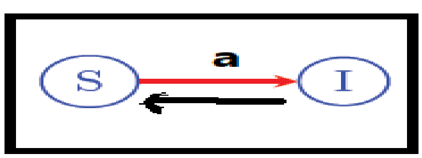
3-3النموذج الرياضي البسيط ل S.I :

S : المعرضين للاصابة

I : المصابين

N : فئة معينة

a: b: ثوابت



$N = S + I$

$$I(t+dt) = I(t) + ((aSI(dt))/N) - bI(dt)$$

$$I(t+dt) - I(t) = ((aSI(dt))/N) - bI(dt)$$

في حالة t تؤول الى 0 نجد

$$\begin{cases} \frac{dI}{dt} = \frac{a}{N}SI - bI \\ \frac{dS}{dt} = -\frac{dI}{dt} \end{cases}$$

لما $N = S + I$ نجد

$$\begin{cases} \frac{dI}{dt} = \frac{a}{N}SI - bI \\ \frac{dS}{dt} = -\frac{a}{N}SI + bI \end{cases}$$

الفصل الرابـع

سنتعرض في هذا الفصل الى تطبيق الاستقرار واسقاط مفاهيمه على النموذج المدروس والذي يتوج بنتائج تطبيقية جديرة باتخاذ القرار :

تطبيق الاستقرار في دراسة

نموذج S.I.R

في هذا الفصل ندرس وباء على غرار نظام تفاضلي من نوع SIR. عندما يكون عدد السكان N كبيرًا ، تحدث ذروة الوباء في الوقت T ، مع $T \sim (\ln N)/(a-b)$. a هو معدل الاتصال الفعال. b هو المعدل الذي يتعافى به الأشخاص المعدون.

لنأخذ على سبيل المثال في [1 ، 2 ، 6 ، 7 ، 8] نموذج SIR لـ Kermack و McKendrick للوباء

$$\frac{dS}{dt} = -a\frac{SI}{N}, \quad \frac{dI}{dt} = a\frac{SI}{N} - bI, \quad \frac{dR}{dt} = bI.$$

$S(t)$ هو عدد الأشخاص الأصحاء. $I(t)$ هو عدد المصابين. $R(t)$ هو عدد الأشخاص الذين تمت إزالتهم من العدوى نتيجة للعزل أو الشفاء أو الوفاة. $N = S(t) + I(t) + R(t)$ هو مجموع السكان. يُفترض أن يكون إجمالي عدد السكان ثابتًا وكبيرًا بما يكفي لجعل من المعقول نمذجة الوباء باستخدام نظام تفاضلي بدلاً من عملية عشوائية. فكر في الشروط الأولية

$$S(0) = N - 1, \quad I(0) = 1, \quad R(0) = 0,$$

التي تتوافق مع بداية الوباء من "صفر مريض" واحد.

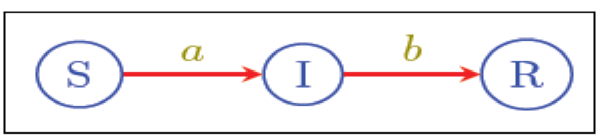
4-1 النموذج الرياضي S.I.R:

في موضوع البحث سنبدأ بتقسيم الناس إلى المجموعات التالية:

$S(t)$: وهو مجموعة الناس المعرضون الى الاصابة

$I\ (t)$: وهو مجموعة الناسا لذين تم تشخيص إصابتهم فعلا بالفيروس

$R(t)$: وهو مجموعة الناس الذي نتم شفائهم من المرض بشكل كامل بعدا لاصابة



- صياغة مشكلة الانتشار كنموذج من المعادلات التفاضلية

نفرض ان عدد افراد العينة هو (N)نسمة. نفرض أن معدل الوفيات قريب من الصفر او يساوي صفرا = D(t) 0 لكل قيم

t،لذلك يكون

N = S(t) + I(t) + R(t) .... (1)

لا يوجد مصابين قبل ظهور الفيروس اي ان $I(t) = 0$ وكذلك ان ام يوجد مصابين لا يوجد معافين يعني $R(t) = 0$

وعليه تصبح المعادلة (1) .. هي

$$N = S(t) \qquad \text{.........} (2)$$

اي إن جميع أفراد العينة هم من المعرضين للاصابة في الحالة الطبيعية و عندما يكون الزمن معدوم – صفرا-أي عند النقطة التي تبدأ منها

الدراسة فإنه يحتمل أن يكون هناك حالات بالاصابة، لكنها غير مسجلة لصعوبة اكتشاف الفيروس في أيامها الولى

ولذلك سيكون عند المصابين عند اللحظة $t = 0$ ياخذ الصيغة التالية

$$I(0) = I_0 \qquad \text{........}(3)$$

وعدد المتعافين من الاصابة يكون صفرا $R(0) = 0$ ويكون عدد المعرضين للاصابة هو

$$S(0) = S_0 \qquad \text{.......}(4)$$

ومنه من المعادلات السابقة (1) و (3) و(4) نحصل على ان

$$N = S_0 + I_0$$

في بداية ظهور الفيروس، وبالقرب من $t = 0$ يكون عدد المصابين بالعدوى تزايديا لذلك يكون عدد المعرضين لاصابة تناقصيا أي ان قيمة الدالة

$S(t)$ تكون سالبة ومن اجل كتابة نظام من للمعادلات التفاضلية يعبر عن دراستنا نبدأ بالمقدار $\frac{ds}{dt}$ ..

حيث يزداد هذا المقدار كلما زاد الترابط والختلاط بين الناس، أي إنه يعتمد على كل من المقدارين S و

والمقدار $\frac{ds}{dt}$

يزداد كلما زادت قيمة S ويزداد أيضا كلما زادت قيمة I وهذا يجعل المقدار $\frac{ds}{dt}$ يتناسب مع حاصل ضرب المقدارين (IS) أي إن

$$\frac{ds}{dt} = -a\,IS \qquad \text{..........} \quad (5)$$

والقيمة السالبة في المعادلة (٥) بسبب قيمة S المتناقصة ، وقيمة a تمثل ثابت التناسب، وهي قيمة موجبة.

ولإيجاد المقدار $\frac{dI}{dt}$

فالاشخاص المصابون بالعدوى يمكن أن ينقلوها للأشخاص المعرضين للإصابة ، فإذا فقدنا المقدار $(-SI)$ من المعرضين للإصابة

فسنحصل على SI موجبة فضلا عن الاشخاص الجدد الذين يصابون بالعدوى نتيجة تعرضهم للفيروس فيكون

$$\frac{dI}{dt} = a\,IS - bI \qquad \text{.......................} \quad (6)$$

وخسارة المقدار bI من المصابين بالعدوى، فإنهم سيكونون من المتعافين أي إن[٩]

$$\frac{dR}{dt} = rI \qquad \text{.............................} \quad (7)$$

وبهذا تكون المعادلات التفاضلية الاعتيادية 5) ، 6) ، 7) هي نموذج من المعادلات التفاضلية المعبرة بصيغة رياضية عن مشكلة لوباء الحاصل بسبب فيروس كورونا

- مسارات نموذج دوال المعادلات التفاضلية لSIR :

الاشخاص المتعافون بعد إصابتهم بفيروس كورونا معرضون للإصابة مرة أخرى ويحدث لهم ما يحصل للمعرضين للإصابة.

نفرض أن دراستنا حول عينة يبلغ عدد أفرادها (N) نسمة ومدة الدراسة فيها هي (t) من الايام، فان قيمة

$\frac{dS}{dt}$ في بداية

الدراسة تشمل جميع أفراد المدينة البالغ عددهم (N)، وأن الجميع معرض للإصابة وأن عدد المصابين مهما كثر

ومهما حصل من أحداث

فإنه سيصل إلى الصفر في يوم ما وأن المتعافين ومهما حصل من أحداث فإن عددهم سيزداد ويصل إلى

ما يقارب (N) العدد الكلي للعينة

- **خواص النموذج اذا كان الزمن قريبا من الصفر :**

نفرض أن قيمة (S) تبقى ثابتة بالقرب من الصفر ولتكن (S_0)

$$\frac{dI}{dt} = \alpha\, S_0\, I - bI$$

$$\frac{dI}{dt} = I(\alpha\, S_0 - b)$$

وهذه معادلة تفاضلية اعتيادية من الدرجة الاولى والرتبة الاولى، يمكن فصل متغيراتها لتاخذ الصيغة التالية

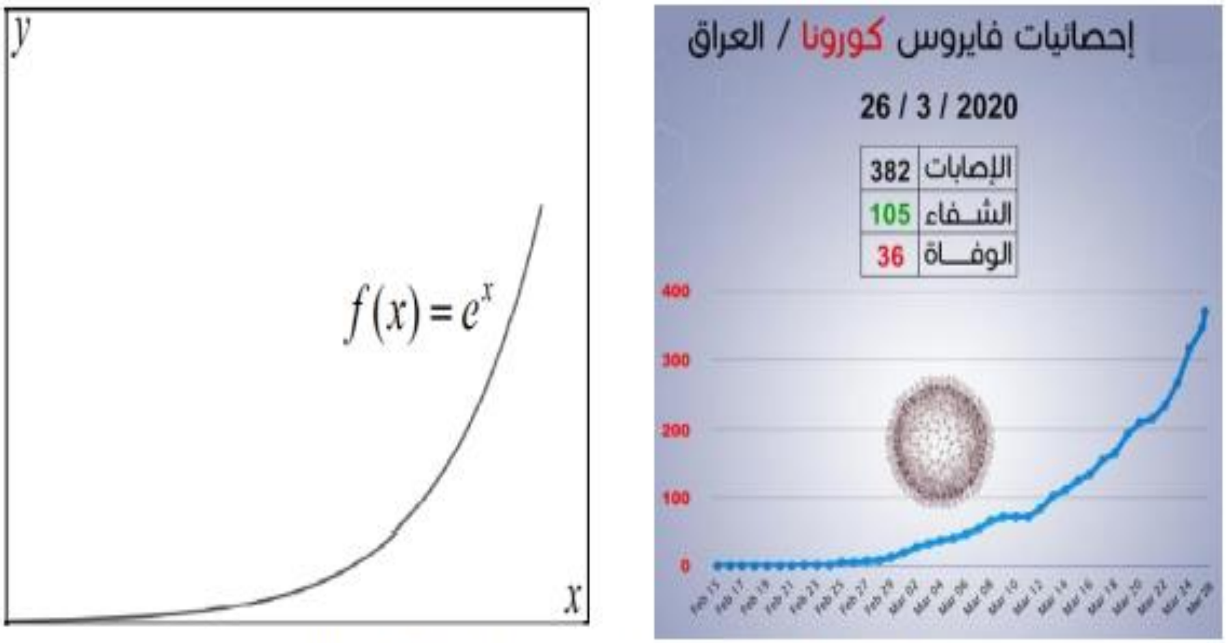
$$\frac{dI}{I} = (\alpha\, S_0 - b)dt$$

$$\ln I = (\alpha\, S_0 - b)t$$

$$I = e^{(\alpha\, S_0 - b)t} \qquad \text{.....} \ (7)$$

من المعادلة (**7**) نستنتج أن I هي دالة أسية (Exponential function) للمتغير t وتمثيل الدالة الأسية بيانيا معلوم، فهي من

الدوال المعروفة رياضيا وهذا يفسر بالضبط الاحصائيات الرسمية لانتشار فيروس كورونا (أنظر الشكل (1))



الشكل رقم 1 : تمثيل انتشار الفايروس وتمثيل الدالة الأسية

4 -2 نتـــائج الدراســـــات :

- **المثال التطبيقي للعالم الفرنسي** McKendrick

نحن ندرس وباء على غرار نظام تفاضلي من نوع. SIR عندما يكون عدد السكانN ً كبيرا ، تحدث ذروة الوباء في الوقت T ، T هو المدة اللازمة لانتشار العد وة

مع $T \sim (\ln N)/(a - b)$. a هو معدل الاتصال الفعال.p هو المعدل الذي يتعافى به الأشخاص المعدون.

<u>ناخذ مثال لدراسة الفرنسي</u> **McKendrick**

لنأخذ على سبيل المثال في نموذج SIR لـ Kermack و McKendrick للوباء

$$\frac{dS}{dt} = -a\frac{SI}{N}, \quad \frac{dI}{dt} = a\frac{SI}{N} - bI, \quad \frac{dR}{dt} = bI.$$

S(t)هو عدد الأشخاص الأصحاء. I(t)هو عدد المصابين. R(t)هو عدد الأشخاص الذين تمت إزالتهم من العدوى نتيجة للعزل أو الشفاء

او الوقاية . N = S(t) + I(t) + R(t)هو مجموع السكان. يُفترض أن يكون إجمالي عدد السكان ثابتوكبيرا بما يكفي لجعل من المعقول

نمذجة الوباء باستخدام نظام تفاضلي بدلاً من عملية عشوائية. فكر في الشروط الأولية

S(0) = N − 1, I(0) = 1, R(0) = 0

التي تتوافق مع بداية الوباء من "صفر مريض" واحد .

المعلمة a (مع a > 0) هو في الواقع نتاج رقمين: عدد جهات الاتصال لكل وحدة زمنية واحتمالية الانتقال أثناء

الاتصال بين شخص غير مصاب وشخص مصاب. يتم إجراء الاتصالات بشكل عشوائي I/N . هو احتمال وجود شخص

يجري في حجرة I هذا يفسرالمصطلح التربيعي فيSI/N في النظام التفاضلي.b > 0هوالمعدل الذي يترك الناس مقصورة

I . وبالتالي فإن الافتراض الأساسي هو أن الوقت

الذي يقضيها في القسم الأول يتم توزيعه وفقًا لقانون أسي للمعلمة ب . سنفترض أ حب لوباء حقيقي

تم شرح أحد الأمثلة بالتفصيل في الشكل 1 .استخدمنا برنامج Scilab و وظيفة حل الأنظمة التفاضلية. تطبق

هذه الوظيفة مخطط مصحح للتنبؤ Adams للأنظمة غير شديدة الانحدار. تم اختيار. $N = 65 \times 10^6$ (سكان فرنسا) ،

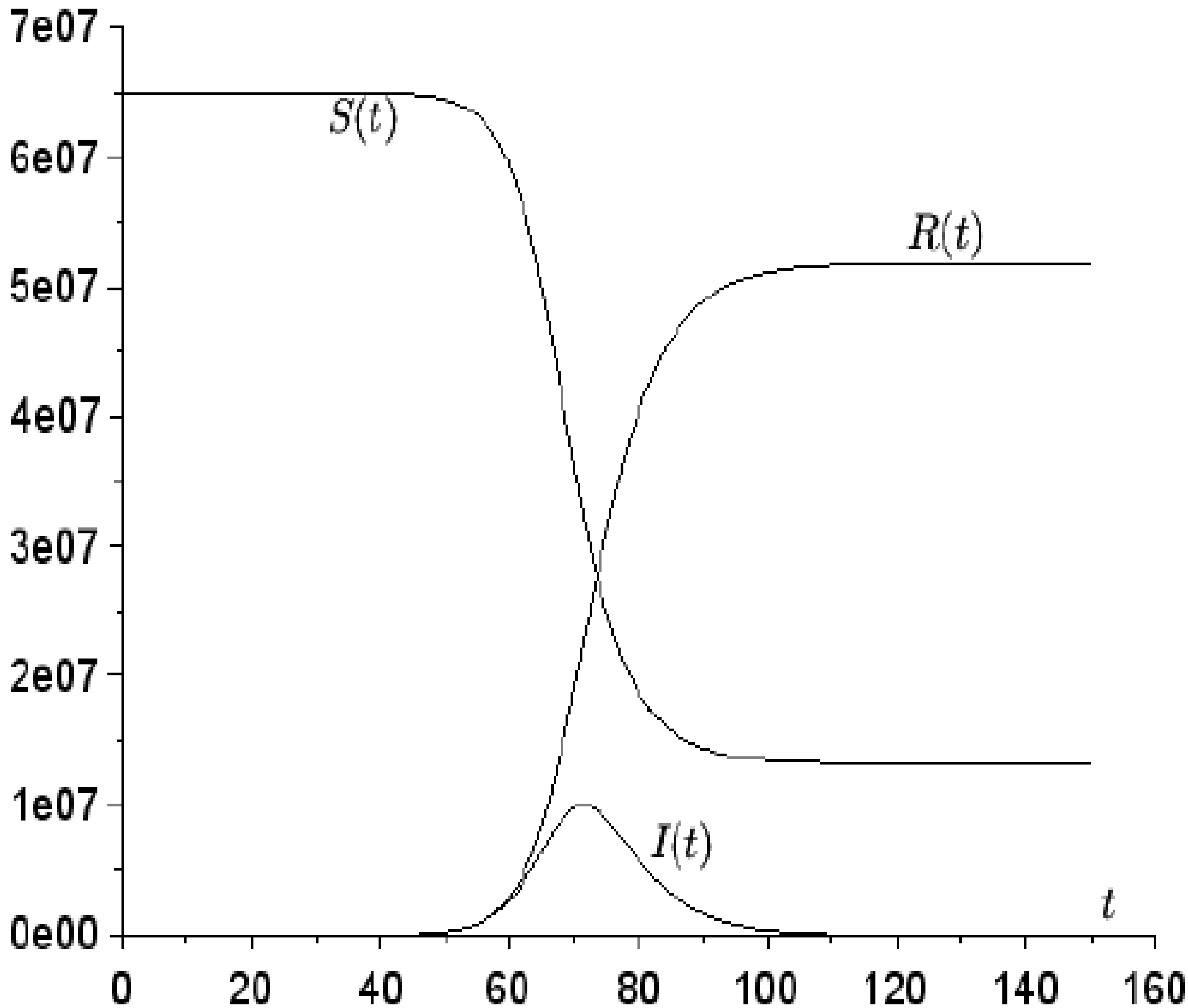
a = 1/2 يوميا وb = 1/4 يوميا. في بداية الوباء ، يصاب الشخص المصاب بمتوسط شخص واحد كل يومين.

متوسط مدة الإصابة 41/b أيام. هذا يتوافق مع التكاثر)يأتي المصطلح والرمز .R_0وبالتالي هو

متوسط عدد الحالات الثانوية التي يصيبها الشخص المصاب في بداية الوباء. بدون الادعاء بالواقعية ، هذه قيم بنفس

الترتيب من حيث الحجم الذي يمكن العثور عليه لوباء الفيروس التاجي 2020 في الحالة الافتراضية حيث لا يوجد

تدخل للحد من الوباء.



الشكل 1. محاكاة لنموذج SIR مع الوقت على الخراج t في الايام.

الذروة الوبائية

من خلال الجمع بين المعادلتين الأولى والثالثة لنظام SIR ، فإنه معروف جيدا أن نجد التكامل الأول:

$$\frac{1}{S}\frac{dS}{dt} = -a\frac{I}{N} = -\frac{a}{bN}\frac{dR}{dt}$$

اذن لدينا

$$\ln[S(t)/S(0)] = -\frac{a}{bN}R(t)$$

بالعودة الى المعادلة نجد:

$$\frac{dS}{dt} = -a\frac{S}{N}(N-S-R) = -a\frac{S}{N}\left(N-S+\frac{bN}{a}\ln[S(t)/S(0)]\right)$$

يتوافق الذروة الوبائية في الشكل 1 $dI/dt = 0$ والذي يحدث حسب المعادلة الثانية عند $S(t) = Nb/a$.

$S(t)$ دالة متناقصة بسبب $dS/dt \le 0$ من المعادلة الأولى. نستنتج أنه إذا كانت T هي وقت ذروة الوباء ، أي إذا

$$I(T) = \max_{t>0} I(t)$$

لدينا بعد ذلك

$$T = \int_0^T dt = \int_{S(0)}^{bN/a} \frac{dS}{-a\frac{S}{N}\left(N-S+\frac{bN}{a}\ln[S/S(0)]\right)}.$$

نحدد $s = S/N$ لدينا بعد ذلك

$$T = \frac{1}{a}\int_{b/a}^{1-1/N} \frac{ds}{s\left(1-s+\frac{b}{a}\ln[s/(1-1/N)]\right)}. \qquad (1)$$

نحن نسعى للحد الاعلى من T للجميع، $b/a < s < 1-1/N$ نملك

$$\frac{1}{s\left(1-s+\frac{b}{a}\ln[s/(1-1/N)]\right)} \leq \frac{1}{s\left(1-s+\frac{b}{a}\ln s\right)}$$

في حين s=1 نملك

$$\frac{1}{s\left(1-s+\frac{b}{a}\ln s\right)} \sim \frac{1}{(1-s)(1-b/a)}$$

لايتجزا

$$\int_{b/a}^{1} \frac{ds}{1-s}$$

متباينة مع $N \to +\infty$، اذن لدينا :

$$T \leq \frac{1}{a}\int_{b/a}^{1-1/N} \frac{ds}{s\left(1-s+\frac{b}{a}\ln s\right)} \sim \frac{1}{a}\int_{b/a}^{1-1/N} \frac{ds}{(1-s)(1-b/a)} \sim \frac{\ln N}{a-b}$$

اننا نسعى الى الادنى ل Tنملك $\ln s \leq s-1$ للجميع s >0 نحن لدينا ايضا

$\ln(1-1/N) \geq -2/N$ للجميع N > 2 اكبر او تساوي 2 لذلك لدينا

$s \in]b/a, 1-1/N[$ ولأي عدد صحيح $N \geq 2$

$$1-s+\frac{b}{a}\ln[s/(1-1/N)] = 1-s+\frac{b}{a}\ln s-\frac{b}{a}\ln(1-1/N)$$
$$\leq 1-s+\frac{b}{a}(s-1)+\frac{2b}{aN}.$$

اذا لدينا

$$T \geq \frac{1}{a}\int_{b/a}^{1-1/N}\frac{ds}{s[1-\frac{b}{a}+\frac{2b}{aN}-(1-b/a)s]}.$$

نأتي عبر جزء عقلاني من النموذج $\frac{1}{s(u-vs)}$ مع

$$u = 1-\frac{b}{a}+\frac{2b}{aN}, \quad v = 1-b/a.$$

ينقسم إلى عناصر بسيطة

$$\frac{1}{s(u-vs)} = \frac{1}{u}\left(\frac{1}{s}+\frac{v}{u-vs}\right).$$

بدائي

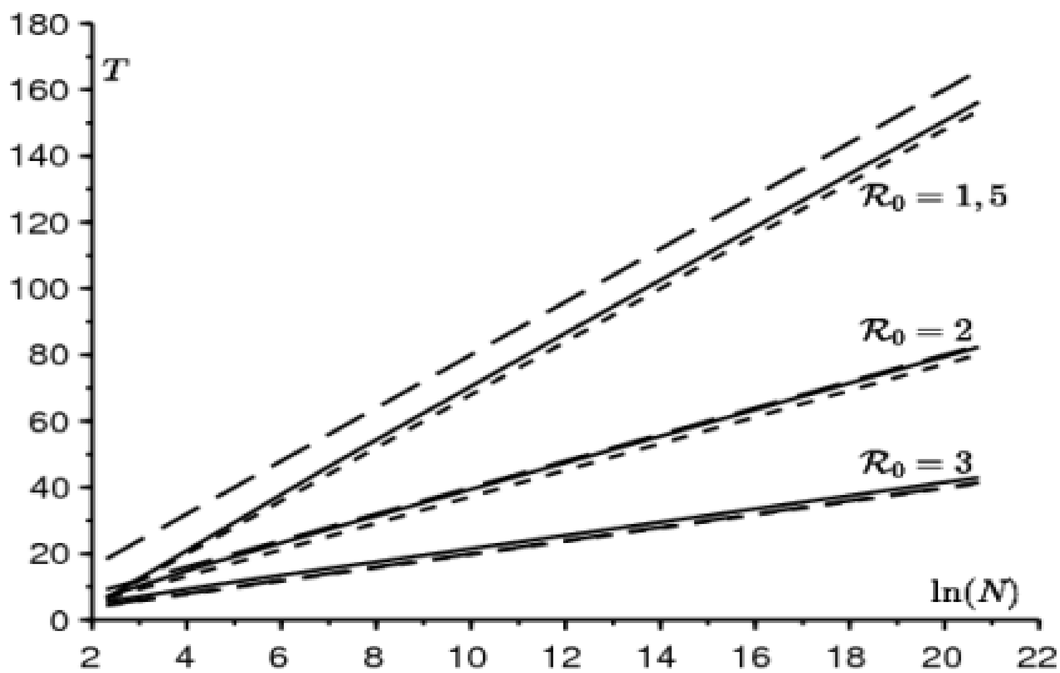
$$\frac{1}{u}[\ln s-\ln(u-vs)] = \frac{1}{u}\ln\frac{s}{u-vs}.$$

اذا لدينا

$$T \geq \frac{1}{a(1-\frac{b}{a}+\frac{2b}{aN})}\ln\left\{\frac{1-1/N}{b/a}\;\frac{1-\frac{b}{a}+\frac{2b}{aN}-(1-b/a)b/a}{1-\frac{b}{a}+\frac{2b}{aN}-(1-b/a)(1-1/N)}\right\}$$
$$= \frac{1}{a-b+2b/N}\ln\left\{\frac{1-1/N}{b/a}\;\frac{(1-b/a)^2+\frac{2b}{aN}}{(1+b/a)/N}\right\}$$
$$= \frac{1}{a-b+2b/N}\left[\ln N+\ln\left\{\frac{1-1/N}{b/a}\;\frac{(1-b/a)^2+\frac{2b}{aN}}{(1+b/a)}\right\}\right].$$

العضو على اليمين هو $(\ln N)/(a-b)\sim$ إذا $N\to+\infty$. بما أنه نفس المكافئ للحد الأعلى الذي تم الحصول عليه أعلاه ، نستنتج ذلك $T\sim(\ln N)/(a-b)$ إذا $N\to+\infty$.

في المثال في الشكل 1 ، لدينا $T\simeq 71{,}4$ أيام بينما $(\ln N)/(a-b)\simeq 72{,}0$ أيام. يبدو التقريب جيدا إلى حد ما. في الشكل 2 ، نغير الحجم N من السكان وكذلك المعلمة a،مع ب ثابت. نلاحظ $(\ln N)/(a-b)$ المبالغة في بعض الأحيان، التقليل أحيانا T.



الشكل 2

الشكل 2. مقارنة بين التاريخ T لذروة الوباء (الخط المستمر) من جهة ، محسوباً مع تكامل الصيغة (1) ، من ناحية أخرى المكافئ $(\ln N)/(a-b)$ (خطوط منقطة كبيرة) وتقريب $[\ln(2N(b/a-1)^2)]/(a-b)$ (خطوط منقطة صغيرة) ، حسب $\ln N$، إذا $10\le N\le 10^8$ لثلاث قيم معلمات a مع استنساخ $\mathcal{R}_0=a/b\in\{1{,}5\ ;\ 2\ ;\ 3\}$.

$a-b$هو معدل النمو الأولي للوباء. ثم لدينا ل N كبير، $S(t) \simeq N$ و $dI/dt \simeq (a-b)I$. يمكن تقدير هذا المعدل من البيانات الوبائية. السكان ن معروف. لذلك يمكننا التنبؤ بتاريخ ذروة الوباء. في الممارسة العملية ، تظل الفرضية الكامنة وراء نموذج مزيج متجانس من السكان موضع شك بالنسبة لبلد بأكمله ، أقل قليلاً بالنسبة للمدينة.

تاريخياً ، حل Kermack و McKendrick نظام SIR تقريبًا بافتراض أن قابلية التكاثر كانت قريبة من 1 ، مما أدى إلى وباء صغير. التقريب $e^x \simeq 1 + x + x^2/2$ ، توصلوا إلى معادلة ريكاتي قابلة للحل بشكل صريح ، بحيث

$$I(t) \simeq \frac{X}{\mathrm{ch}^2(Yt-Z)}. \qquad (2)$$

X و Y و Z هي وظائف معقدة للمعلمات N و a و b . انظر على سبيل المثال [3]. ذروة الوباء $T \simeq Z/Y$. دعنا نلاحظ أنه على حد علمنا لم يتم تقريبًا تقريبًا تقريبًا (2) بدقة ، وهذا هو السبب في أننا نستخدم فوق وتحت العلامة غير الرسمية $\simeq$. نفترض الآن بالإضافة $1/N \ll (\mathcal{R}_0 - 1)^2$. في هذه الحالة،

$$Y \simeq \frac{a-b}{2}, \quad Z \simeq \frac{1}{2}\ln[2N(b/a-1)^2]$$

(انظر على سبيل المثال [4]) ، بحيث

$$T \simeq \frac{\ln[2N(b/a-1)^2]}{a-b}.$$

يظهر هذا التقريب أيضًا في الشكل 2 ؛ يبدو قريبًا بشكل خاص من القيمة الحقيقية لـ T إذا $\mathcal{R}_0$يقترب من 1 ، كما تتوقع. مع N التي تتلاقى إلى ما لا نهاية ، ومع ذلك لدينا $T \simeq \frac{\ln N}{a-b}$. نجد نفس السلوك المقارب. ومع ذلك ، فإن تحليلنا القائم على الصيغة (1) صالح للجميع $\mathcal{R}_0 > 1$ وليس فقط $\mathcal{R}_0$ على مقربة من 1.

الخاتمة

تناولنا في بحثنا هذا الى دراسة جمل المعادلات التفاضلية ونمذجتها في قالب تطبيقي والمتمثل في استقرار حلولها الى جانب استعمال طريقة ليابنوف وتطبيقها على نموذج الامراض المعدية اذ يعتبر هذا الموضوع من المواضيع الهامة في الوقت الحاضر ولقد حاونا استعراض بعض المفاهيم والنظريات المهمة والمتعلقة ببحثنا .

ولقد ساعدنا هذا البحث على توسيع معلوماتنا واعطانا اجوبة لكثير من التساؤلات واستخدمنا اهم المفاهيم الرياضية : فضاء هيلبرت – جمل المعادلات التفاضلية – الاستقرار.

كما استخدمنا بعض التوضيحات المتعلقة باستقرار حلول نظام المعادلات التفاضلية بطريقة ليابنوف علما ان الجملة المدروسة المتعلقة بالامراض المعدية المتمثلة في :

$$\frac{dS}{dt} = -a\frac{SI}{N}, \quad \frac{dI}{dt} = a\frac{SI}{N} - bI, \quad \frac{dR}{dt} = bI.$$

ومن خلال النتائج المتحصل عليها تم تدوين مجموعة من التوصيات التي من شانها ارساء المفاهيم الاساسية في الحد من ظاهرة انتشار الامراض المعدية.

تطلعات في مجال البحث

1- بالاعتماد على النموذج المدروس وعند اضافة عوامل اخرى مثل الالقاح –متغيرات البيئة هل يمكن اعداد نموذج رياضي يتوج بتطبيق جمل المعادلات التفاضلية .

2- عند دراسة نماذج الامراض المعدية هل يمكن تطبيق نماذج التنبؤات في هذه الدراسات .

المراجع

المراجع العربية:

1- احمد حمزة الشيخة- المعادلات التفاضلية – الدار العربية للنشر والتوزيع 1996.

2- - اسماعيل بوقفة- الدكتورعايش الهناودة– المعادلات التفاضلية حلول وتطبيقات- جامعة التكنولوجيا اليمن 1999

3- ايزوين كريو يك- ترجمة: الدكتور خضر حامد الاحمد– مدخل الى التحليل الدالي وتطبيقاته– جامعة دمشق سوريا 2005.

4- ريتشارد برونسون– ترجمة: الدكتور حسن مصطفى العويضي- المعادلات التفاضلية- جامعة دمشق سوريا2006.

5- عبد الواحد ابو صمرة- صلاح احمد ومحمد بشير قابيل– الطبولوجيا -1- مطبعة الخالدين- جامعة دمشق سوريا 1991.

6- محمد حازي- المقعد المجلي للتحليل الدالي- ديوان المطبوعات الجامعية الجزائر 2013.

المراجع الفرنسية :

1- K. M. A. Kabir- K. Kuga- J. Tanimoto- “Analysis of SIR epidemic model with information spreading of awareness,” Chaos, Solitons and Fractals, vol. 119, pp. 118–125, 2019.

2- N. Baca¨er- Sur la taille finale des ´epid´emies dans un environnement p´eriodiqueComptes Rendus Biologies 342-2019.

3- W.Hengartner- M.Lambert- C.Reischer; *Introduction à L’analyse FonctionnelleLes Presses de l’Univercite du Quebec, 1981.*