



République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de
la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ HAMMALAKHDAR ELOUED
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES

Mémoire de fin d'étude

MASTER ACADEMIQUE

Domaine : Mathématiques et Informatique
Filière: Mathématiques
Spécialité : Mathématiques fondamentales

Thème

*Sur la classe des opérateurs
normaux*

Présenté par : - *Mimoun Chaima*
- *Fetiti Chifa*

Soutenu publiquement devant le jury composé de

Djedidi Yacine	MAA.	Président	Univ. El Oued
Guesba Messaoud	MCA.	Rapporteur	Univ. El Oued
Zaouche El Mehdi	MCA.	Examineur	Univ. El Oued

Année universitaire 2021 – 2022.

REMERCIEMENT

*Nous tenons remercier avant tout **ALLAH** qui nous a donné la force, la volonté, le courage, et la patience de pouvoir réaliser ce modeste travail.*

*On tient aussi remercier **Dr Guesba Messaoud**, notre encadreur qui a su orienter notre travail, aussi pour sa disponibilité nous prodiguer des conseils, pour sa confiance et pour sa précieuse aide, on le remercie du fond du cœur.*

Nous sincères remerciements sont adressés tous les membres du jury qui ont accepté de juger notre modeste travail, et tous ceux qui, sans avoir été impliqués directement dans ce travail, ont toujours été d'un grand support : nos enseignants, nos familles, nos amis, nos collègues chacun son nom.

Dédicace

A mes très chers parents

*pour tous les soins et le suivi dont ils font preuve depuis ma naissance et au long de mes études
pour leur soutien et surtout leurs conseils et amour*

A mes très chères sœurs

A mes très chers frères

A ma grande famille

A toutes mes amies

A tous ceux qui m'aiment et que j'aime

Mimoun, Fetiti

INTRODUCTION GÉNÉRALE

La théorie des opérateurs linéaires d'un espace de Hilbert vers autre espace de Hilbert constitue un lieu de rencontre privilégié pour diverses disciplines des domaines des mathématiques. Les opérateurs linéaires continus d'un espace de Hilbert vers autre forment une classe assez particulière des opérateurs linéaires d'un espace vectoriel normé vers autrespace vectoriel normé.

La première partie du premier chapitre est consacrée à l'appel des espaces et sous-espaces linéaires, ainsi que des groupes linéairement indépendants, et des sous-espaces générés. On se souvient des espaces métriques, des espaces normatifs, et dans les espaces de Hilbert, citons des produits scalaires, des bases orthogonales, des bases orthogonales et orthogonales, on parlera de quelques propriétés de base : comme l'égalité des parallélogrammes, ainsi que la théorie des orthogonales projection d'un point quelconque sur un sous-ensemble fermé et convexe de l'espace de Hilbert et étude générale du spectre et L'image numérique et quelques définitions des classes opérateur.

Dans le deuxième chapitre, on présente les définitions et les propriétés générales des opérateurs linéaires continus normaux d'un espace de Hilbert vers le même espace de Hilbert. On donne la définition des opérateurs linéaires continus normaux et les propriétés structurelles associés (norme ,image).

On définit aussi quelques classes des opérateurs linéaires continus normaux. Citons : opérateurs positifs ,opérateurs projecteurs ,opérateurs auto-adjoints, opérateurs compacts. On explique dans la même occasion les relations entre les des opérateurs linéaires continus normaux et les opérateurs normaux.

Le troisième chapitre s'occupe de deux applications sur ce qui nous avons étudié dans les deux chapitres précédant, ces application sont illustrées par les propriétés structurelles citées aux chapitre un et chapitre deux.

La première application concerne des résultats trouvés sur la représentation d'un opérateur linéaire continu normal sur un espace de Hilbert séparable (on considère une base orthonormée puis on trouve la propriétés matricielle des opérateurs linéaires continus normaux associés. On trouve enfin des résultats sur le spectre opérateur linéaire continu normal sur un espace de Hilbert séparable

La deuxième application s'occupe principalement sur l'étude des opérateurs intégraux continus et le

noyau de ce type des opérateurs intégraux aussi on fait le calcul des normes des opérateurs intégraux et les conditions permettant que ces opérateurs intégraux soient normaux dans ce cas on trouvera facilement le spectre de ces opérateurs intégraux . On met l'accent sur un opérateur intégral à noyau normal continu.

NOTATIONS GÉNÉRALES

E	Espaces normes
\mathcal{H}	Espace de Hilbert .
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	Produit scalaire, $\ \cdot \ $ La norme, $ \cdot $ la valeur absolue, $d(\cdot, \cdot)$ distance.
A	L'opérateur linéaire .
$L(\mathcal{H})$	L'espace des opérateurs linéaires sur l'espace de Hilbert \mathcal{H} .
$\mathcal{L}(\mathcal{H})$	L'espace des opérateurs linéaires bornés sur l'espace de Hilbert \mathcal{H}
A^{-1}	L'inverse de l'opérateur A .
A^*	L'adjoint de l'opérateur A .
\mathcal{A}_k	Opérateur Intégral de Noyau
$\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$	Ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients complexes.
$\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$	Ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réel.
$I_{\mathcal{H}}$	Opérateur Identité.
A^{\perp}	Orthogonal de A .
$\text{Im}(A)$	L'image de l'opérateur A .
$\text{ker}(A)$	Le noyau de l'opérateur A .
$\rho(A)$	L'ensemble résolvante de l'opérateur A .
$R_{\lambda}(A)$	La résolvante de l'opérateur A .
$\sigma(A)$	Le spectre de l'opérateur A .
$\sigma_p(A)$	Le spectre ponctuel de l'opérateur A .
$\sigma_r(A)$	Le spectre résiduel de l'opérateur A .
$\sigma_c(A)$	Le spectre continu de l'opérateur A .
$r(A)$	Le rayon spectral de l'opérateur A .

TABLE DES MATIÈRES

	ii
Notations générales	ii
1 Préliminaires	1
1.1 Espaces normés	2
1.2 Espace de Hilbert	2
1.2.1 Produit scalaire	2
1.2.2 Quelques propriétés	4
1.2.3 Orthogonalité	5
1.2.4 Bases orthonormales	6
1.3 Opérateurs linéaires et bornés sur un espace de Hilbert	6
1.3.1 Opérateurs linéaires	6
1.3.2 Opérateurs linéaires bornés	7
1.3.3 Puissance d'un opérateur	9
1.3.4 L'inverse d'un Opérateur linéaire bornée	10
1.4 Convergence sur $\mathcal{L}(\mathcal{H})$	11
1.5 Théorèmes générales	12
1.6 Spectre d'un opérateur linéaire borné	14
1.6.1 Définitions générales	14
1.7 Image numérique	15
1.8 Les classe d'opérateur	16
2 Opérateurs normaux	17
2.1 Opérateurs linéaires bornés adjoints dans les espaces de Hilbert	18
2.1.1 Définition et exemple	18

2.1.2	Propriétés l'opérateur adjoint	18
2.2	Opérateurs linéaires bornés normaux dans les espaces de Hilbert	24
2.2.1	Définition et exemple	24
2.2.2	Propriétés des opérateurs normaux	24
2.3	La relation entre l'opérateur normal avec autres classes des opérateurs	27
2.3.1	Relation entre opérateur normal et un opérateur auto-adjoint	27
2.3.2	Relation entre opérateur normal et un opérateur hyponormal	28
2.3.3	Relation entre opérateur normal et un opérateur n-normal	29
2.3.4	Relation entre opérateur normal et un opérateur positif	29
2.4	Théorie spectrale des opérateurs normaux	30
2.4.1	Le spectre continu	32
2.4.2	Le spectre résiduel	33
2.5	Image numérique d'un opérateur normal	34
2.5.1	Relation entre l'image numérique et le spectre d'un opérateur	34
3	Applications	36
3.1	Représentation d' un opérateur	37
3.1.1	Représentation d'un opérateur sur un espace de Hilbert séparable	37
3.1.2	Polynôme caractéristique	38
3.1.3	Matrices diagonales	40
3.2	Opérateurs intégraux, propriétés et étude spectrale	43
3.2.1	Opérateur Intégral	43
3.2.2	Normes des opérateurs intégraux sur $L^2(\mathcal{I})$	43
3.2.3	Opérateur intégral à noyau normal continu	44
	Bibliographie	54

CHAPITRE 1

PRÉLIMINAIRES

La première partie du premier chapitre est consacrée à l'appel des espaces et sous-espaces linéaires, ainsi que des groupes linéairement indépendants, et des sous-espaces générés. On se souvient des espaces métriques, des espaces normatifs, et dans les espaces de Hilbert, citons des produits scalaires, des bases orthogonales, des bases orthogonales et orthogonales, on parlera de quelques propriétés de base : comme l'égalité des parallélogrammes, ainsi que la théorie des orthogonales projection d'un point quelconque sur un sous-ensemble fermé et convexe de l'espace de Hilbert et étude générale du spectre et l'image numérique et quelques définitions des classes opérateur.

1.1 Espaces normés

Définition 1.1.0.1

Soit E un espace linéaire sur \mathbb{K} (\mathbb{R} or \mathbb{C}). On appelle semi-norme sur E , une application $\mathcal{P} : E \rightarrow \mathbb{R}_+$, telle que pour tout $\varphi, \psi \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ on a :

- 1) $\mathcal{P}(\lambda\varphi) = |\lambda| \mathcal{P}(\varphi)$, (propriété d'homogénéité absolue).
- 2) $\mathcal{P}(\varphi + \psi) \leq \mathcal{P}(\varphi) + \mathcal{P}(\psi)$, (propriété de sous-additivité).

Il est clair que $\mathcal{P}(0) = 0$.

Un espace linéaire E muni d'une semi-norme s'appelle espace semi-normé.

Définition 1.1.0.2

Soit E un espace linéaire sur \mathbb{K} . On appelle norme sur E , une application

$\| \cdot \| : E \rightarrow \mathbb{R}_+$, telle que $\| \cdot \|$ est une semi-norme pour E et de plus

- 3) $\| \varphi \| = 0$ si et seulement si $\varphi = 0$.

Un espace linéaire E muni d'une norme s'appelle espace normé, noté par $(E, \| \cdot \|)$.

Exemple 1.1.0.1

L'espace $C([0, 1], E)$ est normé, lorsqu'il est muni d'une les normes suivantes :

1. $\| f \|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt$.
2. $\| f \|_2 = \left(\int_0^1 |f(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$.
3. $\| f \|_\infty = \sup_{t \in [0, 1]} |f(t)|$.

Définition 1.1.0.3 (Espace de Banach)

Un espace de Banach est un espace linéaire normé complet.

Note : On dit qu'un espace normé $(E, \| \cdot \|)$ est complet si toute suite de Cauchy de E est convergente dans E .

Exemple 1.1.0.2

L'espace $E = C([a, b], \mathbb{R}^n)$ des fonctions continues de $[a, b]$ dans \mathbb{R}^n . Le nombre

$$\| f \| = \max_{a \leq \varphi \leq b} |f(\varphi)|,$$

où $| \cdot |$ est la norme dans \mathbb{R}^n , définit une norme rendant $(E, \| \cdot \|)$ un espace de Banach.

1.2 Espace de Hilbert

1.2.1 Produit scalaire

Définition 1.2.1.1

Soit \mathbb{X} un \mathbb{C} -espace vectoriel, s'il existe un nombre complexe $\phi = \langle \varphi, \psi \rangle$ pour tout couple des vecteurs φ et ψ dans \mathbb{X} qui vérifient les conditions suivantes :

1. $\forall \varphi \in \mathbb{X} \langle \varphi, \varphi \rangle \geq 0$ et $\langle \varphi, \varphi \rangle = 0 \Leftrightarrow \varphi = 0$.

2. $\overline{\langle \varphi, \psi \rangle} = \langle \psi, \varphi \rangle$, $\forall \varphi, \psi \in \mathbb{X}$.

3. $\langle \varphi + \psi, \phi \rangle = \langle \varphi, \phi \rangle + \langle \psi, \phi \rangle$, $\forall \varphi, \psi$ et $\phi \in \mathbb{X}$.

4. $\langle \lambda \varphi, \psi \rangle = \lambda \langle \varphi, \psi \rangle$, $\forall \varphi, \psi \in \mathbb{X}$ et $\forall \lambda \in \mathbb{C}$.

Alors $\langle \varphi, \psi \rangle$ est dit produit scalaire de φ et ψ outrement dit que $(\mathbb{X}, \langle, \rangle)$ est un espace préhilbertien.

Définition 1.2.1.2

On appelle espace préhilbertien tout espace vectoriel muni d'un produit scalaire et on pose

$$\|\varphi\| = \sqrt{\langle \varphi, \varphi \rangle}$$

$(\mathbb{X}, \langle, \rangle)$ est un espace vectoriel normé.

Définition 1.2.1.3

Un espace préhilbertien complet muni de la norme induit par le produit scalaire est dit espace de Hilbert.

Exemple 1.2.1.1

1. Sur $\mathcal{H} = \mathbb{R}^n$. L'application

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto \sum_{j=1}^n x_j y_j \end{aligned}$$

2. Soit $\mathcal{H} = \mathbb{C}^n$. L'application

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (x, y) &\longmapsto \sum_{k=1}^n x_k \overline{y_k} \end{aligned}$$

3. Soit

$$\mathcal{H} = \ell^2 = \left\{ x = (x_n)_{n \geq 0} : \sum_{n \geq 0} |x_n|^2 < \infty \right\}$$

L'application

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{H} \times \mathcal{H} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (x, y) &\longmapsto \sum_{n \geq 0} x_n \overline{y_n} \end{aligned}$$

4. Soit

$$\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}) = \{ f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} \text{ mesurable et } \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx < \infty \}$$

L'application

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{H} \times \mathcal{H} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (f, g) &\longmapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \overline{g(x)} dx \end{aligned}$$

son des produits scalaires.

1.2.2 Quelques propriétés

- **Inégalité de Cauchy-Schwarz** : Pour tous $\varphi, \psi \in \mathbb{X}$, on a

$$|\langle \varphi, \psi \rangle| \leq \sqrt{\langle \varphi, \varphi \rangle} \sqrt{\langle \psi, \psi \rangle}. \quad (1.1)$$

Preuve : L'inégalité (1.1) est trivialement satisfaite si $\langle \varphi, \psi \rangle = 0$.

Nous supposons donc que $\langle \varphi, \psi \rangle \neq 0$. Alors nous obtenons

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left\langle \frac{\varphi}{\sqrt{\langle \varphi, \varphi \rangle}} - \frac{\langle \varphi, \psi \rangle \psi}{|\langle \varphi, \psi \rangle| \sqrt{\langle \psi, \psi \rangle}}, \frac{\varphi}{\sqrt{\langle \varphi, \varphi \rangle}} - \frac{\langle \varphi, \psi \rangle \psi}{|\langle \varphi, \psi \rangle| \sqrt{\langle \psi, \psi \rangle}} \right\rangle \\ &\leq 1 - \frac{2|\langle \varphi, \psi \rangle|}{\sqrt{\langle \varphi, \varphi \rangle} \sqrt{\langle \psi, \psi \rangle}} + 1 \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} 0 \leq 1 - \frac{2|\langle \varphi, \psi \rangle|}{\sqrt{\langle \varphi, \varphi \rangle} \sqrt{\langle \psi, \psi \rangle}} + 1 &\Rightarrow \frac{2|\langle \varphi, \psi \rangle|}{\sqrt{\langle \varphi, \varphi \rangle} \sqrt{\langle \psi, \psi \rangle}} \leq 2 \\ &\Rightarrow |\langle \varphi, \psi \rangle| \leq \sqrt{\langle \varphi, \varphi \rangle} \sqrt{\langle \psi, \psi \rangle}. \end{aligned}$$

Généralisation (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

Soient \mathbb{X} un \mathbb{K} -espace vectoriel et S une forme sesquilinéaire hermitienne positive sur \mathbb{X} . Alors, on a l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\forall \varphi, \psi \in \mathbb{X}, \quad |S(\varphi, \psi)| \leq \sqrt{S(\varphi, \varphi)} \sqrt{S(\psi, \psi)}. \quad (1.2)$$

Corollaire 1.2.2.1

$$|\langle \varphi, \psi \rangle| \leq \frac{1}{2}(\langle \varphi, \varphi \rangle + \langle \psi, \psi \rangle). \quad (1.3)$$

Preuve :

$$\begin{aligned} 0 &\leq (\sqrt{\langle \varphi, \varphi \rangle} - \sqrt{\langle \psi, \psi \rangle})^2 = \left(\sqrt{\langle \varphi, \varphi \rangle}\right)^2 + \left(\sqrt{\langle \psi, \psi \rangle}\right)^2 - 2\sqrt{\langle \varphi, \varphi \rangle} \sqrt{\langle \psi, \psi \rangle} \\ &\Rightarrow \sqrt{\langle \varphi, \varphi \rangle} \sqrt{\langle \psi, \psi \rangle} \leq \frac{1}{2} \left(\left(\sqrt{\langle \varphi, \varphi \rangle}\right)^2 + \left(\sqrt{\langle \psi, \psi \rangle}\right)^2 \right), \end{aligned}$$

d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz on a (1.1)

$$|\langle \varphi, \psi \rangle| \leq \frac{1}{2}(\langle \varphi, \varphi \rangle + \langle \psi, \psi \rangle).$$

- **Loi du parallélogramme** : Pour tout $\varphi, \psi \in \mathbb{X}$, on a

$$\|\varphi + \psi\|^2 + \|\varphi - \psi\|^2 = 2(\|\varphi\|^2 + \|\psi\|^2). \quad (1.4)$$

Preuve :

En effet

$$\begin{aligned} \|\varphi + \psi\|^2 + \|\varphi - \psi\|^2 &= \langle \varphi + \psi, \varphi + \psi \rangle + \langle \varphi - \psi, \varphi - \psi \rangle \\ &= \langle \varphi, \varphi \rangle + \langle \varphi, \psi \rangle + \langle \psi, \varphi \rangle + \langle \psi, \psi \rangle \\ &\quad + \langle \varphi, \varphi \rangle - \langle \varphi, \psi \rangle - \langle \psi, \varphi \rangle + \langle \psi, \psi \rangle \\ &= 2(\|\varphi\|^2 + \|\psi\|^2). \end{aligned}$$

• **Identité de polarisation :**

Soient $\varphi, \psi \in \mathbb{K}(\mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$. On peut montrer que

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \begin{cases} \frac{1}{4} (\|\varphi + \psi\|^2 - \|\varphi - \psi\|^2) + i (\|\varphi + i\psi\|^2 - \|\varphi - i\psi\|^2) & \text{dans } \mathbb{C} \\ \frac{1}{4} (\|\varphi + \psi\|^2 - \|\varphi - \psi\|^2) & \text{dans } \mathbb{R}. \end{cases}$$

Preuve :

$\forall \varphi, \psi \in \mathbb{C}$. On a :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} [(\|\varphi + \psi\|^2 - \|\varphi - \psi\|^2) + i (\|\varphi + i\psi\|^2 - \|\varphi - i\psi\|^2)] = \\ & = \frac{1}{4} [(\langle \varphi, \varphi \rangle + \langle \psi, \psi \rangle + \langle \varphi, \psi \rangle + \langle \psi, \varphi \rangle - \langle \varphi, \varphi \rangle - \langle \psi, \psi \rangle + \langle \psi, \varphi \rangle + \langle \varphi, \psi \rangle) + \\ & i(\langle \varphi, \varphi \rangle + \langle \varphi, i\psi \rangle + \langle i\psi, \varphi \rangle + i\bar{i} \langle \psi, \psi \rangle - \langle \varphi, \varphi \rangle - i\bar{i} \langle \psi, \psi \rangle + \langle \varphi, i\psi \rangle + \langle i\psi, \varphi \rangle)] \\ & = \frac{1}{4} [2 \langle \varphi, \psi \rangle + 2 \langle \varphi, \psi \rangle + 2 \langle \varphi, \psi \rangle - 2 \langle \varphi, \psi \rangle] = \langle \varphi, \psi \rangle \end{aligned}$$

$\forall \varphi, \psi \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} (\|\varphi + \psi\|^2 - \|\varphi - \psi\|^2) &= \frac{1}{4} [\langle \varphi + \psi, \varphi + \psi \rangle - \langle \varphi - \psi, \varphi - \psi \rangle] \\ &= \frac{1}{4} [\langle \varphi, \varphi \rangle + \langle \psi, \psi \rangle + \langle \psi, \varphi \rangle + \langle \psi, \psi \rangle - \langle \varphi, \varphi \rangle \\ &- \langle \psi, \psi \rangle + \langle \varphi, \psi \rangle + \langle \psi, \varphi \rangle] \\ &= \langle \varphi, \psi \rangle \end{aligned}$$

Dans $\mathbb{R} : \langle \varphi, \psi \rangle = \langle \psi, \varphi \rangle$.

Théorème 1.2.2.1 [1]

- 1) Tout espace de Hilbert est normé.
- 2) Soit $(\mathcal{H}, \|\cdot\|_{\mathcal{H}})$ un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K}(\mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$ tel que :

$$\|\varphi + \psi\|^2 + \|\varphi - \psi\|^2 = 2(\|\varphi\|^2 + \|\psi\|^2). \quad (1.5)$$

Alors $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}})$ est espace de Hilbert dans ce cas

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \begin{cases} \frac{1}{4} (\|\varphi + \psi\|^2 - \|\varphi - \psi\|^2) + i (\|\varphi + i\psi\|^2 - \|\varphi - i\psi\|^2) & \text{dans } \mathbb{C} \\ \frac{1}{4} (\|\varphi + \psi\|^2 - \|\varphi - \psi\|^2) & \text{dans } \mathbb{R}. \end{cases}$$

1.2.3 Orthogonalité

Définition 1.2.3.1

1. Soit $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}})$ un espace de Hilbert. Soient $\varphi, \psi \in \mathcal{H}$. Si $\langle \varphi, \psi \rangle = 0$, on dit que φ, ψ sont orthogonaux et on écrit $\varphi \perp \psi$.

2. L'orthogonale de $A \subset \mathcal{H}$ est défini par

$$A^{\perp} = \{\varphi \in \mathcal{H} : \langle \varphi, \alpha \rangle = 0; \forall \alpha \in A\}.$$

Exemple 1.2.3.1

Soit \mathcal{H} un espace de Hilbert ?, alors :

- 1) $\mathcal{H}^\perp = \{0\}$.
- 2) $\{0\}^\perp = \mathcal{H}$.

Définition 1.2.3.2

1) Un ensemble $E = \{e_i; i \in I\}$ d'un espace de Hilbert \mathcal{H} est un système orthonormal si :

$$\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j \\ 0, & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Proposition 1.2.3.1

Soit H un espace préhilbertien et $A \subset H$, on a :

1. $0 \in A^\perp$.
2. Si $0 \in A$ alors $A \cap A^\perp = \{0\}$, sinon $A \cap A^\perp = \emptyset$.
3. $\{0\}^\perp = H$ et $H^\perp = \{0\}$.
4. Si $A \subset B$ alors $B^\perp \subset A^\perp$.
5. A^\perp est un espace vectoriel fermé.
6. $A \subset (A^\perp)^\perp$ et $A^\perp = A^{\perp\perp}$.

1.2.4 Bases orthonormales**Définition 1.2.4.1**

Soit \mathcal{H} un espace de Hilbert séparable.

On appelle base orthonormale de \mathcal{H} tout sous ensemble fini ou dénombrable e_n qui vérifie :

- 1) $\|e_n\| = 1$ et $\langle e_n, e_m \rangle = 0$ si $n \neq m$.
- 2) Le sous espace vectoriel engendré par e_n (par combinaisons linéaires finies) est dense dans \mathcal{H} .

1.3 Opérateurs linéaires et bornés sur un espace de Hilbert**1.3.1 Opérateurs linéaires****Définition 1.3.1.1**

Soit \mathcal{H} un espace de Hilbert. Une application $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ est dite opérateur linéaire si A satisfait les deux conditions suivantes :

- i) **Additivité** : $A(\varphi + \psi) = A(\varphi) + A(\psi) \quad \forall \varphi, \psi \in \mathcal{H}$.
- ii) **Homogénéité** : $A(\lambda\varphi) = \lambda A(\varphi) \quad , \quad \forall \varphi \in \mathcal{H}, \lambda \in \mathbb{C}$.

1.3.2 Opérateurs linéaires bornés

Définition 1.3.2.1

Un opérateur linéaire A sur un espace de Hilbert \mathcal{H} est dit borné, s'il existe $c > 0$ tel que

$$\|A\varphi\| \leq c\|\varphi\| \text{ pour tout } \varphi \in \mathcal{H}.$$

$\|A\|$ la norme d'opérateur A est défini par

$$\|A\| = \inf\{c > 0 : \|A\varphi\| \leq c\|\varphi\|, \quad \forall \varphi \in \mathcal{H}\}.$$

Théorème 1.3.2.1 [2]

Pour tout opérateur linéaire et borné A , on a :

$$\begin{aligned} \|A\| &= \sup\{\|A\varphi\| : \|\varphi\| = 1\} \\ &= \sup\{\|A\varphi\| : \|\varphi\| \leq 1\} \\ &= \sup\{|\langle A\varphi, \psi \rangle| : \|\varphi\| = \|\psi\| = 1\}. \end{aligned}$$

Théorème 1.3.2.2 [2]

Pour tout opérateur linéaire A sur un espace de Hilbert \mathcal{H} les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) A est borné.
- (ii) A est continu sur l'espace \mathcal{H} .
- (iii) A est continu en $\varphi_0 \in \mathcal{H}$.

Preuve :

(i) \Rightarrow (ii) Soit A un opérateur borné, φ_n une suite converge vers φ_0 dans \mathcal{H} , comme

$$0 \leq \|A\varphi_n - A\varphi_0\| = \|A(\varphi_n - \varphi_0)\| \leq \|A\| \cdot \|\varphi_n - \varphi_0\| \longrightarrow 0 \text{ quand } n \longrightarrow +\infty$$

, on obtient la continuité de A .

(iii) \Rightarrow (i) Soit A continu en $\varphi_0 \in \mathcal{H}$. Supposons que A est non borné (i.e $\forall n \in \mathbb{N}, \exists \varphi_n \neq 0$ vecteur dans \mathcal{H}

$\|A\varphi_n\| > n\|\varphi_n\|$). On pose $\psi_n = \frac{\varphi_n}{n\|\varphi_n\|}$; $\|\psi_n\| = \frac{1}{n}$. Or $\psi_n \rightarrow 0$ alors $\psi_n + \varphi_0 \rightarrow \varphi_0$ mais

$$\|A(\psi_n + \varphi_0) - A(\varphi_0)\| = \|A\psi_n\| = \left\| A \frac{\varphi_n}{n\|\varphi_n\|} \right\| = \frac{1}{n\|\varphi_n\|} \|A\varphi_n\| > \frac{n\|\varphi_n\|}{n\|\varphi_n\|} = 1.$$

D'où

$$\|A(\psi_n + \varphi_0) - A(\varphi_0)\| > 1, \forall \psi_n.$$

A n'est pas continu en φ_0 , d'où la contradiction, donc A est borné.

Théorème 1.3.2.3 [2]

Soient A et B deux opérateurs linéaires et bornés sur un espace de Hilbert \mathcal{H} . On a les propriétés suivantes :

- (i) $\|\alpha A\| = |\alpha|\|A\|$ pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$.
- (ii) $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$.
- (iii) $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$.

Exemple 1.3.2.1

1. L'opérateur A_φ est application opérateur de multiplication par φ , et on définit comme .

$$A_\varphi : (L^2[0, 1], \|\cdot\|_{L^2}) \rightarrow (L^2[0, 1], \|\cdot\|_{L^2}).$$

$$f(\varphi) \longrightarrow \varphi f(\varphi).$$

est borné car :

$$\text{on a } \|A_\varphi f\|_{L^2} = \left(\int_0^1 |A_\varphi f(x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \text{ alors pour tout } \varphi \in [0, 1]$$

$$\|A_\varphi f(\varphi)\|_{L^2}^2 = \|\varphi f(\varphi)\|_{L^2}^2$$

$$\leq \|f(\varphi)\|_{L^2}^2,$$

donc

$$\|A_\varphi f\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2}.$$

2. Soit $\mathcal{H} = \ell^2$. L'opérateur (shift)

$$A : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$$

$$x \longmapsto A(x) = (0, x_1, x_2, x_3, \dots)$$

est borné.

3. Soit $\mathcal{H} = \ell^2$. L'opérateur

$$A : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$$

$$x \longmapsto S(x) = (x_1, 3x_2, x_3, 3x_4, x_5, 3x_6, \dots)$$

est borné car

$$\|Ax\|^2 = |x_1|^2 + 9|x_2|^2 + |x_3|^2 + 9|x_4|^2 + \dots + 9|x_n|^2 + \dots$$

d'où

$$\|Ax\|^2 \leq 9|x_1|^2 + 9|x_2|^2 + 9|x_3|^2 + 9|x_4|^2 + \dots + 9|x_n|^2 + \dots$$

par conséquent

$$\|Ax\|^2 \leq 9\|x\|^2$$

donc

$$\exists c = 3 > 0 \quad \text{tel que} \quad \|Ax\| \leq 3\|x\| \quad , \forall x \in \ell^2$$

D'où A est borné.

4. Soit $\mathcal{H} = \ell^2$. L'opérateur

$$A : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$$

$$x \longmapsto A(x) = (x_1, 2x_2, 3x_3, \dots, nx_n, \dots)$$

n'est pas borné car si on suppose que A est borné, on a

$$\exists c > 0 : \forall x \in \ell^2, \|Ax\| \leq c\|x\|.$$

n'est pas borné car si on suppose que A est borné, on a

$$\exists c > 0 : \forall x \in \ell^2, \|Ax\| \leq c\|x\|.$$

Si on prend $x = e_n = (0, 0, 0, \dots, \underbrace{1}_{n\text{ème}}, 0, 0, \dots)$, on trouve

$$\|Ae_n\|^2 = \|(0, 0, 0, \dots, n, 0, \dots)\|^2 = n^2 \|e_n\|^2.$$

Donc

$$\|Ae_n\| = n \|e_n\| \text{ tel que } \|e_n\| = 1$$

et puisque $\|Ae_n\| \longrightarrow \infty$ alors A n'est pas borné.

Définition 1.3.2.2

Soit $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, l'image de A est défini par :

$$Im(A) = \{A\varphi : \varphi \in \mathcal{H}\}.$$

et le noyau est défini par :

$$Ker(A) = \{\varphi \in \mathcal{H} : A\varphi = 0\}.$$

1.3.3 Puissance d'un opérateur

Définition 1.3.3.1

Soit A un opérateur sur un espace de Hilbert \mathcal{H} , où

$$A^n \varphi = \underbrace{A \circ A \circ \dots \circ A}_{n \text{ fois}} \varphi \quad \forall n \in \mathbb{N}, \text{ avec } A^0 = I_{\mathcal{H}} (\text{opérateur identité})$$

A^n est dit l'opérateur puissance de A .

Proposition 1.3.3.1

Soit $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, alors la propriété suivante est vérifiée :

$$\|A^n\| \leq \|A\|^n \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

1.3.4 L'inverse d'un Opérateur linéaire bornée

Définition 1.3.4.1

Soit $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. On dit que A est inversible B s'il existe un opérateur $B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, qui vérifie

$$AB = BA = I_{\mathcal{H}}.$$

B sera dit l'inverse de A et on note $B = A^{-1}$.

Exemple 1.3.4.1

L'opérateur $I_{\mathcal{H}}$ est inversible, et $I_{\mathcal{H}}^{-1} = I_{\mathcal{H}}$.

Théorème 1.3.4.1 [3]

L'opérateur A^{-1} , inverse d'un opérateur linéaire A , est aussi linéaire.

Définition 1.3.4.2

Soit $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ est, dit coercive si :

$$\exists \alpha > 0 : \forall \varphi \in \mathcal{H}, \|A\varphi\| > \alpha \|\varphi\|.$$

Lemme 1.3.4.1 [4]

Soit $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ un opérateur inversible alors

$$\forall \varphi \in \mathcal{H}, \quad \|A\varphi\| \geq \|A^{-1}\|^{-1} \|\varphi\|.$$

Preuve :

Pour tout $\varphi \in \mathcal{H}$, on a

$$\|\varphi\| = \|A^{-1}(A\varphi)\| \leq \|A^{-1}\| \|A\varphi\|$$

alors

$$\frac{\|\varphi\|}{\|A^{-1}\|} \leq \|A\varphi\|$$

donc

$$\|A^{-1}\|^{-1} \|\varphi\| \leq \|A\varphi\|.$$

Lemme 1.3.4.2 [5]

Soit $A_1, A_2 \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Si A_1 et A_2 sont inversibles alors

$$(A_1 A_2)^{-1} = A_2^{-1} A_1^{-1}.$$

Preuve :

Montrons d'abord que $A_1 \circ A_2$ admet une inverse sur \mathcal{H} , et que

$$(A_1 A_2)^{-1} = A_2^{-1} A_1^{-1}.$$

En effet

$$(A_1 A_2)\mathcal{H} = A_1 \mathcal{H} = I_{\mathcal{H}}.$$

Et

$$(A_1 A_2)(A_2^{-1} A_1^{-1}) = (A_2^{-1} A_1^{-1})(A_1 A_2) = I_{\mathcal{H}}.$$

Puisque l'élément inverse, s'il existe, est unique

$$(A_1 A_2)^{-1} = A_2^{-1} A_1^{-1}.$$

Théorème 1.3.4.2 [6]

Si $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ tel que $\|A\| < 1$, alors la série $\sum_{n=0}^{+\infty} A^n$ est convergente dans $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, l'opérateur $I_{\mathcal{H}} - A$ est inversible et

$$(I_{\mathcal{H}} - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} A^n.$$

Remarque 1.3.4.1

Il convient de savoir utiliser le résultat du théorème sous la forme suivante :

Si $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ est tel que $\|I_{\mathcal{H}} - A\| < 1$, alors A est inversible et on a

$$A^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (I_{\mathcal{H}} - A)^n.$$

Théorème 1.3.4.3 [7]

Si $\dim \mathcal{H} < +\infty$, les propriétés suivantes sont équivalentes :

- 1) A est inversible.
- 2) A est injectif.
- 3) A est surjectif.
- 4) A admet un inverse à droite (i.e. il existe $U \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ tel que $A \circ U = I_{\mathcal{H}}$).
- 5) A admet un inverse à gauche (i.e. il existe $V \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ tel que $V \circ A = I_{\mathcal{H}}$).

1.4 Convergence sur $\mathcal{L}(\mathcal{H})$

Définitions 1.4.0.1

Soit $(A_n)_n$ une suite d'opérateur linéaires bornés dans un espace de Hilbert \mathcal{H}

1 • On dit que $(A_n)_n$ est convergente uniformément vers $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ si

$$\|A_n - A\| \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow +\infty$$

appelé aussi convergence en norme et on écrit $A_n \xrightarrow{u} A$.

2 • On dit que $(A_n)_n$ est convergente fortement vers $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ si

$$\forall \varphi \in \mathcal{H} : \|A_n \varphi - A \varphi\| \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow +\infty$$

et on écrit $A_n \xrightarrow{s} A$.

3 • On dit que $(A_n)_n$ est convergente faiblement vers $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ si

$$\forall \varphi, \psi \in \mathcal{H} : \langle A_n \varphi, \psi \rangle \rightarrow \langle A \varphi, \psi \rangle \text{ quand } n \rightarrow +\infty$$

et on écrit $A_n \xrightarrow{w} A$.

1.5 Théorèmes générales

Théorème 1.5.0.1 (Théorème de Fubini)

Soit f une fonction continue sur $[a, b] \times [c, d]$ à valeurs dans \mathbb{C} . Alors

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(\varphi, \psi) d\psi \right) d\varphi = \int_c^d \left(\int_a^b f(\varphi, \psi) d\varphi \right) d\psi.$$

Théorème 1.5.0.2 [9] (représentation de Riesz)

Soit U une forme linéaire sur un espace de Hilbert \mathcal{H} . Alors il existe un vecteur et un seul $f \in \mathcal{H}$, tel que pour tous $\varphi \in \mathcal{H}$

$$U(\varphi) = \langle \varphi, f \rangle.$$

Théorème 1.5.0.3 [13] (Lax-Milgram)

Soit \mathcal{H} un espace de Hilbert et soit B une forme hermitienne sur $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$. On suppose que :

(1) la forme B est continue, c'est-à-dire qu'il existe une constante M telle que, pour x et y dans \mathcal{H} on ait $|B(\varphi, \psi)| \leq M \|\varphi\| \|\psi\|$

(2) la forme B est coercive, c'est-à-dire qu'il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $\varphi \in \mathcal{H}$, $B(\varphi, \varphi) \geq C \|\varphi\|^2$

Alors, il existe un unique opérateur A dans $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, inversible et auto-adjoint tel que

$$B(\varphi, \psi) = \langle A \varphi, \psi \rangle, \quad \|A\| \leq M \quad \text{et} \quad \|A^{-1}\| \leq C.$$

Théorème 1.5.0.4 [19] (Arzela-Ascoli)

Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace norme compact, $(F, \|\cdot\|_F)$ un espace norme complet. Une partie A de $C(E, F)$ est relativement compacte si et seulement si :

1. A est équicontinue, c'est-à-dire :

$$\forall \varphi \in E, \forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0 \forall f \in A, \forall \psi \in E \|\varphi - \psi\|_E < \eta \Rightarrow \|f(\varphi) - f(\psi)\|_F < \epsilon.$$

2. Pour tout $\varphi \in E$, l'ensemble $A(\varphi) = \{f(\varphi); f \in A\}$ est relativement compact, (i.e. A est uniformément borné).

Théorème 1.5.0.5 [15] (Fuglede - 1950)

Soient A et N deux opérateurs bornés sur un Hilbert \mathcal{H} , tels que $AN = NA$ ou N est normal. Alors,

$$AN^* = N^*A$$

Puis en 1951 Putnam a fait la généralisation au cas de deux opérateurs normaux .

Théorème 1.5.0.6 [15] (Putnam - 1951)

Soient A, M, N trois opérateurs bornés sur un Hilbert \mathcal{H} , avec N, M sont normal et

$$MA = AN.$$

Alors

$$M^*A = AN^*.$$

Preuve :

La preuve suivante est à M. Rosenblum. Supposons que $S \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ et posons $V = S - S^*$, on définit

$$Q = \exp(V) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} V^n$$

Alors, $V^* = -V$ donc $Q^* = \exp(V^*) = \exp(-V) = Q^{-1}$. D'où Q est unitaire, la conséquence dont nous avons besoin est que $\|\exp(S - S^*)\| = 1$ pour tout $S \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. D'autre part, on a $MA = AN$ d'où par récurrence, alors $M^k A = AN^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. D'où $\exp(M)A = A \exp(N)$ ou bien,

$$A = \exp(-M)A \exp(N)$$

Posons $U_1 = \exp(M^* - M)$ et $U_2 = \exp(N - N^*)$, puisque M et N sont normal il s'en suit que $\exp(M^*)A \exp(-N^*) = U_1 A U_2$ et $\|U_1\| = \|U_2\| = 1$, d'où

$$\|\exp(M^*)A \exp(-N^*)\| \leq \|A\|.$$

Maintenant, on définit

$$F(\lambda) = \exp(\lambda M^*)A \exp(-\lambda N^*)$$

tel que $\lambda \in \mathbb{C}$. Les hypothèses du théorème sont vérifiées avec $\bar{\lambda}M$ et $\bar{\lambda}N$ à la place de M et N donc implique que $\|F(\lambda)\| \leq \|A\|$ pour $\lambda \in \mathbb{C}$. Alors, F est une fonction bornée analytique à valeur dans $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. D'après le théorème de Liouville $F'(\lambda) = 0$ on a

$$F'(\lambda) = M^* \exp(\lambda M^*)A \exp(-\lambda N^*) + \exp(\lambda M^*)A(-N^*) \exp(-\lambda N^*).$$

Pour $\lambda = 0$, $F'(0) = 0$.

D'où,

$$M^*A = AN^*.$$

1.6 Spectre d'un opérateur linéaire borné

1.6.1 Définitions générales

Définition 1.6.1.1 (Valeur propre et vecteur propre)

Soit $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Un nombre $\lambda \in \mathbb{C}$ s'appelle valeur propre de l'opérateur A , si l'équation $(A - \lambda I_{\mathcal{H}})\varphi = 0$ admet une solution $\varphi \neq 0$ dans \mathcal{H} .

Une telle solution φ est appelée vecteur propre (ou une fonction propre) associé à la valeur propre λ .

Définition 1.6.1.2 (point régulier)

Soit $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Le nombre $\lambda \in \mathbb{C}$ s'appelle un point régulier de l'opérateur A si $(A - \lambda I_{\mathcal{H}})$ est inversible.

Définition 1.6.1.3 (ensemble résolvante et la résolvante)

On appelle ensemble résolvante de A l'ensemble des points réguliers de l'opérateur A et note par $\rho(A)$ tel que

$$\rho(A) = \{ \lambda \in \mathbb{C}, A - \lambda I_{\mathcal{H}} \text{ inversible} \}.$$

L'ensemble résolvante $\rho(A)$ est un ouvert de \mathbb{C} .

- On définit la résolvante de l'opérateur A comme

$$R_{\lambda}(A) = (A - \lambda I_{\mathcal{H}})^{-1}.$$

Définition 1.6.1.4 (Spectre d'un opérateur)

Spectre de A l'ensemble

$$\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A) = \{ \lambda \in \mathbb{C}, A - \lambda I_{\mathcal{H}} \text{ n'est pas inversible} \}.$$

Corollaire 1.6.1.1

1. $\sigma(A) \cup \rho(A) = \mathbb{C}$.
2. $\sigma(A) \cap \rho(A) = \emptyset$.
3. Le spectre d'un opérateur borné n'est jamais vide i.e. $\sigma(A) \neq \emptyset$.

Définition 1.6.1.5 (Le spectre ponctuel)

On appelle spectre ponctuel de A l'ensemble des valeurs propres de A , noté $\sigma_p(A)$ tel que

$$\sigma_p(A) = \{ \lambda \in \sigma(A), A - \lambda I_{\mathcal{H}} \text{ non injectif} \}.$$

Remarque 1.6.1.1

Lorsque \mathcal{H} est de dimension finie, alors $\sigma(A) = \sigma_p(A)$.

Mais si \mathcal{H} est de dimension infinie, on a $\sigma_p(A) \subset \sigma(A)$.

Définition 1.6.1.6 (Le spectre continu)

On appelle spectre continu de A et on note par $\sigma_c(A)$, l'ensemble

$$\sigma_c(A) = \{\lambda \in \sigma(A), A - \lambda I_{\mathcal{H}} \text{ injectif et } \overline{\text{Im}(A - \lambda I_{\mathcal{H}})} \neq \mathcal{H}\}.$$

Définition 1.6.1.7 (Le spectre résiduel)

On appelle spectre résiduel de A et on note par $\sigma_r(A)$, l'ensemble

$$\sigma_r(A) = \{\lambda \in \sigma(A), A - \lambda I \text{ injectif et } \overline{\text{Im}(A - \lambda I_{\mathcal{H}})} \neq \mathcal{H}\}.$$

Remarque 1.6.1.2

Le spectre $\sigma(A)$ est la réunion disjointe de trois ensembles

$$\sigma(A) = \sigma_p(A) \cup \sigma_c(A) \cup \sigma_r(A).$$

Définition 1.6.1.8 (Le spectre approximatif)

On appelle spectre approximatif de T , noté $\sigma_{ap}(T)$ défini par

$$\sigma_{ap}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}, \exists (x_n)_n. \text{ Dans } \mathcal{H}, \text{ tel que } \|x_n\| = 1 \text{ et } \|(T - \lambda I)x_n\| \longrightarrow 0\}.$$

Définition 1.6.1.9 (Rayon spectral)

Soit $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. On définit le rayon spectral de A comme suit

$$r(A) = \sup\{|\lambda|, \lambda \in \sigma(A)\}.$$

Aussi sous une autre forme

$$r(A) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

1.7 Image numérique

Définition 1.7.0.1

L'image numérique de T est l'ensemble $W(T)$ des nombres complexes défini par

$$W(T) = \{\langle Tx, x \rangle \in \mathbb{C} : x \in \mathcal{H}, \|x\| = 1\}.$$

Proposition 1.7.0.1 [16]

Soient $T, S \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$

1. $W(\alpha I + \beta T) = \alpha + \beta W(T)$ pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.
2. $W(T + S) \subset W(T) + W(S)$.
3. $W(T^*) = \{\bar{\lambda}, \lambda \in W(T)\}$.

Preuve :

Soit $T \in B(\mathcal{H})$. Pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} W(\alpha I + \beta T) &= \{\langle (\alpha I + \beta T)x, x \rangle : x \in \mathcal{H}, \|x\| = 1\} \\ &= \{\langle \alpha Ix + \beta Tx, x \rangle : x \in \mathcal{H}, \|x\| = 1\} \\ &= \{\langle \alpha Ix, x \rangle + \langle \beta Tx, x \rangle : x \in \mathcal{H}, \|x\| = 1\} \\ &= \{\langle \alpha Ix, x \rangle : x \in \mathcal{H}, \|x\| = 1\} + \{\langle \beta Tx, x \rangle : x \in \mathcal{H}, \|x\| = 1\} \\ &= \alpha W(I) + \beta W(T) \end{aligned}$$

3) Soit $T \in B(\mathcal{H})$,

$$\begin{aligned} W(T^*) &= \{\langle T^*x, x \rangle : x \in \mathcal{H}, \|x\| = 1\} \\ &= \{\langle x, Tx \rangle : x \in \mathcal{H}, \|x\| = 1\} \\ &= \{\overline{\langle Tx, x \rangle} : x \in \mathcal{H}, \|x\| = 1\} \\ &= \{\bar{\lambda}, \lambda \in W(T)\} \end{aligned}$$

Théorème 1.7.0.1 (Toeplitz-Hausdorff)

L'image numérique d'un opérateur linéaire borné est un ensemble convexe borné.

1.8 Les classe d'opérateur**Définitions 1.8.0.1**

- **Opérateur Auto-adjoint** : $T^* = T$.
- **Opérateur Quasinormal** : $T(T^*T) = (T^*)T$.
- **Opérateur Projection** : $T^2 = T$ (idempotent) et $T^* = T$.
- **Opérateur Unitaire** : $T^*T = TT^* = I$.
- **Opérateur Isométrie** : $T^*T = I$.
- **Opérateur Positif** : (noté par $T \geq 0$) $\langle Tx, x \rangle \geq 0$. pour tout $x \in \mathcal{H}$.
- **Opérateur Hyponormale** : $T^*T \geq TT^*$.
- **Opérateur n-normal** : $T^n T^* = T^* T^n$.
- **Opérateur Isométrie Partielle** : $T = TT^*T$.
- **Opérateur Paranormal** : $\|T^2x\| \geq \|Tx\|^2$ pour tout vecteur unité $x \in \mathcal{H}$.
- **Opérateur k-quasihyponormale** : $T^{*k}(T^*T - T^*)T^k \geq 0$, pour tout $k \in \mathbb{N}$.
- **Opérateur Compact** : $\langle Tx_n, x_n \rangle \rightarrow 0$, pour toute suite orthonormée x_n de \mathcal{H} .

CHAPITRE 2

OPÉRATEURS NORMAUX

Dans le deuxième chapitre, on présente les définitions et les propriétés générales des opérateurs linéaires continus normaux d'un espace de Hilbert vers le même espace de Hilbert. On donne la définition des opérateurs linéaires continus normaux et les propriétés structurelles associés (norme ,image).

On définit aussi quelques classes des opérateurs linéaires continus normaux. Citons : opérateurs positifs ,opérateurs projecteurs, opérateurs auto-adjoints, opérateurs compacts. On explique dans la même occasion les relations entre les des opérateurs linéaires continus normaux et les opérateurs normaux.

2.1 Opérateurs linéaires bornés adjoints dans les espaces de Hilbert

2.1.1 Définition et exemple

Définition 2.1.1.1 (Opérateur adjoint)

Soit A un opérateur linéaire défini sur un espace de Hilbert \mathcal{H}_1 à valeurs dans un espace de Hilbert \mathcal{H}_2 , l'opérateur linéaire noté A^* défini de \mathcal{H}_2 dans \mathcal{H}_1 est dit opérateur adjoint de A si l'on a pour tout $\varphi \in \mathcal{H}_1$ et $\psi \in \mathcal{H}_2$

$$\langle A\varphi, \psi \rangle_{\mathcal{H}_2} = \langle \varphi, A^*\psi \rangle_{\mathcal{H}_1}.$$

Exemples 2.1.1.1

1. On considère opérateur shift défini par : $S : (l^2(\mathbb{C}), \| \cdot \|_{l^2(\mathbb{C})}) \rightarrow (l^2(\mathbb{C}), \| \cdot \|_{l^2(\mathbb{C})})$

$$S(\varphi_1, \varphi_2, \dots) = (0, \varphi_1, \varphi_2, \dots).$$

Soit (φ_n) et (ψ_n) dans $l^2(\mathbb{C})$: Alors

$$\begin{aligned} \langle S\varphi_n, \psi_n \rangle &= \langle (0, \varphi_1, \varphi_2, \dots), (\psi_1, \psi_2, \dots) \rangle \\ &= \varphi_2 \bar{\psi}_1 + \varphi_3 \bar{\psi}_2 + \dots \\ &= \langle (\varphi_1, \varphi_2, \dots), (\psi_2, \psi_3, \dots) \rangle \\ &= \langle \varphi_n, S^*\psi_n \rangle. \end{aligned}$$

Alors S^* est défini par :

$$S^*(\varphi_1, \varphi_2, \dots) = (\varphi_2, \varphi_3, \dots).$$

2.1.2 Propriétés l'opérateur adjoint

Théorème 2.1.2.1 [10] (Existence de l'opérateur adjoint)

Soit $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$, alors il existe un opérateur linéaire borné unique noté A^* défini de \mathcal{H}_2 dans \mathcal{H}_1 tel que l'on a pour tout $\varphi \in \mathcal{H}_1$ et $\psi \in \mathcal{H}_2$,

$$\langle A\varphi, \psi \rangle_{\mathcal{H}_2} = \langle \varphi, A^*\psi \rangle_{\mathcal{H}_1}.$$

De plus, on a :

$$\|A\| = \|A^*\|.$$

Preuve :

• Existence

Pour tout $\varphi \in \mathcal{H}_1$ et $\psi \in \mathcal{H}_2$, on définit une fonctionnelle linéaire bornée U de \mathcal{H}_1 dans $\mathbb{K} = (\mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$ comme suit

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_1 &\rightarrow \mathbb{C} \\ \varphi &\mapsto U(\varphi) = \langle A\varphi, \psi \rangle. \end{aligned}$$

La fonctionnelle U est linéaire car :

pour tout $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{H}_1, \psi \in \mathcal{H}_2$ et $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$, on a

$$\begin{aligned} U(\alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2) &= \langle A(\alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2), \psi \rangle \\ &= \langle \alpha_1A(\varphi_1) + \alpha_2A(\varphi_2), \psi \rangle && \text{car } A \text{ est linéaire} \\ &= \langle \alpha_1A(\varphi_1), \psi \rangle + \langle \alpha_2A(\varphi_2), \psi \rangle \\ &= \alpha_1 \langle A\varphi_1, \psi \rangle + \alpha_2 \langle A\varphi_2, \psi \rangle \\ &= \alpha_1U(\varphi_1) + \alpha_2U(\varphi_2). \end{aligned}$$

La fonctionnelle U est borné car :

pour tout $\varphi \in \mathcal{H}_1$ et $\psi \in \mathcal{H}_2$, on a

$$\begin{aligned} |U(\varphi)| &= |\langle A\varphi, \psi \rangle| \\ &\leq \|A\varphi\| \|\psi\| && \text{Par l'inégalité de Cauchy-Schwartz (1.1)} \\ &\leq \|A\| \|\varphi\| \|\psi\| && \text{car } A \text{ est borné.} \end{aligned}$$

D'après le théorème de Riesz 1.5.0.2 il existe un élément unique $f \in \mathcal{H}_1$, tel que

$$U(\varphi) = \langle A\varphi, \psi \rangle = \langle \varphi, f \rangle.$$

Cette égalité définit un opérateur noté A^* de \mathcal{H}_2 dans \mathcal{H}_1 tel que

$$A^*\psi = f.$$

Ou encore

$$U(\varphi) = \langle A\varphi, \psi \rangle = \langle \varphi, A^*\psi \rangle.$$

• Unicité

Soient A_1^* et A_2^* deux opérateurs adjoints de l'opérateur A alors, pour tout $\varphi \in \mathcal{H}_1$ et $\psi \in \mathcal{H}_2$, on écrit

$$\langle A\varphi, \psi \rangle = \langle \varphi, A_1^*\psi \rangle = \langle \varphi, A_2^*\psi \rangle.$$

Autrement dit, pour tout $\varphi \in \mathcal{H}_1$ et $\psi \in \mathcal{H}_2$, on a

$$\langle \varphi, A_1^*\psi \rangle = \langle \varphi, A_2^*\psi \rangle.$$

D'où,

$$A_1^*\psi = A_2^*\psi$$

Ou encore

$$A_1^* = A_2^*.$$

• **Linearité de l'opérateur adjoint A^***

Pour tout $\varphi \in \mathcal{H}_1, \psi_1, \psi_2 \in \mathcal{H}_2$ et $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$, on a

$$\begin{aligned}
 \langle \varphi, A^*(\alpha_1\psi_1 + \alpha_2\psi_2) \rangle &= \langle A\varphi, \alpha_1\psi_1 + \alpha_2\psi_2 \rangle \\
 &= \langle A\varphi, \alpha_1\psi_1 \rangle + \langle A\varphi, \alpha_2\psi_2 \rangle \\
 &= \bar{\alpha}_1 \langle A\varphi, \psi_1 \rangle + \bar{\alpha}_2 \langle A\varphi, \psi_2 \rangle \\
 &= \bar{\alpha}_1 \langle \varphi, A^*\psi_1 \rangle + \bar{\alpha}_2 \langle \varphi, A^*\psi_2 \rangle \\
 &= \langle \varphi, \alpha_1 A^*\psi_1 \rangle + \langle \varphi, \alpha_2 A^*\psi_2 \rangle \\
 &= \langle \varphi, \alpha_1 A^*\psi_1 + \alpha_2 A^*\psi_2 \rangle.
 \end{aligned}$$

Par conséquent

$$A^*(\alpha_1\psi_1 + \alpha_2\psi_2) = \alpha_1 A^*\psi_1 + \alpha_2 A^*\psi_2.$$

• **Egalité des normes $\|A\|$ et $\|A^*\|$**

Il est clair que l'on a

$$\begin{aligned}
 \|A^*\psi\|^2 &= \langle A^*\psi, A^*\psi \rangle \\
 &= \langle AA^*\psi, \psi \rangle \\
 &\leq \|AA^*\psi\| \|\psi\| && \text{par l'inégalité de Cauchy-Schwartz (1.1)} \\
 &\leq \|A\| \|A^*\psi\| \|\psi\| && \text{car } A \text{ est borné.}
 \end{aligned}$$

Après simplification, on obtient

$$\|A^*\psi\| \leq \|A\| \|\psi\|$$

ou encore

$$\|A^*\| \leq \|A\|.$$

De plus, on a

$$\begin{aligned}
 \|A\varphi\|^2 &= \langle A\varphi, A\varphi \rangle \\
 &= \langle A^*A\varphi, \varphi \rangle \\
 &\leq \|A^*A\varphi\| \|\varphi\| && \text{par l'inégalité de Cauchy-Schwartz (1.1)} \\
 &\leq \|A^*\| \|A\varphi\| \|\varphi\| && \text{car } A^* \text{ est borné.}
 \end{aligned}$$

Après simplification, on obtient

$$\|A\varphi\| \leq \|A^*\| \|\varphi\|$$

ou encore

$$\|A\| \leq \|A^*\|.$$

D'où, l'égalité des normes

$$\|A\| = \|A^*\|.$$

Corollaire 2.1.2.1

Soit $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$. Alors

- (i) $\|A^*A\| = \|AA^*\| = \|A\|^2$.
(ii) $A^*A = 0$ ou $AA^* = 0$ implique $A = 0$.

Preuve :

(i) En l'inégalité de Cauchy-Schwartz (1.1), on a

$$\begin{aligned} \|A^*A\| &= \sup_{\substack{\varphi_1 \in \mathcal{H}_1 \\ \varphi_2 \in \mathcal{H}_2}} \frac{\langle \varphi_2, A^*A\varphi_1 \rangle}{\|\varphi_1\| \|\varphi_2\|} = \sup_{\substack{\varphi_1 \in \mathcal{H}_1 \\ \varphi_2 \in \mathcal{H}_2}} \frac{\langle A\varphi_2, A\varphi_1 \rangle}{\|\varphi_1\| \|\varphi_2\|} \\ &\geq \sup_{\varphi \in \mathcal{H}_1} \frac{\|A\varphi\|^2}{\|\varphi\|^2} \\ &= \|A\|^2. \end{aligned}$$

d'autre part, $\|A^*A\| \leq \|A^*\| \|A\| = \|A\|^2$, donc $\|A^*A\| = \|A\|^2$. L'autre égalité s'obtient en échangeant les rôles de A et A^* .

(ii) Si $A^*A = 0$ alors $\|A^*A\| = \|A\|^2 = 0$, donc $A = 0$. On procède de même manière pour AA^* .

Proposition 2.1.2.1 [2]

Soient $A_1, A_2 \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$. Alors, on a les relations suivantes

- i) $(\lambda A_1)^* = \bar{\lambda} A_1^*$, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$.
ii) $(\alpha A_1 + \beta A_2)^* = \bar{\alpha} A_1^* + \bar{\beta} A_2^*$ pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.
iii) $(A_1^*)^* = A_1$.

Preuve :

i) Pour tout $\varphi \in \mathcal{H}_1, \psi \in \mathcal{H}_2$, et $\lambda \in \mathbb{C}$, on a

$$\begin{aligned} \langle \varphi, (\lambda A_1)^* \psi \rangle &= \langle (\lambda A_1) \varphi, \psi \rangle \\ &= \lambda \langle A_1 \varphi, \psi \rangle \\ &= \lambda \langle \varphi, A_1^* \psi \rangle \\ &= \langle \varphi, \bar{\lambda} A_1^* \psi \rangle. \end{aligned}$$

D'où la relation

$$(\lambda A_1)^* \psi = \bar{\lambda} A_1^* \psi.$$

Ou encore

$$(\lambda A_1)^* = \bar{\lambda} A_1^*.$$

ii) Pour tout $\varphi \in \mathcal{H}_1$ et $\psi \in \mathcal{H}_2$, on a

$$\begin{aligned}
\langle \varphi, (\alpha A_1 + \beta A_2)^* \psi \rangle &= \langle (\alpha A_1 + \beta A_2) \varphi, \psi \rangle \\
&= \langle \alpha A_1 \varphi + \beta A_2 \varphi, \psi \rangle \\
&= \langle \alpha A_1 \varphi, \psi \rangle + \langle \beta A_2 \varphi, \psi \rangle \\
&= \langle \varphi, \overline{\alpha} A_1^* \psi \rangle + \langle \varphi, \overline{\beta} A_2^* \psi \rangle \\
&= \langle \varphi, \overline{\alpha} A_1^* \psi + \overline{\beta} A_2^* \psi \rangle \\
&= \langle \varphi, (\overline{\alpha} A_1^* + \overline{\beta} A_2^*) \psi \rangle.
\end{aligned}$$

D'où la relation

$$(\alpha A_1 + \beta A_2)^* \psi = (\overline{\alpha} A_1^* + \overline{\beta} A_2^*) \psi.$$

Ou encore

$$(\alpha A_1 + \beta A_2)^* = (\overline{\alpha} A_1^* + \overline{\beta} A_2^*).$$

iii) Pour tout $\varphi \in \mathcal{H}_1$ et $\psi \in \mathcal{H}_2$, on a

$$\begin{aligned}
\langle A_1 \varphi, \psi \rangle &= \langle \varphi, A_1^* \psi \rangle \\
&= \overline{\langle A_1^* \psi, \varphi \rangle} \\
&= \overline{\langle \psi, (A_1^*)^* \varphi \rangle} \\
&= \langle (A_1^*)^* \varphi, \psi \rangle
\end{aligned}$$

D'où la relation

$$A_1 \varphi = (A_1^*)^* \varphi.$$

Ou encore

$$(A_1^*)^* = A_1.$$

Proposition 2.1.2.2 [2]

Soient $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ et $B \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_3)$. Alors, on a la relation suivante

$$(BA)^* = A^* B^*. \tag{2.1}$$

Preuve :

En effet, pour tout $\varphi \in \mathcal{H}_1$ et $\psi \in \mathcal{H}_3$, on a

$$\begin{aligned}
\langle \varphi, (BA)^* \psi \rangle &= \langle (BA) \varphi, \psi \rangle \\
&= \langle B(A\varphi), \psi \rangle \\
&= \langle A\varphi, B^* \psi \rangle \\
&= \langle \varphi, A^* B^* \psi \rangle.
\end{aligned}$$

D'où la relation

$$(BA)^* \psi = (A^* B^*) \psi$$

Ou encore

$$(BA)^* = A^*B^*.$$

Proposition 2.1.2.3 [2]

Soit $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Alors

Si A est inversible d'inverse A^{-1} , alors A^* est inversible d inverse

$$(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*.$$

Preuve :

On veut montrer que : $(A^*)^{-1}\psi = (A^{-1})^*\psi$ pour tout $\psi \in \mathcal{H}$.

Soit $\omega \in \mathcal{H}$ tel que $\omega = (A^*)^{-1}\psi$ alors $\psi = A^*\omega$ On a

$$\begin{aligned} \langle \varphi, (A^{-1})^*\psi \rangle &= \langle A^{-1}\varphi, \psi \rangle \\ &= \langle A^{-1}\varphi, A^*\omega \rangle \\ &= \langle AA^{-1}\varphi, \omega \rangle \\ &= \langle \varphi, (A^*)^{-1}\psi \rangle. \end{aligned}$$

D'où la relation

$$(A^*)^{-1}\psi = (A^{-1})^*\psi$$

Ou encore

$$(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*.$$

Proposition 2.1.2.4 [10]

Soit $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Alors, on a

1. $\ker(A) = [\text{Im}(A^*)]^\perp$
2. $\overline{\text{Im}(A)} = [\text{Ker}(A^*)]^\perp$.

Preuve :

1. En effet, on a

$$\begin{aligned} \text{Ker}(A) &= \{\varphi \in \mathcal{H} : A\varphi = 0\} \\ &= \{\varphi \in \mathcal{H} : \forall \psi \in \mathcal{H} : \langle A\varphi, \psi \rangle = 0\} \\ &= \{\varphi \in \mathcal{H} : \forall \psi \in \mathcal{H} : \langle \varphi, A^*\psi \rangle = 0\} \\ &= [\text{Im}(A^*)]^\perp. \end{aligned}$$

2. Par (1), si on prend A^* à la place de A , on obtient

$$\begin{aligned} \ker(A^*) &= (\text{Im}(A))^\perp \\ \Leftrightarrow (\ker(A^*))^\perp &= (\text{Im}(A))^\perp{}^\perp = \overline{\text{Im}(A)}. \end{aligned}$$

2.2 Opérateurs linéaires bornés normaux dans les espaces de Hilbert

2.2.1 Définition et exemple

Définition 2.2.1.1

On dit que $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ est un opérateur normal si $AA^* = A^*A$.

Exemple 2.2.1.1 La multiplication T_φ par une fonction mesurable bornée φ est un opérateur normal sur $L^2([0, 1])$, car

$$\begin{aligned} T_\varphi : L^2([0, 1]) &\longrightarrow L^2([0, 1]), \\ (T_\varphi f)(t) &= \varphi(t)f(t) \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} \langle T_\varphi f, g \rangle &= \langle f, T_\varphi g \rangle \quad \forall f, g \in L^2([0, 1]) \\ \langle \varphi(t)f(t), g(t) \rangle &= \langle f(t), \overline{\varphi(t)}g(t) \rangle. \end{aligned}$$

Donc

$$(T_\varphi^* g)(t) = \overline{\varphi(t)}g(t).$$

D'où

$$T_\varphi^* = T_{\bar{\varphi}}.$$

Alors,

$$T_\varphi^* T_\varphi = T_{\bar{\varphi}} T_\varphi = T_\varphi T_{\bar{\varphi}} = T_\varphi T_\varphi^*.$$

Donc T_φ est un opérateur normal.

2.2.2 Propriétés des opérateurs normaux

Proposition 2.2.2.1 [17]

Soit $A \in \mathcal{L}(H)$, Les assertions suivantes sont équivalentes

- a) A est normal.
- b) $\|Ax\| = \|A^*x\|$ pour tout $x \in H$.

Dans le cas complexe, ces assertions sont équivalentes à

- c) Les parties réelles et imaginaires de A commutent.

Preuve :

- a) Pour tout $x \in H$, on a

$$\begin{aligned} \|Tx\| = \|T^*x\| &\Leftrightarrow \|Tx\|^2 = \|T^*x\|^2 \\ &\Leftrightarrow \langle Tx, Tx \rangle = \langle T^*x, T^*x \rangle \\ &\Leftrightarrow \langle x, T^*Tx \rangle = \langle x, TT^*x \rangle \\ &\Leftrightarrow T^*T = TT^*, \text{ pour tout } x \in H \end{aligned}$$

b) On pose $T = A + iB$, tel que $A = \operatorname{Re}(T)$ et $B = \operatorname{Im}(T)$, on a $T^* = A - iB$

$$\begin{aligned} TT^* &= (A + iB)(A - iB) \\ &= A^2 - iAB + iBA + B^2 \\ T^*T &= (A - iB)(A + iB) \\ &= A^2 + iAB - iBA + B^2 \end{aligned}$$

Alors,

$$TT^* - T^*T = 2i(BA - AB)$$

Donc $TT^* = T^*T$ si et seulement si $AB = BA$.

Théorème 2.2.2.1

Si A et B sont normaux et commute avec eux et $\alpha \in \mathbb{K}$, alors

1. Si $a \in \mathbb{C}$ et A est normal, alors aA est aussi normal.
2. $(A + B)$ normal.
3. AB normal.

Preuve :

1. Nous avons

$$\begin{aligned} (aA)(aA)^* &= (aA)\bar{a}A^* = a\bar{a}AA^* \\ (aA)^*(aA) &= (\bar{a}A^*)(aA) = \bar{a}aA^*A. \end{aligned}$$

Puisque A est normal, il sont égaux.

- 2.

$$\begin{aligned} (A + B)(A + B)^* &= (A + B)(A^* + B^*) \\ &= AA^* + AB^* + BA^* + BB^* \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} (A + B)^*(A + B) &= (A^* + B^*)(A + B) \\ &= A^*A + A^*B + B^*A + B^*B \end{aligned}$$

- 3.

$$\begin{aligned} (AB)(AB)^* &= (AB)(B^*A^*), \\ &= ABB^*A^* \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} (AB)^*(AB) &= (B^*A^*)(AB), \\ &= B^*A^*AB. \end{aligned}$$

Lorsque A, A^*, B et B^* commute avec tous les autres, en conséquence de théorème de Fuglede-putnam 1.5.0.6, les deux produits sont égaux.

Corollaire 2.2.2.1

Si P est polynôme et T est normal, alors, $P(T)$ est normal.

Proposition 2.2.2.2 [18]

Si $T \in \mathcal{L}(E)$ est normal, on a

$$\ker T \oplus \overline{\text{Im}T} = \mathcal{H}.$$

Preuve :

On sait que $\ker T^* = (\text{Im}T)^\perp$ et T normal.

D'où

$$\ker T^* = \ker T = (\text{Im}T)^\perp$$

ce implique

$$(\ker T)^\perp = \left((\text{Im}T)^\perp \right)^\perp = \overline{\text{Im}T}$$

et on a

$$\ker T \oplus (\ker T)^\perp = \mathcal{H}$$

i.e

$$\ker T \oplus \overline{\text{Im}T} = \mathcal{H}.$$

Proposition 2.2.2.3 [15] (Inverse d'un opérateur normal)

Si $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ est normal et inversible d'inverse T^{-1} , alors T^{-1} est normal.

Preuve :

On a

$$\begin{aligned} (TT^*)^{-1} &= (T^*T)^{-1} \\ &\Rightarrow (T^*)^{-1}T^{-1} = T^{-1}(T^*)^{-1} \\ &\Rightarrow (T^{-1})^*T^{-1} = T^{-1}(T^*)^{-1} \end{aligned}$$

i.e T^{-1} est normal.

Proposition 2.2.2.4 [18] U est unitaire l'opérateur U^*TU normal si et seulement si T est normal.

Preuve :

On a

$$(U^*TU)^*(U^*TU) = U^*T^*UU^*TU = U^*T^*TU$$

et

$$(U^*TU)(U^*TU)^* = U^*TUU^*T^*U = U^*TT^*U$$

On remarque que $T^*T = TT^*$ si et seulement si U^*TU est normal.

Proposition 2.2.2.5 [15]

Si $T \in \mathcal{L}(E)$ est inversible, les assertions suivantes sont équivalents

1. T est normal.

2. $T^{-1}T^*$ (ou T^*T^{-1}) est unitaire.

3. Il existe un opérateur unitaire U tel que $T^* = UT$.

Preuve :

1 \Rightarrow 2 . On a

$$\begin{aligned} (T^{-1}T^*) (T^{-1}T^*)^* &= T^{-1}T^*T (T^{-1})^* \\ &= T^{-1}TT^* (T^*)^{-1} \\ &= II = I \end{aligned}$$

et

$$(T^{-1}T^*)^* (T^{-1}T^*) = I.$$

2 \Rightarrow 3 . On pose $U = T^{-1}T^*$ D'où

$$T^* = TU = UT.$$

3 \Rightarrow 1 Il existe U tel que $T^* = UT$, pour tout $x \in \mathcal{H}$ on a

$$\begin{aligned} \|T^*x\|^2 &= \|UTx\|^2 \\ &= \langle UTx, UTx \rangle = \langle Tx, U^*UTx \rangle = \langle Tx, Tx \rangle = \|Tx\|^2 \end{aligned}$$

Donc,

$$\|T^*x\| = \|Tx\| \quad \forall x \in \mathcal{H}.$$

i.e. T est normal.

2.3 La relation entre l'opérateur normal avec autres classes des opérateurs

Dans cette partie , la relation entre l'opérateur normal avec autres classes des opérateurs (auto-adjoint , hyponormal , n -normal , positif).

2.3.1 Relation entre opérateur normal et un opérateur auto-adjoint

Proposition 2.3.1.1

Soit $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ un opérateur auto-adjoint, Alors est un opérateur normal.

Preuve :

On a

$$AA^* = A^*A \quad \text{car } A = A^*.$$

Mais l'inverse n'est pas vrai .

Contre exemple :

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \quad a, b \in \mathbb{C}$$

$$A^*A = \begin{pmatrix} \bar{a} & 0 \\ 0 & \bar{b} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{a}a & 0 \\ 0 & \bar{b}b \end{pmatrix}$$

$$AA^* = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{a} & 0 \\ 0 & \bar{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\bar{a} & 0 \\ 0 & b\bar{b} \end{pmatrix}.$$

Donc A est un opérateur normal, mais n'est pas auto-adjoint car $A \neq A^*$.

2.3.2 Relation entre opérateur normal et un opérateur hyponormal

Proposition 2.3.2.1 [8]

Tout opérateur normal est hyponormal.

$$\text{normal} \subset \text{hyponormal} .$$

Preuve :

On a :

$$\|T^*x\|^2 = \langle T^*x, T^*x \rangle = \langle T^*Tx, x \rangle \leq \|T^*Tx\| \leq \|Tx\|^2.$$

Donc A est un opérateur hyponormal, mais n'est pas normal car $AA^* \neq A^*A$.

Contre exemple :

Soit l'opérateur $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$.

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots \\ T_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & I & 0 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

On a

$$TT^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & T_1^2 & 0 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & l & 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & I & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad T^*T = \begin{pmatrix} T_1^2 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & l & 0 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & l & 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Alors

$$T^*T - TT^* = \begin{pmatrix} T_3^2 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots \\ 0 & I - T_1^2 & 0 & 0 & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}.$$

Donc T opérateur hyponormal, mais n'est pas normal car $TT^* \neq T^*T$.

2.3.3 Relation entre opérateur normal et un opérateur n-normal

T normal $\Rightarrow T^n$ normal, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Preuve :

T normal $\Rightarrow TT^* = T^*T$

$$\Rightarrow (TT^*)^n = (T^*T)^n$$

$$\Rightarrow T^n (T^*)^n = (T^*)^n T^n$$

$$\Rightarrow T^n (T^n)^* = (T^n)^* T^n.$$

Donc T^n est un opérateur normal, pour tout $n \in \mathbb{N}$, mais n'est pas normal car $TT^* \neq T^*T$.

Contre exemple :

En effet, soit

$$T = \begin{pmatrix} i & 2 \\ 0 & -i \end{pmatrix}.$$

On a $T^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ est normal, mais T n'est pas normal.

2.3.4 Relation entre opérateur normal et un opérateur positif

Proposition 2.3.4.1

Soit $B \in \mathcal{L}(H)$, tel que $T \geq 0$, alors il existe un opérateur A avec $T = A^2$, de plus

$$T \text{ est normal} \iff T^{1/2} = A \text{ est normal.}$$

Preuve :

B est normal alors,

$$\begin{aligned} T^*T = TT^* &\iff (A^2)^* (A^2) = (A^2) (A^2)^* \\ &\iff (A^*)^2 (A^2) = (A^2) (A^*)^2 \\ &\iff (A^*A)^2 = (AA^*)^2 \\ &\iff A^*A = AA^*. \end{aligned}$$

Donc $A = T^{1/2}$ est normal.

2.4 Théorie spectrale des opérateurs normaux

Dans cette section, nous étudierons les propriétés spectrales (spectre ponctuel, spectre continu, spectre résiduel) de l'opérateur normal.

Rappelons que le spectre ponctuel $\sigma_p(T)$ est l'ensemble des valeurs propres.

Proposition 2.4.0.1

$T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ un opérateur normal. Alors

1. Si $Tx = \lambda x$, tel que $\lambda \in \mathbb{C}$ et $x \in \mathcal{H}$. Alors, $T^*x = \bar{\lambda}x$.
2. Deux espaces propres de T associés des valeurs propres distincts sont orthogonaux.

Proposition 2.4.0.2

Soit $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ un opérateur normal, Alors

$$\lambda \in \sigma(T) \Leftrightarrow \exists c > 0 \text{ tel que } \|(T - \lambda I)x\| > c\|x\| \quad \forall x \in \mathcal{H}. \quad (2.2)$$

Preuve :

Sans perte de généralité, supposons que $\lambda = 0$, supposons qu'il y ait est $c > 0$ satisfaisant la condition 2.4.0.2, alors T est injectif. Il résulte de 2.4.0.2 cette range $T(\mathcal{H})$ est complète et donc fermé en \mathcal{H} , il reste à prouver que

$$\text{Im}(T) = \mathcal{H}.$$

Choisissez $x \in \text{Im}(T)^\perp$ alors

$$0 = (x, TT^*x) = (x, T^*T) = (xT, xT^*) = \|Tx\|^2 > c^2\|x\|^2$$

En d'autres termes, $x = 0$ et $\text{Im}(T) = \mathcal{H}$.

Donc 2.4.0.2 implique $0 \notin \sigma(T)$ l'inverse l'implication est clair.

Corollaire 2.4.0.1

Si $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ est normal et $\lambda \in \sigma(T) \setminus \sigma_p(T)$, alors

$$(T - \lambda I)(\mathcal{H}) \text{ n'est pas fermé.}$$

Preuve :

Si $T - \lambda I$ est injectif et $(T - \lambda I)(\mathcal{H})$ est fermé, alors par le théorème inverse de cartographie, il y a une carte linéaire continue

$$S : (T - \lambda I)(\mathcal{H}) \longrightarrow \mathcal{H} \text{ tel que } S(T - \lambda I)x = x \quad \text{pour tout } x \in \mathcal{H}.$$

Cela signifie que

$$\|x\| \leq \|S\| \|(T - \lambda I)x\|.$$

Comme $\|S\| \neq 0$, on voit que

$$\|(T - \lambda I)x\| \geq \frac{1}{\|S\|} \|x\|.$$

En vue de la proposition 2.4.0.2, $\lambda \notin \sigma(T)$.

Proposition 2.4.0.3 [20]

Si $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ est un opérateur normal. Alors

$$\sigma(T) = \sigma_{ap}(T).$$

Théorème 2.4.0.1 [12]

Soit $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ un opérateur compact, alors

$$\sigma_{ap}(T) \setminus \{0\} = \sigma_p(T) \setminus \{0\}.$$

Théorème 2.4.0.2

Soit $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ un opérateur normal, alors les assertions suivantes sont vraies.

- i) Il existe $\lambda \in \sigma(T)$ tel que $|\lambda| = \|T\|$ (c'est-à-dire, $\sigma_p(T) \cap \{z \in \mathbb{C} : |z| = \|T\|\}$ n'est pas vide).
- ii) Si de plus, T est compact alors il existe $\lambda \in \sigma_p(T)$ tel que $|\lambda| = \|T\|$ (c'est-à-dire, $\sigma_p(T) \cap \{z \in \mathbb{C} : |z| = \|T\|\}$ est pas vide).

Preuve :

Nous pouvons supposer que T n'est pas nul. Puisque T est normal, alors

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} |\langle Tx, x \rangle|.$$

Il s'ensuit qu'il existe une suite $(x_n)_n$ des vecteurs unitaires telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\langle T(x_n), x_n \rangle| = \|T\|.$$

On peut supposer que la suite des nombres $(\langle T(x_n), x_n \rangle)_n$ est convergente (sinon, on peut prendre une suite de $(x_n)_n$). Soit λ la limite de cette suite, alors $|\lambda| = \|T\|$. Pour prouver que λ appartient au spectre de T , il est suffisant pour montrer que $(x_n)_n$ est une T_λ -suite spectre. Pour voir cela, nous utilisons les inégalités suivantes

$$\begin{aligned} \|T(x_n) - \lambda x_n\|^2 &= \|T(x_n)\|^2 - 2\Re(\bar{\lambda} \langle Tx_n, x_n \rangle) + |\lambda|^2 \|x_n\|^2 \\ &= \|T(x_n)\|^2 - 2\Re(\bar{\lambda} \langle Tx_n, x_n \rangle) + |\lambda|^2 \\ &\leq 2|\lambda|^2 - 2\Re(\bar{\lambda} \langle Tx_n, x_n \rangle) \\ &\longrightarrow 2|\lambda|^2 - 2|\lambda|^2, \text{ quand } n \longrightarrow \infty. \end{aligned}$$

Ainsi, $\lambda \in \sigma_{ap}(T) \setminus \{0\} \subset \sigma(T)$, si en plus T est compact, alors, par théorème 2.4.0.1 nous en déduisons que $\lambda \in \sigma_{ap}(T) \setminus \{0\} \subset \sigma(T) \setminus \{0\}$. Ceci complète la preuve de (i) et (ii).

2.4.1 Le spectre continu

Théorème 2.4.1.1

Soit $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ espace Hilbert complexe, soit $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. Alors les assertions suivantes équivalentes

- i) $\lambda \in \sigma_p(T)$.
- ii) Il existe T_λ -suite spectre, $(x_n)_n$ est convergente fortement dans \mathcal{H} .
- iii) Il existe T_λ -suite spectre, $(x_n)_n$ n'est pas convergente faiblement vers 0.

Théorème 2.4.1.2

Soit $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ un opérateur normal, les assertions suivantes sont équivalentes

- (i) $\lambda \in \sigma_c(T)$.
- (ii) $\lambda \in \sigma(T) \setminus \sigma_p(T)$.
- (iii) $T - \lambda I$ est injectif, et l'image de $(T - \lambda I)(\mathcal{H})$ n'a pas fermée.
- (iv) L'ensemble $S_T(\lambda)$ n'est pas vide, et tout suite spectrale T_λ convergent faiblement vers zéro.

Preuve :

ii) \Rightarrow i) puisque $\lambda \in \sigma(T) \setminus \sigma_p(T)$, alors $T - \lambda I$ est injectif, mais ne pas surjectif. Supposons que l'image $(T - \lambda I)(\mathcal{H})$ n'est pas dense dans \mathcal{H} , alors il existe $z \in (T - \lambda I)(\mathcal{H})^\perp$. Par conséquent nous avons,

$$z \in (T - \lambda I)(\mathcal{H})^\perp = \ker(T^* - \bar{\lambda}I) = \ker(T - \lambda I).$$

D'où contradiction, donc nous concluons que $\lambda \in \sigma_c(T)$.

i) \Rightarrow iii) est évidente à partir de la définition du spectre continu.

iii) \Rightarrow ii) on a $T - \lambda I$ est injectif, alors $\lambda \notin \sigma_p(T)$. Supposons que, $\lambda \in \sigma_p(T)$ alors il existe un opérateur (inversible) $S \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ tel que $S(T - \lambda I)x = x$, pour tout $x \in \mathcal{H}$. En particulier nous avons,

$$\frac{1}{\|S\|} \|x\| \leq \|(T - \lambda I)x\|, \quad \forall x \in \mathcal{H}.$$

D'où $(T - \lambda I)(\mathcal{H})$ est complet et fermée dans \mathcal{H} , qui est une contradiction. Nous concluons que $\lambda \in \sigma(T) \setminus \sigma_p(T)$.

Les équivalence (ii) \Leftrightarrow (iv) \Leftrightarrow (v) sont assurés par le Théorème 2.4.1.2. Par conséquence, notre résultat est complètement prouvé.

En conséquence du Théorème 2.4.1.1, nous retrouvons les éléments suivants bien connus résultat.

Corollaire 2.4.1.1

Soit $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ un opérateur normal. Alors, le spectre résiduel σ_r est vide et,

$$\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \sigma_c(T) = \sigma_{ap}(T).$$

2.4.2 Le spectre résiduel

Soit $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. Rappelons que $\lambda \in \sigma_r(T)$ si et seulement si :

- (a) $T_\lambda = T - \lambda I_{\mathcal{H}}$ est injectif.
- (b) la fermeture $\overline{\text{Im}(T_\lambda)}$ de le rang $\text{Im}(T_\lambda)$ n'est pas égale \mathcal{H} .

Nous avons la proposition suivante.

Proposition 2.4.2.1

Soit $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ et $\lambda \in \mathbb{C}$.

Supposons que l'ensemble $\sigma_T(\lambda)$ est vide et T_λ n'est pas surjectif.

Alors $\lambda \in \sigma_r(T)$.

Preuve :

Puisque $\sigma_T(\lambda)$ est vide, alors $\varepsilon := \inf_{x \in S_{\mathcal{H}}} \|Tx - \lambda x\| > 0$, on a $S_{\mathcal{H}} := \{x \in \mathcal{H} : \|x\| = 1\}$.

Par conséquent, nous avons

$$\|Tx - \lambda x\| \geq \varepsilon \|x\| \quad \forall x \in \mathcal{H}. \quad (2.3)$$

(2.3) montre que T_λ est injectif et que $\text{range Im}(T_\lambda)$ est fermée dans \mathcal{H} . Puisque n'est pas surjectif, nous concluons que $\text{Im}(T_\lambda)$ n'est pas dense dans \mathcal{H} . Ainsi, $\lambda \in \sigma_r(T)$.

Proposition 2.4.2.2 [15]

Le rayon spectral d'un opérateur normal $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ vérifie

$$r(T) = \|T\|.$$

Preuve :

On suppose d'abord que T est auto-adjoint. on a $\|T^2\| = \|T\|^2$ et par récurrence sur n l'on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}$ la relation $\|T^{2n}\| = \|T\|^{2n}$, il vient

$$r(T) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|T^{2n}\|^{2^{-n}} = \|T\|.$$

On revient au cas normal, l'élément TT^* est auto-adjoint et il s'ensuit que l'on a,

$$\begin{aligned} r(T) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\|T^n (T^n)^*\|^{\frac{1}{n}}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\|(TT^*)^n\|^{\frac{1}{n}}} \\ &= \sqrt{r(TT^*)} \\ &= \sqrt{\|TT^*\|} \\ &= \|T\|. \end{aligned}$$

2.5 Image numérique d'un opérateur normal

Dans ce qui suit, T désigne un opérateur borné sur \mathcal{H} .

Définition 2.5.0.1

Le rayon numérique de T est défini par

$$w(T) = \sup_{\lambda \in W(T)} |\lambda|.$$

Voici quelques propriétés de base souvent utilisées dans le calcul de l'image numérique et facile à démontrer.

Théorème 2.5.0.1

Si T est un opérateur normal. Alors,

$$w(T) = \|T\|.$$

Preuve :

Puisque T est normal, on a pour $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} \|T\|^{2n} &= \left(\|T^*T\|^{2n} \right)^{1/2} = \left\| (T^*T)^{2n} \right\|^{1/2} = \left\| (T^*)^{2n} T^{2n} \right\|^{1/2} = \left\| T^{2n} \right\| \\ &\leq 2w(T^{2n}) \leq 2w(T)^{2n}. \end{aligned}$$

D'où, $\|T\| \leq 2^{\frac{1}{2n}} w(T)$.

En faisant tendre n vers l'infini, on obtient $\|T\| \leq w(T)$.

D'un autre côté, j'ai toujours compris $w(T) \leq \|T\|$.

Rappelons aussi que l'envolpe convexe de $\sigma(T)$, noté $\text{Conv} \{ \sigma(T) \}$ est le plus petit convexe contenant $\sigma(T)$.

Le théorème suivant montre que l'image numérique d'un opérateur normal est une bonne approximation de son spectre.

2.5.1 Relation entre l'image numérique et le spectre d'un opérateur

Dans cette subsection, nous étudierons la relation entre l'image numérique et le spectre d'un opérateur normal.

Théorème 2.5.1.1 [16]

On a toujours $\sigma(T) \subseteq \overline{W(T)}$, où le $\overline{W(T)}$ dénote la fermeture de l'image numérique de l'opérateur T .

Preuve :

Soit $\lambda \in \sigma_{\text{app}}(T)$ (le spectre approché de T) et soit (x_n) une suite de vecteurs unitaires telles que $\|(T - \lambda I)x_n\| \rightarrow 0$. De l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$|\langle (T - \lambda I)x_n, x_n \rangle| \leq \|(T - \lambda I)x_n\| \rightarrow 0.$$

Donc $\langle Tx_n, x_n \rangle \rightarrow \lambda$ et par suite $\lambda \in \overline{W(T)}$, on a alors

$$\sigma_{app}(T) \subseteq \overline{W(T)}.$$

Ainsi, d'après la proposition, on a $\partial\sigma(T) \subset \sigma_{app}(T) \subset \overline{W(T)}$. De la convexité de $\overline{W(T)}$, il s'en suit que $\sigma(T) \subseteq \overline{W(T)}$. En général, pour S et T dans $B(H)$, l'ensemble $\sigma(T+S)$ n'a aucun lien avec $\sigma(T)$ et $\sigma(S)$. Mais d'après [11] on a

$$\sigma(T+S) \subseteq \overline{W(T+S)} \subseteq \overline{W(T)} + \overline{W(S)}.$$

L'ensemble $W(T)$ n'est pas toujours fermé. En fait, on peut voir des opérateurs dont les images numériques sont toujours fermées.

Théorème 2.5.1.2

Soit $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ un opérateur normal, on a que

$$\overline{W(T)} = \overline{\text{Conv}\{\sigma(T)\}}.$$

Corollaire 2.5.1.1

Soit m et M deux nombres complexes. Si

$$\overline{W(T)} = [m, M].$$

Alors

$$\{m, M\} \subseteq \sigma(T).$$

Preuve :

Si $\overline{W(T)} = [m, M]$, alors le théorème 2.5.1.2 implique que T est un opérateur normal.

Ainsi, d'après le théorème 2.5.1.2 $\overline{W(T)}$ est l'enveloppe convexe de $\sigma(T)$, ou encore

$$[m, M] = \overline{W(T)} = \overline{\text{Conv}\{\sigma(T)\}}.$$

Il suit donc que :

$$\{m, M\} \subseteq \sigma(T).$$

CHAPITRE 3

APPLICATIONS

Le troisième chapitre s'occupe de deux applications sur ce qui nous avons étudié dans les deux chapitres précédents, ces applications sont illustrées par les propriétés structurelles citées aux chapitre un et chapitre deux.

La première application concerne des résultats trouvés sur la représentation d'un opérateur linéaire continu normal sur un espace de Hilbert séparable (on considère une base orthonormée puis on trouve la propriétés matricielle des opérateurs linéaires continus normals associés). On trouve enfin des résultats sur le spectre opérateur linéaire continu normal sur un espace de Hilbert séparable .

La deuxième application s'occupe principalement sur l'étude des opérateurs intégraux continus et le noyau de ce type des opérateurs intégraux aussi on fait le calcul des normes des opérateurs intégraux et les conditions permettant que ces opérateurs intégraux soient normals dans ce cas on trouvera facilement le spectre de ces opérateurs intégraux . On met l'accent sur un opérateur intégral à noyau normal continu.

3.1 Représentation d' un opérateur

3.1.1 Représentation d'un opérateur sur un espace de Hilbert séparable

Tout espace linéaire \mathbb{X} sur K de $\dim \mathbb{X} = n$ est isomorphe à l'espace \mathbb{K}^n , et chaque opérateur linéaire sur \mathbb{X} peut être représenté, dans une base choisie pour \mathbb{X} , par une matrice d'ordre n . Étant donné qu'un espace de Hilbert séparable est isomorphe à ℓ^2 il est facile de prévoir des propriétés analogues.

Soit donc \mathcal{H} un espace de Hilbert séparable et soit $E = \{e_n; n \in \mathbb{N}\}$ une base orthonormale pour \mathcal{H} .

Nous avons pour tout $\varphi \in \mathcal{H}$,

$$\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n e_n \quad \text{avec} \quad \sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^2 < \infty.$$

D'autre part, nous obtenons pour $T \in L(\mathcal{H})$ et $e_i \in E$

$$T e_i = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{ik} e_k \quad \text{avec} \quad \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_{ik}|^2 < \infty ; i \in \mathbb{N}$$

ou $\alpha_{ik} = \langle T e_i, e_k \rangle$, $i, k \in \mathbb{N}$.

Nous avons ainsi associé à T une matrice infinie A , par rapport à la base orthonormale E , où

$$A = (\alpha_{ik}), i, k \in \mathbb{N}.$$

Étudions maintenant la transformation des coordonnées.

Soit $\psi = T\varphi$, où $\varphi = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k e_k$ et $\psi = \sum_{j=1}^{\infty} \eta_j e_j$. Nous allons exprimer η_j à l'aide des ξ_k et de la matrice A .

Pour

$$\varphi_n = \sum_{i=1}^n \xi_i e_i, \quad n \in \mathbb{N},$$

Nous avons

$$T \xi_n e_n = \sum_{i=1}^n \xi_i T e_i = \sum_{i=1}^n \xi_i \left(\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{ik} e_k \right).$$

Puisque T est un opérateur linéaire continu et puisque $\varphi_n \xrightarrow{\|\cdot\|} \varphi$, nous avons

$$T \varphi_n \xrightarrow{\|\cdot\|} \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \left(\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{ik} e_k \right) = T \varphi,$$

ce qui entraîne que

$$\langle T \varphi, e_k \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle T \xi_n e_n, e_k \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \xi_i \left(\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{ik} e_k \right) = \eta_k$$

et

$$\eta_k = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \alpha_{ik} ; i, k \in \mathbb{N} \tag{3.1}$$

ce qui entraîne que

$$\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} = (\alpha_{ik})^* \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}.$$

Théorème 3.1.1.1

Soient \mathcal{H} un espace de Hilbert séparable, $T \in L(\mathcal{H})$ et $(\alpha_{ik}), i, k \in \mathbb{N}$ la matrice correspondante à T , par rapport à une base orthonormale de \mathcal{H} . Alors l'opérateur adjoint T^* est représenté dans la même base par la matrice $\overline{\alpha_{ki}}, i, k \in \mathbb{N}$.

Preuve :

Soit $\alpha_{ik} = \langle Te_i, e_k \rangle, i, k \in \mathbb{N}$ et soit $(\beta_{ik}), i, k \in \mathbb{N}$, la matrice correspondante à T^* , i.e. $\beta_{ik} = \langle T^*e_i, e_k \rangle$. Alors

$$\beta_{ik} = \langle T^*e_i, e_k \rangle = \langle e_i, Te_k \rangle = \overline{\langle Te_k, e_i \rangle} = \overline{\alpha_{ki}}.$$

Corollaire 3.1.1.1

Soit $(\alpha_{ik}), i, k \in \mathbb{N}$ la matrice correspondante à $T \in L(\mathcal{H})$. Alors

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_{ik}|^2 < \infty, k \in \mathbb{N}.$$

Corollaire 3.1.1.2

Soient $T \in L(\mathcal{H})$ et (α_{ik}) la matrice correspondante à T par rapport à une base orthonormale pour \mathcal{H} . Alors T est normal si et seulement si

$$\alpha_{ik} = \overline{\alpha_{ki}}, \quad i, k \in \mathbb{N}.$$

3.1.2 Polynôme caractéristique

- On note le $\mathbb{K} = (\mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$ -espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n par

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \left\{ A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \mid a_{ij} \in \mathbb{K} \right\}.$$

Définition 3.1.2.1

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Le polynôme caractéristique de la matrice A est $P(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$

tel que

$$\det(A - \lambda I_n) = \begin{vmatrix} a_{1,1} - \lambda & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} - \lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{n,n} - \lambda \end{vmatrix} \\ = \sum_{j=0}^n \alpha_j \lambda^j.$$

est un polynôme.

Théorème 3.1.2.1

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$

$$\lambda \in \sigma(A) \Leftrightarrow P(\lambda) = 0.$$

Preuve :

Soit λ une valeur propre de A . Alors

$$\begin{aligned} \lambda \in \sigma(A) &\Leftrightarrow (A - \lambda I_n) \text{ non injective} \\ &\Leftrightarrow (A - \lambda I_n) \text{ non bijective} \\ &\Leftrightarrow \det(A - \lambda I_n) = 0. \end{aligned}$$

Remarque 3.1.2.1

Tout matrice normal $n \times n$ carrée possède n valeur propre simple et n vecteurs propres correspondant orthogonaux deux à deux donc, on obtient n spectres.

Théorème 3.1.2.2

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ normal possède n valeurs propres et n vecteurs propres orthogonaux deux à deux.

Preuve :

Orthogonalité des vecteurs propres. Si φ_1 et φ_2 sont deux vecteurs propres d'une matrice normal A , associés respectivement à λ_1 et λ_2 , avec $\lambda_1 \neq \lambda_2$ alors φ_1 et φ_2 sont orthogonaux. En effet, on sait déjà que λ_1 et λ_2 sont réelles. Donc, si

$$A\varphi_1 = \lambda_1\varphi_1 \text{ et } A\varphi_2 = \lambda_2\varphi_2$$

alors

$$\begin{aligned} \left\langle \underbrace{A\varphi_1}_{\lambda_1\varphi_1}, \varphi_2 \right\rangle &= \left\langle \varphi_1, \underbrace{A^* \varphi_2}_A \right\rangle \\ \lambda_1 \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle &= \lambda_2 \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle \\ \underbrace{(\lambda_1 - \lambda_2)}_{\neq 0} \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle &= 0 \Rightarrow \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle = 0. \end{aligned}$$

3.1.3 Matrices diagonales

Définition 3.1.3.1

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice diagonale. Si pour tout $i, j = \overline{1, n}$ ($i \neq j \Rightarrow a_{i,j} = 0$) il s'écrit sous la forme suivante

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

se note $\text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ ou encore $\text{diag}(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$.

Exemple 3.1.3.1

Considérons la matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$

$$A = \begin{pmatrix} -i & -i & 0 \\ -i & i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

• adjoint matrice A est :

$$A^* = \overline{A^t} = \begin{pmatrix} i & i & 0 \\ i & -i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

• A est normale puisque $AA^* = A^*A$.

Eneffet :

$$AA^* = \begin{pmatrix} -2i^2 & 0 & 0 \\ 0 & -2i^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^*A = \begin{pmatrix} -2i^2 & 0 & 0 \\ 0 & -2i^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

• Calculons d'abord les valeur propres de A .

Le polynôme caractéristique P est

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} -i - \lambda & -i & 0 \\ -i & i - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \lambda \end{vmatrix}$$

c-à-dire

$$P(\lambda) = (1 - \lambda)(\lambda^2 + 2).$$

Comme il fallait s'y attendre, les valeurs propres sont réelles

$$P(\lambda) = 0 \Leftrightarrow (1 - \lambda)(\lambda^2 + 2) = 0$$

donc valeurs propres $\{\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \sqrt{2}i, \lambda_3 = -\sqrt{2}i\}$.

D'après le théorème 3.1.2.1 on obtient

$$\sigma(A) = \{1, \sqrt{2}i, -\sqrt{2}i\}.$$

• On calcule les valeurs propres correspondants $(u, v, w) = \varphi$. dans la base canonique de \mathbb{C}^3

1° $\lambda = +1$

$$\begin{aligned} u &= 0, \\ v &= 0, \\ w &= w, \end{aligned} \quad \text{d'où le vecteur propre} \quad \varphi_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2° $\lambda = i\sqrt{2}$

$$\begin{aligned} u &= (-\sqrt{2} + 1)v, \\ v &= v, \\ w &= 0, \end{aligned} \quad \text{d'où le vecteur propre} \quad \varphi_2 = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} + 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

3° $\lambda = -i\sqrt{2}$

$$\begin{aligned} u &= (\sqrt{2} + 1)v, \\ v &= v, \\ w &= 0, \end{aligned} \quad \text{d'où le vecteur propre} \quad \varphi_3 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} + 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On peut vérifier que $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ sont orthogonaux deux à deux .

Par exemple le produit scalaire normal $\varphi_2\varphi_3$ est

$$\varphi_2\varphi_3 = (1 + \sqrt{2}) \cdot \overline{(1 - \sqrt{2})} + 1 \cdot \bar{1} + 0 \cdot \bar{0} = -1 + 1 + 0 = 0.$$

Alors, on obtient la base orthonormale de \mathbb{C}^3 constituée des vecteurs propres de A .

La matrice de passage U est unitaire

$$U = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{2} + 1 & \sqrt{2} + 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dans la nouvelle base de \mathbb{C} , on a la matrice diagonale réelle

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -i\sqrt{2} \end{pmatrix},$$

telle que

$$A = UDU^{-1}.$$

- Le rayon spectral matrice A selon la définition 1.6.1.9 , alors :

$$r(A) = \sup\{|\lambda|, \lambda \in \sigma(A)\} = \sqrt{2}.$$

D' autre part selon la proposition 2.4.2.2 , alors :

$$r(A) = \|A\| = \sqrt{2}.$$

- Image numérique matrice A est : Si $X = (x_1, x_2, x_3)$. On a

$$\begin{aligned} \langle AX, X \rangle &= \left\langle \begin{pmatrix} -i & -i & 0 \\ -i & i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} -ix_1 - ix_2 \\ -ix_1 + ix_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right\rangle \end{aligned}$$

$$\langle Ax, x \rangle = -i|x_1|^2 - i|x_2|^2 + |x_3|^2 - 2ix_1\overline{x_2}.$$

$$\begin{aligned} |\langle Ax, x \rangle| &= \left| |x_1|^2 + |x_2|^2 + |x_3|^2 + 2x_1x_2 \right| \\ &\leq 1 + (|x_1|^2 + |x_2|^2) \\ &\leq 2. \end{aligned}$$

Alors

$$W(A) = \{z \in \mathbb{C}, |z| \leq 2\}.$$

- Le rayon numérique matrice A selon la définition 2.5.0.1, alors :

$$w(A) = \sup_{\lambda \in W(T)} |\lambda| = 2.$$

D' autre part selon la théorème 2.5.0.1, alors :

$$w(A) = \|A\| = 2.$$

3.2 Opérateurs intégraux, propriétés et étude spectrale

Les opérateurs intégraux constituent des objets fondamentaux en analyse fonctionnelle, où ils permettent notamment de transformer les équations fonctionnelles en une version plus simple afin de les résoudre facilement. Les opérateurs intégraux interviennent dans plusieurs domaines tels que les équations aux dérivées partielles, les phénomènes de diffusion et les équations intégrales.

3.2.1 Opérateur Intégral

On appelle opérateur intégral tout opérateur linéaire \mathcal{A}_k défini sur un espace Hilbert \mathcal{H} à valeurs dans un espace Hilbert \mathcal{H} donné sous la forme

$$\mathcal{A}_k f(\varphi) = \int_{\mathcal{I}_2} K(\varphi, \psi) f(\psi) d\psi, \quad \varphi \in \mathcal{I}_1,$$

où $k(\varphi, \psi)$ est une fonction mesurable définie sur un ensemble mesuré $\mathcal{I}_1 \times \mathcal{I}_2$ et $f(\psi)$ est une fonction mesurable définie sur \mathcal{I}_2 .

Définition 3.2.1.1 (Noyau d'un opérateur)

La fonction mesurable $K(\varphi, \psi)$ est dite noyau de l'opérateur intégral \mathcal{A}_k .

3.2.2 Normes des opérateurs intégraux sur $L^2(\mathcal{I})$

Soit \mathcal{A}_k un opérateur intégral défini sur $L^2(\mathcal{I}_1)$. La norme de l'opérateur \mathcal{A}_k est donnée par

$$\|\mathcal{A}_k\|_{L^2(\mathcal{I}_1)} = \left(\int_{\mathcal{I}_1} \left(\int_{\mathcal{I}_2} |k(\varphi, \psi)|^2 d\psi \right) d\varphi \right)^{\frac{1}{2}},$$

où $k(\varphi, \psi)$ une fonction mesurable définie sur un ensemble mesuré $\mathcal{I}_1 \times \mathcal{I}_2$

Théorème 3.2.2.1

Soit \mathcal{A}_k un opérateur intégral de norme finie

$$\|\mathcal{A}_k\|_{L^2(\mathcal{I}_1)} < \infty$$

alors l'opérateur intégral \mathcal{A}_k est un opérateur linéaire continu de $L^2(\mathcal{I}_2)$ dans $L^2(\mathcal{I}_1)$. De plus, on a

$$\|\mathcal{A}_k f\|_{L^2(\mathcal{I}_1)} \leq \|\mathcal{A}_k\|_{L^2(\mathcal{I}_1)} \|f\|_{L^2(\mathcal{I}_2)}.$$

Preuve :

Par l'utilisation de l'inégalité de Cauchy-Schwartz (1.1), on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{I}_1} |\mathcal{A}_k f(\varphi)|^2 d\varphi &= \int_{\mathcal{I}_1} \left(\int_{\mathcal{I}_2} |K(\varphi, \psi)| |f(\psi)| d\psi \right)^2 d\varphi \\ &\leq \int_{\mathcal{I}_1} \left[\left(\int_{\mathcal{I}_2} |K(\varphi, \psi)|^2 d\psi \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathcal{I}_2} |f(\psi)|^2 d\psi \right)^{\frac{1}{2}} \right]^2 d\varphi \\ &= \|f\|_{L^2(\mathcal{I}_2)}^2 \int_{\mathcal{I}_1} \left(\int_{\mathcal{I}_2} |K(\varphi, \psi)|^2 d\psi \right) d\varphi \\ &= \|\mathcal{A}_k\|_{L^2(\mathcal{I}_1)}^2 \|f\|_{L^2(\mathcal{I}_2)}^2. \end{aligned}$$

D'où la continuité de l'opérateur intégral $\mathcal{A}_k f(\varphi) = \int_{\mathcal{I}_2} K(\varphi, \psi) f(\psi) d\psi$ de $L^2(\mathcal{I}_2)$ dans $L^2(\mathcal{I}_1)$. De plus, on a

$$\left(\int_{\mathcal{I}_1} |\mathcal{A}_k f(\varphi)|^2 d\varphi \right)^{\frac{1}{2}} \leq \|\mathcal{A}_k\|_{L^2(\mathcal{I}_1)} \|f\|_{L^2(\mathcal{I}_2)}$$

ou encore

$$\|\mathcal{A}_k f\|_{L^2(\mathcal{I}_1)} \leq \|\mathcal{A}_k\|_{L^2(\mathcal{I}_1)} \|f\|_{L^2(\mathcal{I}_2)}.$$

Remarque 3.2.2.1

La condition $\|\mathcal{A}_k\|_{L^2(\mathcal{I}_1)} < \infty$ donnée sur la norme de l'opérateur intégral \mathcal{A}_k est uniquement suffisante et non nécessaire pour la continuité de cet opérateur.

3.2.3 Opérateur intégral à noyau normal continu

Proposition 3.2.3.1

Soit \mathcal{A}_k un opérateur intégral défini à partir d'un noyau K continu sur $[a, b] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ par la formule suivante, pour tout $f \in L^2([a, b], \mathbb{C})$

$$\forall \varphi \in [a, b], \quad \mathcal{A}_k f(\varphi) = \int_a^b K(\varphi, \psi) f(\psi) d\psi$$

Alors, l'opérateur \mathcal{A}_k admet un unique opérateur adjoint \mathcal{A}_k^* pour le produit scalaire usuel de $L^2([a, b], \mathbb{C})$

Pour tout $\varphi \in [a, b]$

$$\mathcal{A}_k^* f(\varphi) = \int_a^b \overline{K(\psi, \varphi)} f(\psi) d\psi.$$

Preuve :

Pour tout $f, g \in L^2([a, b], \mathbb{C})$, on a

$$\langle \mathcal{A}_k f, g \rangle = \langle f, \mathcal{A}_k^* g \rangle.$$

Donc

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}_k f, g \rangle &= \int_a^b \left(\int_a^b K(\varphi, \psi) f(\psi) d\psi \right) \overline{g(\varphi)} d\varphi \\ &= \int_a^b f(\psi) \left(\int_a^b K(\varphi, \psi) \overline{g(\varphi)} d\varphi \right) d\psi \quad \text{Par la théorie de Fubini(1.5.0.1)} \\ &= \int_a^b f(\psi) \overline{\left(\int_a^b \overline{K(\varphi, \psi)} g(\varphi) d\varphi \right)} d\psi \\ &= \langle f, \mathcal{A}_k^* g \rangle. \end{aligned}$$

On en déduit que \mathcal{A}_k^* est l'opérateur intégral de noyau K^* avec $K^*(\varphi, \psi) = \overline{K(\psi, \varphi)}$.

Autrement dit

$$\mathcal{A}_k^* f(\varphi) = \int_a^b \overline{K(\psi, \varphi)} f(\psi) d\psi.$$

Corollaire 3.2.3.1

L'opérateur integral \mathcal{A}_k de noyau K est normal si, et seulement si, le noyau K est normal :

$$K(\varphi, \psi) = \overline{K(\psi, \varphi)}, \quad \forall \varphi, \psi \in [a, b]$$

Théorème 3.2.3.1 [9] (Propriétés du spectre d'un opérateur compact)

Soit \mathcal{H} un espace de Hilbert sur \mathbb{C} et \mathcal{A}_k un opérateur compact sur \mathcal{H} . Alors

- (i) Si $\dim \mathcal{H} = +\infty$ alors $0 \in \sigma(\mathcal{A}_k)$
- (ii) $\sigma(\mathcal{A}_k) = \sigma_p(\mathcal{A}_k) \cup \{0\}$.

Exemple 3.2.3.1

1/ Dans le cas $K(\psi, \varphi) = 1$:

- **opérateur de volterra :**

On note dt la mesure de Lebesgue. On considère l'opérateur linéaire

$$T : \begin{cases} L^2[0, 1] \rightarrow L^2[0, 1] \\ \varphi \mapsto \int_0^\varphi u(\psi) d\psi. \end{cases}$$

T est borné, **en effet** :

$$\forall u \in L^2[0, 1]$$

$$\begin{aligned} \|Tu\|_2^2 &= \int_0^1 |(Tu)(\varphi)|^2 d\varphi \\ &= \int_0^1 \mathbb{I}_{[0, \varphi]} \left| \int_0^1 u(\psi) dt \right|^2 d\varphi \\ &\leq \int_0^1 \mathbb{I}_{[0, \varphi]} \left(\int_0^1 |u(\psi)|^2 d\psi \right) d\varphi \quad (\text{par inégalité de Cauchy-Schwarz}) \\ &= \varphi \|u\|_2^2. \end{aligned}$$

Donc T est borné et $\|T\| \leq \sqrt{\varphi}$. Ceci étant prouvé, nous allons maintenant déterminer le rayon spectral.

Soit $u \in C[0, 1]$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi \in [0, 1]$

$$(T^n u)(\varphi) = \int_0^\varphi \frac{(\varphi - \psi)^{n-1}}{(n-1)!} u(\psi) d\psi.$$

On démontre cela par récurrence. Si $n = 0$ c'est évident.

On suppose le résultat vrai jusqu'au rang n .

Alors pour tout $\varphi \in [0, 1]$:

$$\begin{aligned} T^{n+1}(u)(\varphi) &= T^n(Tu)(\varphi) \\ &= \int_0^\varphi \frac{(\varphi - \psi)^{n-1}}{(n-1)!} (Tu)(\psi) d\psi \\ &= \left[\frac{(\varphi - \psi)^n}{n!} (Tu)(\psi) \right]_0^\varphi + \int_0^\varphi \frac{(\varphi - \psi)^n}{n!} u(t) d\psi \quad (\text{par IPP puisque } Tu \text{ est } C^1) \\ &= \int_0^\varphi \frac{(\varphi - \psi)^n}{n!} u(t) d\psi \end{aligned}$$

Ce qui termine la récurrence. Donc T coïncide avec l'opérateur borné

$$S : \begin{cases} L^2[0, 1] \rightarrow L^2[0, 1] \\ u \mapsto \left(\varphi \mapsto \int_0^\varphi \frac{(\varphi - \psi)^{n-1}}{(n-1)!} u(\psi) d\psi \right) \end{cases}$$

sur $C[0, 1]$ qui est dense dans $L^2[0, 1]$. Donc $T^n \equiv S$.

Mais alors pour tout $u \in L^2[0, 1]$ et tout $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} \|T^n u\|_2^2 &= \int_0^1 \mathbb{I}_{[0, \varphi]} \left| \int_0^1 \frac{(\varphi - \psi)^{n-1}}{(n-1)!} u(\psi) d\psi \right|^2 d\varphi \\ &\leq \frac{1}{(n-1)!^2} \left(\int_0^1 |\varphi - \psi|^{n-1} d\psi \right) \|u\|_2^2 \quad (\text{par inégalité de Cauchy-Schwarz}) \cdot \\ &\leq \frac{2}{(n-1)!^2} \|u\|_2^2 \end{aligned}$$

Qui tend vers 0 en $+\infty$. En notant $r(T)$ le rayon spectral on a d'après la définition 1.6.1.9 :

$$\begin{aligned} r(T) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}} \\ &\leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{(n-1)!} \right]^{\frac{1}{n}} \end{aligned}$$

Qui tend vers 0. Il en résulte que $r(T) = 0$. Par conséquent $\sigma(T) = \{0\}$ car le spectre n'est jamais vide.

A présent, l'adjoint T^* de T est le seul ingrédient qui manque à l'appel afin de déterminer le spectre.

On a pour tout $u, v \in C[0, 1]$ qui s'annulent en 0 et 1 :

$$\begin{aligned} \langle Tu, v \rangle &= \langle u, T^*v \rangle \\ &= \int_0^1 (Tu)(\varphi) \overline{v(\varphi)} d\varphi \\ &= [(Tu)(\varphi) \overline{(Tv)(\varphi)}]_0^1 - \int_0^1 u(\varphi) \overline{(Tv)(\varphi)} d\varphi \end{aligned}$$

Par IPP car $Tu, Tv \in C^1[0, 1]$

$$\begin{aligned} &= (Tu)(1) \overline{(Tv)(1)} - \int_0^1 u(\varphi) \overline{(Tv)(\varphi)} d\varphi \\ &= \int_0^1 u(\varphi) \overline{(Tv)(1)} d\varphi - \int_0^1 u(\varphi) \overline{(Tv)(\varphi)} d\varphi. \\ &= \int_0^1 u(\varphi) \overline{\left(\int_\varphi^1 v(t) dt \right)} d\varphi \end{aligned}$$

Finalement on obtient Donc T^* coïncide avec l'opérateur borné

$$W : \begin{cases} L^2[0, 1] \rightarrow L^2[0, 1] \\ u \mapsto \left(x \mapsto \int_\varphi^1 u(\psi) d\psi \right) \end{cases}$$

sur l'ensemble des fonctions continues à support compact.

On en déduit donc $T^* \equiv W$. Remarquons que si u est une fonction de $C^1[0, 1]$ qui s'annule en 0 et 1, alors

$$u = -T^*(u')$$

Montrons que $0 \notin \sigma_p(T)$.

Supposons qu'il existe $u \in L^2[0, 1]$ tel que $Tu = 0$.

Alors pour tout $v \in C[0, 1]$ tel que $v(0) = v(1) = 0$

$$0 = \langle Tu, v' \rangle = \langle u, T^* \rangle = -\langle u, v \rangle$$

donc $u \perp \{v \in C^1[0, 1]; v(0) = v(1) = 0\} := E$. Or E est dense dans $C^1[0, 1]$, donc $E^\perp = \{0\}$ d'où $u = 0$. D'où

$$\sigma_p(T) = \emptyset$$

T^* est injective. On va appliquer la même méthode utilisée pour T .

En effet soit $u \in L^2[0, 1]$ tel que $T^*u = 0$, alors pour tout $v \in C[0, 1]$ tel que $v(0) = v(1) = 0$.

$$0 = \langle T^*u, v' \rangle = \langle u, Tv' \rangle = \langle u, v \rangle$$

donc $u \perp \{v \in C^1[0, 1]; v(0) = v(1) = 0\} = E$.

On en déduit par densité de E dans $C^1[0, 1]$, $u = 0$. Donc

$$\sigma_p(T^*) = \emptyset.$$

Il s'ensuit immédiatement

$$\sigma_r(T) = \sigma_{p_p}(T^*) \setminus \sigma_p(T) = \emptyset.$$

On en déduit alors

$$\sigma_c(T) = \{0\}.$$

2/ Dans le cas $K(\psi, \varphi) \neq 1$:

Soit $\mathcal{H} = L^2([0, 1])$ et $\mathcal{A}_k \in L(\mathcal{H})$ défini, pour $f \in \mathcal{H}$ et $\varphi \in [0, 1]$, par

$$(\mathcal{A}_k f)(\varphi) = \int_0^1 K(\varphi, \psi) f(\psi) d\psi$$

avec

$$K(\varphi, \psi) = \begin{cases} \varphi(1 - \psi) & \text{si } 0 \leq \varphi \leq \psi \leq 1 \\ \psi(1 - \varphi) & \text{si } 0 \leq \psi \leq \varphi \leq 1. \end{cases}$$

► \mathcal{A}_k est continue car :

On a :

$$\begin{aligned} \|\mathcal{A}_k\| &= \left(\int_0^1 \left(\int_0^1 |K(\varphi, \psi)|^2 d\psi \right) d\varphi \right)^{\frac{1}{2}} \\ &< +\infty \end{aligned}$$

D'après le théorème 3.2.2.1 on obtient \mathcal{A}_k est continue donc $\mathcal{A}_k \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$.

► \mathcal{A}_k est un opérateur normal et compact car :

• \mathcal{A}_k est un opérateur normal :

$$\begin{aligned} \overline{K(\psi, \varphi)} &= \begin{cases} \overline{\psi(1-\varphi)} & \text{si } 0 \leq \varphi \leq \psi \leq 1 \\ \overline{\varphi(1-\psi)} & \text{si } 0 \leq \psi \leq \varphi \leq 1. \end{cases} \\ &= \begin{cases} \varphi(1-\psi) & \text{si } 0 \leq \varphi \leq \psi \leq 1 \\ \psi(1-\varphi) & \text{si } 0 \leq \psi \leq \varphi \leq 1. \end{cases} \\ &= K(\varphi, \psi). \end{aligned}$$

donc :

$$K(\varphi, \psi) = \overline{K(\psi, \varphi)}.$$

• \mathcal{A}_k est un opérateur compact :

On utilise le théorème d'Ascoli Arzela pour montrer que l'opérateur \mathcal{A}_k est compact.

- $\mathcal{A}_k(\overline{B_f}(0,1))$ est équicontinue :

Soit $f \in \overline{B_f}(0,1)$ et $\varphi_1, \varphi_2 \in [0,1]$ on a

$$\begin{aligned} |\mathcal{A}_k f(\varphi_1) - \mathcal{A}_k f(\varphi_2)| &= \left| \int_0^1 [K(\varphi_1, \psi) - K(\varphi_2, \psi)] f(\psi) d\psi \right| \\ &\leq \int_0^1 |K(\varphi_1, \psi) - K(\varphi_2, \psi)| |f(\psi)| d\psi \\ &\leq \|K(\varphi_1, \cdot) - K(\varphi_2, \cdot)\|_{L^2([0,1])} \|f\|_{L^2([0,1])} \end{aligned}$$

Par l'inégalité de C-S (1.1)

$$\begin{aligned} &\leq \|K(\varphi_1, \cdot) - K(\varphi_2, \cdot)\|_{L^2([0,1])} \\ &= \int_0^{\varphi_1} |\psi|^2 |\varphi_1 - \varphi_2|^2 d\psi \\ &\quad + \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} |K(\varphi_1, \psi) - K(\varphi_2, \psi)|^2 d\psi \\ &\quad + \int_{\varphi_2}^1 |\psi + 1|^2 |\varphi_1 - \varphi_2|^2 d\psi)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(\int_0^{\varphi_1} |\varphi_1 - \varphi_2| (|\varphi_1| + |\varphi_2|) d\psi \right. \\ &\quad \left. + \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} (|K(\varphi_1, \psi)| + |K(\varphi_2, \psi)|)^2 d\psi \right. \\ &\quad \left. + \int_{\varphi_2}^1 4 |\varphi_1 - \varphi_2| (|\varphi_1| + |\varphi_2|) d\psi \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(\int_0^1 2 |\varphi_1 - \varphi_2| d\psi + 16 \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\psi + 8 \int_0^1 |\varphi_1 - \varphi_2| d\psi \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \sqrt{26} \sqrt{|\varphi_1 - \varphi_2|}. \end{aligned}$$

Soit $\varphi \in [0,1]$, soit $\varepsilon > 0$, $\exists \alpha = \frac{\varepsilon^2}{26}$

$\forall \psi \in [0,1], |\varphi - \psi| < \alpha \Rightarrow |\mathcal{A}_k f(\varphi_1) - \mathcal{A}_k f(\psi)| < \varepsilon \quad \forall f \in \overline{B_f}(0,1).$

- $\mathcal{A}_k(\overline{B_f}(0,1))$ est uniformément borné :

pour tout $f \in \overline{B_f}(0,1)$ et $\varphi \in [0,1]$:

$$\begin{aligned} |\mathcal{A}_k f(\varphi)| &\leq \int_0^1 |K(\varphi, \psi) f(\psi) d\psi \\ &\leq \|K(\varphi, \cdot)\|_{L^2} \|f\|_{L^2} && \text{par l'inégalité de Cauchy-Schwartz (1.1)} \\ &\leq \|K(\varphi, \cdot)\|_{L^2} && \text{car } \|f\| \leq 1 \\ &\leq 2. \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{A}_k(\overline{B_f}(0,1))$ est uniformément borné.

Alors d'après le théorème d'Ascoli 1.5.0.4, et puisque $\mathcal{A}_k(\overline{B_f}(0,1))$ est relativement compact donc \mathcal{A}_k est compact.

Alors d'après le théorème 3.2.3.1, on a $0 \in \sigma(\mathcal{A}_k)$ et $\sigma(\mathcal{A}_k) \setminus \{0\}$ est l'ensemble des valeurs propres non nulles de \mathcal{A}_k .

• Les vecteurs propres associés aux valeurs propres sont des fonctions continues car :

Si $\mathcal{A}_k f = \lambda f$ pour un $\lambda \neq 0$, alors $f \in \text{Im}(\mathcal{A}_k)$ car :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_k f = \lambda f &\Leftrightarrow \lambda^{-1} \mathcal{A}_k f = f && \text{car } \lambda \neq 0 \\ &\Leftrightarrow \mathcal{A}_k(\lambda^{-1} f) = f && \text{car } \mathcal{A}_k \in \mathcal{L}(\mathcal{H}) \\ &\Leftrightarrow \exists g = \lambda^{-1} f \text{ telle que } \mathcal{A}_k g = f \\ &\Leftrightarrow f \in \text{Im}(\mathcal{A}_k). \end{aligned}$$

Pour tout $f \in \mathcal{H}$, $\varphi \in [0,1]$

$$\mathcal{A}_k f(\varphi) = (1-\varphi) \int_0^\varphi f(\psi) d\psi + \varphi \int_\varphi^1 (1-\psi) f(\psi) d\psi.$$

On va montrer que $\mathcal{A}_k f$ continue sur $[0,1]$.

D'abord, on montre la continuité de K

- Si $\varphi < \psi$ ou $\varphi > \psi$ on a K est continu car il est polynome.

- Si $\varphi = \psi$ on a :

$$\lim_{(\varphi, \psi) \rightarrow (t, t)} \psi(1-\varphi) = \lim_{(\varphi, \psi) \rightarrow (\psi, \psi)} \varphi(1-\psi) = t(1-t) = K(t, t).$$

Donc K est continu sur $\{(t, t) : t \in [0,1]\}$.

Alors la fonction K est uniformément continue sur le compact $[0,1] \times [0,1]$. Soit $\varepsilon > 0$, donc il existe $\delta > 0$

$$\forall \varphi, \psi \in [0,1], |\varphi_1 - \varphi_2| \leq \delta \Rightarrow |K(\varphi_1, \psi) - K(\varphi_2, \psi)| \leq \varepsilon$$

par l'inégalité de Schwarz, on a

$$|\mathcal{A}_k f(\varphi_1) - \mathcal{A}_k f(\varphi_2)| \leq \sup_{\psi \in [0,1]} (|K(\varphi_1, \psi) - K(\varphi_2, \psi)|) \|f\|_{L^2([0,1])} \leq \varepsilon \|f\|_{L^2([0,1])}.$$

Ceci exprime la continuité uniforme de $\mathcal{A}_k f$. Par suite $\mathcal{A}_k f$ est une fonction continue. Comme tout vecteur propre f relatif à une valeur propre non nulle λ vérifie $f = \lambda^{-1} \mathcal{A}_k f$ est une fonction continue.

• A la fin nous allons déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de \mathcal{A}_k

Comme \mathcal{A}_k est normal, alors toute valeur propre est réelle. L'équation aux (valeurs propres, vecteurs propres), (λ, f) est

$$\lambda f(\varphi) = (1 - \varphi) \int_0^\varphi \varphi f(\psi) d\psi + \varphi \int_\varphi^1 (1 - \psi) f(\psi) d\psi. \quad (3.2)$$

On va déduire, par dérivations successives une équation différentielle en f associée à des conditions aux limites.

$$\begin{aligned} \lambda f'(\varphi) &= - \int_0^\varphi \varphi f(\psi) d\psi + (1 - \varphi) \frac{d}{d\varphi} \left(\int_0^\varphi \varphi f(\psi) d\psi \right) \\ &\quad + \int_\varphi^1 (1 - \psi) f(\psi) d\psi + \varphi \frac{d}{d\varphi} \left(\int_\varphi^1 (1 - \psi) f(\psi) d\psi \right) \\ &= - \int_0^\varphi \psi f(\psi) d\psi + \int_\varphi^1 (1 - \psi) f(\psi) d\psi. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda f''(\varphi) &= - \frac{d}{d\varphi} \left(\int_0^\varphi \psi f(\psi) d\psi \right) + \frac{d}{d\varphi} \left(\int_\varphi^1 (1 - \psi) f(\psi) d\psi \right) \\ &= -\varphi f(\varphi) - (1 - \varphi) f(\varphi) \\ &= -f(\varphi). \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{cases} \lambda f'(\varphi) = - \int_0^\varphi \psi f(\psi) d\psi + \int_\varphi^1 (1 - \psi) f(\psi) d\psi. \\ \lambda f''(\varphi) = -f(\varphi) \\ \lambda f(0) = 0 \\ \lambda f(1) = 0. \end{cases}$$

Le système suivant est équivalent à (3.2).

$$\begin{cases} \lambda f''(\varphi) = -f(\varphi) \\ f(0) = f'(0) \\ f(1) = f'(1). \end{cases}$$

Deux cas sont à étudier.

(i) $\lambda = -\mu^{-2}, \mu > 0$. Alors

$$\begin{cases} f(\varphi) = C_1 \exp(\mu\varphi) + C_2 \exp(-\mu\varphi) \\ C_1 + C_2 = 0 \\ C_1 \exp(\mu) + C_2 \exp(-\mu) = 0. \end{cases}$$

• Un couple $(C_1, C_2) \neq (0, 0)$ est solution si et seulement si $\mu^2 = 1$.

On peut exprimer cette résultat par absurde, on suppose que $\mu^2 \neq 1$ donc $\mu \neq 1$ ($\mu > 0$), maintenant on va chercher la solution du système de variable C_1 et C_2

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \dots\dots\dots (\star) \\ C_1 \exp(\mu) + C_2 \exp(-\mu) = 0 \dots\dots (\star\star). \end{cases}$$

En multipliant (\star) par $\exp(\mu)$ on obtient

$$\begin{cases} C_1 \exp(\mu) + C_2 \exp(\mu) = 0. \\ C_1 \exp(\mu) + C_2 \exp(-\mu) = 0. \end{cases}$$

Donc

$$C_2[\exp(\mu) - \exp(-\mu)] = 0 \Leftrightarrow C_2 = 0 \text{ car } (\mu > 0 \text{ et } \mu \neq 1).$$

En multipliant (\star) par $\exp(-\mu)$ on trouve

$$\begin{cases} C_1 \exp(-\mu) + C_2 \exp(-\mu) = 0 \\ C_1 \exp(\mu) + C_2 \exp(-\mu) = 0 \end{cases}$$

Donc

$$C_1[\exp(-\mu) - \exp(\mu)] = 0 \Leftrightarrow C_1 = 0 \text{ car } (\mu > 0 \text{ et } \mu \neq 1).$$

Alors $(C_1, C_2) = (0, 0)$ c'est une contradiction donc $\mu^2 = 1$ cela signifie que $\mu = 1$.

Alors $C_2 = 0$, Avec compensation en (\star) on trouve $f(\varphi) = C_1 \exp(\varphi)$

$$\{(1, \text{Vect}(f_0)), \text{ où } f_0(\varphi) = \exp(\varphi)\}$$

est le seul couple solution.

Le théorème 3.2.3.1 exprime que $0 \in \sigma(\mathcal{A}_k)$ et $\sigma(\mathcal{A}_k) = \{0\} \cup \sigma_p(\mathcal{A}_k)$, on obtient donc

$$\sigma(\mathcal{A}_k) = \{0, 1\}.$$

(ii) $\lambda = \mu^{-2}, \mu > 0$. Alors

$$\begin{cases} f(\varphi) = C_1 \cos(\mu\varphi) + C_2 \sin(\mu\varphi) \\ C_1 = 0 \\ C_1 \cos(\mu) + C_2 \sin(\mu) = 0 \end{cases}$$

Un couple $(C_1, C_2) \neq (0, 0)$ est solution si et seulement si $\sin(\mu) = 0$ donc $\mu = n\pi, n \in \mathbb{N}^*$.

Alors $C_1 = -n\pi C_2$ ça signifie

$$\begin{aligned} f_n(\varphi) &= -C_2 n\pi \cos(n\pi\varphi) + C_2 \sin(n\pi\varphi) \\ &= C_2 [-n\pi \cos(n\pi\varphi) + \sin(n\pi\varphi)] \end{aligned}$$

$$\left\{ \left((n\pi)^{-2}, \text{Vect}(f_n) \right), f_n(\varphi) = -n\pi \cos(n\pi\varphi) + \sin(n\pi\varphi), n \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

sont les solutions.

Le théorème 3.2.3.1 exprime que $0 \in \sigma(\mathcal{A}_k)$ et $\sigma(\mathcal{A}_k) = \{0\} \cup \sigma_p(\mathcal{A}_k)$; on obtient donc

$$\sigma(\mathcal{A}_k) = \left\{ (n\pi)^{-2}; n \in \mathbb{N}^* \right\} \cup \{0\}.$$

CONCLUSION

On a étudié dans ce mémoire, les caractérisations fondamentales des opérateurs linéaires continus normaux d'un espace de Hilbert vers le même espace de Hilbert. Dans chapitre trois de ce travail nous avons apporté deux applications différentes illustrées dans le domaine de la théorie des opérateurs linéaires continus d'un espace de Hilbert vers autre espace de Hilbert. La première application concerne l'étude spectrale d'un opérateur linéaire continu normal sur un espace de Hilbert séparable .On trouve que tout opérateur normal possède des valeurs propres .

La deuxième application s'occupe principalement sur l'étude des opérateurs intégraux continus et le noyau de ce type des opérateurs intégraux aussi on fait le calcul des normes des opérateurs intégraux et les conditions permettant que ces opérateurs intégraux soient normaux dans ce cas on trouvera facilement le spectre de ces opérateurs intégraux. On met l'accent sur un opérateur intégral à noyau normal continu.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] G. Aubrun, Théorie des Opérateurs M1 Mathématiques, Université de la Réunion.
- [2] J. Bass. de mathématique "TOME III", Masson et C^{IE} , Éditeurs 120, Boulevard Saint-Germain, Paris, 1971.
- [3] S. K. Berberian, introduction to hilbert space, Chelsea publishing company, 1961 .
- [4] S.K Berberian, Introduction to Hibert space. 1971, New York.
- [5] H. Boccara, Analyse fonctionnelle, Edition Marketing, Paris, 1984.
- [6] S. Bouzenada, Etude des opérateurs finis et leurs caractérisations, Thèse de Doctorat, Université de Annaba (2008).
- [7] H. BREZIS, Analyse fonctionnelle, théorie et application, MASSON Paris New York Ba.
- [8] Berberian. A.S, A note on hyponormal operator, Pacific J. Math. 12 (1962), 1171-1175.
- [9] H. Chebli. Analyse Hilbertienne, Centre publication universitaire, Tunis, 2001.
- [10] C. CHERIFA, Sur le théorème de Fuglede-Putnam (Mémoire magister, UniversitéD'Oran Es-Senia),2011.
- [11] N. Dunford and J. Schwartz, Linear Operators, Part II, Wiley, New York, 1971.
- [12] F. Faure, Notes de cours sur la MÈcanique quantique, Université Joseph Fourier, Grenoble, novembre 2015.
- [13] T. Furuta, Invitation to linear operators, Taylor and Fran. Loondon, (2001).
- [14] I. Gohberg, S. Goldberg, M. A. Kaashoek, Basic Classes of Linear Operators, Birkh%ouserVerlag, Basel,2003.
- [15] M. Guesba, Traitement sur les opérateurs normaux et les opérateurs compacts, These de doctorat, Univ.Mohamed Boudiaf-Mísila 2017.
- [16] K.E. Gustafson, D.K.M. Rao. Numerical Range, Springer, New York, 1997.

- [17] V. Istratescu, T. Saito, and T. Yoshino : On a class of operators. TShoku. Math. joun,18, 410 – 413(1966).
- [18] T. Kato. Perturbation theory for linear operator, Springer, 1980 (2nd edition).
- [19] L. Schwartz, Analyse 1, théorie des ensembles et topologie, 1997.
- [20] K. Zhu. Operator theory in function spaces. Mongraphs and Text-books in Pure and Applied Mathematics, 139. Marcel Dekker, Inc., New York, 1990.

الملخص :

هذه المذكرة تتعلق بدراسة صنف هام من أصناف المؤثرات الخطية المحدودة ، وهو المؤثر العادي. حيث بدأنا بتعاريف أولية حول الفضاءات وحول المؤثرات الخطية المحدودة وبعض خصائصها و أصنافها المهمة ، ثم قدمنا تعريف المؤثر العادي وبعض الخصائص الأساسية له ، وكذلك قمنا بدراسة علاقته مع بعض المؤثرات الخطية ، ودرسنا الطيف والصورة الرقمية والعلاقة بينهما . في الختام قمنا بدراسة طيفية لبعض التطبيقات الخاصة بهذا المؤثر.

الكلمات المفتاحية : فضاء هلبرت ، مؤثر خطي ومحدود ، مؤثر عادي ، الطيف ، الصورة ، شعاع

Abstract:

This observation relates to the study of an important class of finite linear operators, the normal operator. Where we started with the initial definitions of finite distances and linear effects and some of their important properties and types, then we presented the definition of the natural stimulus and some basic properties, and we also studied its relationship to some linear effects, and we searched for the spectrum. The digital image and the relationship between them. In conclusion, we have done a spectroscopic study of some applications of this effect.

Key words: *espace hilbert , operator linear bounded , normal operator, spectre , image , ray.*

Résumé:

Cette note concerne l'étude d'une classe importante d'opérateurs linéaires finis, l'opérateur normal. Là où nous avons commencé avec les définitions initiales des espaces linéaires finis et des influences et

certaines de leurs propriétés et types importants, nous avons ensuite introduit la définition du stimulus normal et certaines propriétés de base, et nous avons également étudié sa relation avec certains effets linéaires, et nous avons cherché le spectre. L'image numérique et la relation entre eux. En conclusion, nous avons fait une étude spectroscopique de quelques applications de cet effet.

Mots clé: *espace hilbert , opérateur lineair borné, opérateur normal, spectre, image , rayon.*