N° d'ordre :
N° de série :

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Superieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ HAMMA LAKHDAR D'EL OUED

FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES

Mémoire de fin d'étude

MASTER ACADEMIQUE

Domaine: Mathématiques et Informatique
Filière: Mathématiques
Spécialité: Mathématiques fondamentales et Appliquées

Thème

Existences des solutions des problèmes d'évolutions par la méthode de Fonction des poids dans un secteur plan.

Présenté par: Lebza Houda
Lebza Razika

Soutenu publiquement devant le jury composé de

Dr. Ben Ali Brahim	MCA	Président	Univ. d'El Oued
Pr. Beloul Said	Pr	Examinateur	Univ. d'El Oued
Dr. Medekhel Hamza	MCB	Rapporteur	Univ. d'El Oued

Année universitaire 2022 – 2023.

Remerciements

Nous remercions Allah le tout puissant qui nous a guidé dans l'accomplissement de ce travail.

Ce travail à été réalisé sous l'encadrement de Docteur **" *MEDEKHEL Hamza*"**,*à d'*Université Echahid Hamma Lakhdar –***El Oued***, a qui nous voudrons exprimer nos profonde gratitude pour leurs disponibilités, leurs aides et leurs conseils pour réaliser ce travail.*

*Ainsi qu'à tous les professeurs de d'*Université Echahid Hamma Lakhdar – ***El Oued*** *Said BELOUL et Brahim BEN ALI.*

Nous remercions vivement nos familles surtouts mes parent pour l'aide et le soutient moral.

Dédicace :

Je dédie ce travail à ma grande force dans la vie de ma mère, mon père, mes frères, et mes soeurs et mes amies....

Lebza Razika.

Je dédie ce travail à source de la force de la lumière dans la vie ma mère Houria

Je dédie ce travail à ma grande force dans de ma mère, mes frères, et ma soeur et mes amies.....

Lebza Houda.

Table des matières

Principales notations utilisées

Notions géométriques:

Ω est un ouvert plan de frontière polygonale notée Γ.

ω la mesure de surface sur Γ ,$Q =]0, T[\times\Omega$,$T > 0$ un corps polygonal .

$\sum$ la frontière de Q, γla mesure de surface $\sum$, $t \in]0, T[$.

$$\sum =]0, T[\times\Gamma.$$

Ω_φ un secteur plan infini d'ouverture φ, (φ étant un angle de Ω_φ).

O un ouvert régulier à l'intérieur du polygone, $O = \Omega\diagdown\cup_{j=1}^{N} \Omega_{\varphi j}$.

$N =$ le nombre de sommets du polygone.

S_j: les sommets du polygone $j = 1,2....N$.

φ : angle du secteur plan, telle que $0 < \theta < \varphi < 2\pi$.

Γ_φ: la frontière du secteur plan.

Espaces fonctionnels:

$C_0^\infty(\Omega)$:l'espace des fonctions indéfniment différentiables et nulles à l'infini dans Ω .

$\overline{\Omega}$ l'adhérence de Ω .

$C_0^\infty(\overline{\Omega})$:l'espace des restrictions à Ω des fonctions de $C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$.

$L^2(\Omega)$: l'espace des classes de fonctions de carré intégrable pour la mesure dx.

Si Ω_φ un secteur plan d'ouverture φ pour la mesure $dx = \rho d\rho d\theta$.

(ρ, θ) désigne les coordonnes polaires.

$$\| u \|^2_{L^2(\Omega_\varphi)} = \int\limits_{\Omega_\varphi} |u|^2 \, dx.$$

$H^1(\Omega)$:l'espace de Sobolev d'ordre 1.

$H_0^1(\Omega)$: l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$.

$H^m(\Omega)$: l'espace de Sobolev d'ordre m (défini ici pour $m \in \mathbb{N}$, par convention d'écriture on a $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$)

$$H^m(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) \ / \ D^\beta u \in L^2(\Omega), |\beta| \leq m\}$$

tel que $D^\beta = \frac{\partial^{|\beta|}}{\partial_{x_1}^{\beta_1} \ldots\ldots \partial_{x_m}^{\beta_m}}$, désigne la dérivé d'ordre β sens des distributions

avec $\beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots.., \beta_n) \in \mathbb{N}^*, |\beta| = \sum_{i=1}^{m} \beta_i.$

On munit l'espace $H^m(\Omega)$ du produit scalaire :

$(u, v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\beta| \leq m} (D^2 u, D^2 v)_{L^2(\Omega)}, \forall u, v \in H^m(\Omega)$ et la norme associé étant donné par:

$$\| u \|_{H^m(\Omega)} = (\sum_{|\beta| \leq m} \| D^\beta u \|_{L^2(\Omega)}^2)^{\frac{1}{2}} \quad , \forall u \in H^m(\Omega)$$

$E_\alpha(\Omega_\varphi)$:l'espace de Sobolev avec poids d'ordre 2 défini par :

$$E_\alpha(\Omega_\varphi) = \{u \in H^1(\Omega_\varphi) \ \backslash \rho^\alpha D^2 u \in L^2(\Omega_\varphi)\}$$

où, les fonctions u sont à support compact dans $\overline{\Omega_\varphi}$.

Le symbole D^2 désigne les dérivées partielles d'ordre 2 par rapport aux variables et ρ et η.Où $\frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta}$.

$E_{\alpha,0}(\Omega_\varphi) = E_\alpha(\Omega_\varphi) \cap H_0^1(\Omega)$.

$E_{\alpha,0}(\Omega_\varphi)$ désigne l'espace de Sobolev avec poids d'ordre m défini par :

$E_{\alpha,0}(\Omega_\varphi) = \{u \in H^1(\Omega_\varphi) \ \backslash \rho^\alpha D^{|\beta|} u \in L^2(\Omega_\varphi), 2 \leq |\beta| \leq m\}$.

où, les fonctions u sont à support compact dans $\overline{\Omega_\varphi}$.

$C^1(\Omega)$ désigne l'espace des fonctions continues et dérivables dans Ω.

$C_0^\infty(Q_\varphi)$ désigne l'espace des fonctions indéfiniment différentiables et nulle à l'infini dans Q_φ telle que $Q_\varphi = \sum_\varphi \times]0, T[$.

Liste des symboles :

$V(S_j)$: une voisinage du sommet S_j pour $j = 1, 2, 3, ...N$, (S_j désignera l'origine de la frontière Γ_j).

$\lambda(\rho)$: une fonction poids qui est une fonction indéfiniment différentiable à l'intérieur de Ω_φ.

$\frac{\partial}{\partial \eta}$:la dérivée normale par rapport η ,et égalité à $\frac{\partial}{\rho \partial \theta}$.

$(\widetilde{P_\varphi})$: le problème obtenu de (P_φ)après transformation de Mellin.

$\widetilde{u}(\sigma, \theta)$: la transformation de Mellin de $u(\rho, \theta)$ par rapport à ρ.

$\mathbb{R}$: corps des réels.

$\mathbb{R}_+^*$: espaces des réels strictement positif.

$\mathbb{R}_-^*$: espaces des réels strictement négatif.

$\mathbb{R}_+$: espaces des réels positif.

Introduction générale

En mathématiques, plus précisément en calcul différentiel, une équation aux dérivée partielles (parfois appelée équation différentielle partielle et abrégée en EDP) est une équation différentielle dont les solutions sont les fonctions inconnues dépendant de plusieurs variables vérifiant certaines conditions concernant leurs dérivées partielles.

Une EDP a souvent de très nombreuses solutions, les conditions étant moins strictes que dans le cas d'une équation différentielle ordinaire à une seule variable ; les problèmes comportent souvent des conditions aux limites qui restreignent l'ensemble des solutions. Alors que les ensembles de solutions d'une équation différentielle ordinaire sont paramétrées par un ou plusieurs paramètres correspondant aux conditions supplémentaires, dans le cas des EDP, les conditions aux limites se présentent plutôt sous la forme de fonction ; intuitivement cela signifie que l'ensemble des solutions est beaucoup plus grand, ce qui est vrai dans la quasi-totalité des problèmes.

Les EDP sont omniprésentes dans les sciences puisqu'elles apparaissent aussi bien en dynamique des structures ou en mécanique des fluides que dans les théories de la gravitation, de l'électromagnétisme (équations de Maxwell), ou des mathématiques financières (équation de Black-Scholes). Elles sont primordiales dans des domaines tels que la simulation aéronautique, la synthèse d'images, ou la prévision météorologique. Enfin, les équations les plus importantes de la relativité générale et de la mécanique quantique sont également des EDP.

L'un des sept problèmes du prix du millénaire consiste à montrer l'existence et la continuité par rapport aux données initiales d'un système d'EDP appelé équations de Navier-Stokes

L'étude de l'équation de Laplace dans un polygone ou un polyèdre, et généralement l'étude des problèmes elliptiques dans des domaines non réguliers n'est entamée que depuis une date relativement récente; d'une part Grisvard [5] montre que la formule de Green construite pour le Laplacien dans le cas classique c'est à dire dans des domaines réguliers est encore valable dans les domaines non réguliers tels que les polygones ou polyèdres, par exemple, et en utilisant l'alternative de Fredholm, il retrouve des résultats analogues à ceux du cas classique, ces résultats ne sont pas encore généralisés à des opérateurs elliptiques aux dérivées partielles d'ordre plus élevé dans des domaines de $\mathbb{R}^n$, et ceci à cause de la complexité des calculs.

Le but de notre travail est d'étudier le rôle que jouent les fonctions poids dansl'étude du problème suivant :

$$(P)\begin{cases} \Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ u = g & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

Où Ω est un ouvert plan de frontière polygonale notée Γ.

La transformation de Mellin, est bien adaptée à la géométrie du domaine, le noyau de Green aussi bien adaptée à la résolution de l'équation différentielle explicite, et de mettre en évidence d'inégalité à priori.

Grisvard [5] précise la régularité des solutions du problème de Dirichlet ou dans un polygone plan en norme L^2, En utilisant l'alternative de Fredholm, il a généralisé les résultats de Hanna-Smith [11] grâce à une méthode très particulière.

Chapitre 1

Notions préliminaires

Dans ce chapitre on va donner quelques définitions principales avec espaces fonctionnels généralisée, d'autre part on seront utiles pour la résolution de quelques problèmes Poisson dans des domaines plan non réguliers.

Dans ce paragraphe, on donnera la géométrique est bien adaptée au domaine après la transformation de Mellin [29], le noyau de Green est aussi bien adaptée à la résolution d'équation différentielle explicite.

1.1 Formes sesquilinéares et formes hermittienne

Définition 1.1.1 *Soient E et F deux $\mathbb{k}-$espaces vectoriels.*

Une application $f : E \longrightarrow F$ est dite semi-linéaire ou anti-linéaire.

Lorsque, pour tout x, $y \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{k}$, on a :

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \text{et} \quad f(\lambda x) = \overline{\lambda} f(x).$$

Définition 1.1.2 *Lorsque $\mathbb{k} = \mathbb{R}$, semi-linéaire coincide avec linéaire. Si $F = \mathbb{k} = \mathbb{R}$, f est dite forme semi-linéaire.*

Définition 1.1.3 *soit E un $\mathbb{k}-$espace vectoriel. Une forme sesquilinéaire sur E est une application $\phi : E \times E \longrightarrow \mathbb{k}$, vérifiant, pour tout $x, x', y, y' \in E$ et tout $\lambda, \mu \in \mathbb{k}$, les propriétés suivantes :*

i) $\phi(x+x',y)=\phi(x,y)+\phi(x',y)$ *et* $\phi(\lambda x,y)=\lambda\phi(x,y)$.

ii)$\phi(x,y+y')=\phi(x,y)+\phi(x',y)$ *et* $\phi(x,\mu y)=\overline{\mu}\phi(x,y)$.

Autrement dit, une forme sesquilinéaire sur un $\mathbb{k}-$*espace vectoriel* E *est une application* $\phi : E\times E \longrightarrow \mathbb{k}$ *telle que :*

i) pour tout $y\in E$*, l'application* $x\longrightarrow \phi(x,y)$ *soit linéaire.*

ii) pour tout $x\in E$*, l'application* $y\longrightarrow \phi(x,y)$ *soit semi-linéaire.*

Définition 1.1.4 *Soit* E *un* $\mathbb{k}$*-espace vectoriel. Une forme hermitienne sur* E *est une application* $\phi : E\times E \longrightarrow \mathbb{k}$ *telle que, pour tout* $x, x^{'}, y\in E$ *et tout* $\lambda \epsilon \mathbb{k}$*, on ait:*

$$\phi(x+x^{'},y)=\phi(x,y)+\phi(x^{'},y) \quad , \quad \phi(\lambda x,y)=\lambda\phi(x,y) \quad et \quad \phi(y,x)=\overline{\phi(x,y)}.$$

1.2 Produits scalaires

Définition 1.2.1 *Soit* E *un* $\mathbb{k}-$*espace vectoriel. Un produit scalaire sur* E *est une forme hermitienne définie positive sur* E*. Autrement dit, un produit scalaire sur* E *est une application définie par :*

$$\begin{array}{ccc} E\times E & \longrightarrow & \mathbb{k} \\ (x,y) & \longrightarrow & \langle x,y\rangle \end{array}$$

vérifiant, pour tous $x, x', y\in E$ *et tout* $\lambda\in\mathbb{k}$*, les propriétés suivantes:*

1. $\langle x+x',y\rangle = \langle x,y\rangle + \langle x',y\rangle$ *et* $\langle \lambda x,y\rangle = \lambda\langle x,y\rangle$.
2. $\langle y,x\rangle = \overline{\langle x,y\rangle}$.
3. $\langle x,x\rangle \geq 0$.
4. $\langle x,x\rangle = 0 \Longleftrightarrow x=0$.

Le nombre $\langle x,y\rangle$ est appelé le produit scalaire des x et y.

Tout $\mathbb{k}-$espace vectoriel muni d'un produit scalaire $(x,y)\longrightarrow\langle x,y\rangle$ est donc un espace normé pour la norme définie par $x\mapsto \|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$ et naturellement, un tel espace est toujours considèré comme un espace métrique pour la distance correspondante

$$d(x,y) = \|x-y\| = \sqrt{\langle x-y, x-y\rangle}.$$

1.3 L'inégalité de Cauchy Swartz genéralisé

Si (E, $\langle .,. \rangle$) est un espace préhilbertien réel, alors pour tout $(x, y) \in E^2$:

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|$$

Où $\|.\|$ désigne la norme induite par le produit scalaire.

1.4 Espace de Hilbert

1.4.1 Définition principales

Si un espace préhilbertien est complet, pour sa norme hilbertienne, on dit que c'est un espace de Hilbert. C'est donc un cas particulier d'espace de Banach [13] , [28].

1. Le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$ est défini par :

$$\langle x, y\rangle = \sum_{j=0}^{n} x_j y_j$$

où $x = (x_1, ..., x_n), y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$.

2. Le produit scalaire usuel sur $\mathbb{C}^n$ est défini par

$$\langle x, y\rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j \overline{y_j}$$

où $x = (x_1, ..., x_n), y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{C}^n$.

3. Sur $\mathbb{k}^n$, tout produit scalaire définit une structure d'espace de Hilbert.

4. Rappelons que ℓ^2 est l'espace vectoriel des suites de scalaires $(x_n)_{n\geq 0}$ pour lesquelles la série $\sum\limits_{n\geq 0} |x_n|^2$ converge. Alors ℓ^2 est un espace de Banach pour la norme $\| \|_2$ définie par : pour tout $x = (x_n)_{n\geq 0} \in \ell^2$,on a $\|x\|_2 = \left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} |x_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}$. Soient $x = (x_n)_{n\geq 0}, y = (y_n)_{n\geq 0} \in \ell^2$.

Pour tout $n \geq 0$, on a $2|x_n\overline{y_n}| \leq |x_n|^2 + |y_n|^2$, donc la série de terme général $x_n\overline{y_n}$ est convergente dans $\Bbbk$. On pose :

$$\langle x, y\rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n\overline{y_n}.$$

Alors l'application $\langle\ ,\rangle$ est un produit scalaire sur ℓ^2 et pour tout $x = (x_n)_{n\geq 0} \in \ell^2$, on a$\|x\|_2 = \sqrt{\langle x, x\rangle}$. Donc $(\ell^2, \|\|_2)$ est un espace de Hilbert.

Exemple 1.4.1 *1) Tout espace préhilbertien de dimension finie est un espace de Hilbert. Lorsque le corps de base est réel, on dit que c'est un espace euclidien, et que c'est un espace hermitien lorsque le corps de base est complexe.*

2) Pour toute mesure positive m, $L^2(m)$ est un espace de Hilbert, en vertu du théorème de Riesz-Fisher [13], puisque la norme $\|.\|_2$:

$$\|f\|_2 = \left(\int_s |f(t)|^2\, dm(t)\right)^{\frac{1}{2}}$$

est la norme hilbertienne associée au produit scalaire usuel :

$$(f \mid g) = \int_s f(t)\overline{g(t)}dm(t).$$

En particulier, ℓ^2 est un espace de Hilbert .

1.5 Espace de fonctions-test

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}$ .Rappelons les notations suivantes.

1) Si $K \subseteq \Omega$ est compact, on note, pour tout entier $m \in \mathbb{N}$, $\mathcal{D}_K^m(\Omega)$ l'espace des fonctions $\varphi : \Omega \to \mathbb{C}$ de classe C^m dont le support est contenu dans K. On le munit de la norme:

$$\| \varphi \|_{(m)} = \sum_{j=0}^{m} \| \varphi^{(j)} \|_\infty,$$

où:

$$\| \psi \|_\infty = \sup_{x\in\Omega} |\psi(x)| = \sup_{x\in K} |\psi(x)| ,$$

qui en fait un espace de Banach. L'espace :

$$\mathcal{D}_K^\infty(\Omega) = \bigcap_{m\in\mathbb{N}} \mathcal{D}_K^m(\Omega)$$

est simplement noté $\mathcal{D}_K^m(\Omega)$.Cet espace n'est pas normé; néanmoins, on peut le munir de la distance suivante:

$$d_K(\varphi,\psi) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2^{m+1}} \frac{\| \varphi - \psi \|_{(m)}}{1+ \| \varphi - \psi \|_{(m)}},$$

qui en fait un $e.v.$topologie .localement convexe métrique complet (ce que l'on appelle un

espace de Fréchet [13]), et pour laquelle on a :

Une suite $(\varphi_n)_n$ converge vers φ dans $\mathcal{D}_K^m(\Omega)$ si et seulement si :

$$\varphi_n^{(m)} \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} \varphi^{(m)} \text{uniformément sur } \Omega, \text{ pour tout } m \in \mathbb{N} \quad .$$

2) L'espace :

$$\mathcal{D}(\Omega) = \bigcup_{K\text{compact}, K\subseteq\Omega} \mathcal{D}_K(\Omega)$$

est l'espace des fonctions $\varphi : \Omega \to \mathbb{C}$ indéfiniment dérivables à support compact (contenu dans Ω). On dit que c'est **l'espace des fonctions-test**.

Définition 1.5.1 *Soit $\varphi_n, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, on dit que la suite $(\varphi_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers φ dans $\mathcal{D}(\Omega)$ si :*

1) il existe un compact $K \subseteq \Omega$ tel que $supp\varphi_n \subseteq K$ pour tout $n \geq 1$;

2) la suite $(\varphi_n^{(j)})_{n\geqslant 1}$ converge uniformément sur K, donc sur Ω, vers $\varphi^{(j)}$, pour tout $j \in \mathbb{N}$.

En d'autres termes :

$(\exists K \subseteq \Omega,\text{compact})\qquad \varphi_n, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \qquad \text{et} \qquad \varphi_n \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} \varphi \qquad \text{dans } \mathcal{D}_K(\Omega).$

1.6 Espaces distributions

Définition 1.6.1 *On appelle distribution sur l'ouvert Ω toute forme linéaire*

$T : \mathcal{D}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{C}$ ayant la propriété de continuité suivante :

$$T(\varphi_n)_{n \overrightarrow{\to\infty}} T(\varphi) \text{ pour toute suite } (\varphi_n)_n \text{ convergeant vers } \varphi \text{ dans } \mathcal{D}(\Omega).$$

On note $\mathcal{D}'(\Omega)$ l'ensemble des distributions sur Ω. En d'autres termes : $T : \mathcal{D}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{C}$ est une distribution si et seulement si, pour tout compact $K \subseteq \Omega$, la restriction $T_{|\mathcal{D}_K(\Omega)}$ est une forme linéaire continue sur $\mathcal{D}_K(\Omega)$ .On notera souvent :

$T(\varphi) = \langle T, \varphi \rangle$.

Remarque 1.6.1 . *On peut munir $\mathcal{D}(\Omega)$ d'une topologie, dite limite inductive des topologies des $\mathcal{D}_K(\Omega)$ pour K parcourant les compacts de Ω, de la façon suivante: si $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{D}(\Omega)$ est convexe, on dit que c'est un voisinage de 0 dans $\mathcal{D}(\Omega)$ si, pour tout compact $K \subseteq \Omega$, $\mathcal{A} \cap \mathcal{D}_K(\Omega)$ est un voisinage de 0 dans $\mathcal{D}_K(\Omega)$. On montre que cela forme une base de voisinages de 0 pour une topologie sur $\mathcal{D}(\Omega)$ en faisant un e.v.t. localement convexe séparé (mais non métrisable), et qu'une forme linéaire $T : \mathcal{D}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{C}$ est une distribution si et seulement si elle est continue pour cette topologie; c'est-à-dire que, bien que la topologie de $\mathcal{D}(\Omega)$ ne soit pas métrisable, tester sur des suites convergentes suffit pour la la continuité des formes linéaires.*

Ces considérations topologiques, délicates, ne seront d'aucun intérêt pour la suite.

La caractérisation suivante montre que l'on peut en fait se contenter d'un nombre fini de dérivées pour vérifier que l'on a une distribution.

Proposition 1.6.1 *[36] Soit $T : \mathcal{D}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{C}$ une forme linéaire. C'est une distribution sur Ω si et seulement si : pour tout compact $K \subseteq \Omega$ il existe un entier $m = m(k) \in \mathbb{N}$ et une constante $C_K > 0$ tels que :*

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega), \qquad |T(\varphi)| \leq C_K \|\varphi\|_{(m)}.$$

Définition 1.6.2 *On dit qu'une distribution T sur Ω est d'ordre fini s'il existe un entier $m \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout compact $K \subseteq \Omega$, il existe $C_K > 0$ tel que:*

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega), \quad |T(\varphi)| \leq C_k \|\varphi\|_{(m)}.$$

Autrement dit, dans la Proposition 1.6.1, l'entier m peut être choisi indépendemment du compact K. Notons qu'une forme linéaire $T : \mathcal{D}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{C}$ vérifiant la condition de la définition est forcément une distribution, en vertu de la Proposition 1.6.1.

Le plus petit entier possible s'appelle alors l'ordre de la distribution T. Une distribution qui n'est pas d'ordre fini est dite d'ordre infini.

1) Monterons que $\exp(\frac{1}{x^2}) \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^*)$.

On a $\exp(\frac{1}{x^2}) \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^*)$ car si K est un compact de $\mathbb{R}^*$ il existe $0 < \varepsilon < A < +\infty$ tels que $K \subseteq [-A, -\varepsilon] \cup [\varepsilon, A]$,et $\exp(\frac{1}{x^2})$ est continue sur K.

2) Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.On pose $\varphi_n(x) = \exp(-n)\varphi_n(nx)$. Montrer que $(\varphi_n)_{n\geqslant 1}$ converge dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Soit $A > 0$ tel que $supp\varphi \subseteq [-A, A]$.Alors $supp\varphi_n \subseteq \frac{1}{n}$ et $supp\varphi \subseteq [-A, A]$ pour tout $n \geq 1$. Comme

$\varphi_n^{(k)}(x) = n^k \exp(-n)\varphi^{(k)}(nx)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, on obtient:

$$\sup_{|x|\leq A} \left|\varphi_n^{(k)}(x)\right| \leq n^k e^{-n} \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\varphi^{(k)}(x)\right| = n^k e^{-n} \sup_{|x|\leq A} \left|\varphi^{(k)}(x)\right| \ \overrightarrow{n \to \infty}\ 0.$$

Donc $\varphi_n(x)_{n\geq 1}$ converge vers 0 dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.

1.6.1 Définitions et principales propriétés :

1) Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ muni de la mesure de Lebesgue.

$L^2(\Omega)$ muni de produit scalaire $\langle f, g\rangle = \left(\int\limits_\Omega f(x)g(x)dx\right)$ est un espace de Hilbert muni de la norme :

$$\|f\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int\limits_\Omega |\ f(x)|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

2) On note $\mathcal{D}(\Omega)$ l'espace des fonctions de classe $C^\infty(\Omega)$ à support compact dans Ω. $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $L^2(\Omega)$.

3) Soit v une fonction de $L^2(\Omega)$.

On dit que v est dérivable au sens faible dans $L^2(\Omega)$ s'il existe des fonctions $w_i \in L^2(\Omega)$, pour $i = 1 \ldots n$, telles que:

$$\int_{\Omega} v(x)\frac{\partial(\Phi)}{\partial x_i}(x)dx = -\int_{\Omega} w_i(x)\Phi(x)dx.$$

Chaque w_i est appelée la i-ème dérivée partielle faible de v et est notée désormais $\frac{\partial v}{\partial x_i}$

4) L'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ est défini par :

$$H^1(\Omega) = \left\{ v \in L^2(\Omega), \text{telque } \forall i = 1, ..., n; \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega) \right\}$$

Où $\frac{\partial v}{\partial x_i}$ est la dérivée partielle faible de la fonction v.

5) Muni du produit scalaire suivant :

$$\langle u, v\rangle = \int_{\Omega} (u(x)v(x) + \nabla u(x).\nabla v(x))dx.$$

L'espace $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert.

6) Espace $H_0^1(\Omega)$: C'est un sous-espace de $H^1(\Omega)$ et qui sera très utile pour les problèmes avec conditions aux limites de Dirichlet qui est la densité de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$ on peut le définir par :

$$H_0^1(\Omega) = \left\{ v \in H^1(\Omega) \ \text{ tel que } v \mid_r = 0 \right\}$$

7) Formule de Green : Soit Ω un ouvert borné régulier de classe C^1.

Si u et v sont des fonctions de $H^1(\Omega)$, elles vérifient :

$$\int_{\Omega} u(x)\frac{\partial v(x)}{\partial x_i}dx = -\int_{\Omega} v(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}dx + \int_{\partial\Omega} u(x)v(x).\eta_i(x)ds.$$

où $\eta = (\eta_i)_{i=1,...,n}$. est la normale unité extérieure de $\partial\Omega$.

8) Si Ω un ouvert borné régulier de classe C^1, l'espace H_0^1 (Ω) coïncide avec le sous-espace de $H^1(\Omega)$ constitué des fonctions qui s'annulent sur le bord $\partial\Omega$.

9) Espace $H^m(\Omega)$, m est un entier naturel, est défini par :

$$H^m(\Omega) = \left\{ v \in L^2(\Omega) \ \text{ tel que } \forall\alpha \le m \ ; \mathcal{D}^\alpha v \in L^2(\Omega) \right\}.$$

Définition 1.6.3 *Pour $1 \le p < +\infty$, on définit l'espace de Sobolev $W^{1,P}(I)$ par:*

$$W^{1,P}(I) = \left\{ u \in L^p(I); u \ \text{a une dérivée faible } u' \in L^p(I) \right\}.$$

On le munit de la norme $\|u\|_{W^{1,p}} = \|u\|_{L^p} + \|u^{'}\|_{L^p}$.

On pourrait définir de même $W^{2,P}(I)$, comme l'espace des $u \in L^p(I)$ ayant une dérivée faible seconde, et plus généralement $W^{k,P}(I)$ pour tout entier $k \geq 1$.

Pour $p = 2$, on note :

$$W^{1,2}(I) = H^1(I)$$

et on le munit du produit scalaire $\langle u, v\rangle = \langle u, v\rangle_{L^2} + \langle u', v'\rangle_{L^2}$ · La norme associée est :

$$\|u\|_{H^1} = (\|u\|_{L^2}^2 + \|u^{'}\|_{L^2}^2)^{\frac{1}{2}}$$

qui est équivalente à $\|u\|_{W^{1,p}}$ on ait $\|u\|_{H^1} \leq \|u\|_{W^{1,p}} \leq \sqrt{2}\|u\|_{H^1}$ ·

Pour $k \geq 1$, on note $H^k(I) = W^{k,2}(I)$.

1.7 Fonction de Green

Soit $p, q, f \in C([a, b])$ où $p \in C^1([a, b])$, $(a < b)$ et $(\alpha_i, \beta_i) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall i = 1, 2,$ $|\alpha_1| + |\alpha_2|, |\beta_1| + |\beta_2| \neq 0$.On considère les équations différentielles ordinaires:

$$\begin{aligned} (H) \quad (py')' + py &= 0 \\ (NH) \quad (py')' + py &= f \end{aligned}$$

ainsi que les conditions aux bords associées:

$$(CB)_h \begin{cases} \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0 \\ \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0 \end{cases}$$

$$(CB)_{nh} \begin{cases} \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = \gamma \\ \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = \delta \end{cases}$$

Définition 1.7.1 *On appelle fonction de Green associée au problème homogène* $(H)-(CB)_h$ *une fonction* $G : [a, b] \times [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *véri ant les propriétés suivantes:*

(a) G est continue sur $[a, b] \times [a, b]$;

(b) G est symétrique:$G(x, y) = G(y, x), \forall (x, y) \in [a, b]^2$;

(c) $\frac{\partial G}{\partial x}(x, y)$ est continue pour tout $x \neq y$;

(d) $\frac{\partial G}{\partial x}(y^+, y) - \frac{\partial G}{\partial x}(y^-, y) = \frac{1}{p(y)}$ pour tout $y \in [a, b]$;

(e) la fonction partielle $x \longrightarrow G(x, y)$ est solution de l'équation (H) pour tout $x \neq y$;

(f) la fonction partielle $x \longrightarrow G(x, y)$ véri e les conditions $(CB)_h$ pour tout $y \in [a, b]$.

Remarque 1.7.1 *Définissons la fonction de Dirac δ en un point $x_0 \in \mathbb{R}$ par*

$\delta_{|x=x_0} = \delta(x - x_0) = \lim_{\varepsilon \to 0} f_\varepsilon(x)$ où

$$f_\varepsilon(x) \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon}, x_0 - \frac{\varepsilon}{2} \leq x \leq x_0 + \frac{\varepsilon}{2} \end{cases}$$

Alors

$$\delta(x - x_0) = \begin{cases} 0, & x \neq x_0 \\ \infty, & x = x_0 \end{cases}$$

et donc

$$\int_a^b \delta(x - x_0)dx = \begin{cases} 0, & x_0 \notin (a, b) \\ 1, & x_0 \in (a, b) \end{cases}$$

Si φ est continue en x_0, on a également

$$\int_a^b \varphi(x)\delta(x - x_0)dx = \begin{cases} 0, & x_0 \notin (a, b) \\ \varphi(x_0), & x_0 \in (a, b) \end{cases}$$

La fonction de Green associée à un opérateur de dérivation injectif L avec des conditions aux bords homogènes $(CB)_h$ est solution du problème:

$$\begin{cases} LG(x, y)\delta(x - y), \\ x \longmapsto G(x, y) \text{ vérfie les conditions aux bords } (CB)_h. \end{cases}$$

Théorème 1.7.1 *Supposons que le problème homogène $(H) - (CB)_h$ n'admet pas de solution non triviale. Alors,il existe une (et une seule) fonction G ne dépendant pas de f, et dite fonction de Green, telle que, pour toute fonction f, la solution y du problème non homogène$(NH) - (CB)_h$ s'écrit de manière unique sous la forme:*

$$y(x) = \int_0^1 G(x, y) \ f(s) \ ds \ .$$

Exemple 1.7.1 *1. Pour déterminer dans ce cas la fonction de Green, cherchons un système fondamental de solutions* $\{y_1, y_2\}$ *solutions des problèmes de Cauchy respectifs suivants :*

$$\begin{cases} y'' + \sigma^2 y = 0, & 0 < x < \varphi \\ y(0) = 0, & y'(0) = -1 \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} y'' + \sigma^2 y = 0, & 0 < x < \varphi \\ y(\varphi) = 0, & y'(\varphi) = -1 \end{cases}$$

Un calcul simple et direct donne

$y_1(x) = \frac{-1}{\sigma}\sin(\sigma x)$, et $y_2(x) = \frac{1}{\sigma}\sin(\sigma\varphi)\cos(\sigma x) - \frac{1}{\sigma}\cos(\sigma\varphi)\sin(\sigma x)$

avec un Wronskien égal à

$$W(y_1, y_2) = W(y_1, y_2)(0) = W(y_1, y_2)(\varphi) = \frac{\sin(\sigma\varphi)}{\sigma} \neq 0.$$

2. La fonction de Green, qui est une fonction symétrique, se calcule alors comme suit [35]

$$G(x,t) = \begin{cases} \frac{y_1(x)y_2(t)}{W(y_1,y_2)}, & 0 \leq x \leq t \\ \frac{y_1(t)y_2(x)}{W(y_1,y_2)}, & t \leq x \leq \varphi \end{cases}$$

En remplaçant y_1 et y_2 par leurs expressions respectives et en remarquant que

$$y_2(x) = \frac{1}{\sigma}\sin(\sigma(\varphi - x)),$$

on obtient finalement que

$$G(x,t) = \begin{cases} \frac{\sin(\sigma x)\sin(\sigma(\varphi - t))}{\sigma\sin(\sigma\varphi)}, & 0 \leq x < t \\ \frac{\sin(\sigma t)\sin(\sigma(\varphi - x))}{\sigma\sin(\sigma\varphi)}, & t < x \leq \varphi \end{cases}$$

1.8 Définition de la tronsformation de Mellin et ses propriètés

Définition 1.8.1 *Soit* f *est une fonction définie sur* $\mathbb{R}^+$, *on appelle transformée de Mellin de* f *,la fonction* $\tilde{f}$ *de la variable complexe* σ *définie par :* $\widetilde{f}(\sigma) = \int\limits_0^{+\infty} f(x).x^{\sigma}\frac{dx}{x}$ *lorsque cette inté grale converge .*

1.8.1 Quelques propriétés :

$$\widetilde{\frac{df}{dx}}(\sigma) = -(\sigma - 1)\widetilde{f}(\sigma - 1)$$

Et en général si $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\frac{\tilde{d^n} f}{dx}(\sigma) = (-1)^n(\sigma - 1)(\sigma - 2)...(\sigma - n)\tilde{f}(\sigma - n)$$

Et si $\alpha \in \mathbb{N}$, avec $\alpha = n + \beta$, et $0 < \beta < 1$, on vérifie que :

$$D^{\alpha} = D^{n+\beta} = D^n(D^{\beta}) = D^{\beta}(D^n).$$

On a en utilisant la transformation de Fourier:

$$\widehat{D^{\beta}u} = (i\xi)^{\beta}\widehat{u}$$

Par analogie avec la transformation de Mellin, on vérifie que:

$$\frac{\tilde{d^{\beta}} f}{dx^{\beta}}(\sigma) = \Gamma(\sigma)\Gamma(\sigma - \beta)\tilde{f}(\sigma - \beta)$$

Et pour $\alpha \in \mathbb{R}^+$, avec $\alpha = n + \beta$, on vérifie que :

$$\frac{\tilde{d^{\alpha}} f}{dx^{\alpha}}(\sigma) = \Gamma(\sigma)\Gamma(\sigma - \alpha)\tilde{f}(\sigma - \alpha)$$

On vérifie aussi que $x\frac{d\tilde{f}}{dx} = -\sigma\tilde{f}(\sigma)$

Et si $\tilde{f}(\sigma)$ est définie pour $\alpha_1 < Re\sigma < \alpha_2$, alors on a :

$$f(x) = \lim_{v \to +\infty} \frac{1}{2i\pi} \int_{\mu - iv}^{\mu + iv} f(\sigma)x^{-\sigma}d\sigma$$

Nous noterons par $f * g$, la convolution multiplicative de f et g par rapport à la mesure $\frac{dt}{t}$ elle est définie par:

$$h(x) = [f * g](x) = \int_0^{\infty} f(t)g(\frac{x}{t})\frac{dt}{t}$$

On a alors :

$$\widetilde{h}(\sigma) = \tilde{f}(\sigma)\tilde{g}(\sigma)$$

Remarque 1.8.1 *Il y a une certaine analogie entre la transformation de Mellin et celle de Fourier, on peut passer de l'une à l'autre en effectuant un changement de variable convenable comme par exemple:* $\rho = e^{-t}$.

Si l'on pose $\sigma = i\xi$, *on aura :* $\widetilde{f}(\sigma) = \int\limits_0^\infty f(\rho)\rho^\sigma \frac{d\rho}{\rho}$, *et en posant* $\rho = e^{-t}$, *il vient :*

$$\widetilde{f}(\sigma) = \int\limits_0^\infty f(e^{-t})e^{-it\xi}dt = \int\limits_0^\infty F(t)e^{-it\xi}dt = \widehat{F}(\xi).$$

qui n'est autre que la transformée de Fourier de $F(t) = f(\rho)$.

En utilisant cette analogie on peut appliquer le théorème de Plancheral [28] *,relatif à la transformation de Fourier et faire le changement de variable ci-dessus pour obtenir l'équivalent du théorème de Plancheral pour la transformation de Mellin .*

.

Chapitre 2

Position du Problème

Dans ce chapitre on va étudier le problème de Poisson dans un domaine plan du polygone, on a montré que l'utilisation d'une fonction de poids convenable allège les calculs surtout aux voisinages des points singuliers, et par conséquent le bon choix de l'espace du travail qui traite la solution du problème dans un secteur plan Ω_φ du polygone (φ ouverture du Ω_φ).

2.1 Notion du polygone

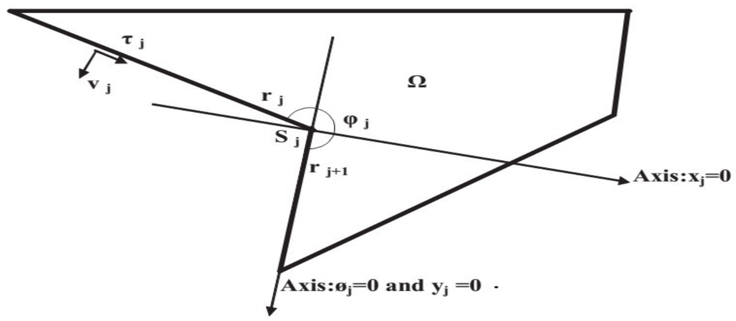

Fig 1 Notion sur la polygone

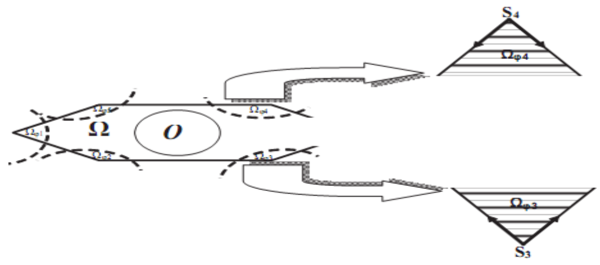

Fig 2 L'angle du polygone à chaque secteur plan

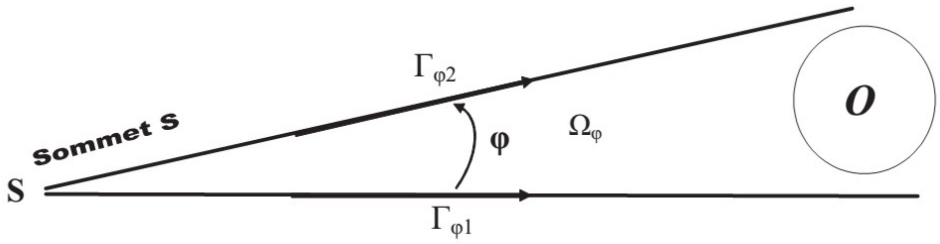

Fig 3 Partition de l'unité du polygone

Soit Ω un ouvert plan de sommet S_j et à frontière polygonale Γ_j pour $j = 1, 2, 3, ..., N$. N étant le nombre des sommets du polygone Ω.

On définit un domaine Ω_{φ_j} pour $j = 1, 2, 3, ..., N$ un secteur plan infini d'ouverture Ω_j

Soit donc w_j pour $j = 1, 2, 3, ..., N$ une partition de l'unité de classe $C^\infty(\Omega)$ du polygone qui isole chacun de sommet S_j pour $j = 1, 2, 3, ..., N$.

S_j étant le sommet de l'angle de l'ouverture φ_j pour $j = 1, 2, 3, ..., N$.

Soit la fonction de troncature w_j qui définie comme suite :

$$w_j = \begin{cases} 1 & \text{dans } V(S_j) \cap \Omega_{\varphi_j} \text{ , } j = 1, 2, 3, ..., N \\ 0 & \text{dans } \Omega \backslash V(S_j) \cap \Omega_{\varphi_j} \end{cases}$$

Où $V(S_j)$ un voisinage du sommet S_j , $j = 1, 2, 3, ..., N$:

Soit $X + \sum_{j=1}^{N} w_j = 1$, X est une fonction troncature sur Ω,et comme $\sum_{j=1}^{N} w_j = 1$, alors la fonction troncature donnée par :

$$X = \begin{cases} \quad 0 \qquad\qquad \text{dans } V(S_j) \cap \Omega_{\varphi_j} \;, j = 1, 2, 3, ..., N \\ 1 \qquad\qquad\qquad\qquad \text{dans } \Omega \backslash V(S_j) \cap \Omega_{\varphi_j} \end{cases}$$

X est une fonction définie sur un ouvert O (qui est en fait le polygone privés des voisinages des ses sommets).

2.2 Résultats de Grisvard

La solution du problème suivant:

$$(p) \begin{cases} \Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma \end{cases} \tag{2.2.1}$$

Il n'existe dans $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ que si le polygone Ω est convexe c'est à dire que tout les angles sont saillants, cela découle du fait que la solution de ce problème est de la forme: $u_j = u_0 + a\rho^{\frac{j\pi}{\varphi}} \sin \frac{j\pi}{\varphi}\theta$ telle que a est constante, cette solution n'est pas né cessaire dans $H^2(\Omega)$ lorsque $\pi < \varphi$. Car $\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} \notin L^2(\Omega)$.

2.3 Définition de fonction de poids

$$\lambda(\rho) = \begin{cases} \rho^\alpha & \text{si} \quad 0 < \rho < \rho_0 \\ \delta(\rho) & \text{si } \rho_0 < \rho < \rho_1 \\ 1 & \text{si } \rho_1 < \rho < \rho_2 \end{cases} \tag{2.3.1}$$

2.4 Le problème dans un secteur plan

Nous étudierons le problème dans un secteur plan infini d'ouverture φ qu'on note Ω_φ c'est à dire:

$$\Omega_\varphi = \{(\rho, \theta) \backslash \rho > 0, 0 < \theta < \varphi < 2\pi\} \tag{2.4.1}$$

Et on désigne Γ_φ la frontière de Ω_φ.la frontière de Ω_φ désigne la réunion des deux demi droites issues de l'origine et d'équation respectives $\theta = 0$ et $\theta = \varphi$. le problème (P) sur Ω équivaut au cas le problème classique dans un ouvert plan régulier O et au cas le problème dans le secteur plan Ω_φ d'ouverture Ω. telle que O est un ouvert plan régulier de la classe $C^1(\Omega)$. les coordonnées polaires sont mieux adaptées à la géométrie du domaine Ω_φ.

Pour étudier ce type de problème suivant sur Ω_φ , on affecte l'opérateur de Laplace Δ d'une fonction poids $\lambda(\rho)$ qui est une fonction indéfiniment différentiable à l'intérieur de Ω_φ et que ne s'annule pas dans Ω_φ , et définie par :

$$(P_\varphi)\begin{cases} \lambda(\rho)\Delta u = \lambda(\rho)f & \text{dans } \Omega_\varphi \\ Bu = 0 & \text{sur } \Gamma_\varphi \end{cases} \tag{2.4.2}$$

2.5 Définition de l'espace de travail $E_\alpha(\Omega_\varphi)$

Pour étudier ce type de problème suivant:

$$(P_\varphi)\begin{cases} \lambda(\rho)\Delta u = \lambda(\rho)f = h & \text{dans } \Omega_\varphi \\ Bu = 0 & \text{sur } \Gamma_\varphi \end{cases} \tag{2.5.1}$$

avec $h = \lambda(\rho)f \in L^2(\Omega_\varphi)$.

Supposons que le sommet de Ω_φ se situé à l'origine et soit $\lambda(\rho)$ la fonction poids définis par (2.3.1).

On va étudier ce problème au voisinage de l'origine dans un secteur plan Ω_φ , car le seul problème qui se pose quant à la régularité des solution du problème (2.5.1) se situé au voisinage de l'origine et d'après(2.3.1), on va donc étudier le problème suivant :

$$(P_\varphi)\begin{cases} \rho^\alpha\Delta u = \rho^\alpha f = h & \text{dans } \Omega_\varphi \\ Bu = 0 & \text{sur } \Gamma_\varphi \end{cases} \tag{2.5.2}$$

On va commencer en utilisant comme conditions aux limites celles de Dirichlet (le cas où B est l'opérateur identité), c'est à dire qu'on va d'abord étudier le problème suivant :

$$(P_\varphi)\begin{cases} \rho^\alpha\Delta u = \rho^\alpha f = h & \text{dans } \Omega_\varphi \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_\varphi \end{cases} \tag{2.5.3}$$

de même pour la condition de Neumann (le cas où $B = \frac{\partial}{\partial \eta}$) suivant:

$$(P_\varphi) \begin{cases} \rho^\alpha \Delta u = \rho^\alpha f = h & \text{dans } \Omega_\varphi \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 & \text{sur } \Gamma_\varphi \end{cases} \tag{2.5.4}$$

on a l'opérateur s'écrit en coordonné polaire:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}.$$

la solution de ce problème (2.5.3) est de la forme $u_j = u_0 + a\rho^{\frac{j\pi}{\varphi}} \sin \frac{j\pi\theta}{\varphi}$, a est constante, il est commandé de chercher la solution du problème (2.5.3) dans un espace fonctionnel, on constate que $\rho^\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} \in L^2(\Omega_\varphi)$, ce qui nous donne l'idée d'affecter le Laplacien d'une fonction poids qui dépend de ρ.

On choisit donc un espace fonctionnel avec poids qu'on défini par :

$$E_\alpha(\Omega_\varphi) = \left\{ u \in H^1(\Omega_\varphi) / \rho^\alpha D^2 u \in L^2(\Omega_\varphi) \right\} \tag{2.5.5}$$

Où, les fonctions u sont à support compact dans , $\overline{\Omega_\varphi}$, et le symbole D^2 désigne les dérivées partielles d'ordre 2 par rapport aux variables ρ et η où $\frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \theta}$.

On cherchera la solution de notre problème, si elle existe dans ce espace . Il est plus commandé de chercher la solution du problème (2.5.4) dans l'espace fonctionnel qu'on note par $E_{\alpha,0}(\Omega_\varphi)$ et qu'on défini par :$E_{\alpha,0}(\Omega_\varphi) = E_\alpha(\Omega_\varphi) \cap H_0^1(\Omega_\varphi)$ car on a une condition de Dirichilet homogène. on vérifie aisément que E_α E est un espace intermédiaire entre H^1 et H^2 .On munira l'espace $E_\alpha(\Omega_\varphi)$ de la norme du graphe suivante:

$$\|u\|_{E_\alpha} = \|u\|_{H^1} + \sum_{|\beta|=2} \|\rho^\alpha D^\beta u\|_{L^2}$$

2.6 Propriété de l'espace $E_\alpha(\Omega_\varphi)$

on rappels des quelques définitions on pose :

$$\begin{aligned} H^1_{x,y}(\Omega_\varphi) &= \left\{ u \in L^2(\Omega_\varphi), \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \text{ sont dans } L^2(\Omega_\varphi) \right\}. \\ H^1_{\rho,\eta}(\Omega_\varphi) &= \left\{ u \in L^2(\Omega_\varphi), \frac{\partial u}{\partial \rho}, \frac{\partial u}{\partial \eta} \text{ sont dans } L^2(\Omega_\varphi) \right\}. \end{aligned}$$

L'espace $H^1_{x,y}(\Omega_\varphi)$ coïncide avec l'espace $H^1_{\rho,\eta}(\Omega_\varphi)$ .Donc on utilisé définition l'espace de travail, l'espace $E_\alpha(\Omega_\varphi)$ définie par l'expression (2.5.5).

Proposition 2.6.1 *Si α et β deux réel pris dans l'intervalle $[0,1]$, et tels que $\alpha < \beta$.Alors $E_\alpha \subset E_\beta$.*

Proposition 2.6.2 *l'espace $E_{\alpha,0}(\Omega_\varphi)$ peut s'écrite sous la forme suivante:.*

$$E_{\alpha,0}(\Omega_\varphi) = \left\{u \in H^1_0(\Omega_\varphi)/\rho^\alpha u \in H^2_0(\Omega_\varphi)\right\}$$

Où u les fonctions sont à support compact dans $\overline{\Omega_\varphi}$.

Proposition 2.6.3 *l'espace $E_\alpha(\Omega_\varphi)$ est espace de Banach réflexifs.*

Preuve. Voir [25] ■

Proposition 2.6.4 *Si u est dans $E_\alpha(\Omega_\varphi)$, alors $\rho^{\alpha-1}\frac{\partial u}{\partial \rho}$ est dans $L^2(\Omega_\varphi)$.*

Preuve. On sait que si $u \in E_\alpha(\Omega_\varphi)$ alors u est à support compact dans $\overline{\Omega_\varphi}$,et $u \in H^1(\Omega_\varphi)$donc $\frac{\partial u}{\partial \rho}$ est dans $L^2(\Omega_\varphi)$.

Montrons que $\rho^{\alpha-1}\frac{\partial u}{\partial \rho}$ est dans $L^2(\Omega_\varphi)$.On a donc $\|\rho^{\alpha-1}\frac{\partial u}{\partial \rho}\|^2 = \int_0^\varphi\int_0^\infty \rho^{2\alpha-2}\left|\frac{\partial u}{\partial \rho}\right|^2 \rho d\rho d\theta.$

Si $\rho \geq 1$, et comme $0 < \alpha < 1$ alors $\|\frac{\partial u}{\partial \rho}\|^2 \geq \|\rho^{\alpha-1}\frac{\partial u}{\partial \rho}\|^2$ car $\rho^{2\alpha-2} \leq 1$.

pour $\rho \geq 1$ la proposition est vérifiée, il reste le cas $\rho < 1$.

Pour$\rho < 1$, on a :

$$\int_0^\varphi\int_0^1 \rho^{2\alpha-2}\left|\frac{\partial u}{\partial \rho}\right|^2 \rho d\rho d\theta = \int_0^\varphi\int_0^\epsilon \rho^{2\alpha-2}\left|\frac{\partial u}{\partial \rho}\right|^2 \rho d\rho d\theta + \int_0^\varphi\int_\epsilon^1 \rho^{2\alpha-2}\left|\frac{\partial u}{\partial \rho}\right|^2 \rho d\rho d\theta.$$

Comme la fonction $\rho \longrightarrow \rho^{2\alpha-2}$ est décroissante et continue sur le compact $[\epsilon, 1]$;donc elle est bornée et atteint ses bornes sur ce compact .Donc

$$\int_0^\varphi\int_0^1 \rho^{2\alpha-2}\left|\frac{\partial u}{\partial \rho}\right|^2 \rho d\rho d\theta \leq \int_0^\varphi\int_0^\epsilon \rho^{2\alpha-2}\left|\frac{\partial u}{\partial \rho}\right|^2 \rho d\rho d\theta + \epsilon^{2\alpha-2}\int_0^\varphi\int_\epsilon^1 \left|\frac{\partial u}{\partial \rho}\right|^2 \rho d\rho d\theta.$$

Pour étudier l'intégrale $\int_0^\varphi\int_0^\epsilon \rho^{2\alpha-2}\left|\frac{\partial u}{\partial\rho}\right|^2\rho d\rho d\theta$, pour ϵ suffisamment petit non nul, la fonction $\rho \longrightarrow \rho^{2\alpha-2}$ admet de développement en série entier .En utiliser la fonction suivant:

$$\rho \longrightarrow \rho^{2\alpha-2} = (1+\rho-1)^{2\alpha-2}.$$

On a pour $|X| = |\rho-1| < 1$ alors $(1+X)^\beta = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\beta(\beta-1)(\beta-2)....(\beta-n+1)X^n$ et on a $|\rho-1| < 1$ car $0<\rho<\epsilon<1$

Posons donc $X = \rho-1$ et $\beta = 2\alpha-2$, et appliquant le développement en série entier, on aura donc

$$\int_0^\varphi\int_0^\epsilon \rho^{2\alpha-2}\left|\frac{\partial u}{\partial\rho}\right|^2\rho d\rho d\theta = \int_0^\varphi\int_0^\epsilon \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(2\alpha-2)(2\alpha-3)....(2\alpha-n-1)(\rho-1)^n\left|\frac{\partial u}{\partial\rho}\right|^2\rho d\rho d\theta$$

D'où

$$0 < \left|\int_0^\varphi\int_0^\epsilon \rho^{2\alpha-2}\left|\frac{\partial u}{\partial\rho}\right|^2\rho d\rho d\theta\right| = \left|\int_0^\varphi\int_0^\epsilon (1+\rho-1)^{2\alpha-2}\left|\frac{\partial u}{\partial\rho}\right|^2\rho d\rho d\theta\right|$$

$$\leq \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(2\alpha-2)(2\alpha-3)....(2\alpha-n-1)\int_0^\varphi\int_0^\epsilon |\rho-1|^n\left|\frac{\partial u}{\partial\rho}\right|^2\rho d\rho d\theta \leq S\int_0^\varphi\int_0^\epsilon \left|\frac{\partial u}{\partial\rho}\right|^2\rho d\rho d\theta$$

où S est la somme de la série entier de coefficient :

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(2\alpha-2)(2\alpha-3)....(2\alpha-n-1)$$

Alors on a :

$$0 < \left|\int_0^\varphi\int_0^\epsilon \rho^{2\alpha-2}\left|\frac{\partial u}{\partial\rho}\right|^2\rho d\rho d\theta\right| \leq S\int_0^\varphi\int_0^\epsilon \left|\frac{\partial u}{\partial\rho}\right|^2\rho d\rho d\theta,$$

et comme $\frac{\partial u}{\partial\rho}\in L^2$, on a le résultat désiré. ■

2.7 Existence et unicité du probléme elliptique dans $E_\alpha(\Omega_\varphi)$

2.7.1 Inégalité à priori

On va étudier l'existence du problème suivant:

$$(p_\varphi)\begin{cases}\rho^\alpha\Delta u=\rho^\alpha f=h & \text{dans }\Omega_\varphi\\ u=0 & \text{sur }\Gamma_\varphi\end{cases}\tag{2.7.1}$$

dans l'espace $E_{\alpha,0}(\Omega_\varphi)$ pour ceci on utilisera le lemme suivant:

Lemme 2.7.1 ***(Lemme de Peetre) ([4])***

Soient E,F,G trois espaces de Banach réflexifs, tel que E s'injecte dans G et cette injection est compacte, et soit L un opérateur linéaire continu de E dans F .Alors les conditions suivantes sont équivalents :

1)L'image de L est fermée dans F, et L a un noyau de dimension finie.

2)Il existe une constante $K>0$ telle que :

$$\|u\|_E\leq K\left\{\|Lu\|_F+\|u\|_G\right\}.\tag{2.7.2}$$

On va appliquer ce lemme aux espaces aux espace:

$$E=E_{\alpha,0}(\Omega_\varphi);F=L^2(\Omega_\varphi);G=H_0^1(\Omega_\varphi)$$

il est clair que F et G sont des espaces de Banach réflexifs car ce sont des espaces de Hilbert et E est un espace de Hilbert et on a :$H_0^2(\Omega_\varphi)\subset E_{\alpha,0}(\Omega_\varphi)\subset H_0^1(\Omega_\varphi)\subset L^2(\Omega_\varphi)$.

et, il est évident que l'opérateur $\rho^\alpha\Delta$ est linéaire continu de $E_{\alpha,0}(\Omega_\varphi)$ dans $L^2(\Omega_\varphi)$.Donc toutes les hypothéses du lemme, sont vérifiées voir

Pour montrer que l'image de l'opérateur $L=\rho^\alpha\Delta$ est fermée dans $L^2(\Omega_\varphi)$ et que son noyau est de dimension finie, on établira une inégalité (2.7.2) qui devient :

$$\|u\|_{E_{\alpha,0}(\Omega_\varphi)}\leq K\left\{\|Lu\|_{L^2(\Omega_\varphi)}+\|u\|_{H_0^1(\Omega_\varphi)}\right\}\tag{2.7.3}$$

Pour établir l'inégalité (2.7.3), on a besoin de l'inégalité suivante:

$$\|u\|_{E_{\alpha,0}(\Omega_\varphi)}\leq K\left\{\|\rho^\alpha\Delta u\|_{L^2(\Omega_\varphi)}+\|u\|_{H_0^1(\Omega_\varphi)}\right\}\tag{2.7.4}$$

Pour montrer que l'inégalité (2.7.4),on commence par l'utilisation de la transformation de Mellin qui est bien adaptée au domaine dans Ω_φ après la transformation de Mellin au problème suivant:

$$(\widetilde{P_\varphi})\begin{cases} \widetilde{\rho^\alpha \Delta u} = \widetilde{\rho^\alpha f} = \widetilde{h} & \text{dans } \Omega_\varphi \\ \widetilde{u} = 0 & \text{sur } \Gamma_\varphi \end{cases} \tag{2.7.5}$$

avec $\widetilde{\rho^\alpha \Delta u}(\sigma,\theta) = \widetilde{\rho^\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}}(\sigma,\theta) + \widetilde{\rho^{\alpha-1}\frac{\partial u}{\partial \rho}}(\sigma,\theta) + \widetilde{\rho^{\alpha-2}\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}}(\sigma,\theta)$ et on obtient :

$$\widetilde{\rho^\alpha \Delta u}(\sigma,\theta) = \frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial \theta^2}(\sigma+\alpha-2,\theta) + (\sigma+\alpha-2)^2\widetilde{u}(\sigma+\alpha-2,\theta) = \widetilde{h} \text{ et } \widetilde{h} \in L^2(\Omega_\varphi).$$

il vient :

$$\frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial \theta^2}(\sigma,\theta) + (\sigma+\alpha)^2\widetilde{u}(\sigma,\theta) = \widetilde{h}(\sigma+2,\theta).$$

Par résolution explicite, La solution de cette équation est donnée par :

$$\widetilde{u}(\sigma,\theta) = \int_0^\varphi \widetilde{G}(\sigma,\theta,\lambda)\widetilde{h}(\sigma+2,\theta)d\lambda.$$

$\widetilde{G}(\sigma,\theta,\lambda)$est la transformée de Mellin de $G(\rho,\theta,\lambda)$.
$\widetilde{G}(\sigma,\theta,\lambda)$ donné par :

$$\widetilde{G}(\sigma,\theta,\lambda) = \begin{cases} \frac{\sin\sigma(\varphi-\theta)\sin\sigma\lambda}{\sigma\sin\sigma\varphi} & ,0 \le \lambda \le \theta \\ \frac{\sin\sigma\theta\sin\sigma(\varphi-\lambda)}{\sigma\sin\sigma\varphi} & ,\ \theta \le \lambda \le \varphi \end{cases}$$

Le noyau de Green étant bornée [1] ; on utilise la transformation de Mellin inverse on aura directement l'inégalité suivante, il existe une constante $M > 0$ telle que :

$$\|\widetilde{u}\|_{\widetilde{H_0^2}} \le M\|\frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial \theta^2}(\sigma,\theta) + (\sigma+\alpha)^2\widetilde{u}(\sigma,\theta)\|_{\widetilde{L^2}}.$$

comme l'injection de H_0^2 dans $E_{\alpha,0}$ est continue, il existe une constante $N > 0$ telle que:

$$\|\widetilde{u}\|_{\widetilde{E_{\alpha,0}}} \le N\|\widetilde{u}\|_{\widetilde{H_0^2}}.$$

et on en déduit que :

$$\|\widetilde{u}\|_{\widetilde{E_{\alpha,0}}} \le K\|\widetilde{h}(\sigma+2,\theta)\|_{\widetilde{L^2}} \quad \text{ou} \quad K = MN.$$

On a l'inégalité souhaitée vérifiée d'où, $\|u\|_{E_{\alpha,0}(\Omega_\varphi)} \le K\left\{\|\rho^\alpha\Delta u\|_{L^2(\Omega_\varphi)} + \|u\|_{H_0^1(\Omega_\varphi)}\right\}.$

On remarque qu'on obtient des résultats analogues en utilisant la condition de Neumann dans l'espace $E_\alpha(\Omega_\varphi)$.

D'après le lemme de Peetre on a l'image de l'opérateur $L = \rho^\alpha \Delta$ est fermée dans $L^2(\Omega_\varphi)$ et que son noyau de dimension finie dans $E_{\alpha,0}(\Omega_\varphi)$.

On déduit que le problème (2.7.1) admet au moins une solution dans l'espace $E_{\alpha,0}(\Omega_\varphi)$.

Méthode 2

Pour montrer l'inégalité (2.7.4), on commence par calculer $\|\rho^\alpha \Delta u\|^2$:

on a donc: $\|\rho^\alpha \Delta u\|^2 = \left\langle \rho^\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \rho^\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \rho^\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \rho^\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right\rangle$

$\|\rho^\alpha \Delta u\|^2 = \left\langle \rho^\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \rho^\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right\rangle + 2\left\langle \rho^\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \rho^\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right\rangle + \left\langle \rho^\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \rho^\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right\rangle$

$\|\rho^\alpha \Delta u\|^2 = \|\rho^\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\|^2 + \|\rho^\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\|^2 + 2\left\langle \rho^\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \rho^\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right\rangle$.

ce qui implique suivant la méthode de Grisvard voir [5] ou [8] on a :

$$\langle D_x v, D_y w\rangle = \langle D_y v, D_x w\rangle .$$

Posons $v = D_x u, w = D_y u$ on obtient:$\langle D_x v, D_y w\rangle = \langle D_y D_x u, D_x D_y u\rangle = \left\langle D_x^2 u, D_y^2 u\right\rangle$

$\langle D_x v, D_y w\rangle = \langle D_y D_x u, D_x D_y u\rangle = \left\langle D_x^2 u, D_y^2 u\right\rangle$

$\left\langle D_x^2 u, D_y^2 u\right\rangle = \int\limits_{\Omega_\varphi} |D_x u D_y u|^2 \, d\Omega_\varphi = \|D_x u D_y u\|^2.$

Il s'en suit :

$\|\rho^\alpha \Delta u\|^2 = \|\rho^\alpha D_x^2 u\|^2 + \|\rho^\alpha D_y^2 u\|^2 + 2\|\rho^{2\alpha} D_x u D_y u\|^2.$

et comme $\|\rho^{2\alpha} D_x u D_y u\|^2 \geq 0$ alors $\|\rho^\alpha \Delta u\|_{L^2}^2 \geq \|\rho^\alpha D_x^2 u\|^2 + \|\rho^\alpha D_y^2 u\|^2.$

et en ajoutant par $\|u\|_{H_0^1}^2$ nous avons :

$$\|\rho^\alpha \Delta u\|_{L^2}^2 + \|u\|_{H_0^1}^2 \geq \|\rho^\alpha D_x^2 u\|_{L^2}^2 + \|\rho^\alpha D_y^2 u\|_{L^2}^2 + \|u\|_{H_0^1}^2 \qquad (2.7.6)$$

D'après la norme du graphe de l'espace $E_{\alpha,0}$ on ait: $\|u\|_{E_{\alpha,0}}^2 = \|u\|_{H_0^1}^2 + \sum\limits_{|\beta|=2} \|\rho^\alpha D^\beta u\|_{L^2}^2.$

On déduit que l'inégalité (2.7.6), on a $\|\rho^\alpha \Delta u\|_{L^2}^2 + \|u\|_{H_0^1}^2 \geq \|u\|_{E_{\alpha,0}}^2$ où $K_0 = K = 1$ tels que K_0 et K sont constants, d'où le résultat de l'inégalité 2.7.4.

2.7.2 Etude de l'unicité de la solution

on va étudier le noyau du problème (P_φ)dans l'espace $E_\alpha(\Omega_\varphi)$.

Les éléments du noyau du problème (P_φ) sont solution du problème suivant :

$$(P_\varphi)\begin{cases} \rho^\alpha \Delta u = 0 & \text{dans } \Omega_\varphi \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_\varphi \end{cases} \tag{2.7.7}$$

comme le facteur ρ^α ne s'annule pas à l'intérieur de Ω_φ le problème (2.7.7) est donc équivalent au problème:

$$(P_\varphi)\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{dans } \Omega_\varphi \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_\varphi \end{cases}$$

Il suffit de remarquer que comme $\Delta u = 0$ et on a $\langle \Delta u, u\rangle = 0$ d'où,

$$\langle \Delta u, u\rangle = -\|\frac{\partial u}{\partial x}\|^2 - \|\frac{\partial u}{\partial y}\|^2 = 0$$

où, le crochet $\langle ., .\rangle$ désignent le produit scalaire dans $L^2(\Omega_\varphi)$ et les normes son indice sont celles de $L^2(\Omega_\varphi)$.

Donc $\Delta u = 0$ implique $\langle \Delta u, u\rangle = -\|\frac{\partial u}{\partial x}\|^2 - \|\frac{\partial u}{\partial y}\|^2 = 0$ on déduit que :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \end{cases} \Longrightarrow u \text{ est constante.}$$

et comme $u = 0$ sur Γ_φ , donc $u = 0$ dans $H^1(\Omega_\varphi)$,et donc $u = 0$ dans $E_\alpha(\Omega_\varphi)$ donc $u = 0$ dans $E_{\alpha,0}(\Omega_\varphi)$.

2.8 Problèmes Adjoints

2.8.1 Théorème

On a la formule de Green suivant [4]:

$$\int_\Omega Lu\overline{v}dx - \int_\Omega u\overline{L^*v}dx = \sum_{j=0}^{m-1}\int_\Gamma S_j u\overline{C_j v}d\sigma + \sum_{j=0}^{m-1}\int_\Gamma B_j u\overline{T_j v}d\omega \text{ pour tout } \mathrm{u}, v \in C_0^\infty(\overline{\Omega}).$$

ayant les propriétés suivants :

1)-les système $\{B_0, ..., B_m, C_0, ...C_m\}$ soit un système de Dirichlet d'ordre 2m sur Γ

2)-les coeffcients des C_j et $T_j$sont dans $C_0^\infty(\overline{\Omega})$.

3)-l'ordre C_j est $2m-1-\mu_j$et celui de T_j est $2m-1-m_j$.

4)-le système $\{C_0,......,C_{m-1},T_0,.....,T_{m-1}\}$est système de Dirichlet d'ordre $2m$ sur Γ.

2.8.2 Proposition:

Si u,v sont deux fonctions de $C_0^\infty(\overline{\Omega})$,on a la formule de Green suivante:

$$\langle\rho^\alpha\Delta u,v\rangle-\langle u,(\rho^\alpha\Delta)^*v\rangle=\int\limits_{\Gamma\varphi}SuCvd\sigma+\int\limits_{\Gamma\varphi}BuTvd\omega \tag{2.8.1}$$

telle que : S,T,B,C sont des opérateurs différentiel d'ordre 1 définie sur la bord Γ_φ(frontière de Ω_φ),l'opérateur $(\rho^\alpha\Delta)^*$est l'opérateur l'adjoint de $\rho^\alpha\Delta$.

Où les crochet $\langle.,.\rangle$désigne le produit scalaire dans $L^2(\Omega_\varphi)$.

Preuve. on a : $\Delta u=\frac{\partial^2u}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2u}{\partial\theta^2}$ d'où, $\rho^\alpha\Delta u=\rho^\alpha\frac{\partial^2u}{\partial\rho^2}+\rho^{\alpha-1}\frac{\partial u}{\partial\rho}+\rho^{\alpha-2}\frac{\partial^2u}{\partial\theta^2}$

,en intégrant dans le secteur plan Ω_φ,pour $v\in C_0^\infty(\overline{\Omega_\varphi})$ alors :

$$\int\limits_{\Omega_\varphi}\rho^\alpha\Delta uv\rho d\rho d\theta=\int\limits_0^\varphi\int\limits_0^\infty\rho^{\alpha+1}\left[\frac{\partial^2u}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2u}{\partial\theta^2}\right]vd\rho d\theta=$$

$$=\int\limits_0^\varphi\int\limits_0^\infty(\rho^{\alpha+1}\frac{\partial^2u}{\partial\rho^2}+\rho^\alpha\frac{\partial u}{\partial\rho}+\rho^{\alpha-1}\frac{\partial^2u}{\partial\theta^2})vd\rho d\theta$$

$$=\int\limits_0^\varphi\int\limits_0^\infty\rho^{\alpha+1}\frac{\partial^2u}{\partial\rho^2}vd\rho d\theta+\int\limits_0^\varphi\int\limits_0^\infty\rho^\alpha\frac{\partial u}{\partial\rho}vd\rho d\theta+\int\limits_0^\varphi\int\limits_0^\infty\rho^{\alpha-1}\frac{\partial^2u}{\partial\theta^2}vd\rho d\theta$$

Si cette intégrale existe, on peut ainsi formuler le problème adjoint, on calcule cette intégrale en utilisant une intégration par parties:

$$\int\limits_0^\varphi\int\limits_0^\infty\rho^{\alpha+1}\frac{\partial^2u}{\partial\rho^2}vd\rho d\theta=\int\limits_0^\varphi\int\limits_0^\infty\rho^\alpha\frac{\partial^2u}{\partial\rho^2}vd\rho d\theta$$

$$=\int\limits_0^\varphi\frac{\partial u}{\partial\rho}(\rho^\alpha\rho v)d\theta\mid_0^\infty-\int\limits_0^\varphi\int\limits_0^\infty\frac{\partial u}{\partial\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho^\alpha\rho v)d\rho d\theta$$

$$=-\int\limits_0^\varphi\int\limits_0^\infty\frac{\partial u}{\partial\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho^\alpha\rho v)d\rho d\theta\qquad(\text{car }v\in C_0^\infty(\overline{\Omega_\varphi}))$$

$$= \int_0^{\varphi} u\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho^{\alpha}\rho v)d\theta \mid_0^{\infty} + \int_0^{\varphi}\int_0^{\infty} u\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}(\rho^{\alpha}\rho v)d\rho d\theta$$

$$= \int_0^{\varphi}\int_0^{\infty} u\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}(\rho^{\alpha}\rho v)d\rho d\theta \qquad (\text{car } v \in C_0^{\infty}(\overline{\Omega_{\varphi}}))$$

$$\int_0^{\varphi}\int_0^{\infty} \rho^{\alpha+1}\frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2} v d\rho d\theta = \int_0^{\varphi}\int_0^{\infty} u\left[\alpha(\alpha+1)\rho^{\alpha-1}v + 2(\alpha+1)\rho^{\alpha}\frac{\partial v}{\partial\rho} + \rho^{\alpha+1}\frac{\partial^2 v}{\partial\rho^2}\right]d\rho d\theta \qquad (2.8.2)$$

$$\int_0^{\varphi}\int_0^{\infty} \rho^{\alpha}\tfrac{\partial u}{\partial\rho} v d\rho d\theta = \int_0^{\varphi}\int_0^{\infty} \rho^{\alpha-1}\tfrac{\partial u}{\partial\rho} v\rho d\rho d\theta$$

$$= \int_0^{\varphi} u\rho^{\alpha-1}v\rho d\theta \mid_0^{\infty} - \int_0^{\varphi}\int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial\rho}(\rho^{\alpha-1}\rho v)u d\rho d\theta$$

$$= -\int_0^{\varphi}\int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial\rho}(\rho^{\alpha-1}\rho v)u d\rho d\theta \qquad (\text{car } v \in C_0^{\infty}(\overline{\Omega_{\varphi}}))$$

$$\int_0^{\varphi}\int_0^{\infty} \rho^{\alpha}\frac{\partial u}{\partial\rho} v d\rho d\theta = -\int_0^{\varphi}\int_0^{\infty} u\left[\rho^{\alpha}\frac{\partial v}{\partial\rho} + \alpha\rho^{\alpha-1}v\right]d\rho d\theta \qquad (2.8.3)$$

$$\int_0^{\varphi}\int_0^{\infty} \rho^{\alpha-1}\tfrac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} v d\rho d\theta = \int_0^{\varphi}\int_0^{\infty} \rho^{\alpha-2}\tfrac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} v\rho d\rho d\theta$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{\partial u}{\partial\theta}\left(\rho^{\alpha-1}v\right)d\rho \mid_0^{\varphi} - \int_0^{\varphi}\int_0^{\infty} \frac{\partial u}{\partial\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\rho^{\alpha-1}v\right)d\rho d\theta$$

$$= \int_{\Gamma_{\varphi}} \frac{\partial u}{\partial\theta}\left(\rho^{\alpha-1}v\right)d\rho - \int_{\Gamma_{\varphi}} u\rho^{\alpha-1}\frac{\partial v}{\partial\theta}d\rho + \int_0^{\varphi}\int_0^{\infty} u\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\left(\rho^{\alpha-1}v\right)d\rho d\theta$$

$$\int_0^{\varphi}\int_0^{\infty} \rho^{\alpha-1}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} v d\rho d\theta = \int_{\Gamma_{\varphi}} \rho^{\alpha-1}\frac{\partial u}{\partial\theta} v d\rho - \int_{\Gamma_{\varphi}} u\rho^{\alpha-1}\frac{\partial v}{\partial\theta}d\rho \int_0^{\varphi}\int_0^{\infty} u\rho^{\alpha-1}\frac{\partial^2 v}{\partial\theta^2}d\rho d\theta \qquad (2.8.4)$$

De (2.8.2),(2.8.3) et(2.8.4) nous avons :

$$\int_0^{\varphi}\int_0^{\infty} \rho^{\alpha}\Delta u v\rho d\rho d\theta - \int_0^{\varphi}\int_0^{\infty} u\left[\rho^{\alpha}\tfrac{\partial^2 v}{\partial\rho^2} + (2\alpha+1)\rho^{\alpha-1}\tfrac{\partial v}{\partial\rho} + \rho^{\alpha-2}\left(\alpha^2 v + \tfrac{\partial^2 v}{\partial\theta^2}\right)\right]\rho d\rho d\theta =$$

$\int\limits_{\Gamma_\varphi} \frac{\partial u}{\partial \theta}\rho^{\alpha-1}v d\rho - \int\limits_{\Gamma_\varphi} u\rho^{\alpha-1}\frac{\partial v}{\partial \theta}d\rho$

d'où la relation suivante :$\langle \rho^\alpha \Delta u, v\rangle - \langle u, (\rho^\alpha \Delta)^* v\rangle = \int\limits_{\Gamma_\varphi} SuCv d\sigma + \int\limits_{\Gamma_\varphi} BuTv d\sigma$ telle que:

$\langle u, (\rho^\alpha \Delta)^* v\rangle = \int\limits_0^\varphi \int\limits_0^\infty u\left[\rho^\alpha \frac{\partial^2 v}{\partial \rho^2} + (2\alpha+1)\rho^{\alpha-1}\frac{\partial v}{\partial \rho} + \rho^{\alpha-2}(\alpha^2 v + \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2})\rho d\rho d\theta\right]$

et

$$\int\limits_{\Gamma_\varphi} SuCv d\sigma + \int\limits_{\Gamma_\varphi} BuTv d\sigma = \int\limits_{\Gamma_\varphi} \frac{\partial u}{\partial \theta}\rho^{\alpha-1}v d\rho - \int\limits_{\Gamma_\varphi} u\rho^{\alpha-1}\frac{\partial v}{\partial \theta}d\rho.$$

Donc l'opérateur adjoint de $\rho^\alpha \Delta$ noté $(\rho^\alpha \Delta)^*$ est donnée par :

$$(\rho^\alpha \Delta)^* = \rho^\alpha \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + (2\alpha+1)\rho^{\alpha-1}\frac{\partial}{\partial \rho} + \rho^{\alpha-2}(\alpha^2 + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}).$$

c'est à dire,$(\rho^\alpha \Delta)^* = \rho^\alpha \Delta + 2\alpha\rho^{\alpha-1}\frac{\partial}{\partial \rho} + \alpha^2\rho^{\alpha-2}$. ■

Chapitre 3

Application à un système d'évolution et conclusion

Dans ce chapitre, on va essayer de montrer que cette méthode est applicable à d'autres types de problèmes tels que le problème d'évolution pour les systèmes non stationnaires, le problème relatif à la variable du temps.

On appliquera le théorème de Hille-Yosida et la théorie des semi groupe de contraction,en fin on donne une conclusion générale à notre étude.

3.1 Etude de l'équation d'évolution

Soit $Q = \Omega \times]0, T[$un domaine plan de $\mathbb{R}^2$,telle que Ω une polygone et $T > 0$, la frontière de Ω est notée Γ telle que $\Gamma = \cup_{j=1}^{n} \Gamma_j$ et le côté $]S_{j-1}, S_j[$ est noté Γ_{j-1} où,S_j sont les sommet de Ω.

On considère alors le problème de diffusion suivant :

$$(P) \begin{cases} Lu = \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f & \text{dans } \Omega \times]0, T[= Q \\ u = 0 & \text{sur } \sum \\ u(0) = u_0 & \text{dans } \Omega \end{cases} \tag{3.1.1}$$

$f \in L^2(Q)$ étant donnée et B est un opérateur différentiel aux dérivées partielles d'ordre 0 ou 1, définie sur la frontière Γ, (on ne considérera ici que les deux cas, la condition d Dirichlet, et celle de Neumann), et la condition initiale $u(0)$donnée par :

$$u(0) = u_0 = u(x, y, 0) = u_0(x, y)$$

On commence par l'étude du problème (3.1.1) dans un secteur plan infinis Ω_φ d'ouverture φ alors on multiplie l'opérateur L par une fonction poids $\lambda(\rho) = \lambda_1(\rho)$qui est une fonction de la classe $C^\infty(Q_\varphi)$et ne s'annule pas dans Q_φ la fonction que vaut $\lambda_1(\rho) = \rho^\alpha$ au voisinagede l'origine .

Au voisinage de l'origine, le problème avec la condition de Dirichlet s'écrit:

$$(P_\varphi) \begin{cases} \rho^\alpha \frac{\partial u}{\partial t} - \rho^\alpha \Delta u = \rho^\alpha f & \text{dans } \Omega_\varphi \times \ ]0, T[= Q_\varphi \\ u(\rho, 0, t) = u(\rho, \theta, 0) & \text{sur} \sum_\varphi = \Gamma_\varphi \times \ ]0, T[\\ u(0) = u_0 = u(\rho, \theta, 0) = u_0(\rho, \theta) & \text{dans}\Omega_\varphi \end{cases} \tag{3.1.2}$$

3.1.1 Définition d'un espace fonctionnel

On se propose de chercher la solution du problème (3.1.2) dans un l'espace fonctionnel $E_\alpha(\Omega_\varphi)$ si on pose $A = -\rho^\alpha \Delta$ sur le domaine $D(A) = E_\alpha(\Omega_\varphi)$ pour $\alpha \in]0, 1[$, tels que l'espace $E_\alpha(\Omega_\varphi)$ est définie par :

$$E_\alpha(\Omega_\varphi) = \left\{ u \in H^1(\Omega_\varphi) \ \setminus \ \rho^\alpha D^2 u \in L^2(\Omega_\varphi) \right\}$$

Pour le cas de la condition de Dirichlet homogène, il est commandé de travailler dans l'espace fonctionnel $E_{\alpha,0}(\Omega_\varphi)$ tels que $E_{\alpha,0}(\Omega_\varphi) = E_\alpha(\Omega_\varphi) \cap H_0^1(\Omega_\varphi)$, et pour la condition de Neumann il est commandé de travailler l'espace $E_\alpha(\Omega_\varphi)$.

3.1.2 Etude de l'existence et l'unicité de la solution

Définition 3.1.1 *: On dit que l'opérateur A est dissipatif pour le produit scalaire $(.\ ,\ .)_H$ si :*

$$Re(Ax, x) \leq 0 \ , \quad \textit{pour tout } x \in D(A).$$

Définition 3.1.2 : *Un semi -groupe est dit dissipatif si son générateur infinitésimal l'est.*

Soit A un opérateur non borné de domaine $D(A)$ dense dans l'espace de Hilbert H. alors A est le générateur infinitésimal d'un semi groupe de contraction de classe C^0

si et seulement si : $\begin{cases} i)\ A \text{ est dissipatif} \\ ii)\ \text{l'imagede } D(A) \text{ par } I-A \text{ est égal } H \end{cases}$

Corollaire 3.1.1 *un semi groupe de contraction de classe C^0 est dissipatif .*

Etude du problème avec la condition de Dirichlet homogène

On va appliquer ceci au problème de diffusion, étant donnée $f \in L^2(Q_\varphi)$, le problème est le suivant:

$$(P_\varphi)\begin{cases} \rho^\alpha \frac{\partial u}{\partial t} - \rho^\alpha \Delta u = \rho^\alpha f = h & \text{dans } \Omega_\varphi \times\ ]0,T[= Q_\varphi \\ u = 0 & \text{sur} \sum_\varphi = \Gamma_\varphi \times\ ]0,T[\\ u\left(0\right) = u_0 & \text{dans} \Omega_\varphi \end{cases} \tag{3.1.3}$$

Pour les conditions au bord $u(\rho,0) = u(\rho,\varphi) = 0$ sur Γ_φ et l'opérateur $A = -\rho^\alpha \Delta$,donc on peut prendre $f = 0$ et l'espace suivant $H = L^2(\Omega_\varphi)$, et le domaine $D(A)$ telle que:

$$D(A) = E_\alpha(\Omega_\varphi) \cap H_0^1(\Omega_\varphi) = E_{\alpha,0}(\Omega_\varphi).$$

Il est clair que l'espace $D(A) = E_{\alpha,0}(\Omega_\varphi)$ est dense dans $L^2\left(\Omega_\varphi\right)$.

On va montrer que l'opérateur A est monotone c'est à dire: $\langle Au, u\rangle \geq 0$

$$\langle Au, u\rangle = -\int\limits_{\Omega_\varphi} u\rho^\alpha \Delta u d\Omega_\varphi = -\int\limits_0^\varphi\int\limits_0^\infty \overline{u}\left(\rho^\alpha \tfrac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \rho^{\alpha-1}\tfrac{\partial u}{\partial \rho} + \rho^{\alpha-2}\tfrac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\right)\rho d\rho d\theta$$
$$= -\int\limits_0^\varphi\int\limits_0^\infty \rho^\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}\overline{u}\rho d\rho d\theta - \int\limits_0^\varphi\int\limits_0^\infty \rho^{\alpha-1}\frac{\partial u}{\partial \rho}\overline{u}\rho d\rho d\theta - \int\limits_0^\varphi\int\limits_0^\infty \rho^{\alpha-2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\overline{u}\rho d\rho d\theta$$

on calcule l'intégrale: $-\int\limits_0^\varphi\int\limits_0^\infty \rho^\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}\overline{u}\rho d\rho d\theta$

$$-\int\limits_0^\varphi\int\limits_0^\infty \rho^\alpha \tfrac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}\overline{u}\rho d\rho d\theta = \alpha\int\limits_0^\varphi\int\limits_0^\infty \rho^{\alpha-1}\tfrac{\partial u}{\partial \rho}\overline{u}\rho d\rho d\theta + \int\limits_0^\varphi\int\limits_0^\infty \rho^{\alpha-1}\tfrac{\partial u}{\partial \rho}\overline{u}\rho d\rho d\theta + \int\limits_0^\varphi\int\limits_0^\infty \rho^\alpha\left|\tfrac{\partial u}{\partial \rho}\right|^2 \rho d\rho d\theta$$

on a : $\alpha\int\limits_0^{\varphi}\int\limits_0^{\infty}\rho^{\alpha-1}\frac{\partial u}{\partial\rho}\overline{u}\rho d\rho d\theta=-\frac{\alpha^2}{2}\int\limits_0^{\varphi}\int\limits_0^{\infty}\rho^{\alpha-2}\left|u\right|^2\rho d\rho d\theta$ donc :

$$-\int\limits_0^{\varphi}\int\limits_0^{\infty}\rho^{\alpha}\frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2}\overline{u}\rho d\rho d\theta=\frac{-\alpha^2}{2}\int\limits_0^{\varphi}\int\limits_0^{\infty}\rho^{\alpha-2}\left|u\right|^2\rho d\rho d\theta+\int\limits_0^{\varphi}\int\limits_0^{\infty}\rho^{\alpha}\left|\frac{\partial u}{\partial\rho}\right|^2\rho d\rho d\theta \tag{3.1.4}$$

$$-\int\limits_0^{\varphi}\int\limits_0^{\infty}\rho^{\alpha-2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}\overline{u}\rho d\rho d\theta=\int\limits_0^{\varphi}\int\limits_0^{\infty}\rho^{\alpha}\left|\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\rho}\right|^2\rho d\rho d\theta \tag{3.1.5}$$

$$-\int\limits_0^{\varphi}\int\limits_0^{\infty}\rho^{\alpha-1}\frac{\partial u}{\partial\rho}\overline{u}\rho d\rho d\theta=-\int\limits_0^{\varphi}\int\limits_0^{\infty}\rho^{\alpha-1}\frac{\partial u}{\partial\rho}\overline{u}\rho d\rho d\theta \tag{3.1.6}$$

de (3.1.4) et (3.1.5) et (3.1.6) nous avons :

$\langle Au,u\rangle=\int\limits_0^{\varphi}\int\limits_0^{\infty}\rho^{\alpha}\left|\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\rho}\right|^2\rho d\rho d\theta+\int\limits_0^{\varphi}\int\limits_0^{\infty}\rho^{\alpha}\left|\frac{\partial u}{\partial\rho}\right|^2\rho d\rho d\theta-\frac{\alpha^2}{2}\int\limits_0^{\varphi}\int\limits_0^{\infty}\rho^{\alpha-2}\left|u\right|^2\rho d\rho d\theta.$

D'après Grisvard [10] on a:

si $\alpha<p-1$ alors $\left(\int\limits_0^{\infty}\left|u(x)\right|^p x^{\alpha-p}dx\right)^{\frac{1}{p}}\leq\frac{p}{p-\alpha-1}\left(\int\limits_0^{\infty}\left|\frac{\partial u(x)}{\partial x}\right|^p x^{\alpha}dx\right)^{\frac{1}{p}}$

on a donc $\left(\int\limits_0^{\varphi}\int\limits_0^{\infty}\rho^{\alpha-2}\left|u\right|^2\rho d\rho d\theta\right)^{\frac{1}{2}}\leq\frac{2}{2-\alpha-1}\left(\int\limits_0^{\varphi}\int\limits_0^{\infty}\left|\frac{\partial u}{\partial\rho}\right|^2\rho^{\alpha}\rho d\rho d\theta\right)^{\frac{1}{2}}$

d'où $\int\limits_0^{\varphi}\int\limits_0^{\infty}\rho^{\alpha-2}\left|u\right|^2\rho d\rho d\theta\leq\frac{4}{(1-\alpha)^2}\int\limits_0^{\varphi}\int\limits_0^{\infty}\left|\frac{\partial u}{\partial\rho}\right|^2\rho^{\alpha}\rho d\rho d\theta$ et on tire :

$$-\frac{\alpha^2}{2}\int\limits_0^{\varphi}\int\limits_0^{\infty}\rho^{\alpha-2}\left|u\right|^2\rho d\rho d\theta\geq-\frac{2\alpha^2}{(1-\alpha)^2}\int\limits_0^{\varphi}\int\limits_0^{\infty}\left|\frac{\partial u}{\partial\rho}\right|^2\rho^{\alpha}\rho d\rho d\theta$$

on a donc : $\langle Au,u\rangle\geq\left(1-\frac{2\alpha^2}{(1-\alpha)^2}\right)\int\limits_0^{\varphi}\int\limits_0^{\infty}\rho^{\alpha}\left|\frac{\partial u}{\partial\rho}\right|^2\rho d\rho d\theta+\int\limits_0^{\varphi}\int\limits_0^{\infty}\rho^{\alpha}\left|\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\rho}\right|^2\rho d\rho d\theta$

on déduit que

$$\langle Au,u\rangle\geq\left(1-\frac{2\alpha^2}{(1-\alpha)^2}\right)\int\limits_0^{\varphi}\int\limits_0^{\infty}\rho^{\alpha}\left|\frac{\partial u}{\partial\rho}\right|^2\rho d\rho d\theta$$

l'expression $\langle Au,u\rangle$ est positive si et seulement si $\left(1-\frac{2\alpha^2}{(1-\alpha)^2}\right)\geq 0$ ce qui implique que $\alpha\in\left]0,\sqrt{2}-1\right]$ c'est à dire $0<\alpha\leq\sqrt{2}-1$.

Donc l'opérateur A est monotone pour $0<\alpha\leq\sqrt{2}-1$

monterons que l'opérateur $A = -\rho^{\alpha}\Delta$ est maximal.

$\forall l \in L^2(\Omega_\varphi), \exists u \in D(A),$ alors $l = Au + u$, on a donc: $-\rho^{\alpha}\Delta u + u = l \in L^2(\Omega_\varphi)$.

L'opérateur $\rho^{\alpha}\Delta$ est linéaire continu et surjectif de $D(A)$ dans $L^2(\Omega_\varphi)$.

Il suffit de montrer que l'image de $\rho^{\alpha}\Delta$ est fermée dans $L^2(\Omega_\varphi)$ et son noyau est de dimension finie et que $R(A+I) = \overline{Im\ A}$.

D'après le lemme de Peetre [4] on a montre que l'inégalité suivant : $\exists K > 0$ telle que:

$$\|u\|_{E_{\alpha,0}(\Omega_\varphi)} \leq K \left\{ \|\rho^{\alpha}\Delta u\|_{L^2(\Omega_\varphi)} + \|u\|_{H_0^1(\Omega_\varphi)} \right\} \tag{3.1.7}$$

est verifiée, on en déduit que l'équation $l = Au + u$ admet au moins une solution dans l'espace $D(A) = E_{\alpha,0}(\Omega_\varphi)$.

Conclusion générale

Nous avons procédé à l'étude de quelques problèmes limités pour les équations aux dérivées partielles semi -linéaire et du problème dynamique des évolutions.

Dans ce mémoire, nous avons étudié pour chaque cas le problème direct et son adjoint Enfin, nous avons appliqué cette méthode sur un système d'évolution dans un polygone plan.

Dans la première partie on a étudié le problème de Poisson avec la condition de Dirichlet dans un secteur plan infini, d'ouverture φ qui est un des angles du polygone.

On a montré que l'utilisation de la fonction de poids convenable allège plus les calculs surtout aux voisinages des points singuliers, et par conséquent après un bon choix de l'espace de travail et le traitement du problème. Nous avons mis en évidence une inégalité à priori et par utilisation du lemme de Peetre, nous avons établi l'existence de la solution dans l'espace ainsi choisi.

En suite on a étudié les unicités des solutions par la technique des noyaux .

Dans la deuxième partie on a établi une formule de Green adaptée à chaque problème et on a déduit la formule de l'opérateur adjoint.

Dans la dernière partie, on a fait une application dans un système d'évolution et du type parabolique. Ce genre de problèmes intervient dans plusieurs applications, comme la théorie de la chaleur, la diffusion des gaz, electro-fluides.... etc.

Par une application de la fonction de poids dans un système d'évolution et du type parabolique,on a étudié le problème d'évolution dans le corps plan du polygone $Q = \Omega\times]0,T[$, $T > 0$ avec T de temps et Ω polygone.

On a utilisé la même fonction poids choisie convenablement dans le chapitre 2 pour chaque problème, pour rendre les calculs aux voisinages des points singuliers plus aisé, et par conséquent, d'après *Brezis* [13] on a montré que l'opérateur de Laplace avec poids est monotone et maximal.

On a utilisé le lemme de Peetre pour l'inégalité à priori en mettant en évidence que l'opérateur est maximal.

D'après le théorème de Hille -Yosida, on établit l'existence et unicité de solutions de problèmes dans les espaces choisis, et même application pour le système qui engendre un semi groupe de contraction.

Bibliographie

[1] **H.Reinhard,** Equations aux derivées partielles, Dunod, Paris , 1991.

[2] **M.Merigot,** Etude du probleme de $\Delta u = f$ dans un polygône plan, Inégalités à priori, Boll .Un .Mat .Italie (4) .10, pp. 577-597,1974.

[3] **M.Merigot,** Solutions en normes L^p, des problèmes aux limites dans des polygônes plan, Thèse de Doctorat d'état, IREM,Université de Nice 1974.

[4] **Lions,J.L.et Magenes,** Problèmes aux limtes non homogènes et Applications,Tome1, Dunod, Paris 1968.

[5] **P.Grisvard,** Alternative de Fredholm relative au problème de Dirichlet dans un polygône ou un polyèdre, Boll .Un .Mat .Italie (4) .5 1972 p. 132-164.

[6] **P.Grisvard,** Alternative de Fredholm relative au problème de Dirichlet dans un un polyèdre, Annali S.N.S .Pisa, séries 4,**2** (3) **,**359-388 ,1975.

[7] **P.Grisvard,** Singularites des solutions du problèmes des stokes dans un polygône, Seminaire d'analyse fonctionnelle, IREM, Nice,1979.

[8] **P.Grisvard,** Elliptic problems in nonsmooth domains, Monographs and studies in Mathematics, 24,Pitman, London,1985

[9] **P.Grisvard,** Singularites in Boundary value Problems, Masson, 1992.

[10] **P.Grisvard,**Espaces intermédaires entre espaces de Sobolev avec poids, Annali S.N.S .Pisa, séries 3, **tome17** N^{0}3**,p.**255-296, 1963.

[11] **Hanna, M. and Smith,T,** Some remarks on the Dirichlet problem in piecewise smooths domains, Comm.Pure and Apllied Math, **20**, p.575-593.

[12] **J.Bass,** Cours De Mathématiques, **tome 2**, Masson, 1978.

[13] **H.Brezis,** Analyse Fonctionnelle, Théorie et application, Dunod 1999.

[14] **MS.Said,** Etude du problème adjoint du problème de Laplace avec poids dans un polygône plan, Thèse De Magister , Université de Constantine, 1993.

[15] **MS.Said,** Study of the biharmonic problems disturbs by weights in a polygons, Far East, Journal of Mathematics and sciences, FJMS, 16 (1) (2005) p.121-136.

[16] **P.A.Raviart et J.M.Thomas,** Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles, Masson,1992 .

[17] **J.L.Lions,** Analyse mathématique et calcul numérique,Volume 8, Paris 1984.

[18] **V.A.Koundratiev,** Boundary problems for elliptic equations withs conical or angular points,Trudy Moskov Mat .Obsc 16 ,1967.

[19] **M.Merigot,** Régularité des solutions du problème de stockes dans un secteur plan, Boll .Un .Mat .Italie (4) .6, 1972.

[20] **R.Temam,** On the theory and numerical analysis of the Navier stockes equations, lecture note ♯9 ,University of Maryland,1973.

[21] **MS.Said,** Study of the adjoint problem controled by the system of lamé affected by weith in a polygon, Far East Journal of math and Sci, FJMS, Vol 17-1, avril 2005, pp.121-135

[22] **MS.Said,B.Merouani,** Rôle des poids dans l'étude de quelques problèmes aux limites gouvernés par le système de Lamé dans un polygône, Roum.Sci.Techn-Méc. Appl.Bucaest 2002 (à paraitre).

[23] **S.Agmon,** Lecteures on elliptic boundary value problèms, Van Naostrand Mathematical studies , n .2, Princeton, 1965.

[24] **M.Dauge,** Problème de Drichilet Pour le Laplacien, seminaire des EDP, Nantes,1982.

[25] **MS.Said,B.Merouani,** Etude des problèmes adjoint du problème de Dirichlet pour l'équation de Laplace perturbé dans un polygône plan, Rev -Roum.Sci, Techn.Mec.Appl,**Tome 47** , $N^0$16 p.57-78, Buccarest (2002).

[26] **A.C. King, J. Billingham and S.R. Otto,** Differential Equations, Linear, Nonlinear, Ordinary, Partial, Combridge University Press, 2003.

[27] **MURRAY R.SPEIGEL,**FOURIER ANALYSIS, with applications to boundary value problems, Schaum's outline series , Mc Graw-Hill, 1974.

[28] **Yosida ,K,** Functional Analysis .Springer-Verlag, Berlin, 1966.

[29] **TITCHMARSH .E.C.**, Introduction to the Theory of Fourier Integrals.Oxford univ. Press, 1937.

[30] **Walter Rudin,** Real and complex Analysis, International Student Edition, McGRAW-HILL ,1970.

[31] **Marie-Thérèse,** Distributions Espaces de Sobolev Applications, Lacroix-Sonrier, ellipses, édition marketing S.A , Paris ,1998.

[32] **V.A.Koundratiev**, Boundary problems for elliptic equations with conical or angular points ,Trudy Moskov Mat .Obsc 16 ,1967.

[33] **G. Roos**, Analyse et géométrie. Méthodes hilbertiennes, Insiste comme indiqué, sur les méthodes hilbertiennes, Dunod (2002).

[34] **V. Trénoguine**, Analyse fonctionnelle, La deuxième partie est orientée vers l'analyse numérique, Éditions Mir (1985).

[35] **S. Djebali,** Problèmes aux limites associés aux E.D.O. du second ordre, Département de Mathématiques, E.N.S, Kouba, Alger, Mars 2007.

[36] **Li. Daniel,** Cours d'analyse fonctionnelle, Ellipse 2013.

الملخص

في هذه المذكرة، تم اثبات وجود و وحدانية الحل لمسألة لابلاس جديدة، باسخدام طريقة جديدة وهي دور دالة الوزن في مسألة لابلاس، باعتتبار الشروط الحدية المعطاة في أوراق بحثية [21]،[25]،الذي عالج الحالة الثابتة والتي لا تتغير بالمغير الزمني، وهذه الفكرة تعتبر حالة تطورية لهذا النوع من المسائل، تم دراسة العديد من التجارب على مسائل فيزيائية مختتلفة تعتمد على هذه الدراسة الرياضية المقدمة.

الكلمات المفتاحية

مسألة التطورية، دالة الوزن، صيغة قرين، الوجود و الوحدانية، تحويل ميلين، مضلع، مؤثر لابلاس، فراغ سوبولاف.

Résumé

Dans ce mémoire, l'existence et l'unicité de la solution pour une nouvelle problème de Laplace ont été prouvées, en utilisant une nouvelle méthode, qui est le rôle de la fonction de poids dans le problème de Laplace, qui est la méthode des solutions partielles considérant quelques les conditions aux limites données dans les publication précédent, Et nos résultats sont une extension de notre dans [21], [25], qui traitait de l'état d'équilibre qui ne change pas avec la variable de temps, et ces L'idée est un cas évolutif pour ce type de problème.De nombreuses expériences ont été étudiées sur différents problèmes physiques sur la base de cette étude mathématique présentée.

Mots clés

Problème d'évolution-fonction de poids-Formule de Green-Existence-Unicité-transformation de Mellin-Polygone-Opérateur de Laplace-espace Sobolev.

Abstract

In this memory, the existence and the uniqueness of the solution for a new Laplace problem have been proved, using a new method, which is the role of the weight function in the Laplace problem, which is the method of partial solutions considering some of the boundary conditions given in previous publications, and our results are an extension of our in [21], [25], which dealt with the steady state that does not change with the time variable, and these The idea is an evolutionary case for this type of problem. Many experiments have been studied on different physical problems based on this presented mathematical study.

Key Words

Evolution problem-weight function-Green's formula-Existence-Uniqueness-Mellin transformation- Polygon-Laplace operator-Sobolev space.