N° d’ordre :
N° de série :

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التعليم العــالي والبحث العلمـي

جامعة الشهيد حمة لخضر بالــوادي

كلية العلوم والتكنولوجيا

مذكرة التخرج

ليسانس أكاديمي

مجال: الرياضيات و الاعلام الآلي
شعبة الرياضيات
التخصص: نمذجة رياضية و محاكاة عددية

الموضوع

القطــــوع المخروطيـــــــــة

من إعداد الطالبات:
منى فوحمة
نصيرة بن علي
هيفاء خلوط

الأستاذ المؤطر:
أحمد حمروني

السنة الجامعية 2014 – 2015

(إِنّي رَأَيْتُ أَنَّـهُ لَا يَكْتُبُ إِنْسَانُ كِتَاباً فِي يَوْمِـهِ إِلَّا قَالَ فِي غَدِهِ: لَوْ غُيِّرَ هَذَا لَكَانَ أَحْسَنُ، وَلَوْ زِيدَ كَذَا لَكَانَ يُسْتَحْسَنُ، وَلَوْ قُدِّمَ هَذَا لَكَـانَ أَفْضَلُ، وَلَوْ تُرِكَ هَذَا لَكَـانَ أَجْمَلُ، وَهَذَا مِنْ أَعْظَمِ العِبَرِ، وَهُوَ دَلِيلٌ عَلَى اِسْتِيلَاءِ النَّقْصِ عَلَى جُمْلَةِ البَشَرِ)

عماد الدين الأصفهاني

شكــر وعرفان

الشكر لله سبحانه و تعالى أولا و أخيرا الذي من علينا و أعاننا لإتمام هذه المذكرة فالحمد لله الذي هدانا لهذا و ما كنا لنهتدي لولا هداه.

كما نرفع أسمى عبارات الامتنان و العرفان إلى من أشعل شمعة في دروب عملنا و أعطانا من حصيلة فكره لينير لنا دهليز من دهاليز العلم كنا قبل ذلك في رهبة من دخوله الأستاذ المشرف حمروني أحمد زاده الله رفعة وعلما

كما نشكر من كان لهما الفضل الكبير في إيصالنا إلى هذا المستوى مع الصبر و العطاء دوما الوالدين الكريمين إلى الذين ساهموا في تكوين تحصيلنا العلمي من الابتدائي إلى الجامعي

و إلى الأحبة جميعا نهدي ثمرة هذا الجهد.

منى نصيرة هيفاء

الفهرس

الفصل الثالث : القطع الناقص

الفصل الرابع :القطع الزائـــــد

لا يختلف اثنان في أن المرجع الأساسي في موضوع المخروطات هو "كتاب المخروطات لأبولونيو[1]س" (القرن3 ق م)– هذا الكتاب الذي عرف اهتماما كبيرا , من طرف العديد من العلماء في الحضارة العربية الإسلامية

حيث عمل هؤلاء في بادئ الأمر,على فهم قطوع المخروطات فهما جيدا , كما هو الحال عند بني موسى[2]

(القرن9 م), وثابت بن قرة , وعملوا على تطويرها بتأليف عديد من الكتب في موضوعها, واستغلالها في عدة ميادين تطبيقية ,كما هو الحال عند إبراهيم بن سنان[3] , وأبو حامد الصاغاني وأبو جعفر الخازن ,و الكوهي ,وابن سهل, وأبو سعيد السجزي,وأبو الريحان البيروني ,والحسن المراكشي[4] , وغيرهم كثيرون.

فقد ألف ثابت بن قرة كتابا ترجم فيه "كتاب المخروطات في أحوال الخطوط المقتبسة" وعمل على "إصلاح المقالة الأولى من كتاب المخروطات في قطع النسب المحدودة ",وألّف "كتاب في المخروط المكافئ" ولبني موسى "كتاب في قياس المستوي والأشكال الكروّية " ذكروا فيه أن الخط الناتج من قطع مستو لسطح مخروط قائم ,وموازٍ لقاعدة المخروط هو دائرة . وينسب ابن النديم كتابا في تفسير المقالة الأولى من كتاب المخروطات إلى إبراهيم بن سنان وللسجزي "رسالة في وصف القطوع المخروطية"

وانشغل ابن سهل بهندسة ابلونيوس للمخروطات , وتناول القطوع المخروطية بشكل مطلق , بصرف النظر عن الجانب التطبيقي لها , في كتاب "خواص القطوع المخروطية الثلاثة" , معالجا خصائص لها تتعلق بمفهوم القسمة التوافقية ,مشابهة لتلك الواردة عند أبلونيوس متضمنة في الأشكال 38 ;39 ;40 من المقالة الثالثة من "كتاب المخروطات" .وكتب الحسن ابن الهيثم "مقالة في اتمام كتاب المخروطات", ونذكر عمل المؤتمن بن هود في "كتاب الاستكمال" الذي حرّره ابن سرتاق في "كتاب الإكمال".

تاريخ القطوع المخروطية عند العرب واليونان :

المخروطات داخل الحضارة اليونانية العتيقة :

كانت مجموعة (325/ 375. Menchme (Menaikhmos[5]_ أول مجموعة تهتم بالمخروطات عرفت تحت إسم منحنيات Menchme أو ثالوث Mencheme الذي عرّفه عن طريق قطع مخروط بمستوي وكان

[1] عالم رياضيات يوناني من مدرسه إسكندرية , مصر, اشتهر باسم "الهندسي الأكبر" ألف كذا كتاب من أشهرها كتاب من ثماني أجزاء عن القطوع ألمخروطيه.
[2] بعد وفاة أبيهم موسى بن شاكر, تكفل المأمون بأبنائه أحمد, الحسن ومحمد حيث واصلوا تكوينهم في بيت الحكمة.
[3] هو عالم رياضيات وفلك عاش ببغداد في القرن الرابع الهجري / العاشر الميلادي, من مؤلفاته مساحة القطع المكافئ.
[4] من علماء المغرب , اشتهر في الفلك، والرياضيات , من مؤلفاته كتاب القطوع المخروطية.
[5] هو تلميذ Platon et d'Eudoxe ومربي ل Alexandre le Grand.

المقدمة التاريخية

الهدف هو بناء هيكل تكعيبي (منحن من الدرجة الثالثة) بحجم مضاعف بالنسبة لمكعب لديه (هذا المشكل مشكل تضعيف المكعب يسمى أيضا مشكل Delos طرح من طرف السوفسطائيين (مذهب فلسفي) في القرن السادس قبل الميلاد), وكان القصد من ذلك حماية المدينة من وباء تسبب فيه Oracle (إله يوناني).

ميّز Menchme ثلاثة أنواع من القطوع حسب درجة تقاطع مخروط بإنفراج الزاوية θ ومستوى عمودي في مولداته. انطلاقا من انفراج θ هناك ثلاثة حالات :

1- إذا كانت θ حادة يسمى القطع ذو الزاوية الحادة.
2- إذا كانت θ مستقيمة يسمى القطع ذو الزاوية المستقيمة.
3- إذا كانت θ منفرجة يسمى القطع ذو الزاوية المنفرجة.

درست المخروطات بنفسها و لأول مرة من طرف Apollonius de prege (262/180ق م) الذي تكوّن في الإسكندرية , حيث تظهر معالجته للقطوع في ثمانية كتب (الكتب من الأول حتى الرابع وصلتنا باليونانية أما الكتب من الخامس حتى السابع بالعربية بينما الكتاب الثامن مفقود) كما أن تسمية القطوع المخروطية ناقص , مكافئ , زائد كانت من طرفه .

لقد أعطى تعريف و إنشاء القطوع المخروطية الثلاثة انطلاقا من مخروط كيفي بدراسة خصائصها الأساسية من المماسات والمحارق والمستقيمات المقاربة كما برهن أن للقطوع المخروطية نفس الخصائص الأساسية مثل التباعد المركزي (وهذا الإسم أعطاه Kepler)

نجد عند أبولونيوس تعريفات ثنائيات البؤرة للقطع الناقص والزائد . وبالعكس لم يتكلم عن التعريف عن طريق البؤرة والدليل إلا إذا لم تصلنا كتاباته .

وقد كان لـ (300/360 ق م) Pappus d'Alexandrie دور فعال في إيصال عدد من أعمال الرياضياتيين اليونانيين , لمن جاء بعده . كما قام Pappus بكتابة ومعالجة الأجزاء الثمانية من كتاب المخروطات لأبولونيوس و نظمها في سلسلة رياضية أين لخص أعمال Apollonius et Dioclés وقدم دراسة كاملة للقطوع عن طريق البؤرة والدليل .

القطوع المخروطية في الحضارة العربية الإسلامية :

تعتبر المخروطات لأبولونيوس d'Apollonius de perge المرجع الأساسي حول النظرية القديمة للقطوع المخروطية ويتكون من ثمانية كتب , السبعة الأولى موضوعة في القرن الثامن الميلادي في الترجمة العربية

والتي روقبت من طرف الإخوة بني موسى هذه الترجمة ليست سهلة .

أولا لأن بني موسى أخذوا من مخطوط يوناني وحيد كما أن القطوع المخروطية كانت في عصر بني موسى موضوعا منسيا كليا لا يوجد أي فرد يريد شرح هذه النظرية حيث أن بني موسى وجدوا صعوبات في قراءة هذا المخطوط ثم إن أحد هؤلاء الإخوة وهو الحسن بن موسى طور بنفسه نظرية القطوع الإسطوانية بإستعمال مستوي فكرته كانت أن هذه النظرية هي أقل سهولة, وفي نفس الوقت مقدمة في نظرية القطوع المخروطية بعد وفات أحد إخوته وهو أحمد كشف في سورية عن مخطوط يوناني للأربعة كتب الأولى مع تفسيرات أتوكيوس بواسطة مخروطين وبواسطة القطوع الاسطوانية للأخ المتوفى ونجح أخويه المتبقيين على قيد الحياة أحمد ومحمد أخيرا في فهم النص اليوناني للمخروطات, ثم ترجمت الكتب الأربع الأولى من طرف هلال بن أبي هلال الحمصي والكتب من 5 إلى 7 من طرف ثابت بن قرة وقام الأخوان بني موسى بالمراجعة النهائية للترجمة, ووضع ابن الهيثم الكتاب الثامن المفقود لأبولونيوس.

في منتصف القرن العاشر بدأ المهندسون العرب بكشف حلول جديدة منها مشكل بناء المسبع المنتظم الذي يظهر أن دوره مهم جدا وذلك باستعمال القطوع المخروطية .

كتب الكوهي مؤلفا حول إنشاء القطوع بإستعمال الآلة التي نسميها البركار التام, حيث أصبح من الممكن رسم قطع زائد بتدخل تثليث الزاوية . استعمل العلماء العرب أيضا القطوع المخروطية من أجل حل المعادلات من الدرجة الثالثة.

وكان المهاني أول من حول مشكل هندسي إلى معادلات جبرية من الدرجة الثالثة, والمتعلقة بالمشاكل الموجودة في العرض الرابع من الكتاب الثاني للمؤلف الخاص بالكرة والاسطوانة لأرخميدس حوالي 940 م وكان ابو جعفر الخازن قد حل معادلات المهاني بإستعمال القطوع المخروطية ومن المحتمل أن حلول أبو جعفر إستلهمت من شروح أتوكيوس الذي يعطي حل لمشاكل أرخميدس بإستعمال القطوع المخروطية .

قام بعد أبو جعفر العديد من الرياضيين العرب بحل المعادلات من الدرجة الثالثة بإستعمال القطوع المخروطية هذه الحلول اعتمدت على خصائص بسيطة للقطوع المخروطية. بعض العلماء العرب خصوصا الكوهي وابن الهيثم درسوا مساحات الأجزاء المخروطية والحجوم أيضا ومراكز ثقل بعض المجسمات عن طريق قطوع مخروطية.

المقدمة

أصبحت دراسة القطوع المخروطية محل اهتمام الرياضيان والفلكيين والميكانيكيين وعلماء الفضاء وكان للحضارة العربية الإسلامية دور هام في مواصلة هذه الدراسات بعد إطلاعهم على أعمال الرياضيين الإغريق أمثال مينشم ,وأبو لونيونس وبابوس,ومن العلماء العرب الذين اهتموا بالقطوع المخروطية ثابت بن قرة وأبو جعفر الخازن وأبا سهل وابن الهيثم وغيرهم كثيرون.ومن خلال هذه الدراسات قمنا بإعطاء نظرة شاملة حول القطوع المخروطية في هذه المذكرة المقسمة إلى أربعة فصول:

الفصل الأول: عبارة عن مدخل لكيفية الحصول على القطوع المخروطية وتعريفها بصفة عامه, بالإضافة إلى منحنيات الدرجة الثانية.

الفصل الثاني:نتعرض فيه لتعريف ومعادلات القطع المكافئ وكيفية إنشائه ورسمه بطرق مختلفة بالإضافة إلى المماس والناظم فيه.

الفصل الثالث: نتعرف فيه على تعريف ومعادلات القطع الناقص وكيفية إنشائه ورسمه بطرق مختلفة بالإضافة إلى مساحة القطع الناقص.

الفصل الرابع: نتطرق فيه إلى تعريف القطع الزائد وكيفية إنشائه ورسمه بطرق مختلفة بالإضافة إلى المماس والناظم فيه.

مقدمة :

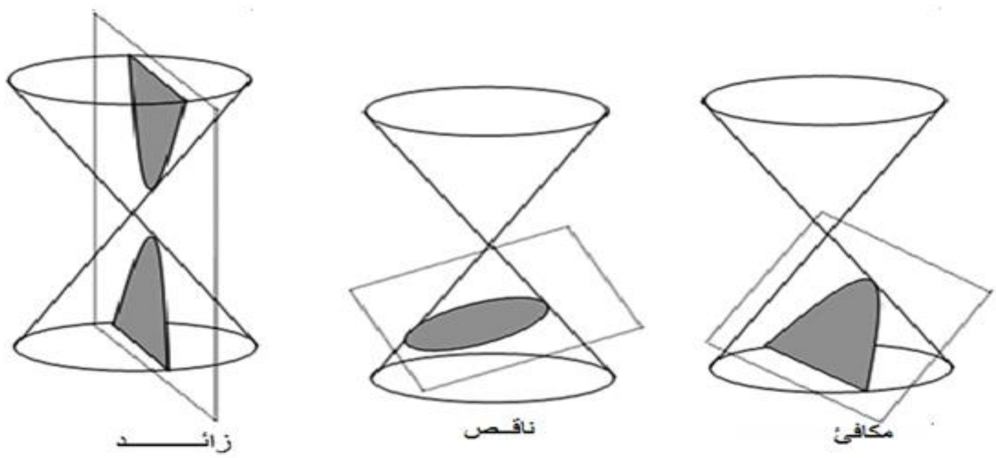
سنتعرف في هذا الفصل على ثلاثة أنواع من المنحنيات تعرف جميعها بالقطوع المخروطية لأن كل منها يمكن الحصول عليه من تقاطع مخروط مع المستوي وهي ثلاثة أنواع كالتالي :

1) قطع مكافئ
2) قطع ناقص
3) قطع زائد

فإذا كان:

- ✓ المستوى ليس عمودياً على المحور وموازيا لراسم فيه كان المقطع قطع مكافئ .
- ✓ المستوى ليس عمودياً على المحور وغير موازي لراسمه كان المقطع قطع ناقص .
- ✓ المستوى موازياً للمحور كان المقطع قطع زائد.

لاحظ الشكل(I .01) يوضح القطوع المخروطية:



الشكل(I .01)

I .1. التعريف العام للقطع المخروطي[5]

نعتبر المستوي التآلفي الإقليدي ع مزود بمعلم متعامد متجانس$(o,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

لتكن$F(x_1, y_1)$ نقطة ثابتة في المستوي وليكن $(D): ax + by + c = 0$ مستقيما ثابتا في المستوي نفسه,

عندئذ مجموعة كل النقط التي نسبة بعد كل منها عن النقطة $F(x_1, y_1)$ و بعدها عن المستقيم

(D) تساوي عددا ثابتا (e) تكون شكلا هندسيا يسمى بالقطع المخروطي.

من التعريف نلاحظ أن لكل قطع مخروطي ثلاثة مفاهيم أساسية يتعين بها هي:

1. النقطة الثابتة $F(x_1, y_1)$ تسمى بؤرة القطع المخروطي.
2. المستقيم الثابت $(D): ax + by + c = 0$ يسمى دليل القطع المخروطي.
3. النسبة (e) تسمى بالإختلاف المركزي.

ملاحظة:

إذا كان: $e = 1$ فإن القطع مكافئا.

$e < 1$ فإن القطع ناقصا.

$e > 1$ فإن القطع زائدا.

I .2. المعادلة العامة للقطع المخروطي[5]

من تعريف القطع المخروطي نستنتج المعادلة العامة وذلك كما يأتي:

لتكن $M(x, y)$ نقطة من القطع المخروطي, عندئذ المسافة بين $M(x, y)$ والبؤرة $F(x_1, y_1)$ هي:

$$FM = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2}$$

والبعد بين $M(x, y)$ والدليل $(D): ax + by + c = 0$ هو:

$$\frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

وبموجب تعريف القطع المخروطي فإن النسبة بين هاتين المسافتين تساوي (e) أي أن:

$$\frac{\sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2}}{\frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}} = e$$

ومنه :

$$\sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2} = e \cdot \frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

وبتربيع الطرفين نحصل على معادلة القطع المخروطي العامة وهي معادلة من الدرجة الثانية:

$$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2=\mathrm{e}^2\cdot\frac{(ax+by+c)^2}{\mathrm{a}^2+\mathrm{b}^2}$$

I .3. تعريف القطوع عن طريق البؤرة والدليل

نعتبر المستوي التآلفي الإقليدي ξ مزود بمعلم متعامد متجانس$(o,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

ليكن (D) مستقيما من ξ والنقطة F من ξ مع $F\notin(\mathrm{D})$ و e عددا حقيقيا موجبا تماما.

نسمي القطع المخروطي الذي دليله (D) وبؤرته F وتباعده المركزي $e>0$, الجزء (C) من المستـوي

المعرف بـ: $(\mathrm{C})\ =\ \{\mathrm{M}\ \in\ \xi:\parallel\overrightarrow{MF}\parallel=e\parallel\overrightarrow{MH}\parallel\}$

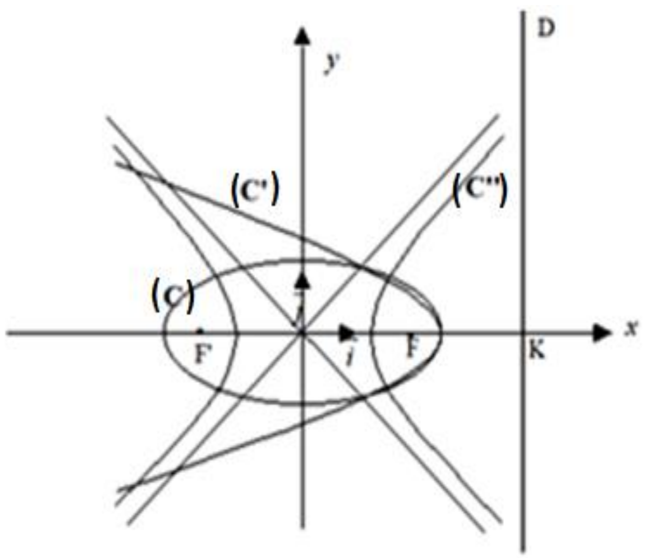
حيث يرمز‖ .‖ للنظيم الاقليدي .

H المسقط العمودي لـ M على (D) .

إذا كان : $\mathrm{e}=1$ المجموعة تمثل قطع مكافئ.

$\mathrm{e}>1$ المجموعة تمثل قطع زائد.

$\mathrm{e}<1$ المجموعة تمثل قطع ناقص.



بحيث :

(c) قطع ناقص.

(c') قطع مكافئ.

(c'') قطع زائد.

الشكل(I .02)

I .4. منحنيات الدرجة الثانية[1]

تعريف : في المستوي (ξ)المنسوب للمعلم $(O,\vec{I},\vec{J})$.

كل منحنى (C) معادلته الديكارتية $F(x,y)=0$ من الدرجة الثانية بالنسبة لـ x و $\mathbf{y}$ يسمى منحنى الدرجة الثانية .

المعادلة العامة لهذه المنحنيات من الشكل :

$$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$$

مع $a,\mathbf{b},\mathbf{c}$ ليست كلها معدومة (في آن واحد) .

ملاحظة:

لكل منحنى من الدرجة الثانية (C), يوجد معلم تأخذ فيه معادلة (C) الشكل التالي:

$$\mathrm{y}^2=ax^2+bx+c$$

بالفعل:

(C) منحنى من الدرجة الثانية معادلته:

$$ax^2+bxy+cy^2+dx+fy+e=0$$

في المعلم $\mathrm{L}=(O,\vec{I},\vec{J})$

بتغيير الأساس :

دساتير التحويل للمعلم الجديد $L_1=(o,\vec{i},\vec{j})$ هي :

$$\begin{cases} x=\alpha_1x_1+\beta_1y_1 \\ \mathrm{y}=\alpha_2x_1+\beta_2\mathrm{y}_1 \end{cases}$$

معامل الحد $\mathbf{y_1 x_1}$ في المعادلة الجديدة لـ (C) هو:

$$2[a\alpha_1\beta_1 + b(\beta_1\alpha_2 + \alpha_1\beta_2) + c\alpha_2\beta_2]$$

وتكون المعادلة الجديدة لـ (C) من الشكل:

$$a_1{x_1}^2 + c_1{y_1}^2 + d_1x_1 + f_1y_1 + e_1 = 0$$

وبتغير المبدأ نستطيع إيجاد معلم جديد$L_2 = (o, \vec{i}, \vec{j})$ مع $o' = (x_0, y_0)$

بحيث:

في المعادلة الجديدة لـ(C) يكون معامل y معدوم

معادلة (C) إذن تكون من الشكل :

$$a'x'^2 + c'y'^2 + d'x' + e' = 0$$

هذه المعادلة من الدرجة الثانية a' و c' ليسا معدومين معا, وبفرض أن $c' \neq 0$ ينتج وبتغيير الترميز أن :

$$y^2 = ax^2 + bx + c$$

(C) منحنى من الدرجة الثانية معادلته: $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$

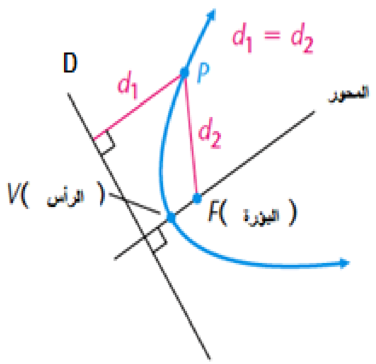
- ✓ إذا كان : $b^2 - 4ac = 0$ فإن المنحنى(C) قطع مكافئ.
- ✓ إذا كان : $b^2 - 4ac < 0$ فإن المنحنى(C) قطع ناقص.
- ✓ إذا كان : $b^2 - 4ac > 0$ فإن المنحنى(C) قطع زائد.

القطع المكـــافئ

II.1. تعريف[4]

في المستوي المنسوب إلى معلم .القطع المكافئ هو مجموعة النقط $M(x,y)$ في المستوي والتي يكون بعدها عن مستقيم معلوم يساوي بعدها عن نقطة ثابتة.

المستقيم المعلوم يسمى دليل القطع المكافئ والنقطة الثابتة تسمى بؤرة القطع المكافئ.



الشكل (II.1)

ومن التعريف العام للقطوع : $(C) = \{M \in \xi : \|\overrightarrow{MF}\| = e\|\overrightarrow{MH}\|\}$ نجد:

إذا كان $e = 1$ فإن : $(C) = \{M \in \xi : MF = MH\}$.

II.2. معادلات القطع المكافئ[2]

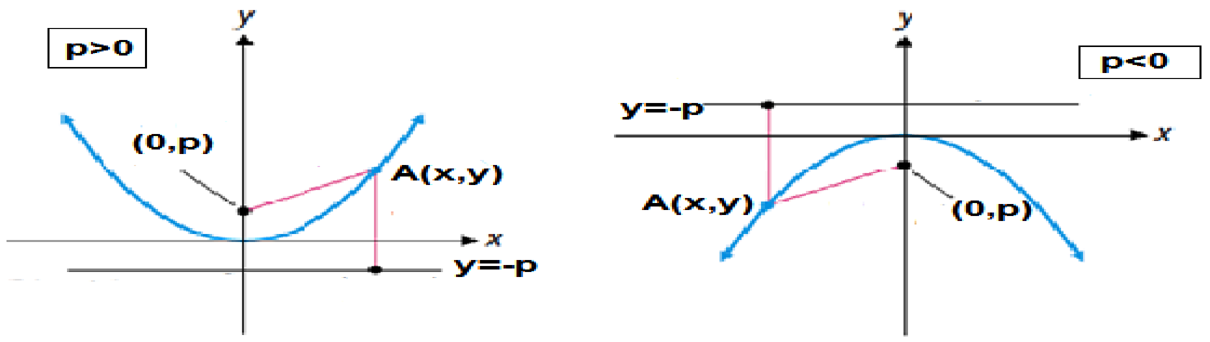
الصورة العامة لمعادلة القطع المكافئ تأخذ إحدى الصورتين :

- قطع مكافئ رأسي : $y = ax^2 + bx + c \quad , a \neq 0$
- قطع مكافئ أفقي : $x = ay^2 + by + c \quad , a \neq 0$.

II.2.1. معادلة القطع المكافئ الذي رأسه $(0,0)$ وبؤرته $(0,\mathrm{P})$ ودليله $y = -P$

المعادلة هي: $y = \frac{1}{4P}x^2$ والصورة القياسية هي: $y = ax^2$ حيث أن:

البؤرة هي: $(0,\frac{1}{4a})$ و الدليل هو: $y = -\frac{1}{4a}$



الشكل (2.II)

✓ بفرض أن $P > 0$ و ينطبق ذلك عندما يكون$P < 0$

- بعد البؤرة عن النقطة A هو:

$$\sqrt{(x-0)^2+(y-p)^2}=\sqrt{x^2+(y-p)^2}$$

- بعد النقطة A عن الدليل $Y=-P$ هو:

$$|y--p|=|y+p|$$

$$|y+p|=\sqrt{x^2+(y-p)^2}$$

$$|y+p|^2=\left(\sqrt{x^2+(y-p)^2}\right)^2$$

$$y^2+2Py+P^2=x^2+y^2-2Py+P^2$$

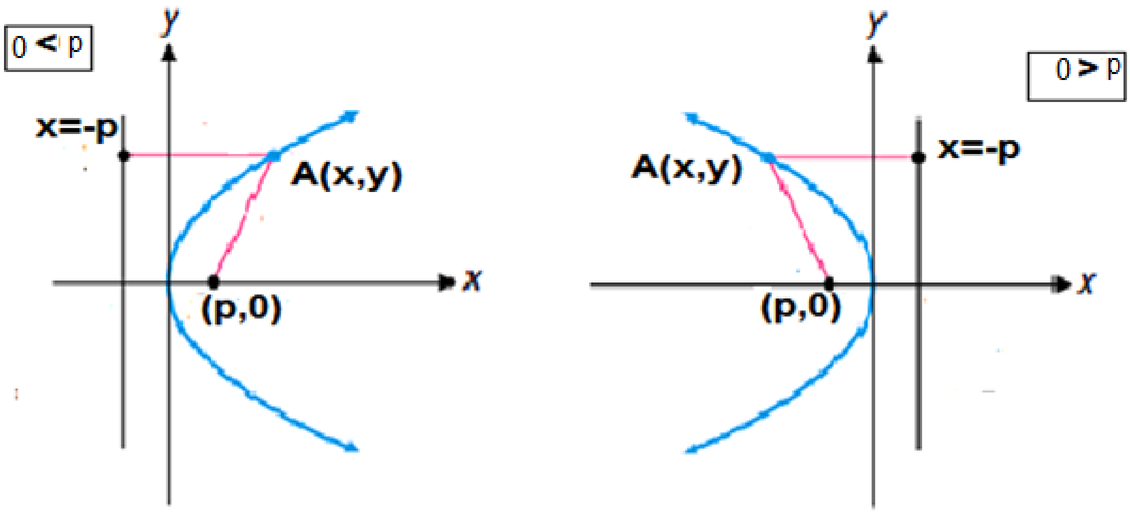
$$4Py=x^2$$

$$y=\frac{1}{4P}x^2$$

II.2.2. معادلة القطع المكافئ الذي رأسه $(0,0)$ وبؤرته $(P,0)$ ودليله $x=-p$

المعادلة هي: $x=\frac{1}{4P}y^2$ وصورتها القياسية هي : $x=ay^2$ حيث أن:

البؤرة هي : $(\frac{1}{4a},0)$ و الدليل هو: $x=-\frac{1}{4a}$



الشكل($3.\text{II}$)

✓ بفرض أن $P > 0$ و ينطبق ذلك عندما يكون $P < 0$

- بعد البؤرة عن النقطة A :

$$FA = \sqrt{(x-P)^2+(y-0)^2} = \sqrt{(x-P)^2+y^2}$$

- بعد النقطة A عن الدليل $y = -P$ هو:

$$|y - -p| = |y+p|$$

$$|x+p| = \sqrt{y^2+(x-p)^2}$$
$$|x+p|^2 = \left(\sqrt{y^2+(x-p)^2}\right)^2$$
$$x^2+2Px+P^2 = y^2+x^2-2Px+P^2$$
$$4Px = y^2$$
$$x = \frac{1}{4P}y^2$$

$\text{II}.3.2$.الصورة القياسية لمعادلة القطع المكافئ الذي رأسه (h,k):

- $y - k = a(x-h)^2$

البؤرة هي: $\left(h, k+\frac{1}{4a}\right)$ و الدليل هو: $y = k - \frac{1}{4a}$

- $x - h = a(y-k)^2$

البؤرة هي: $\left(h+\frac{1}{4a},\mathrm{k}\right)$ و الدليل هو: $x=h-\frac{1}{4a}$

II.3. طرق رسم القطع المكافئ نقطيا[3]

توجد طريقتان لرسم القطع المكافئ نقطيا وهي:

II.3.1. طريقة ابن سنان في رسم القطع المكافئ

يبين لنا ابن سنان في هذه الطريقة, كيفية استخراج القطع المكافئ من الدائرة, وذلك باستخراج نقط متعددة من القطع , باعتماد دائرة ذات قطر متغير. وهذا ملخص لطريقته .

نعتبر خط $\overline{\mathrm{AZ}}$ عليها نقطة B معلومة الوضع, أي أنّ $\overline{\mathrm{AB}}$ و $\overline{BZ}$ معلومان (الشكل II.4)

نرسم دائرة قطرها $\overline{AZ}$ و نرسم عمود من النقطة B يقطع الدائرة في النقطة E فيكون:

$$\overline{BE^2}=\overline{AB}\cdot\overline{BZ}$$

نعين النقطة H حيث $\{H\}=(EH)\cap(ZH)$ مع $\overline{BE}\parallel\overline{ZH}$ و $\overline{\mathrm{BZ}}\parallel\overline{EH}$. فيكون الرباعي $BZHE$ متوازي الأضلاع .

ولدينا $\overline{AB}\cdot\overline{BZ}=\overline{BE^2}=\overline{ZH^2}$ فإذا علّمنا على استقامة خط $\overline{\mathrm{BE}}$ نقطة T, بحيث : $\overline{BT}=\overline{AB}$.

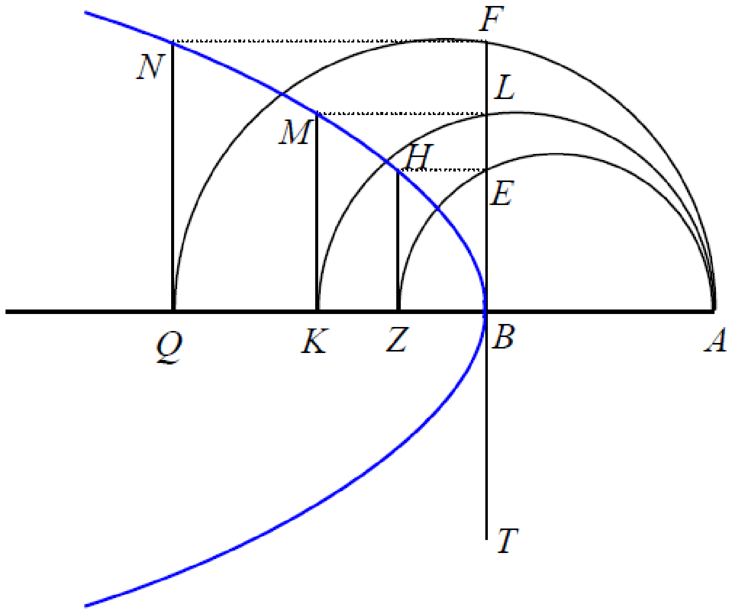
كان بناءا على هذا النقطة H على القطع المكافئ الذي رأسه النقطة B, وضلعه القائم $\overline{BT}$, وسهمه $\overline{BZ}$, وخط ترتيبه $\overline{ZH}$. حسب ما بيّن أبلونيوس في "كتاب المخروطات" في رسم القطع المكافئ الذي خطوط ترتيبه قائمة .

وعلى المنهج نفسه نحدد نقطة أخرى من القطع, بأخذ نقط على (BZ), ونرسم الدوائر التي تمر من هذه النقط ومن النقطة A, فتكون النقط الناتجة وفق متوازي الأضلاع كما بيّنا سابقا تقع على القطع المكافئ الذي وصفناه.

لدينا إذن على ضوء ما وصفنا $\overline{\mathrm{QN}},\overline{\mathrm{K}M},\overline{ZH}$ خطوط الترتيب

$$\overline{KM^2}=\overline{\mathrm{BL^2}}=\overline{\mathrm{AB}}\cdot\overline{\mathrm{BK}}=\overline{\mathrm{BT}}\cdot\overline{\mathrm{BK}}$$

$$\overline{QN^2}=\overline{\mathrm{BF^2}}=\overline{\mathrm{AB}}\cdot\overline{\mathrm{BQ}}=\overline{\mathrm{BT}}\cdot\overline{\mathrm{BQ}}$$



الشكل(II .4)

II .2.3. طريقة الحسن المراكشي في رسم القطع المكافئ

ليكن خطا $\overline{xy}$, والمستقيم (AB) حيث $\overline{AB} \perp \overline{\mathrm{xy}}$ وليكن خط $\overline{\mathrm{F}}$.

نريد أن نرسم قطعا مكافئا سهمه $\overline{AB}$ ورأسه النقطة A وضلعه القائم الخط $\overline{\mathrm{F}}$ (الشكل II .4)

لنعتبر النقطة G على الخط $\overline{AB}$ حيث $\overline{\mathrm{AG}} = \overline{\mathrm{F}}$

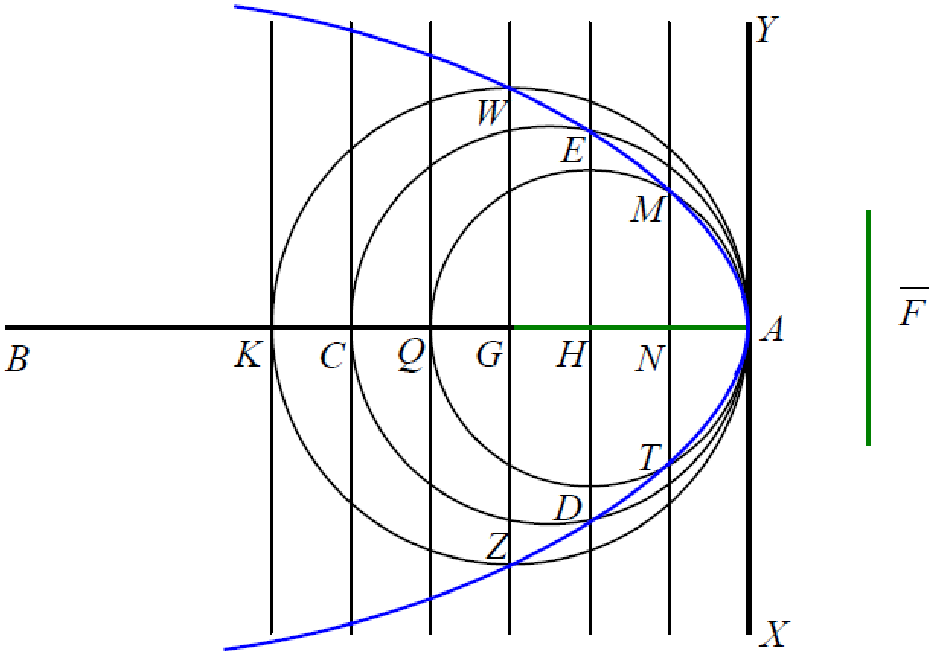
نقسم الخط $\overline{\mathrm{AG}}$ إلى أقساما متساوية وكذلك الخط (AB) بنفس القسمة على أدق ما يمكن من الأجزاء .

نخرج من هذه الأجزاء $\left(\text{النقط } \mathrm{N, H, G, Q, C, K} \ldots\right)$ خطوطا موازية للخط $\overline{xy}$ ونسميها خطوط الترتيب .
فيكون لدينا $\overline{NQ} = \overline{\mathrm{HC}} = \overline{\mathrm{GK}} = \overline{\mathrm{AG}} = \overline{\mathrm{F}}$

نرسم دائرة قطرها $\overline{AQ}$ تتقاطع مع خط الترتيب المار من النقطة N على نقطتين T, M. فتكون النقطتان M, T على القطع المكافئ الذي رأسه النقطة A وسهمه $\overline{AB}$ وضلعه القائم الخط $\overline{\mathrm{F}}$.

نرسم دائرة قطرها $\overline{AC}$ تتقاطع مع خط الترتيب المار من النقطة H على نقطتين D, E. فتكون النقطتان E, D على القطع

وهكذا نفعل بالدائرة ذات القطر $\overline{AK}$ و بباقي الأقسام إلي أن نصل إلى عدد كاف من النقاط.يظهر هذا العمل أن مضمون طريقة المراكشي يماثل مضمون تلك الواردة عند ابن سنان .



الشكل(II .5)

II .4. طرق إنشاء القطع المكافئ:

II .1.4.إنشاء القطع المكافئ بدلالة الرأس والمحور ونقطة منه:

لتكن O رأس القطع المكافئ و (OM) محوره و A نقطة منه ,يتم إنشاء القطع كما يلي :

- نرسم المستطيل $ABCD$.
- نقسم كلا من $[DA]$و$[OD]$ إلى الأقسام المتساوية (أربعة مثلا)
- نصل النقطة O مع تقسيم المستقيم (DA)
- نرسم من نقط تقسيم المستقيم (OD)مستقيمات موازية للمحور (DA) فتقاطع كل مستقيمين لهما نفس الرقم في نقطة من القطع المطلوب وبصورة مماثلة ننشئ الفرع الثاني من القطع .

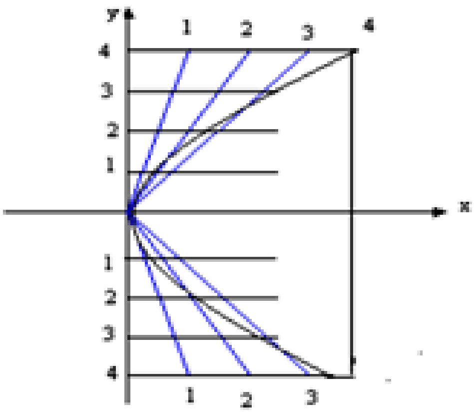
البرهان: نعين المحور والنقطة A ثم نرسم العمودي على المحور ونعين M مسقط A على المحور (ox) و D مسقط A على المحور (ox) في o .

ونقسم $[DA]$إلى n جزء نأخذ منها k جزء من الجهة السفلى $\left(o \text{ جهة}\right)$ نرسم المستقيمات كما في الشكل ونعين $\mathrm{E(x,y)}$ نضع $Q = (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OE})$ و $oD = d$ و $oM = m$

لاحظ أن: (1) $\left(\mathrm{Y} = \frac{\mathrm{Kd}}{\mathrm{n}}\right)$

ولدينا من جهة : (2) $tgQ = \frac{Y}{x}$

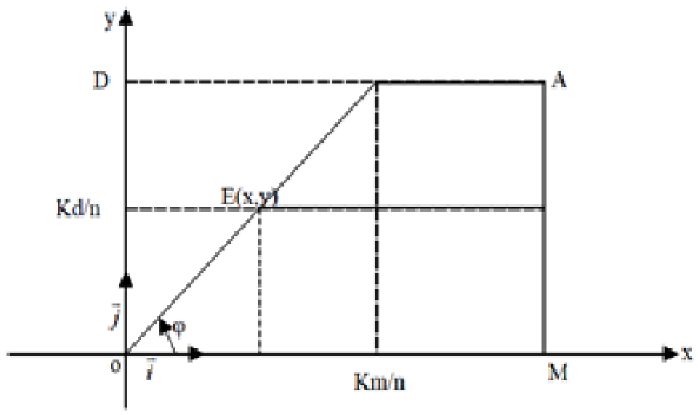
ومن جهة أخرى: (3) $\mathrm{tg\ Q} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{k}\,{}^{\mathrm{m}}/_{\mathrm{n}}}$



الشكل$(6.\mathrm{II})$

لاحظ أن النقطة $A(m,d)$ تحقق : $d^2 = \frac{d^2}{m} \cdot m$ مع $\frac{d^2}{m}$ ثابت $\left(\text{لأن} A \text{ مثبت}\right)$ فهو وسيط القطع المكافئ

من (1) و (2)و (3) نستنتج أن : $y^2 = \frac{d^2}{m} \cdot x$ إذن النقطة $A(m,d)$ تنتمي إلى القطع المكافئ وهو المطلوب.



الشكل$(7.\mathrm{II})$

II.2.4. طريقة أخرى لإنشاء القطع المكافئ

ليكن المستوي منسوب إلى معلم متعامد متجانس $(o,\vec{\imath}\ ,\vec{\jmath})$.

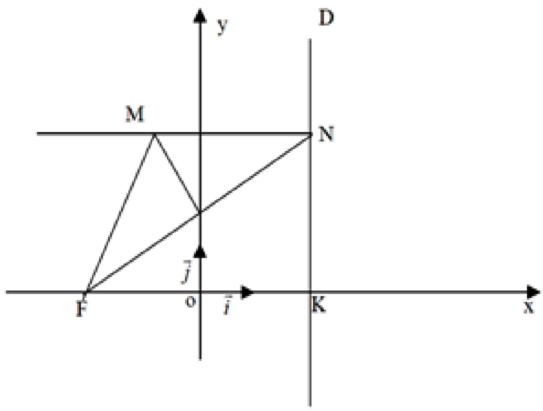
الهدف هو إنشاء القطع المكافئ ذو البؤرة F والدليل (D)

- ✓ ننشئ الدليل (D) ونعين البؤرة (F) على المحور (ox) .
- ✓ على (D) نعين نقطة كيفية N.

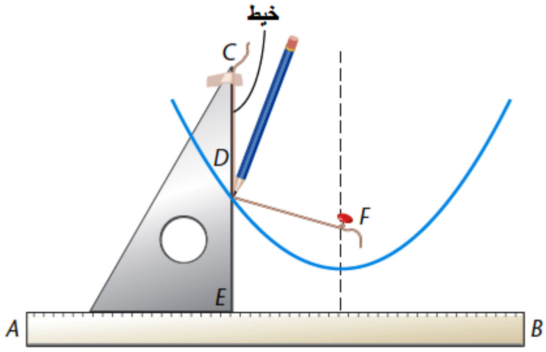
✓ نرسم موازيا لـ (ox) ومار من N ثم نصل بين F و N .

✓ نرسم محور القطعة $[NF]$.

✓ نقطة تقاطع هذا المحور مع المستقيم الموازي ل (ox) هي نقطة من القطع .



الشكل(II .8)



الشكل(II .9)

II.5.المماس والناظم لقطع مكافئ:

II.5.1.المماس لقطع مكافئ

ليكن(C) قطعا مكافئا معادلته بالنسبة للمعلم $(o,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ هي : $y^2 = -2px$

نأخذ كوسيط t حيث: $y = t$.

لدينا التمثيل الوسيطي ل (C) هو :
$$\begin{cases} x = \frac{-t^2}{2P} = f(t) \\ y = t = g(t) \end{cases}$$

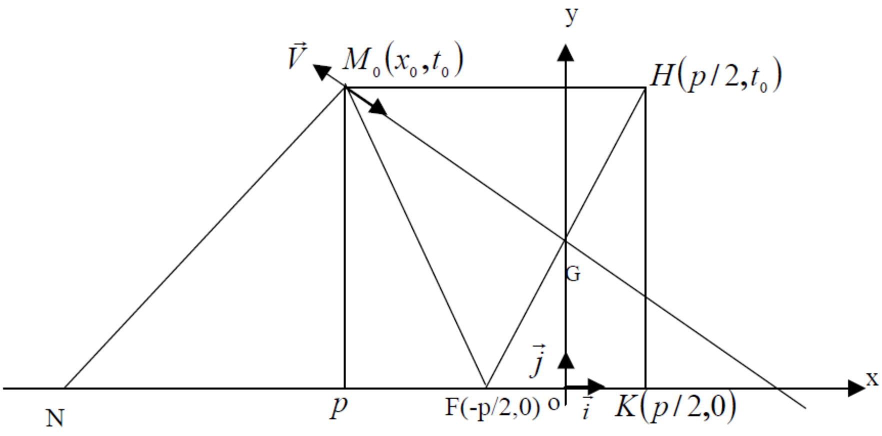
إذا كانت M_0 نقطة من (C) إحداثياها y_0, x_0 فإن معادلة المماس عندها تعطى ب:

$$\begin{vmatrix} x + \frac{{t_0}^2}{2p} & y - t_0 \\ \frac{-t_0}{p} & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{{t_0}^2}{2p} + \frac{t_0}{P}(y - t_0) \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2px + 2t_0 y - {t_0}^2$$

$$\Leftrightarrow y y_0 = -p(x + x_0)$$

وهي المعادلة الديكارتية للمماس عند النقطة $M_0(x_0, y_0)$



الشكل(II.10)

ملاحظة: لتكن M_0 نقطة من القطع المكافئ وليكن H مسقطها على الدليل (D)(الشكل(II.9))

إحداثيات H هي: $H\left(\frac{p}{2}, t_0\right)$ ومنه مركبات $\overrightarrow{FH}$ هي: $\overrightarrow{FH}\begin{pmatrix} p \\ t_0 \end{pmatrix}$

ليكن $\vec{V}$ شعاع توجيه المماس في النقطة M_0 لدينا إذن $\vec{V}\begin{pmatrix} -t_0 \\ p \end{pmatrix}$

لدينا : $\vec{V} \cdot \overrightarrow{FH} = -t_0 p + p t_0 = 0$

ومنه $\vec{V}$ عمودي على $\overrightarrow{FH}$

ومنه المماس عمودي على (FH)

لدينا من تعريف القطع المكافئ

$$\frac{M_0H}{M_0F} = 1$$

ومنه المثلث HM_0F متساوي الساقين

ويكون المماس في M_0 منصف الزاوية $\widehat{HM_0F}$ وذلك لأن G هي منتصف القطعة$[HF]$ وهذه طريقة لإنشاء مماس قطع مكافئ .

لتكن T نقطة تقاطع مماس القطع المكافئ في M_0 مع محور تناظر القطع (ox)

فاصلة النقطة T هي: $\overline{oT} = -x_0$ لأنه لدينا معادلة المماس هي :

$$yy_0 + p(x - x_0) = 0$$

ومنه : $y = 0$ وبالتالي $x = -x_0$

إذن : $\overline{oT} = -x_0$

ليكن p المسقط العمودي ل M_0 على المحور (xx')

فاصلة p هي : $\overline{\mathrm{op}} = -\mathrm{x}_0$

نسمي القطعة$[TP]$ هي تحت مماس للقطع (sous_tangente)

ذروة القطع المكافئ هي منتصف نصف المماس أي هو منتصف $[TP]$.

II .2.5.الناظم لقطع مكافئ

في كل نقطة من القطع المكافئ يوجد ناظم عمودي على المماس.

المعادلة الشعاعية للناظم في النقطة $\mathrm{M}_0(x_0, y_0)$ حيث $y_0{}^2 = -2px_0$ هي$\overrightarrow{\mathrm{M}_0\mathrm{M}} \cdot \vec{\mathrm{V}} = 0$ حيث $\vec{V}$ شعاع توجيه المماس في النقطةM_0 و M نقطة كيفية من الناظم .

لدينا:

$$\overrightarrow{\mathrm{M}_0\mathrm{M}} \cdot \vec{\mathrm{V}} = 0 \Leftrightarrow y_0(x - x_0) - p(y - y_0) = 0$$

$$\Leftrightarrow p\left(y - y_0\right) - y_0(x - x_0) = 0$$

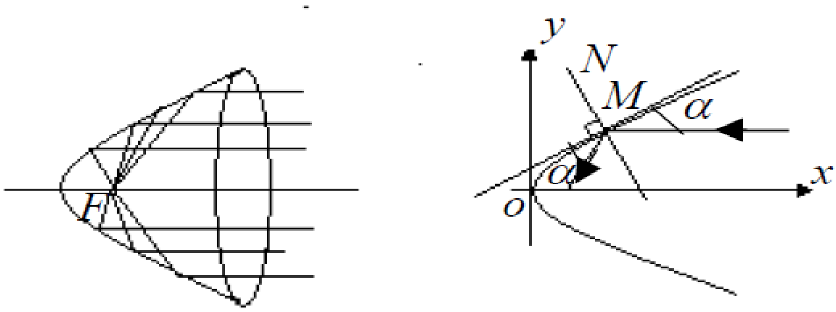
وهي المعادلة الديكارتية للناظم في النقطة $M_0(x_0, y_0)$.

الناظم فيM_0 يقطع عموما المحور (ox) في النقطة N ماعدا في الذروة أين يصبح الناظم هو المحور.

لدينا فاصلة النقطة N هي $\overline{ON} = x_0 - p$ وهذا بجعل في معادلة الناظم $y = 0$.

استنتاج:

من خلال هذا نستنتج أن للقطع المكافئ خاصية فيزيائية هامة هي أن أي شعاع ضوئي موازي لمحور تناظر القطع المكافئ ينعكس مار بالبؤرة أي أن الزاويتين الكائنتين بين الشعاع الموازي لمحور التناظر والمماس وبين الشعاع المنعكس والمماس متساويتين كما يبين الشكل التالي :

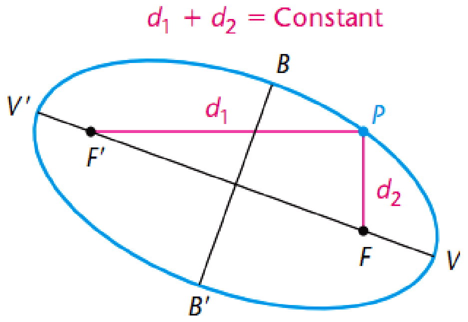


الشكل(11.II)

القطع الناقـــــص

III.1. تعريف[4]

هو مجموعة من النقط في المستوي التي يكون مجموع بعدي نقطة عن نقطتين ثابتتين (البؤرتان) يساوي عدد ثابت.



الشكل (III .01)

III.2.تعريف القطع الناقص عن طريق البؤرتين:

مبرهنة :

لتكن F و F' نقطتين متمايزتين من ξ و a عدد حقيقي موجب تماما

إذا كان $\|\overrightarrow{FF'}\| < 2a$ $\quad (c < a)$

بحيث: $c = \sqrt{a^2 - b^2}$

المجموعة $(C) = \{ M \in \xi \; \|\overrightarrow{MF}\| + \|\overrightarrow{MF'}\| = 2a\}$ هي قطع ناقص بؤرتاه F', F

البرهان :

ليكن ξ مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ حيث o منتصف $[F'F]$و $\vec{\imath} = \frac{\overrightarrow{FF'}}{\|\overrightarrow{FF'}\|}$ لتكن

$F(c, 0)$ ، $F'(-c, 0)$، $\overrightarrow{MF}\begin{pmatrix} c-x \\ -y \end{pmatrix}$، $\overrightarrow{MF'}\begin{pmatrix} -c-x \\ -y \end{pmatrix}$ و $\|\overrightarrow{FF'}\| = 2c$

نضع $b^2 = a^2 - c^2$

لدينا:

$$M \in C \Leftrightarrow \|\overrightarrow{MF}\| + \|\overrightarrow{MF'}\| = 2a$$

$$\Leftrightarrow \|\overrightarrow{MF}\| = 2a - \|\overrightarrow{MF'}\|$$

$$\Leftrightarrow (c-x)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{y^2 + (c+x)^2} + (c+x)^2 + y^2$$

$$\Leftrightarrow 4a\sqrt{(c+x)^2 + y^2} = 4a^2 + 4cx$$

$$\Leftrightarrow (c+x)^2+y^2=\left(\frac{a^2+cx}{a}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow (c+x)^2+y^2=\left(a+\frac{cx}{a}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2\left(\frac{a^2-c^2}{a^2}\right)+y^2=a^2-c^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

ومنه المجموعة (C) تمثل قطع ناقص.

III.3. معادلات القطع الناقص

III.1.3. المعادلة الديكارتية للقطع الناقص:

نضع $h=d(F,D)$ حيث يرمز d إلى تابع المسافة الإقليدية وليكن k المسقط العمودي لـ F على (D)ولنعتبر المعلم الذي مبدؤه $R(F,\vec{i},\vec{j})F$ بحيث:

$$\begin{cases} \vec{i}=\dfrac{\overrightarrow{Fk}}{h} \\ \vec{j}=Rot_{\frac{\pi}{2}}(\vec{i}) \end{cases}$$

لاحظ أن $R(F,\vec{i},\vec{j})$ معلم متعامد و متجانس ولدينا : $H(h,y), K(h,o), M(x,y)$

لتكن $M\in C$ لدينا :

$$M\in C \Leftrightarrow \|\overrightarrow{MF}\|=e\|\overrightarrow{MH}\|$$

$$\Leftrightarrow \|\overrightarrow{MF}\|^2=e^2\|\overrightarrow{MH}\|^2$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2=e^2(x-h)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2=e^2-2pex+p^2$$

حيث $eh=p$ يدعى p وسيط للقطع المخروطي .

ومنه $(1-e^2)\ x^2+y^2+2pex-p=0$

وهي المعادلة الديكارتية للقطوع.

لتكن E مجموعة غير خالية لفواصل النقط التي تنتمي إلى القطع المخروطي (C)

إذا كان $0 < e < 1$:

لدينا: $Y^2 = (e^2 - 1)x^2 - 2pex + p^2$

ومنه: $(e^2 - 1)x^2 - 2pex + p^2 \geq 0$

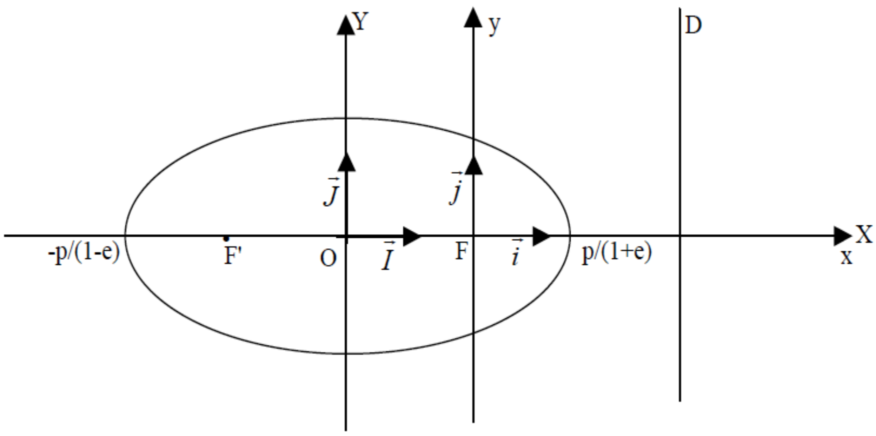
$$\Delta' = p^2 > 0$$

ومنه للمعادلة $(e^2 - 1)x^2 - 2pex + p^2 = 0$ حلان متمايزان:

$$x' = \frac{p}{e+1} > 0 \quad , \quad x'' = -\frac{p}{1-e} < 0$$

وتكون $(e^2 - 1)x^2 - 2pex + p^2 \geq 0$ لما $x \in \left[-\frac{p}{1-e}, \frac{p}{1+e}\right]$

فالمجموعة E هي قطعة مستقيمة ولا يكون للقطع المخروطي فروعا لا نهائية ويسمى عندئذ قطعا ناقصا .



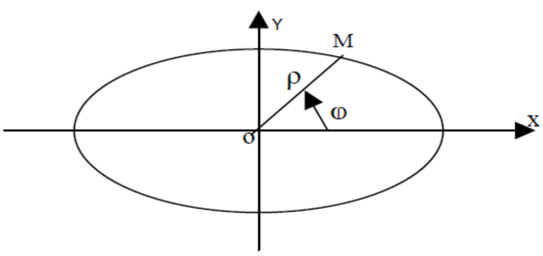
الشكل (02. III)

III.2.3. المعادلة القطبية للقطع الناقص:

لدينا

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

نعتبر (ox) المحور القطبي و o هو القطب .



الشكل (03. III)

إذا كانت $M(x,y)$ نقطة من القطع الناقص إحداثياتها القطبية (ρ,φ)معرفة كما يلي:

الزاوية القطبيةφ هي الزاوية الموجهة $(\overrightarrow{ox},\overrightarrow{oM})$ و ρ هو البعد بين o و M .

لدينا

$$\begin{cases} x = \rho \cos\varphi \\ y = \rho \sin\varphi \end{cases}$$

بالتعويض في $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ نحصل على: $\frac{b^2x^2}{(ab)^2}+\frac{a^2y^2}{(ab)^2}=1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

$$\Leftrightarrow \frac{b^2\rho^2cos^2\varphi+a^2\rho^2sin^2\varphi}{(ab)^2}=1$$

$$\Leftrightarrow \qquad \rho^2=\frac{a^2b^2}{b^2cos^2\varphi+a\sin\varphi}$$

لدينا:

$$\frac{a^2-b^2}{a}=\frac{c^2}{a^2}=e^2$$

ومنه

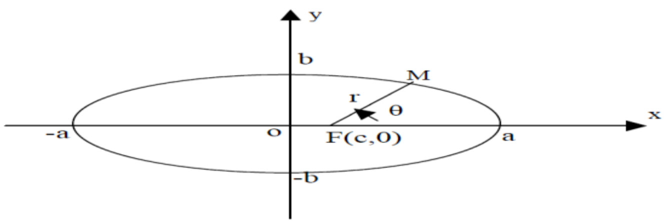
$$b^2 = a^2(1-e^2) \Rightarrow e=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}$$

وبالتعويض بعبارةb^2 في عبارة ρ^2 نجد :

$$\rho = a\sqrt{\frac{1-e^2}{1-cos^2\varphi}} \qquad\qquad \varphi \in [0,2\pi]$$

وهي المعادلة القطبية للقطع الناقص.

- إذا كانتr,θ تقاس انطلاقا من المحرق F بدلا من المركز O.



الشكل (04. III)

وبالتعويض في المعادلة الديكارتية للقطع الناقص نجد:

$$\mathrm{r}^2 = (er\cos\theta - p)^2$$

ومنه:

$$r = |er\cos\theta - p|$$

من أجل $\mathrm{r} = er\cos\theta - p$ نجد:

$$r = \frac{p}{e\cos\theta - 1} < 0$$

وهذا مرفوض.

من أجل $\mathrm{r} = -er\cos\theta - p$ نجد:

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\theta}$$

ومنه المعادلة القطبية للقطع الناقص باعتبار F هو القطب هي :

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\theta} \qquad \theta\epsilon[0,2\pi]$$

III.3.3. المعادلة الوسيطية للقطع الناقص :

لدينا : $\frac{x^2}{\mathrm{a}^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

تسمح المتطابقة $\forall t \in R : cos^2\mathrm{t} + sin^2 t = 1$ بالحصول على مايلي :

$$\frac{x^2}{\mathrm{a}^2} + \frac{y^2}{\mathrm{b}^2} = 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad \left(\frac{\mathrm{x}}{\mathrm{a}}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{y}}{\mathrm{b}}\right)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow \qquad \exists\ t[0,2\pi[: \quad \cos t = \frac{x}{a}$$

وبالتالي يكون التمثيل الوسيطي للقطع الناقص كما يلي :

$$\begin{cases} \mathrm{x} = \mathrm{a}\cos\mathrm{t} \\ \mathrm{y} = \mathrm{b}\sin\mathrm{t} \end{cases} \qquad t \in [0,2\pi[$$

لدينا :

$$\cos\theta = \frac{1 - \tan^2\frac{\theta}{2}}{1 + tan^2\frac{\theta}{2}} \quad , \quad \sin\theta = \frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1 + \tan^2}$$

بوضع $\alpha = \tan^2 \frac{\theta}{2}$ نحصل على تمثيل وسيطي آخر للقطع الناقص يسمى تمثيل ناطق باستثناء النقطة $(-a, 0)$ وهو معطى بـ :

$$\begin{cases} x = a\dfrac{1-\alpha^2}{1+\alpha^2} \\ y = b\dfrac{2\alpha}{1+\alpha^2} \end{cases}$$

لدينا

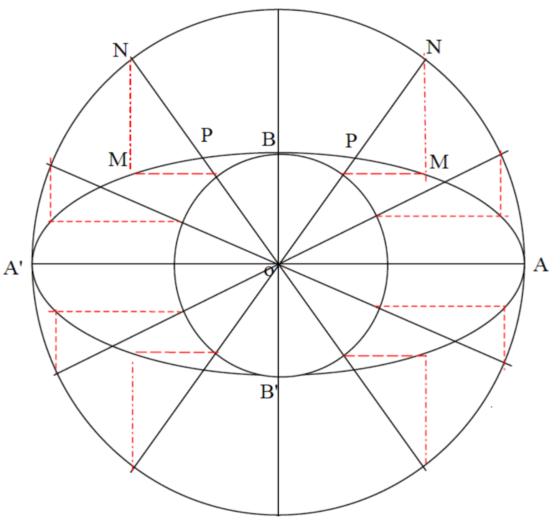
$$\lim_{\alpha\to\infty} y(\alpha) = 0 \qquad , \qquad \lim_{\alpha\to\infty} \mathrm{x}(\alpha) = -a$$

III.4. إنشاء القطع الناقص :

III.1.4. طريقة الدائرتين

ننشئ دائرتين لهما نفس المركز o ونصف قطريهما a و b على الترتيب مع $b < a$ انطلاقا من o نرسم نصف مستقيم كيفي فيقطع الدائرة (o, a) في النقطة N والدائرة (o, b) في النقطة p .

ننشئ من p مستقيما موازيا لـ (ox) ومن N مستقيما موازيا لـ (oy) فيتقاطعان في النقطة M التي هي نقطة من القطع



الشكل (III .05)

البرهان :

ننسب المستوي إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O, \frac{\overrightarrow{OA}}{a}, \frac{\overrightarrow{oB}}{b}\right)$ وننشئ الدائرتين الأساسية (o, a) و الفرعية (o, b) انطلاقا من o نرسم نصف مستقيم كيفي فيقطع الدائرة (o, a) في النقطة N و الدائرة (o, b) في النقطة p ثم نرسم المسقطين العموديين لـ p و N على (ox) و على (oy) على الترتيب فيتقاطع هذان المستقيمان في النقطة $M(x, y)$.

نضع : $\varphi = \left(\overrightarrow{oA}, \overrightarrow{oB}\right)$

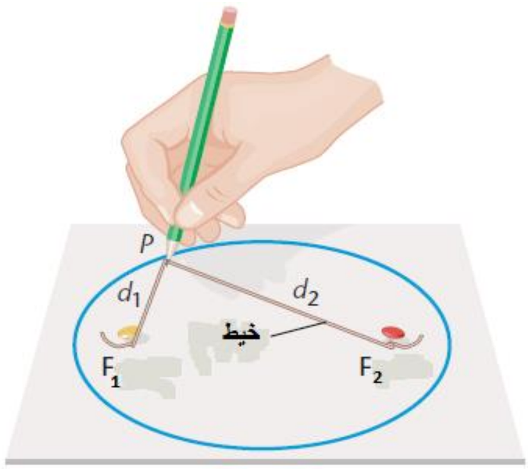
لدينا: $\cos\varphi = \frac{\mathrm{x}}{\mathrm{a}}$, $\sin\varphi = \frac{\mathrm{y}}{\mathrm{b}}$ ومنه: $\frac{x^2}{\mathrm{a}^2} + \frac{y^2}{\mathrm{b}^2} = 1$

إذن M تنتمي إلى القطع الناقص ذي المعادلة : $\frac{x^2}{\mathrm{a}^2} + \frac{y^2}{\mathrm{b}^2} = 1$ وهو المطلوب.

III.2.4. طريقة الخيط (méthode du jardinier)

يستخدم بشكل خاص في حالة الأبعاد الكبيرة وتتلخص برسم القطرين المتعامدين $B'B$ و $A'A$ في منتصفيهما o ثم تحديد البؤرتين F و F' على المستقيم $(A'A)$ ومتناظران بالنسبة لـo بعد ذللك نثبت في كل بؤرة دبوسا ونربطهما بخيط طوله $2a$ ونشده بقلم الرصاص ونحركه فنحصل على المنحنى المطلوب.

برهانـها :يأتي من تعريف ثنائي البؤرة للقطع الناقص .



الشكل (III .06)

III.5. طرق رسم القطع الناقص:

III.1.5. رسم القطع الناقص نقطيا[3]

III.1.1.5. طريقة ابن سنان

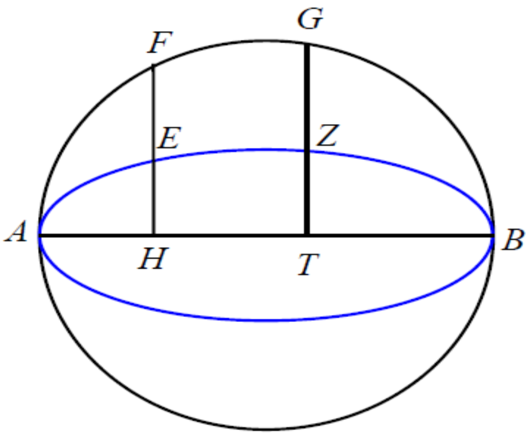
يوضح ابن سنان أولا ,المبدأ الذي ينشأ عليه القطع الناقص إذا كان قطره الأكبر قطر دائرة .

ليكن $\overline{\mathrm{EH}}$, $\overline{\mathrm{ZT}}$ خطين من خطوط الترتيب , عندئذ القاعدة الأساسية هي:

$$\frac{\overline{EH}^2}{\overline{\mathrm{AH}}.\overline{\mathrm{HB}}} = \frac{\text{المائل}}{\text{القائم}}$$

وكذلك: $\frac{\overline{ZT}^2}{\overline{\mathrm{AT}}.\overline{\mathrm{TB}}} = \frac{\text{المائل}}{\text{القائم}}$

فبمعرفة أن : $\overline{\mathrm{AH}}.\overline{\mathrm{HB}} = \overline{\mathrm{FH}}^2$ و $\overline{AT}.\overline{\mathrm{TB}} = \overline{\mathrm{GT}}^2$



الشكل $(07.\ \mathrm{III})$

ينتج لدينا: $\frac{\overline{EH}^2}{\overline{FH}^2} = \frac{\overline{ZT}^2}{\overline{GT}^2}$

وبالتالي: $\frac{\overline{EH}}{\overline{FH}} = \frac{\overline{ZT}}{\overline{GT}}$

وهذا يعني أن نسبة تلك الخطوط في الطول نسبة واحدة .

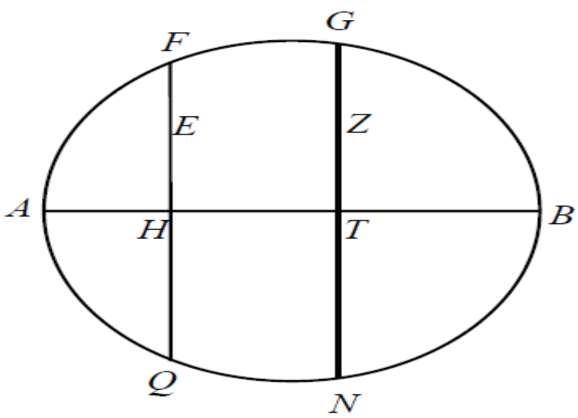
ولدينا نفس الأمر بالنسبة لبقية خطوط الترتيب .

وهذا الوضع يقتضي [الشكل $(07.\ \mathrm{III})$] أنه :إذا كانت لدينا دائرة قطرها $\overline{AB}$, وكان $\overline{FQ}$ $\overline{GN}$ وترين فيها, عموديين على $\overline{AB}$ وقسمنا خط $\overline{FH}$ بنسبة محددة γ, في نقطة E, وقسمنا خط $\overline{GT}$بنفس النسبة في النقطة Z.

بمعنى $\gamma = \frac{\overline{GZ}}{\overline{ZT}} = \frac{\overline{FE}}{\overline{EH}}$ فهي النسبة التي من خلالها ينشأ القطع الناقص الذي تقع عليه النقط A, E, Z, B وعلى العموم إذا كان $\overline{L}$ خطا ما حيث: $\frac{\overline{AB}}{\overline{L}} = \frac{\overline{EH}^2}{\overline{AH}.\overline{HB}}$

لكانت نقطةE تنتمي إلى القطع الناقص الذي قطره $\overline{AB}$, وضلعه القائم$\overline{L}$ وخط ترتيبه $\overline{EH}$ حسب مابين أبلونيوس في "كتاب المخروطات " .

ويجوز القطع على كل النقط المستخرجة بالنسبة المأخوذة .



الشكل $(08.\ \mathrm{III})$

2.1.5.III . طريقة الحسن المراكشي[3]

ليكن خطا $\overline{AD}$, $\overline{AB}$ حيث $\overline{AD} \perp \overline{AB}$ نريد رسم قطعا ناقصا قطره $\overline{AB}$ وضلعه القائم خط $\overline{AD}$ [الشكل (09. III)] لنعتبر نقطة G على خط $\overline{AB}$ حيث $\overline{AG} = \overline{AD}$

نقسم خط $\overline{AG}$ أقساما متساوية وكذلك خط $\overline{AB}$ بنفس القسمة على أدق ما يمكن من الأجزاء .

نخرج من هذه الأجزاء (النقط G, C, Q, W, E) خطوطا موازية لخط $\overline{AD}$ ونسميها خطوط الترتيب .

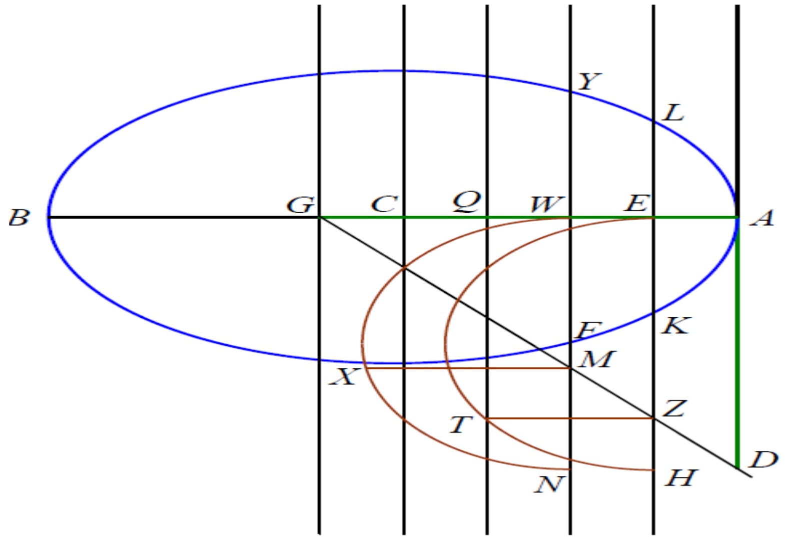
نصل $\overline{DG}$ فيتقاطع مع خط الترتيب الخارج من E في نقطة Z ومع خط الترتيب الخارج من نقطة W في نقطة M .

نجعل $\overline{ZH} = \overline{AE}$ ونرسم دائرة قطرها $\overline{EH}$, ونخرج خط $\overline{ZT}$ يوازي $\overline{AB}$ ويقطع تلك الدائرة في نقطة T لتكن نقطيا L, K على خط الترتيب المار من E حيث $\overline{EK} = \overline{EL} = \overline{ZT}$.

عندئذ تكون النقاط L, A, K على القطع الناقص الذي قطره $\overline{AB}$ وضلعه القائم خط $\overline{AD}$.

وبالمثل نجعل $\overline{MN} = \overline{AW}$ ونرسم دائرة قطرها $\overline{WN}$ ونخرج خط $\overline{MX}$ يوازي $\overline{AB}$ ويقطع تلك الدائرة في نقطة X .

لتكن نقطتا Y, F على خط الترتيب المار من W حيث $\overline{WF} = \overline{WY} = \overline{MX}$ عندئذ يمر القطع من النقطتين F, Y . وهكذا نفعل بباقي أجزاء خط $\overline{AB}$.



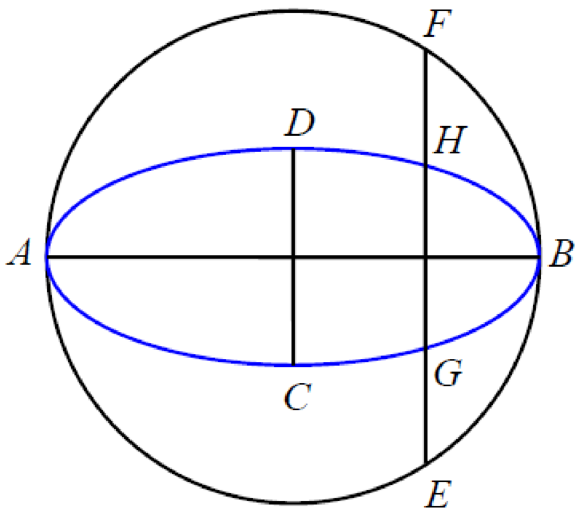
الشكل (09. III)

وهذه طريقة أخرى اقتبسها الحسن المراكشي من عند الزرقالي واستعملها في تخطيط الوجه الخلفي من الصفيحة الزرقالية .

$\overline{AB}$ القطر الأطول للقطع (قطر الدائرة).

$\overline{CD}$ القطر الأقصر وتراً في الدائرة عندئذ: $\frac{\overline{GH}}{\left(\frac{\overline{EF}}{2}\right)} = \frac{\overline{CD}}{\left(\frac{\overline{AB}}{2}\right)}$

بهذه العلاقة يحدد ما يقع من الوتر $\overline{FE}$ في القطع الناقص , والوضع نفسه بالنسبة لبقية الأوتار .

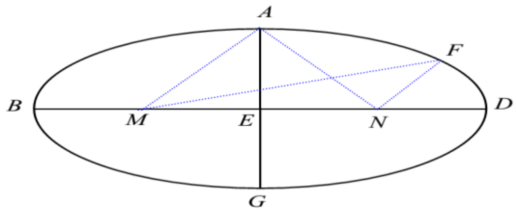


الشكل (10. III)

III.2.5. رسم القطع الناقص آليا [3]

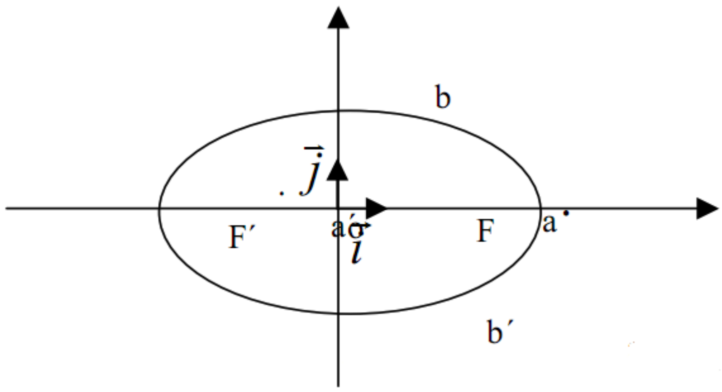
هناك تقنية خاصة نجدها عند بني موسى بن شاكر في " **كتاب الحيل** " وتتمثل في رسم القطع الناقص بإستعمال خيط مثبت في بؤرتي هذا القطع [الشكل(11. III)] مشترطين أن يكون طول الخيط المستعمل مساويا لضعف المسافة بين البؤرتين وبنو عليها "**كتابا في خواص القطع الناقص**" وسموه الدائرة المستطيلة كما استعملت الطريقة ذاتها في "**كتاب طول الدائرة**" الذي ألفه الحسن بن موسى وأوردها السخري في "**رسالة في وصف القطوع المخروطية**" ,وهو ما وجدناه أيضا عند الحسن المراكشي في "**جامع المبادئ والغايات في علم الميقات**" .

$$\overline{FM} + \overline{\mathrm{FN}} = 2\overline{\mathrm{MN}}$$



الشكل $(11.\ \mathrm{III})$

III.6.مساحة القطع الناقص : (نعني بمساحة القطع الناقص مساحة الحيز المحدد به)



الشكل $(12.\ \mathrm{III})$

لحساب مساحة القطع الناقص يكفي حساب مساحة الحيز الموجود في الربع الأول من المستوي وتكون المساحة أربع مرات مساحة الحيز .

لدينا المعادلة الديكارتية للقطع الناقص :$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 0$ ومنه $Y^2 = \left(b^2 - \frac{X^2}{a^2}\right)$ ومنه من أجل $Y \geq 0$ و $0 \leq X \leq a$ لدينا : $Y = b\sqrt{1 - \frac{X^2}{a^2}}$ وهي معادلة قوس القطع الناقص الموجودة في الربع الأول من المستوي . ومنه مساحة القطع هي : $A = 4\int_0^a b\sqrt{1 - \left(\frac{X}{a}\right)^2}\, dX$

بتحويل المتغير وذلك بوضع : $t = \frac{X}{a} \Rightarrow dt = \frac{1}{a} dX$ نجد : $A = 4\int_0^1 ab\sqrt{1 - t^2}\, dt$

بوضع $t = \sin\theta$ نجد $dt = \cos\theta\, d\theta$ فيصبح : $A = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} abcos^2\theta d\theta$

$$A = 4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1 + \cos 2\theta}{2}\right) d\theta = 4ab\left[\frac{\theta}{2} + \frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 4ab\left[\frac{\pi}{4} + 0\right] = \pi ab$$

ومنه مساحة القطع الناقص هي $A = \pi ab$.

ملاحظة :

في حالة القطع الناقص$a = b$ يصبح دائرة نصف قطرها a وتصبح مساحتها $A = \pi a^2$.

III.1.6. طول القطع الناقص :

لدينا التمثيل الوسيطي للقطع الناقص هو : $t \in [0,2\pi[$ $\begin{cases} X = a\cos t \\ Y = b\sin t \end{cases}$ ومنه فإن طول القطع الناقص

يعطى بـ:

$$S = \int_0^{2\pi} \sqrt{X'^2 + Y'^2}\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2(1 - \sin^2 t)}\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{b^2 + (a^2 - b^2)\sin^2 t}\, dt$$

$$= b\int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \frac{b^2 - a^2}{b^2}\sin^2 t}\, dt = b\int_0^{2\pi} \sqrt{1 - K^2\sin^2 t}\, dt = bE(t,k)$$

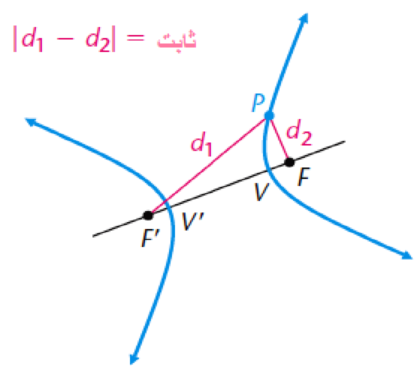
حيث $K = \sqrt{1 - \frac{a^2}{b^2}}$ و $E(t,k)$ ناقصي غير تام من النوع الثاني .

ملاحظة: غير ممكن التعبير عن s بالتوابع المألوفة .

القطع الزائـــــــد

IV.1.تعريف[4]

هو مجموعة كل النقط في المستوي والتي يكون الفرق المطلق لبعدي كل منها عن نقطتين ثابتتين هو مقدار ثابت ويساوي $2a$. وتسمى النقطتان الثابتتان بؤرتي القطع الزائد.



الشكل (01. IV)

IV.2.تعريف القطع الزائد عن طريق البؤرتين

مبرهنة :

ليكن F، F' نقطتين من ξ مع $F \neq F'$ و $a > 0$

المجموعة $C = \{M \in \xi / \left|\|\overrightarrow{MF}\| - \|\overrightarrow{MF'}\|\right| = 2a\}$ هي قطع زائد بؤرتاه F ، F'

إذا كان $\left\|\overrightarrow{FF'}\right\| > 2a$ $\quad (a < c)$ $\quad c = \sqrt{b^2 + a^2}$

البرهان :

ليكن ξ مستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ حيث o منتصف $[F'F]$ و $\vec{\imath} = \frac{\overrightarrow{F'F}}{\|\overrightarrow{F'F}\|}$

ولتكن $F(c;0)$، $F'(-c;0)$، $\overrightarrow{MF}\begin{pmatrix} c - x \\ -y \end{pmatrix}$ ، $\overrightarrow{MF'}\begin{pmatrix} -c - x \\ -y \end{pmatrix}$ و $\left\|\overrightarrow{FF'}\right\| = 2c$

نضع $b^2 = c^2 - a^2$

$$M \in C \Leftrightarrow \left|\|\overrightarrow{MF}\| - \|\overrightarrow{MF'}\|\right| = 2a$$

حيث: $\left\|\overrightarrow{MF'}\right\| \geq \|\overrightarrow{MF}\|$, $\Leftrightarrow \|\overrightarrow{MF}\| - \|\overrightarrow{MF'}\| = 2a$

$$\Leftrightarrow \left\|\overrightarrow{MF'}\right\|^2 = \left(\|\overrightarrow{MF}\| + 2a\right)^2$$

$$\Leftrightarrow (x + c)^2 + y^2 = (x - c)^2 + 4a^2 + y^2 + 4a\sqrt{(x - c)^2 + y^2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = \frac{x.c}{a} - a$$

$$\Leftrightarrow (x - c)^2 + y^2 = \left(\frac{x.c}{a} - a\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{c^2-a^2}=1$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

ومنه المجموعة تمثل قطعا زائدا .

ملاحظة :

الحالة $\left\|\overrightarrow{MF'}\right\| \leq \left\|\overrightarrow{MF}\right\|$ تدرس بنفس الطريقة.

من هذه المبرهنة نستنتج التعريف التالي :

تعريف :

لتكن F ، F' نقطتين مختلفتين من ξ و a عددا حقيقيا موجبا تماما . نضع $\left\|\overrightarrow{FF'}\right\| = 2$

نسمي قطعا زائد مجموعة النقاط C من ξ المعرفة كما يلي :

$C=\{M\in\xi/\left|\left\|\overrightarrow{MF'}\right\|-\left\|\overrightarrow{MF}\right\|\right|=2a\}$ حيث $c>a$ مع c فاصلة النقطة F.

IV .3.معادلات القطع الزائد:

IV .1.3.المعادلة الديكارتية المختصرة للقطع الزائد

باعتبار المعلم $R(F,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ لدينا :

$$M\in c \Leftrightarrow x^2(1-e^2)+y^2+2pex-p^2=0$$

$e\neq 1$ ومنه $\left(x+\frac{pe}{1-e^2}\right)^2+\frac{y^2}{1-e^2}=\frac{p^2}{(1-e^2)^2}$

بسحب المعلم $(o,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ إلى المعلم $(o;\vec{\imath},\vec{\jmath})$

حيث $O\left(\frac{-pe}{1-e^2};0\right)$ بوضع : $\begin{cases} X=x+\frac{pe}{1-e^2} \\ Y=y \end{cases}$ نجد: $X^2+\frac{Y^2}{1-e^2}=\frac{p^2}{(1-e^2)^2}$

إذن : $\frac{X^2}{p^2/(1-e^2)^2}+\frac{Y^2}{p^2/(1-e^2)}=1$

إذا كان $e>1$: $y^2=(e^2-1)x^2-2pex+p^2$

$$\Leftrightarrow \frac{X^2}{p^2/(e^2-1)^2}-\frac{Y^2}{p^2/(e^2-1)}=1$$

نضع :

$$a=\frac{p}{e^2-1}, b=\frac{p}{\sqrt{e^2-1}}, c=\sqrt{a^2+b^2}=\frac{ep}{e^2-1}$$

ومنه تصبح المعادلة في المعلم $(O;\vec{i},\vec{j})$ من الشكل: $\frac{X^2}{a^2}-\frac{Y^2}{b^2}=1$

وهي المعادلة الديكارتية للقطع الزائد.

ملاحظة: إذا حققت $(X;Y)$ المعادلة: $\frac{X^2}{a^2}-\frac{Y^2}{b^2}=1$

فإن $(-X;Y)$ تحققها ومنه القطع الزائد يقبل (yy') كمحور تناظر له ومنه نستنتج وجود بؤرة ثانية F' نظيرة F بالنسبة ل o ووجود دليل ثان (D') نظير (D) بالنسبة لo.

كذلك إذا حققت $(X;Y)$ المعادلة: $\frac{X^2}{a^2}-\frac{Y^2}{b^2}=1$

فإن $(X;-y)$ تحققها ومنه القطع الزائد يقبل (xx') كمحور تناظر له .

تقاطع محوري التناظر يمثل مركز تناظر للقطع الزائد.

IV .2.3.المعادلة الوسيطية للقطع الزائد

لدينا: $\frac{X^2}{a^2}-\frac{Y^2}{b^2}=1$

تسمح لنا المتطابقة : $\forall t: t\neq\frac{\pi}{2}+k\pi: \frac{1}{\cos^2 t}-tg^2 t=1$ بالحصول على ما يلي:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\Leftrightarrow\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{y}{b}\right)^2=1$$

$$\Leftrightarrow \exists t\in[0;2\pi[\,, t\neq\frac{\pi}{2}+k\pi: \frac{x}{a}=\frac{1}{\cos t}\,,\qquad \frac{y}{b}=\tan t$$

وبالتالي يكون التمثيل الوسيطي للقطع الزائد كما يلي :

$$\begin{cases} x=\dfrac{a}{\cos t} \\ y=b\tan t\end{cases}\quad ,t\in[0;2\pi[\,,t\neq\frac{\pi}{2}+k\pi k\in\{0;1\}$$

تمثيل وسيطي آخر للقطع الزائد

ملاحظة : كل مستقيم يوازي خطا مقاربا ويختلف عنه يتقاطع مع القطع الزائد في نقطة وحيدة تسمح هذه الخاصية بإيجاد تمثيل وسيطي آخر للقطع الزائد .

لأحد الخطين المقاربين للقطع الزائد معادلة من الشكل : $\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0$

إذن للمستقيم (Δ) الذي يوازي هذا الخط المقارب معادلة هي: $\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=t$ حيث t وسيط حقيقي.

إحداثيات نقطة تقاطع المستقيم (Δ) والقطع الزائد تحقق الجملة: $\begin{cases}\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=t\\ \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\end{cases}$

لكن $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ تعطينا $\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)=1$ ومنه $t\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)=1$

لما $t = 0$ الجملة: $\begin{cases} \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = t \\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \end{cases}$ ليس لها حل .

ومنه: $t \in \mathbb{R}^*$ ، $\begin{cases} \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = t \\ \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \frac{1}{t} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = t \\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{a}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right) \\ y = -\frac{b}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right) \end{cases} , \qquad t \in \mathbb{R}^*$$

وهو تمثيل وسيطي آخر للقطع الزائد.

IV .3.3.المعادلة القطبية للقطع الزائد:

لدينا المعادلة: $\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1$

نعتبر (ox) المحور القطبي و o هو القطب

لدينا: $\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases}$

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{b^2x^2 - a^2y^2}{(ab)^2} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{b^2\rho^2\cos^2\varphi - a^2\rho^2\sin^2\varphi}{(ab)^2} = 1$$

$$\Leftrightarrow \rho^2 = \frac{(ab)^2}{b^2\cos^2\varphi - a^2\sin^2\varphi}$$

لدينا: $c^2 = b^2 + a^2$

$$\frac{b^2 + a^2}{a^2} = \frac{c^2}{a^2} = e^2$$

$$\frac{b^2 + a^2}{a^2} = e^2 \Rightarrow \frac{b^2}{a^2} + 1 = e^2$$

$$\Rightarrow b^2 = a^2(e^2 - 1)$$

وبالتعويض b^2 في عبارة ρ^2 نجد:

$$\rho^2 = \frac{a^2a^2(e^2-1)}{a^2(e^2-1)\cos^2\varphi - a^2\sin^2\varphi} = \frac{a^2(e^2-1)}{(e^2-1)\cos^2\varphi - \sin^2\varphi} = \frac{a^2(e^2-1)}{e^2\cos^2\varphi - 1}$$

$$\rho = a\sqrt{\frac{(e^2-1)}{e^2\cos^2\varphi - 1}}$$

وهي المعادلة القطبية للقطع الزائد.

IV .4.المماس والناظم للقطع الزائد:

IV .1.4.المماس للقطع الزائد

ليكن ( ) قطعا زائدا معادلته بالنسبة للمعلم $(o,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ هي: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

لدينا التمثيل الوسيطي للقطع الزائد هو :

$$\begin{cases} x=\dfrac{a}{\cos t} & t\in[0,2\pi[\,,t\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi\ \ .k\in\{0,1\} \\ y=b\tan t \end{cases}$$

إذاكانت M_0 نقطة من (C) إحداثياتها $(x_0;y_0)$ فإنمعادلةالمماس عندهاتعطى:

$$\begin{vmatrix} x-\dfrac{a}{\cos t_0} & y-b\tan t_0 \\ a\dfrac{\sin t_0}{cos^2 t_0} & \dfrac{b}{cos^2 t_0} \end{vmatrix}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{b}{cos^2 t_0}\left(x-\frac{a}{\cos t_0}\right)-\frac{a\cos t_0}{cos^2 t_0}(y-b\tan t_0)$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{a^2}\frac{a}{\cos t_0}-\frac{y}{b^2}b\tan t_0-1=0 \Leftrightarrow \frac{xx_0}{a^2}-\frac{yy_0}{b^2}-1=0$$

وهي المعادلة الديكارتية للمماس في النقطة $M_0(x_0;y_0)$

وإذا أخذنا التمثيل الوسيطي التالي للقطع الزائد : $t\in\mathbb{R}^*$, $\begin{cases} x=\frac{a}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right) \\ y=-\frac{b}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right) \end{cases}$

فإنه باتباع نفس الخطوات السابقة نحصل على نفس المعادلة الديكارتية السابقة.

IV .2.4.الناظم للقطع الزائد

في كل نقطة من القطع الزائد يوجد ناظم عمودي على المماس معادلته عند النقطة $M_0(x_0;y_0)$ يمكن إيجادها كما يلي :

لدينا معادلة المماس للقطع الزائد عند النقطة $M_0(x_0;y_0)$ هي $\frac{xx_0}{a^2}-\frac{yy_0}{b^2}-1=0$

ومنه الشعاع العمودي على المماس في النقطة M_0 هو: $\vec{N}\begin{pmatrix}\frac{x_0}{a^2}\\ \frac{-y_0}{b^2}\end{pmatrix}$

إذن إذا كانت $M(x;y)$ نقطة كيفية من الناظم فإن :

$$\overrightarrow{M_0M} \mathbin{/\!/} \vec{N} \Leftrightarrow -(x-x_0)\frac{a^2}{x_0} = (y-y_0) \Leftrightarrow \frac{b^2}{y_0}y = -\frac{a^2}{x_0}x + a^2 + b^2$$

$y = -\frac{y_0 a^2}{x_0 b^2}x + \frac{c^2}{b_2}y_0$ ومنه: $y = \frac{-a^2 y_0}{b^2 X_0}x + \frac{c^2}{b^2}y_0$

وهي المعادلة الديكارتية للناظم عند النقطة $M_0(x_0;y_0)$ وفي هذه الحالة $X_0 \neq 0$

IV .5.إنشاء القطع الزائد:

من تعريف القطع الزائد أن الفرق بين بعدي كل نقطة منه عن البؤرتين F, F' ثابت ويساوي المسافة بين الرأسين A و'A فمن أجل النقطة M من القطع الزائد نجدأن: $|\mathrm{MF} - \mathrm{MF}'| = 2\,a$

حيث: $A'A = 2a$ و $A'A < F'F$

- ✓ يمكن إنشاء القطع الزائد بدلالة المسافةبين الرأسين A و A'والبؤرتينF و F'كما يلي:
- نعين رأسي القطع Aو A' والبؤرتينF و F'
- نحدد على المحور (xx')وعلى يمين النقطة Fنقط كيفية C,D,E,N
- نركز إبرة الفرجار في'F وبفتحة تساوي$A'C$نرسم قوسا دائريا ثم نركز في F

وبفتحة تساوي AC نرسم قوسا أخرى فيتقاطع القوسان في M وهي نقطة من القطع الزائد وهكذا...,وبصورة مماثلة نحصل على الفرع الأيسر

- نرسم دائرة مركزها oونصف قطرها oF ونرسم فيها المستطيل GHkLفقطراه يمثلان المستقيمين المقاربين للقطع الزائد

البرهان:

يأتي البرهان مباشرة من تعريف ثنائي البؤرة للقطع الزائد لأنه لدينا حسب الإنشاء :

$\mathrm{MF}' = A'C$ و MF$= AC$ ومنه: $\mathrm{MF}' - MF = A'C - AC = 2a$وهو المطلوب.

بقي إثبات أن المستقيمين المقاربين هما المذكوران.

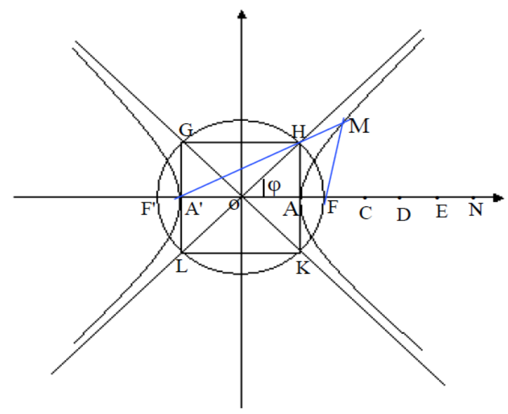
من الشكل لدينا: $\tan\varphi = \frac{AH}{\mathrm{OA}} = \frac{AH}{\alpha}$

$$\mathrm{AH} = \sqrt{(oH)^2 - (\mathrm{oA})^2}$$

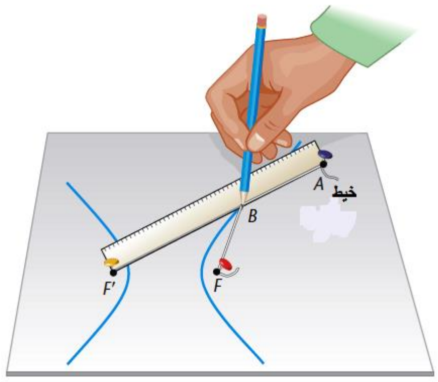
ولدينا: $\mathrm{AH} = \sqrt{(oF')^2 - \mathrm{a}^2} = \sqrt{\mathrm{c}^2 - \mathrm{a}^2}$

لكن: $c^2 = \mathrm{a}^2 + \mathrm{b}^2$ ومنه: $AH = \sqrt{a^2 + b^2 - a^2} =$

إذن $\tan\varphi = \frac{b}{a}$ وهي المعادلة القطبية لأحد المستقيمين المقاربين والمعادلة الأخرى نجدها :
$\tan\varphi = \frac{-b}{a}$ ومنه المستقيمان المذكوران هما المستقيمان المقاربان.



الشكل (02. IV)



الشكل (03. IV)

IV .6.طرق رسم القطع الزائد نقطيا [3]

IV .1.6.طريقة ابن سنان في رسم القطع الزائد

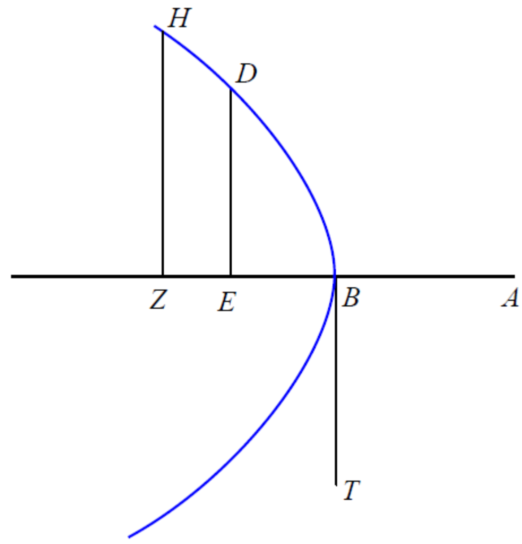
في هذا المثال يعرض لنا ابن سنان استنادا على ما جاء في كتاب المخروطات لأبلونيوس المبدأ الأساسي الذي يرسم عليه القطع الزائد باعتماد الضلع القائم والقطر المجانب (الضلع المائل), ثم يوضح كيفية استخراج القطع الزائد من الدائرة.

- نريد أن نرسم قطعا زائدا قطره (ضلعه المائل) $\bar{A}$ وضلعه القائم $\overline{\mathrm{BT}}$, حيث $\overline{AB} \perp \overline{BT}$ ويمر من نقطة B.

فلتكن نقطة E معلومة الوضع على خط (AB) , ولتكن نقطة D كيفما وقعت (مثلا $\overline{ED} \perp \overline{AE}$ أو أن $\overline{AE}\,\mathrm{ED},$مخرجان على زاوية معينة) حيث $\frac{\overline{\mathrm{BT}}}{\overline{\mathrm{AB}}} = \frac{\overline{\mathrm{ED}}^{2}}{\overline{AE}.\overline{\mathrm{BE}}}$ فتكون نقطة D على القطع الزائد الذي يمر من نقطة B,وخطوط ترتيبه توازي خط $\bar{E}$أي أنها مخرجة على قطره بمثل زاوية $\widehat{AED}$.

ولتكن نقطة Z معلومة الوضع على خط (AB) ولنعتبر خط $\bar{Z}$ حيث $\overline{ZH} \,/\!\!/\, \overline{\mathrm{ED}}$ و$\frac{\overline{BT}}{\overline{\mathrm{AB}}} = \frac{\overline{ZH}^2}{\overline{AZ}\cdot\overline{BZ}}$ فتكون نقطة H على القطع, و $\overline{ZH}$ من خطوط الترتيب .

وعلى هذا المنوال يمكننا تحديد العديد من النقاط التي تنتمي إلى القطع .



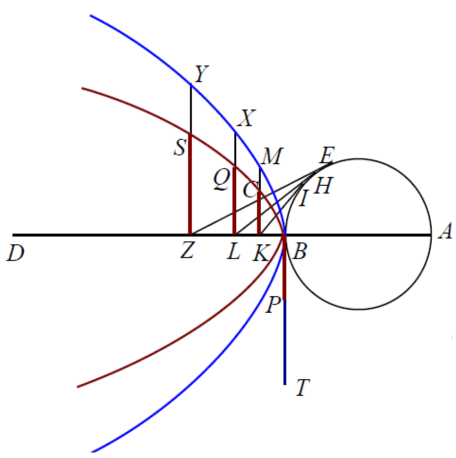
الشكل (04. IV)

- أما بخصوص كيفية استخراج القطع الزائد من الدائرة فليكن خط $\overline{AD}$ عليه نقطة Bمعلومة الوضع. أيأن خط$\overline{\mathrm{AB}}$ معلوم القدر .

نعمل دائرة قطرها $\bar{A}$, ولتكن E, H, I نقط على هذه الدائرة .

لنخرج من هذه النقط مماسات للدائرة تتقاطع مع خط (AB) وهي على الترتيب $\overline{IK}$,$\overline{HL}$,$\overline{\mathrm{EZ}}$

لنخرج على أي زاوية كانت $\bar{Z}$, $\overline{LX}$, $\overline{KM}$ حيث $\overline{ZY} \mathbin{/\!/} \overline{\mathrm{LX}} \mathbin{/\!/}$ $\overline{\mathrm{KM}}$ و $\overline{KM} = \overline{\mathrm{IK}},\ \overline{LX} = \overline{\mathrm{HL}},\ \overline{ZY} = \overline{\mathrm{EZ}}$



الشكل (05. IV)

فيكون لدينا بناء على هذا الوضع

$$\overline{\mathrm{AZ}}.\overline{BZ} = \overline{EZ}^2 = \overline{ZY}$$

$$\overline{\mathrm{AL}}.\overline{BL} = \overline{HL}^2 = \overline{LX}^2$$

$$\overline{\mathrm{AK}}.\overline{BK} = \overline{IK}^2 = \overline{KM}^2$$

فإذا جعلنا $\bar{B} = \overline{\mathrm{AB}}$ حيث $\overline{BT} \perp \overline{\mathrm{AB}}$ فيكون

$$1 = \frac{\overline{AB}}{\overline{\mathrm{BT}}} = \frac{\overline{AZ}.\overline{\mathrm{BZ}}}{\overline{\mathrm{ZY}^2}} = \frac{\overline{\mathrm{AL}}.\overline{\mathrm{BL}}}{\overline{\mathrm{LX}^2}} = \frac{\overline{\mathrm{AK}}.\overline{\mathrm{BK}}}{\overline{\mathrm{KM}^2}}$$

وتكون النقط M,X, Y على القطع الزائد الذي رأسه النقطة B وقطره $\bar{A}$ وضلعه القائم $\overline{BT}$ والخطوط $\overline{ZY}$,$\overline{LX}$, $\overline{KM}$ من خطوط الترتيب .

وعلى العموم إذا قسمنا الخطوط $\overline{ZY}$,$\overline{LX}$,$\bar{K}$ (أو زدنا فيها) على نسبة واحدة مثلا قسمناها على النقط C , Q , Sأي أن: $\frac{\overline{KM}}{\overline{\mathrm{KC}}} = \frac{\overline{\mathrm{LX}}}{\overline{\mathrm{LQ}}} = \frac{\overline{\mathrm{ZY}}}{\overline{\mathrm{ZS}}}$

فيكون: $\frac{\overline{KM}^2}{\overline{\mathrm{KC}}^2} = \frac{\overline{\mathrm{LX}}^2}{\overline{LQ}^2} = \frac{\overline{\mathrm{ZY}}^2}{\overline{\mathrm{ZS}}^2}$

وبالتالي: $\frac{\overline{\mathrm{AK.BK}}}{\overline{\mathrm{KC}}^2} = \frac{\overline{\mathrm{AL.BL}}}{\overline{\mathrm{LQ}}^2} = \frac{\overline{\mathrm{AZ.BZ}}}{\overline{\mathrm{ZS}}^2}$

فلنعتبر خط $\bar{B}$ حيث $\overline{BP} \perp \overline{AB}$ و $\frac{\overline{AB}}{\overline{BP}} = \frac{\overline{AK}.\overline{BK}}{\overline{KC}^2}$ عندئذ تكون النقاط C, Q, S على القطع الزائد الذي رأسه B وقطره $\bar{A}$ وضلعه القائم $\overline{BP}$ والخطوط $\overline{ZS}, \overline{LQ}, \overline{KC}$ من خطوط الترتيب .

IV .2.6.طريقة الحسن المراكشي في رسم القطع الزائد

ليكن خط$\overline{AB}$ عليه نقطة G معلومة الوضع وليكن خط $\overline{GD}$ حيث $\overline{GD} \perp \overline{AB}$.

نريد أن نرسم قطعا زائدا قطره المجانب $\overline{AG}$ وضلعه القائم خط $\overline{GD}$.

لنعتبر خط$\overline{AE}$ يمر من D .

نقسم خط (AG) أيخط$\bar{G}$أقساما متساوية على أدق ما يمكن من الأجزاء .

نخرج من هذه الأجزاء (مثلا النقاط T,L,Z) خطوطا موازية لخط $\overline{GD}$ ونسميها خطوط الترتيب, فتتقاطع مع خط $\overline{AE}$ (أي مع خط (AD)) في النقاط H , M , Wعلى الترتيب .

- نجعل $\bar{H} = \overline{GZ}$ ونرسم دائرة قطرها $\overline{ZV}$, ونخرج خط $\overline{HI}$يوازي $\overline{AB}$ ويقطع تلك الدائرة في النقطة I .

لتكن النقطتان F,K على خط الترتيب المار من نقطة Zحيث $\bar{Z} = \overline{ZF} = \overline{HI}$.

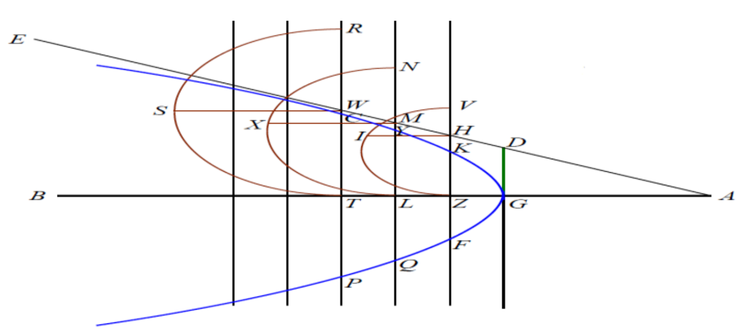
عندئذ تكون النقاط K, G, F على القطع الزائد الذي قطره (ضلعه المائل) $\bar{A}$ وضلعه القائم $\overline{GD}$.

- وبالمثل نجعل$\overline{MN} = \overline{GL}$ ونرسم دائرة قطرها $\bar{L}$ ونخرج خط $\overline{MX}$ يوازي $\overline{AB}$ ويقطع تلك الدائرة في نقطة X .

لتكن النقطتانY, Q على خط الترتيب المار من نقطة L حيث$\overline{LY} = \overline{LQ} = \overline{MX}$.

عندئذ يمر القطع من النقطتين Y ,Q .

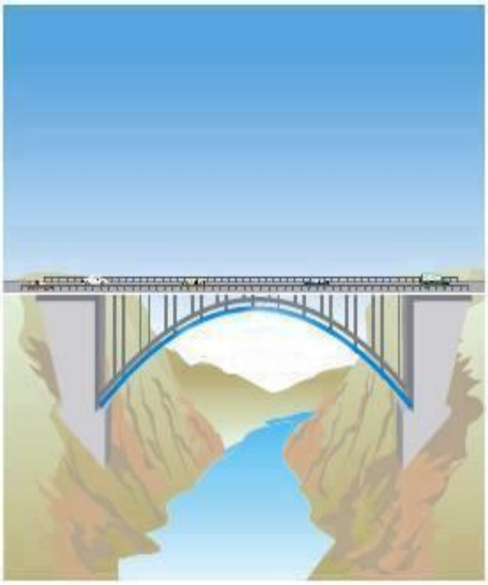
- وهكذا نفعل على خط الترتيب المار من T وعلى باقي أجزاء خط$\overline{AB}$.

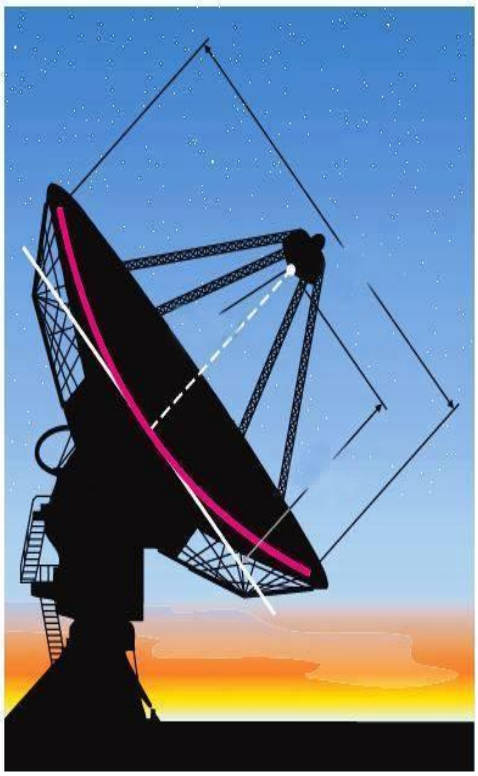


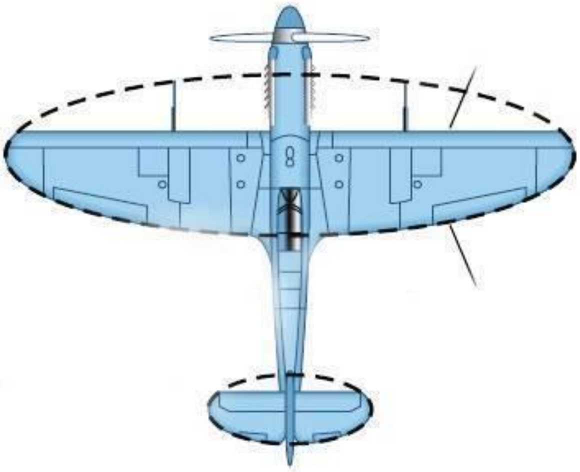
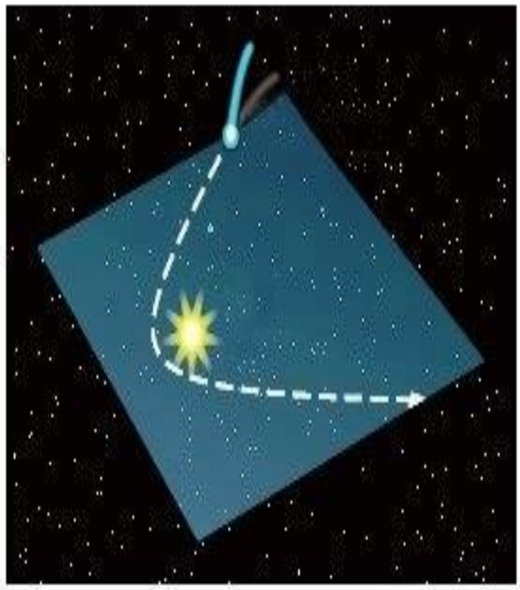
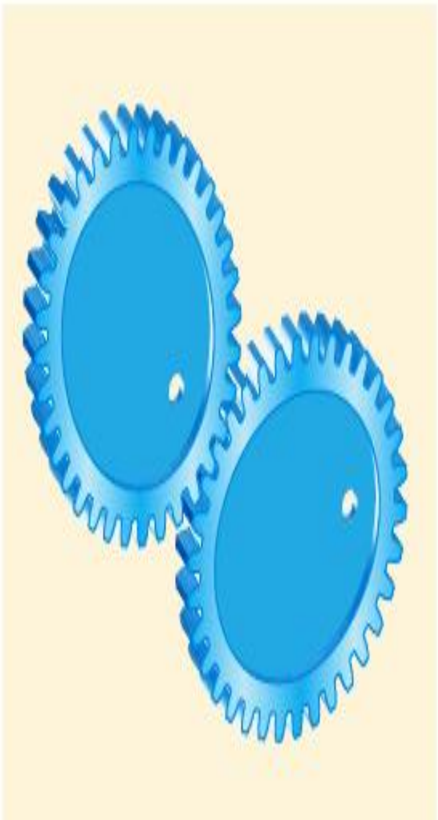
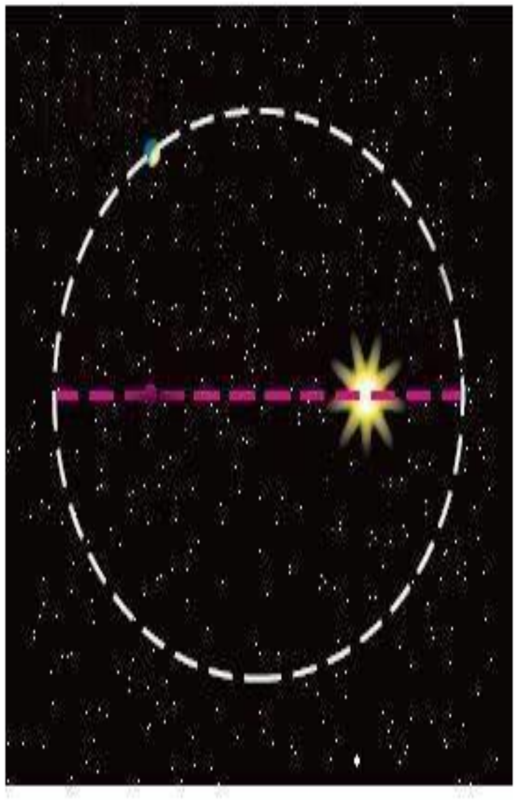
الشكل (06. IV)

الملاحق

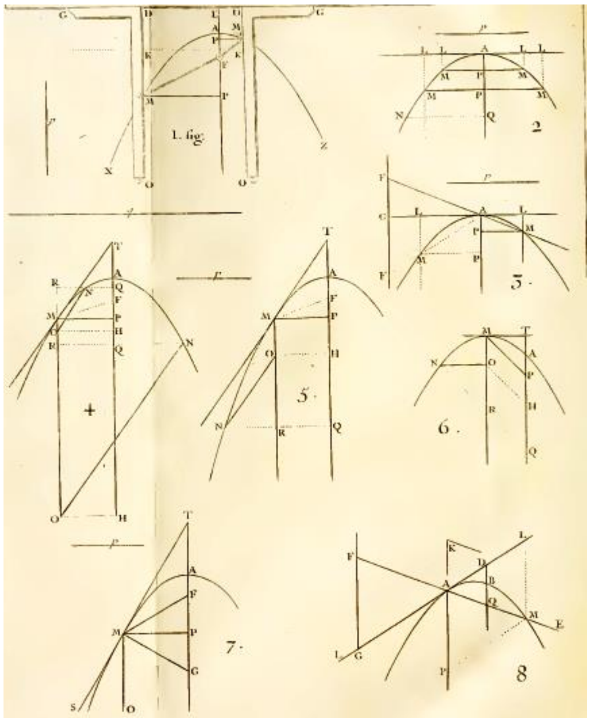
تطبيقات عن القطوع المخروطية[6]

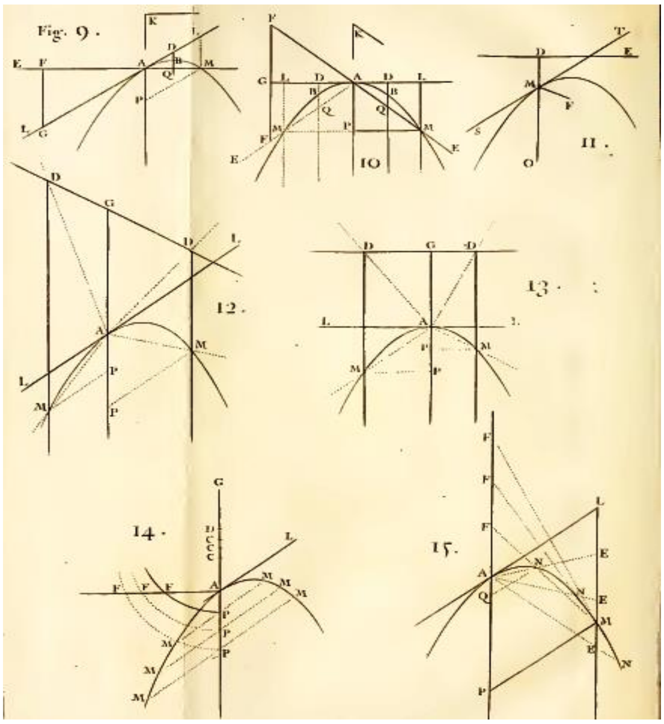


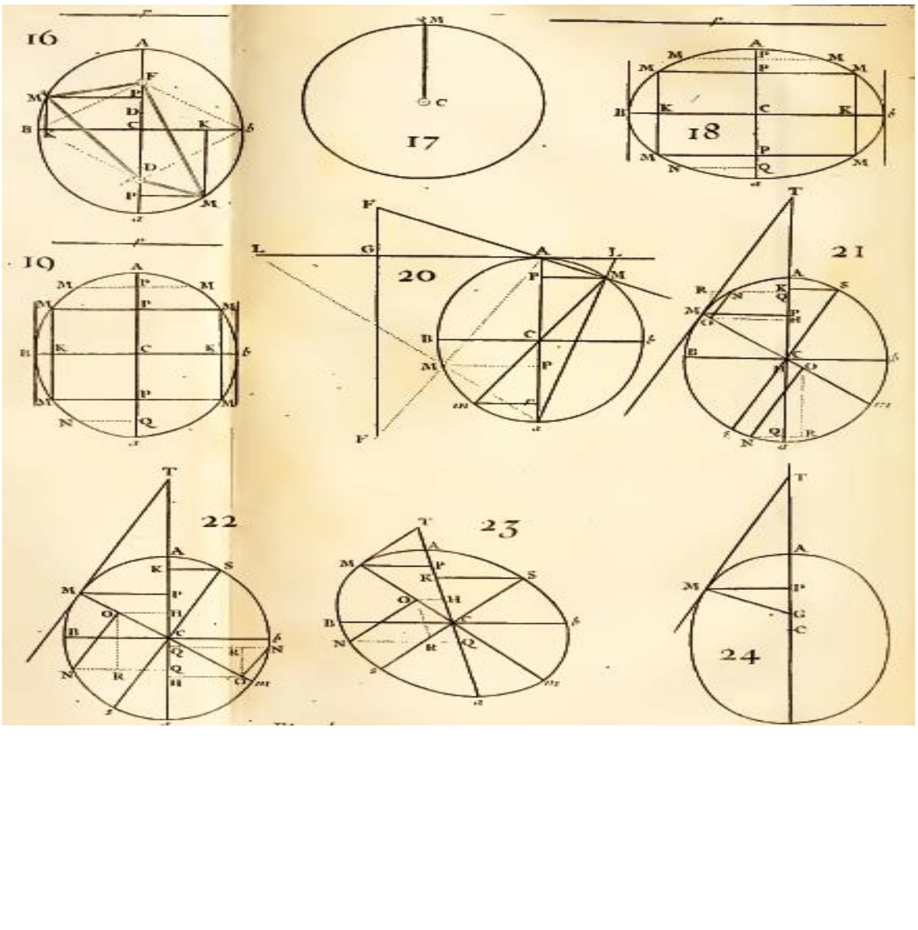


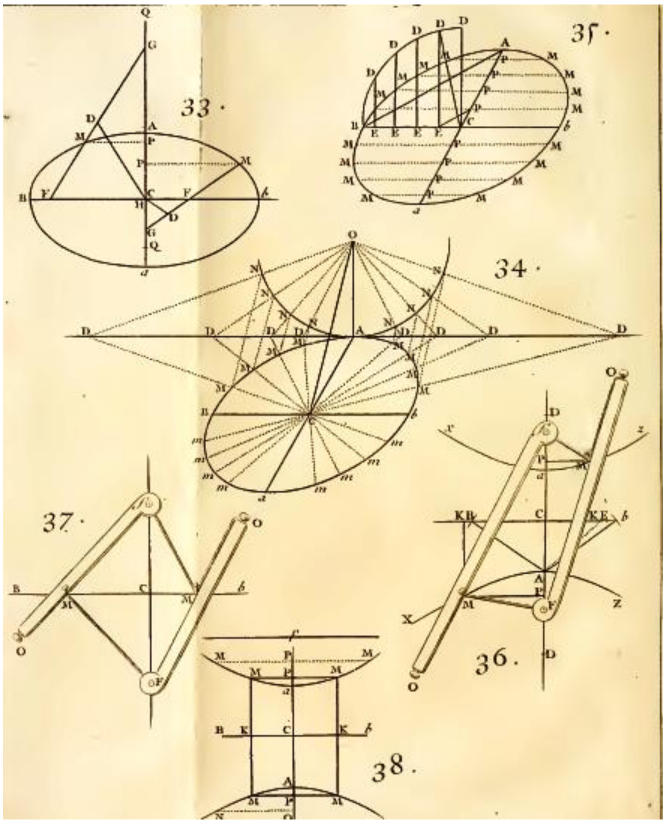





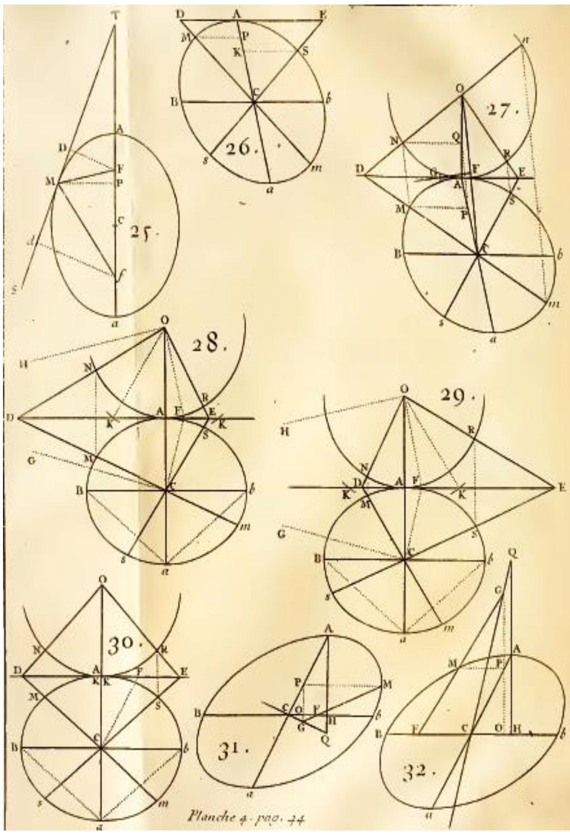
بعض الطرق الأخرى لإنشاء القطوع المخروطية[7]

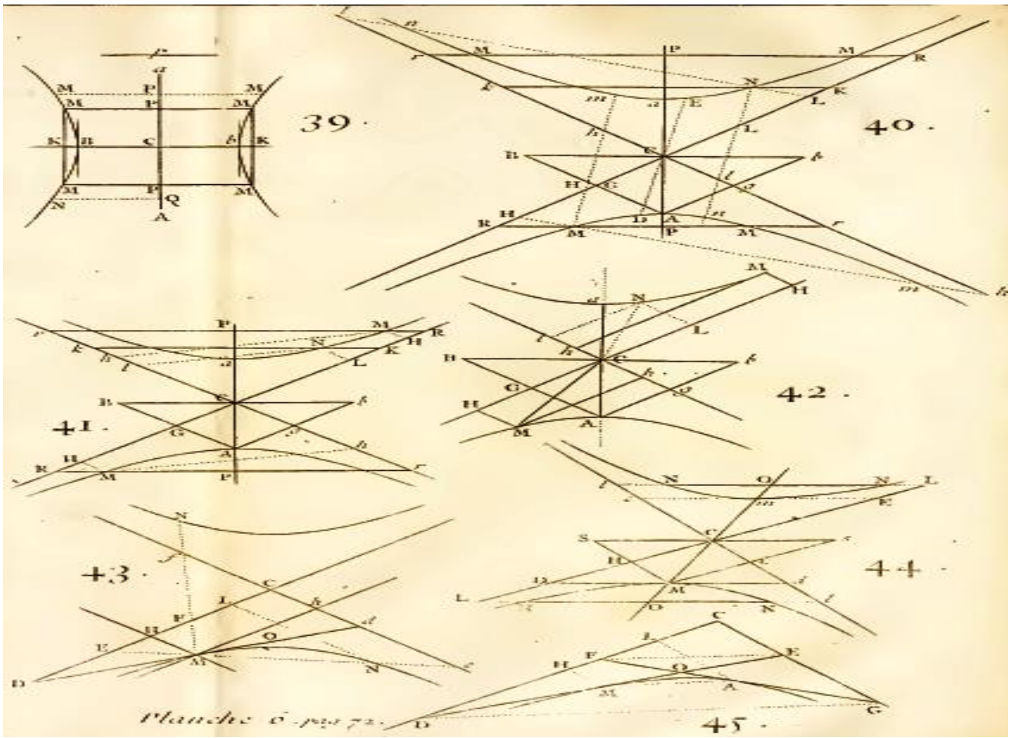







33.
35.
34.
37.
36.
38.


25.
26.
27.
28.
29.
30.
31.
32.
Planche 4. pag. 44


39.
40.
41.
42.
43.
44.
45.
Planche 6. pag. 72.

الخلاصة

إن القطوع المخروطية قد اكتسحت عدة مجالات ولم تتوقف عند هذا الحد, فمشوارها لازال طويلا لأنها محل اهتمام الرياضيين والفلكيين والمهتمين بهذا النوع من الدراسة ومن خلال هذا كله نسجل بعض النتائج الأولية التي حصلنا عليها في الخطوات التالية :

لقد حاولنا في هذه المذكرة تمييز كل نوع من الأنواع الثلاثة للقطوع المخروطية وتوصلنا إلى أن تمييزها يتم عن طريق المعادلات المختلفة لكل قطع بالإضافة إلى أشكالها وكيفية إنشائها بالرغم من اشتراكها في عدة خصائص, كالبؤرة, وهي كلها من المنحنيات للمعادلات ذات الدرجة الثانية. وهي كلها ناتجة من تقاطع مستو مع مخروط, وهذا حسب زاوية انحناء المستوى. وقد أوردنا ملحقا نبين فيه كيفية إنشائها ووجود هذه القطوع على أرض الواقع.

وهذا ما استطعنا الوصول إليه من خلال هذه الدراسة, وكما أسلفنا القول لا بد أننا وقعنا في بعض الهفوات وغفلنا عن بعض الأشياء, ومهما حاولنا الإحاطة بموضوع كهذا فإننا سنبقى مقصرين لأنه موضوع شائك ومعقد الرؤى والدروب, ما إن أمسكنا بخيط فيه حتى انفلت آخر, ولكننا مع هذا سعينا بكل ما أوتينا من جهد لبلوغ الغاية, والله من وراء القصد.

المـــــــراجع

المراجع

[1] الكتاب المدرسي القسم النهائي الرياضي نظام قديم.

[2] القطوع المخروطية, مجلس أبوظبي للتعليم, منطقة أبوظبي التعليمية, مدرسة المتنبي للتعليم الثانوي 2013.

[3] **سيدي عمر عسالي**, الأدوات الرياضية لعلم الفلك, أطروحة لنيل شهادة دكتوراه العلوم, جامعة فرحات عباس سطيف2012.

[4] **صكبان صالح محمد الدليمي**, القطوع المخروطية.

[5] **قصي هاشم**, القطوع المخروطية.

[6] Additional Topics in Analytic Geometry .

[7] **M.LE MARQUIS DE L'HOSPITAL** ,TRAITE ANALYTIQUE DES SECTION CONIQUE ET DE LEUR USAGE.

ملخص

في هذه المذكرة تطرقنا إلى ما يعرف بالقطوع المخروطية وهي القطع المكافئ والقطع الناقص والقطع الزائد.بتعريفها وذكر خصائصها ومعادلاتها وكيفية إنشائها وأعطينا أمثلة على كل نوع منها وألحقنا المذكرة بصفحات نبين فيها وجود هذه القطوع في الواقع.

الكلمات المفتاحية: القطع المكافئ, الناقص, الزائد, البؤرة, الدليل.

Résumé

Dans cette mémoire, nous avons étudié les conique section, qui sont Parapole, Ellipse et Hyperbole en mettant l'accent sur leur définitions et leurs propriètès et leurs équations en citant aussi la façon de leurs établissement, et nous avons donné des exemples sur chacun de leurs types et nous avons suite le mémoire Annexe dans les quelles nous avons montré l'existences de ces conique section dans la réalité

Mots clés: Parapole, Ellipse, Hyperbole, Foyer, Directrice

Abstract

In this paper we have studied conic section with is the parabola the Ellipse and the Hyperbola with its définison its characteristics its equation and its way of establishment and we have given examples for each type and we have abded some pages wich show the existence of this conic in the reality

Keys words: Parapola, Ellipse, Hyperbola, Focus, Directrix