

**République Algérienne Démocratique et Populaire**  
**Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche**  
**Scientifique**



**UNIVERSITÉ D'EL-OUED**

**FACULTÉ DES SCIENCES ET DE TECHNOLOGIE**

**Mémoire de fin d'étude**

**LICENCE ACADEMIQUE**

Domaine: Mathématiques et Informatique

Filière: Mathématiques

Spécialité: Modélisation mathématiques & simulation  
numérique

Présenté par : ABID Sara

GADI Samiha

HARIZ BELGACEM Soumai

**Thème**

**Quelques types des contractions et leurs  
applications dans la théorie du point fixe**

Soutenu le ...juin 2014

Devant le jury composé de:

Mr. BEGGAS Mohammed

Mr. ZAUCHE Elmehdi

Mr. BELOUL Said

MA (A) Univ. El Oued Président

MC (B) Univ. ElOued examinateur

MA (A) Univ. ElOued Rapporteur

Année universitaire 2013 – 2014

---

## Notation

$E$  : l'ensembles non vide.

$\mathbb{R}$  : l'ensembles des nombres réels.

$\mathbb{R}_+$  : l'ensembles des nombres réels positives

$|\cdot|$  : la valeur absolue .

$(\mathbb{C}, |\cdot|)$  : le module .

$d$  : une distance.

$E_d$  : distance  $d$  sur  $E$ .

$f$  : une application.

$X_n, Y_n$  : suites.

$C([a, b])$  : l'espases des foncitions continues.

$\mathbb{N}$  : l'ensembles des nombres naturels.

$\mathbb{C}$  : l'ensembles des nombres complexes.

$$d_1(x, y) : \sum_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|.$$

$$d_2(x, y) : \left( \sum_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

$$d_\infty(x, y) : \max_{x, y \in \mathbb{R}} \{x, y\}.$$

# *Remerciements*

Nous remercions Dieu le tout puissant qui nous a guidé dans l'accomplissement de ce travail.

Ce travail à été réalisé sous l'encadrement de professeur "**Beloul Said**", à l'université d'**El-Oued**, a qui nous voudrions exprimer nos profonde gratitude pour leurs disponibilités, leurs aides et leurs conseils pour réaliser ce travail.

Nous remercions vivement nos familles surtout mes parent pour l'aide et le soutient moral.

Et remercions concernant professeurs superviseurs pour discuter de notre mémoire et nous leur souhaitons admission à ce que nous avons présenté dans cette étude à l'excellence,

alors préparons-nous nous honorant et à l'encadrement et pour notre université et ainsi que nos

sincères remerciements à tous ceux d'entre nous ont aidé dans cette travail et tous les étudiants

de la promotion *2013/2014 de Math de l'université d'El-Oued.*

# Table des matières

<b>Introduction générale</b>	<b>1</b>
<b>1 Les applications contractantes</b>	<b>2</b>
1.1 <b>Les espaces métriques</b>	2
1.1.1 Distances	2
1.1.2 Distances équivalentes	4
1.1.3 Espaces métriques	5
1.2 <b>Espaces métriques complets</b>	5
1.2.1 Suite de Cauchy dans un espace métrique	5
1.2.2 Espaces complets	6
1.2.3 Application contractante	7
1.3 <b>Quelques types des contractions</b>	9
1.3.1 Contraction de Banach	9
1.3.2 Contraction de Kannan	9
1.3.3 Contraction de Chatterjea	10
1.3.4 Contraction de Zamfirescu	10
1.3.5 Contraction d'Edelstien	11
1.3.6 Contraction de Rakotch	11
1.3.7 Contraction de Meir -Keeler	12
1.3.8 Contraction de Branciari	12
1.3.9 Comparaison entre différentes types	13

<b>2</b>	<b>Théorèmes du point fixe</b>	<b>15</b>
2.1	Théorème de Banach(1922) . . . . .	15
2.2	Théorème du Zamfirescu . . . . .	17
2.3	Théorème Meir-Keeler . . . . .	17
2.4	Théorème de Branciari . . . . .	20
<b>3</b>	<b>Quelques applications</b>	<b>24</b>
3.1	L'application du point fixe dans équations . . . . .	24
3.2	L' application aux équations différentielles . . . . .	26
3.3	Application aux équations intégrales . . . . .	29
3.3.1	Equations de Fredholm . . . . .	29
3.3.2	Equation de Volterra . . . . .	31
	<b>Bibliographie</b>	<b>34</b>

# Introduction générale

En 1922, Banach a introduit le concept du point fixe dans les espaces métriques complets, et il a démontré si l'application d'un espace métrique  $(E, d)$  dans lui-même qui vérifiant certaines conditions, on l'appelle la contraction de Banach, admet un seul point fixe.

Après beaucoup des auteurs ont généralisé ce principe par l'utilisation de différentes conditions mais faible par rapport de Banach.

En 1969, Meir et Keeler ont travaillé sur le développement du théorème de Banach, il ont utilisé une nouvelle contraction pour établir un théorème du point fixe, aussi l'amélioration concernant le travail de Banach a pris une partie dans les travaux de Branciari en 2002.

Dans ce notre travail, on va étudier quelques types des contractions et leurs applications comme le théorème du point fixe, avec quelques applications de ces théorèmes dans l'existence de solution pour les équations intégrales et différentielles.

Ce mémoire est décomposé aux trois chapitres:

Le premier chapitre consacré à présenter quelques définitions utiles, et de donner quelques types des contractions: contraction de Banach, Kannan, Chatterjea, Zamfirescu et Branciari et on va faire une comparaison entre ces contractions.

Pendant le deuxième chapitre, on va citer quelques théorèmes du point fixe relatifs à ces types donnés dans le chapitre précédent:

Théorème de Banach, théorème de Zamfirescu, théorème de Meir-Keeler, théorème de Branciari.

Dans le troisième chapitre, on aura appliqué le principe de Banach à l'existence de la solution aux équations différentielles et intégrales.

# Chapitre 1

## Les applications contractantes

### 1.1 Les espaces métriques

#### 1.1.1 Distances

**Définition 1.1.1** Soit  $E$  un ensemble non vide quelconque, une distance sur  $E$  est une fonction

$d : E \times E \mapsto \mathbb{R}_+$  définie sur le produit cartésien  $E \times E$  à valeurs dans l'ensemble  $\mathbb{R}_+$  des nombres réels, vérifiant les propriétés suivantes:

- 1)  $\forall x, y \in E : d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$  (séparation)
- 2)  $\forall x, y \in E : d(x, y) = d(y, x)$  (symétrie)
- 3)  $\forall x, y, z \in E : d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$  (inégalité triangulaire)

pour  $x \in E$  donné, le nombre réel positif ou nul  $d(x, y)$  est appelé distance de  $x$  à  $y$ .

**Exemple 1.1.1**  $d$  est une distance sur  $E$  vérifie:

$$\forall f, g \in E : d(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx$$

$$1) \forall f, g \in E : d(f, g) = 0 \stackrel{?}{\Leftrightarrow} f = g$$

$$d(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx = 0 \Leftrightarrow \forall x \in [0, 1] |f(x) - g(x)| = 0$$

$$\Leftrightarrow f(x) = g(x) \Leftrightarrow f = g.$$

$$2) \forall f, g \in E : d(f, g) \stackrel{?}{=} d(g, f)$$

$$\int_0^1 |f(x) - g(x)| dx = \int_0^1 |g(x) - f(x)| dx = d(g, f)$$

$$3) \forall f, g, h \in E : d(f, h) \stackrel{?}{\leq} d(f, g) + d(g, h)$$

$$\int_0^1 |f(x) - h(x)| dx = \int_0^1 |(f(x) - g(x)) + (g(x) - h(x))| dx$$

$$\leq \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx + \int_0^1 |g(x) - h(x)| dx = d(f, g) + d(g, h)$$

donc  $d$  est une distance sur  $E$ .

**Exemple 1.1.2** Soit  $E = C([0, 1], \mathbb{R})$  l'ensemble des applications continues  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$

$d(f, g) = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x) - g(x)|$  est une distance sur  $E$  vérifie:

$$1) \forall f, g \in E : d(f, g) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sup_{x \in [0, 1]} |f(x) - g(x)| = 0 \Rightarrow \forall x \in [0, 1] |f(x) - g(x)| = 0$$

$$\Leftrightarrow f(x) = g(x) \Leftrightarrow f = g$$

$$2) \forall f, g \in E : d(f, g) \stackrel{?}{=} d(g, f)$$

$$d(f, g) = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x) - g(x)|$$

$$= \sup_{x \in [0, 1]} |g(x) - f(x)| = d(g, f)$$

$$3) \forall f, g, h \in E : d(f, h) \stackrel{?}{\leq} d(f, g) + d(g, h)$$

$\forall x \in [0, 1] :$

$$|f(x) - h(x)| = |(f(x) - g(x)) + (g(x) - h(x))|$$

$$\leq |f(x) - g(x)| + |g(x) - h(x)|$$

$$\Rightarrow \sup_{x \in [0,1]} |f(x) - h(x)| = \sup_{x \in [0,1]} (|f(x) - g(x)| + |g(x) - h(x)|)$$

$$\leq \sup_{x \in [0,1]} |f(x) - g(x)| + \sup_{x \in [0,1]} |g(x) - h(x)|$$

d'où  $d(f, h) \leq d(f, g) + d(g, h)$ .

**Exemple 1.1.3** Soit  $E = \mathbb{R}^n$ ,  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ , c'est-à-dire muni de la distance Euclidienne.

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$$

$$d_1(x, y) = \sum_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|,$$

$$d_2(x, y) = \left( \sum_{1 \leq i \leq n} (x_i - y_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$d_\infty(x, y) = \sup_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i| = \sup \{|x_i - y_i|, i \in [1, n]\}$$

## 1.1.2 Distances équivalentes

**Définition 1.1.2** Soient  $d_1$  et  $d_2$  deux distances sur un même ensemble  $E$ , On dira qu'elles sont

équivalentes s'il existe deux constante réelles  $\alpha > 0$  et  $\beta > 0$  telles que:

- $\forall x, y \in E$  :

$$\alpha d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq \beta d_1(x, y) \tag{1.1.1}$$

- $\forall x, y \in E$  avec  $x \neq y$  :

$$\alpha \leq \frac{d_2(x, y)}{d_1(x, y)} \leq \beta \tag{1.1.2}$$

**Exemple 1.1.4** Soient  $d$  distances de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$

$\forall x, y \in \mathbb{R}$  :

- $d_1(x, y) = |x - y|$  (distance usuel),

- $d_2(x, y) = \sqrt{|x - y|}$  (distance Euclidienne),
  - $d_\infty(x, y) = \max_{x, y \in \mathbb{R}} \{x, y\}$  (distance normée),
- $d_1, d_2$  et  $d_\infty$  sont distances équivalentes.

### 1.1.3 Espaces métriques

**Définition 1.1.3** *Un espace métrique est un couple constitué par un ensemble non vide  $E$  et par*

*une distance  $d$  sur  $E$ .*

- *On dit que le couple  $(E, d)$  est un espace métrique .*

**Exemple 1.1.5** •  $\mathbb{R}$  est un espace métrique muni de la distance  $|\cdot|$  (la valeur absolue)

$$d : (x, y) \rightarrow |x - y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

- $\mathbb{R}^n$  muni de la distance Euclidienne est un espace métrique

$$x = (x_1 \cdots x_n), y = (y_1 \cdots y_n)$$

$$d : (x, y) \rightarrow \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$$

## 1.2 Espaces métriques complets

### 1.2.1 Suite de Cauchy dans un espace métrique

**Définition 1.2.1** *Soit  $(E, d)$  un espace métrique, on dit que suite de Cauchy de  $E$  toute qu'une*

*suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \subset E$  est de Cauchy si et seulement si:*

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$  tel que :

$$\boxed{\forall n, m \geq n_0 : d(x_n, x_m) < \varepsilon}$$

**Lemme 1.2.1** *Toute suite qui converge est de Cauchy.[9]*

**Preuve.** Soit  $(x_n)$  est une suite tel que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = l$ , alors par définition on a :

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$  tel que  $n > n_0 \implies d(x_n, l) < \frac{\varepsilon}{2}$  et donc pour:

$$n, m \geq n_0 \implies d(x_n, x_m) \leq d(x_n, l) + d(l, x_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

■

**Exemple 1.2.1** Soit  $(\mathbb{R}, d)$  un espace métrique et soit la suite définie par:

$$x_n = \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}^*$$

il est clair que  $x_n$  converge vers 0, et pour toute  $n, m$  :

$$\lim_{n,m \rightarrow +\infty} d(x_n, x_m) = \lim_{n,m \rightarrow +\infty} \left| \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right| = 0$$

alors  $x_n$  la suite de Cauchy.

**Remarque 1.2.1** Par ailleurs, il y a des suites qui sont de Cauchy ne convergent pas.

**Exemple 1.2.2** Soit  $d(x, y) = \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right|$  et  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  suite définie par  $x_n = n$

$$\lim_{n,m \rightarrow +\infty} d(x_n, x_m) = \lim_{n,m \rightarrow +\infty} \left| \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right| = 0$$

donc  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite de Cauchy.

posons:  $(x_n)$  convergent vers  $l \in \mathbb{R}$ ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} d(l, x_n) = 0 \iff \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{1}{l} - \frac{1}{n} \right| = 0 \iff \frac{1}{l} = 0,$$

où est une contradiction

donc:  $(x_n)_{n \geq 0}$  deconvergente.

## 1.2.2 Espaces complets

**Définition 1.2.2** On dit qu'un espace métrique  $(E, d)$  est complet si toute suite de Cauchy dans  $E$  converge dans  $E$ .

**Exemple 1.2.3**  $(\mathbb{R}, | \cdot |)$  (valeur absolue) et  $(\mathbb{C}, | \cdot |)$  (module) sont espaces métriques complets.

**Exemple 1.2.4** On définit l'application  $\delta : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}_+$  par  $\delta(x, y) = \frac{|x-y|}{1+|x-y|}$ ,

- on va montrer l'espace métrique  $(\mathbb{R}, \delta)$  est complet.

\*Soit  $(x_n)_n$  une suite de Cauchy dans  $\mathbb{R}$  pour la de prendre  $\varepsilon < 1$  car  $\delta(x; y) < 1$  pour tous  $x, y \in E$ . Faire varier  $\varepsilon$  dans  $]0, 1[$  revient à faire varier  $\eta = \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}$  (ce qui est équivalent à  $\varepsilon = \frac{\eta}{1+\eta}$ ) dans  $]0, +\infty[$ . Un calcul simple montre que  $|x - y| < \eta$  si, et silment si:

$$\delta(x, y) < \varepsilon$$

comme  $(x_n)$  est de

Cauchy, il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que  $\delta(x_n, x_p) \leq \varepsilon$  pour  $n, p \geq N$  et donc  $|x_n - x_p| \leq \eta$  pour  $n, p \geq N$ , la suite  $(x_n)$  est donc de Cauchy pour la distance usuelle sur  $\mathbb{R}$  pour la quelle il est complet; elle converge donc pour cette distance vers un réel  $x$  cela signifie qu'il existe  $K \in \mathbb{N}$  tel que:

$$n \geq K \Rightarrow |x_n - x| < \eta;$$

mais

$$|x_n - x| < \eta \Rightarrow \delta(x_n, x) < \varepsilon$$

et donc:

$n \geq K \Rightarrow \delta(x_n, x) < \varepsilon$  qui montre que la suite  $(x_n)$  converge vers  $x$  pour  $\delta$ ; l'espace métrique  $(E, \delta)$  est donc complet.

### 1.2.3 Application contractante

Soit  $(E, d)$  un espace métrique,  $f$  est une application définit sur  $E$ .

**Définition 1.2.3** On dit que l'application  $f$  est  $K$ -Lipchitzien ( $K > 0$ ) si

$\forall x, y \in E :$

$$\boxed{d(f(x), f(y)) \leq Kd(x, y)}$$

**Exemple 1.2.5** Soit  $f : E \rightarrow E$  définie par:

$$f(x) = \frac{1}{3}x$$

$$d(f(x), f(y)) = \left| \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}y \right|$$

$$= \frac{1}{3} |x - y| \leq |x - y|,$$

alors  $f$  est Lipchitzien.

**Application contractante :**

une application  $f$  d'un espace métrique  $(E, d)$  dans un autre espace métrique  $(F, \delta)$  est dite contractante s'il existe un réel  $0 \leq K < 1$  tel que pour tous

$$x, y \in E : \delta(f(x), f(y)) \leq Kd(x, y)$$

on écrit  $f$  est  $K$ -contractante où  $f$  est une contraction.

**Proposition 1.2.1** Soit  $[a, b]$  un intervalle non vide de  $\mathbb{R}$  et  $g$  une fonction de classe  $C^1$  défini

$[a, b]$  dans lui même vérifiant :

$$\|g'(x)\| \leq k < 1, \forall x \in [a, b].$$

Alors,  $g$  est une application contractante sur  $[a, b]$ .

**Démonstration.** Pour tous  $x$  et  $y$  contenus dans l'intervalle  $[a, b]$  et distincts, on sait qu'il

existe un réel  $C$  strictement compris entre  $x$  et  $y$  tel que:

$$|g(x) - g(y)| = |g'(C)| |x - y|, \text{ d'ou le résultat } \blacksquare$$

**Remarque 1.2.2** Soit  $f : (E, d_E) \rightarrow (F, d_F)$  une application et  $y \in E$  :

- On dit que  $f$  est continue en  $y$  ssi :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \lambda > 0 \text{ telle que : } \forall x \in E, d_E(x, y) < \lambda \Rightarrow d_F(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

- On dit que  $f$  est uniformément continue sur  $E$  ssi :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \lambda > 0 \text{ telle que : } \forall x \in E, d_E(x, y) < \lambda \Rightarrow d_F(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

telle que  $\lambda(\varepsilon)$  ne dépend pas de  $x \in E$ .

On peut facilement montrer que:

$$\boxed{f \text{ est contractante} \Rightarrow f \text{ est lipchitizien} \Rightarrow f \text{ est uniformément continue} \Rightarrow f \text{ est continue} .}$$

On va maintenant citer quelque type de contractions:

## 1.3 Quelques types des contractions

### 1.3.1 Contraction de Banach

**Définition 1.3.1** [7] Soit  $(E, d)$  un espace métrique complet et l'application  $f : E \rightarrow E$  .

On dit que  $f$  est un contraction de Banach s'il existe un nombre  $\alpha$ ,  $0 \leq \alpha < 1$

$$\forall x, y \in E : d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x, y) . \quad (1.3.1)$$

**Exemple 1.3.1** Soit  $f : E \rightarrow E$  une application définie par:

$$f(x) = \frac{3}{8}x + \frac{1}{x},$$

et  $d$  est un distance tel que:  $d(x, y) = |x - y|$

$$\begin{aligned} d(f(x), f(y)) &= \left| \frac{3}{8}x + \frac{1}{x} - \frac{3}{8}y - \frac{1}{y} \right| = \left| \frac{3}{8}x - \frac{3}{8}y \right| \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right| \\ &= \frac{3}{8} |x - y| \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right| \leq \frac{3}{8} |x - y| = \alpha d(x, y) . \end{aligned}$$

**Remarque 1.3.1** • Si  $K = 1$ ;  $T$  est appelé non expensive.

**Exemple 1.3.2** Soit  $E = \mathbb{R}$  et  $T : E \rightarrow E$  définie par:  $T(x) = -x$  tel que :

$$d(T(x), T(y)) = |T(x) - T(y)| = |-x + y| = |x - y| \leq |x - y| = d(x, y)$$

• Si  $K < 1$ ;  $T$  est appelé contraction .

### 1.3.2 Contraction de Kannan

**Définition 1.3.2** [7] Il existe un nombre  $\alpha$  et  $0 < \alpha < \frac{1}{2}$  de telle sorte que pour chaque  $x, y \in E$  :

$$d(f(x), f(y)) \leq \alpha (d(x, f(x)) + d(y, f(y))). \quad (1.3.2)$$

**Exemple 1.3.3** Soit  $E = \{0, 1, 3\}$  et métrique l'Euclidienne  $d(x, y) = |x - y|$ ,  $\forall x, y \in E$ .

L'application  $f : E \rightarrow E$ ,  $f(x) = 0$  si  $x \in \{0, 1\}$  et  $f(x) = 1$  si  $x = 3$

$f$  est une de type de Kannan tel que  $\alpha = \frac{1}{3}$ .

### 1.3.3 Contraction de Chatterjea

**Définition 1.3.3** [7] Il existe un nombre  $b$ , et  $0 < b < \frac{1}{2}$  de telle sorte que pour chaque  $x, y \in E$  :

$$d(f(x), f(y)) \leq b [d(x, f(y)) + d(y, f(x))].$$

**Exemple 1.3.4** Soit une application définie par:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < 1, \\ \frac{3}{4}, & x = 1, \\ \frac{1}{4}, & 2 \leq x \leq 3. \end{cases}$$

Si  $x = 1$  et  $y = 0$  alors:

$$f(x) = \frac{3}{4}, f(y) = 1$$

$$\begin{aligned} d(f(x), f(y)) &= d(f(1), f(0)) = \frac{1}{4} \leq \gamma \cdot [d(x, f(y)) + d(y, f(x))] \\ &= \gamma \cdot [d(1, 1) + d(0, \frac{3}{4})] = \gamma \cdot \frac{3}{4} \end{aligned}$$

$$\text{d'où, } d(f(x), f(y)) \leq \gamma \cdot \frac{3}{4}$$

$$\text{telle que: } \gamma \in \left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right].$$

### 1.3.4 Contraction de Zamfirescu

**Définition 1.3.4** [7] Il existe un réel nombre  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$ , tel que:  $0 \leq \alpha < 1$ ,  $0 \leq \beta, \gamma < \frac{1}{2}$  comme à chaque  $x, y \in E$ , au moins l'un des suivants vrais:

i)  $d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x, y)$ ,

ii)  $d(f(x), f(y)) \leq \beta [d(x, f(x)) + d(y, f(y))]$ ,

$$\text{iii) } d(f(x), f(y)) \leq \gamma [d(x, f(y)) + d(y, f(x))].$$

$$\forall x, y \in E, x \neq y,$$

$$d(f(x), f(y)) \leq \max \left\{ \frac{d(x,y), [d(x,f(x))+d(y,f(y))]}{2}, \frac{[d(x,f(y))+d(y,f(x))]}{2} \right\}.$$

**Exemple 1.3.5** Soit  $E = \{0, 1, 2, 3\}$  et  $f : E \rightarrow E$  une application, telle que :  $f(x) = 0$  si  $x \in \{0, 1\}$  et  $f(x) = 1$  si  $x \in \{2, 3\}$  et la constante  $b = \frac{2}{3}$

- $d(f(1), f(2)) = 1$  si  $d(1, 2) = 1$
- $d(f(1), f(2)) = 1$  si  $d(1, f(1)) + d(2, f(2)) = 2$
- $d(f(1), f(2)) = 1$  si  $d(1, f(2)) + d(2, f(1)) = 2$

### 1.3.5 Contraction d'Edelstien

**Définition 1.3.5** [4] Soit  $(E, d)$  un espace métrique complet et  $f : E \rightarrow E$  une application tel que

$$\forall x, y \in E, x \neq y, d(f(x), f(y)) < d(x, y). \quad (1.3.3)$$

**Exemple 1.3.6** Soit  $(\mathbb{R}_+, | \cdot |)$  espace métrique complet

$$f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+ \text{ tel que : } f(x) = \frac{4}{5}x$$

$$d(f(x), f(y)) = |f(x) - f(y)| = \frac{4}{5} |x - y| < |x - y| = d(x, y).$$

### 1.3.6 Contraction de Rakotch

**Définition 1.3.6** [7] Il existe une fonction monotone décroissant ;  $\varphi : (0, +\infty) \rightarrow [0, 1), \forall x, y \in E, x \neq y$

$$d(f(x), f(y)) \leq \varphi(d(x, y)), \quad (1.3.4)$$

tel que:

- $\varphi$  est continue
- $\varphi(t) < t$ , telle que:  $t > 0$ .

**Exemple 1.3.7** Soit  $E = \{0, 1, 4\}$  et  $d(x, y)$  est une distance Euclidienne, l'application  $f : E \rightarrow E$

telle que  $f(x) = 0$  si  $x \in \{0, 1\}$  et  $f(x) = 2$  si  $x = 4$  et soit  $\varphi : ]0, +\infty[ \rightarrow [0, 1[$  définie par  $\varphi(t) = \frac{t}{2}$ , alors :

$$d(f(0), f(4)) = d(0, 2) = 2 \leq \frac{t}{2}d(0, 4) = \frac{t}{2}.4 = 4.\varphi(t), \forall t > 0.$$

### 1.3.7 Contraction de Meir-Keeler

**Définition 1.3.7** [7] Soient  $(E, d)$  un espace métrique complet et  $f$  Meir-Keeler contraction (MKC) sur  $E$  qui est pour toute  $\varepsilon > 0$  il existe  $\delta > 0$  tel que :

$$d(x, y) < \varepsilon + \delta \text{ implique } d(f(x), f(y)) < \varepsilon \quad (1.3.5)$$

pour toute  $x, y \in E$  puis  $f$ .

**Exemple 1.3.8** Soit  $E = \{(0, 1), (1, 0), (1, 1)\} \subset \mathbb{R}^2$ , et  $d$  est un distance Euclidean

$f : E \rightarrow E$  définie par:

$$f(1, 0) = (0, 1),$$

$$f(0, 1) = (1, 0),$$

$$f(1, 1) = (1, 1).$$

$$\varepsilon = d((0, 1), (1, 0)) = \sqrt{2}.$$

$$d(f(0, 1), f(1, 0)) = d((1, 0), (0, 1)) = \sqrt{2} < \varepsilon.$$

### 1.3.8 Contraction de Branciari

**Définition 1.3.8** [1] Soit  $(E, d)$  un espace métrique complet  $c \in [0, 1)$  et  $T : E \rightarrow E$  est un application telle que  $\forall x, y \in E$

$$\int_0^{d(T(x), T(y))} \varphi(t) dt \leq c \int_0^{d(x, y)} \varphi(t) dt, \quad (1.3.6)$$

tel que:  $\varphi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  et  $\forall \varepsilon > 0, \int_0^\varepsilon \varphi(t) dt > 0$ .

$T$  est appelé contraction de Branciari.

**Exemple 1.3.9** Soit  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  définie par:

$f(x) = x + 1$  et  $\varphi = -1$ ,

$\forall c \in ]0, 1[$  tel que ( $d$  est une fonction distance Euclidienne)

$$\int_0^{d(f(x), f(y))} \varphi(t) dt = -d(f(x), f(y)) = -d(x, y) \leq -cd(x, y) = c \int_0^{d(x, y)} \varphi(t) dt.$$

**Remarque 1.3.2** Y.Suziku mentionne que la contraction de Branciari est un cas particuliers de la contraction de Meir-Keeler .

### 1.3.9 Comparaison entre différents types

**Théorème 1.3.1** [7] •  $\exists \alpha, 0 \leq \alpha < 1, \forall x, y \in E : d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x, y)$  (**Banach**)  $\Rightarrow$

$\exists f$  (fonction monotone décroissant);  $\alpha : (0, +\infty) \rightarrow [0, 1), \forall x, y \in E, x \neq y,$

$d(f(x), f(y)) \leq \alpha(d(x, y))$  (**Rakotch**)  $\Rightarrow$

$\forall x, y \in E, x \neq y, d(f(x), f(y)) < (d(x, y))$  (**Edelstein**).

•  $\exists f$  (fonction monotone décroissant);  $\alpha : (0, +\infty) \rightarrow [0, 1), \forall x, y \in E, x \neq y,$

$d(f(x), f(y)) \leq \alpha(d(x, y))$  (**Rakotch**)  $\nRightarrow$

$\exists \alpha, 0 \leq \alpha < 1, \forall x, y \in E : d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x, y)$  (**Banach**).

•  $\forall x, y \in E, x \neq y, d(f(x), f(y)) < (d(x, y))$  (**Edelstein**)  $\nRightarrow$

$\exists \alpha, 0 \leq \alpha < 1, \forall x, y \in E : d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x, y)$  (**Banach**).

**Preuve.** (**Edelstein**)  $\nRightarrow$  (**Banach**)

Soit  $M = [x \in \mathbb{R} : x \geq 1]$  et  $d(x, y) = |x - y|, \forall x, y \in M;$

$T : M \rightarrow M$  définie par:  $T(x) = x + \frac{1}{x}$

$$\begin{aligned} d(T(x), T(y)) &= |T(x) - T(y)| = \left| \left(x + \frac{1}{x}\right) - \left(y + \frac{1}{y}\right) \right| \\ &= \left| \left(\frac{x^2 + 1}{x}\right) - \left(\frac{y^2 + 1}{y}\right) \right| = \left| \frac{yx^2 + y - y^2x - x}{xy} \right| = \left| \frac{y - x}{xy} + \frac{yx^2 - y^2x}{xy} \right| \\ &= \left| \frac{y - x}{xy} + \frac{xy(x - y)}{xy} \right| = |x - y| \left[ 1 - \frac{1}{xy} \right] = \left(1 - \frac{1}{xy}\right) |x - y| \end{aligned}$$

$$= \left| \frac{xy - 1}{xy} \right| |x - y| < |x - y|$$

car :

$$xy - 1 < xy (\forall x, y \in M) \Rightarrow \frac{xy - 1}{xy} < 1,$$

c'est -à-dire:  $\exists \alpha < 1$  tel que :

$$d(T(x), T(y)) < \alpha d(x, y) \forall x, y \in M.$$

(Rakotch)  $\not\Rightarrow$  (Banach)

Soit  $f$  une application:  $[0, 1] \rightarrow [0, 1]$  définie par

$$f(x) = \frac{1}{x+1}, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

et  $f$  admet un point fixe  $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ . Quelconque  $\alpha, 0 < \alpha < 1$ , choisir  $y < -1 + \frac{1}{\alpha}$  et

$y \in \left(0, \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$ , tel que :

$$d(f(0), f(y)) = \frac{y}{y+1} > \alpha y = \alpha d(0, y),$$

alors Rakotch n'est pas satisfy Banach. ■

# Chapitre 2

## Théorèmes du point fixe

**Définition 2.0.9** Un point  $x \in E$  est dit point fixe pour l'application  $f$  si à :

$$f(x) = x.$$

**Exemple 2.0.10** Soit  $f$  une application telle que :  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :

$$f(x) = 2x - 3$$

$$f(x) = x \Leftrightarrow 2x - 3 = x, \text{ donc: } x = 3,$$

alors, 3 c'est un point fixe de  $f$ .

**Exemple 2.0.11** Soit  $g$  une application telle que :  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :

$$g(x) = \frac{x^2 - 1}{3}$$

$$g(x) = x \Leftrightarrow \frac{x^2 - 1}{3} = x, \text{ donc: } x^2 - 3x - 1 = 0,$$

alors,  $\frac{3 + \sqrt{13}}{2}$  c'est un point fixe de  $g$ .

### 2.1 Théorème de Banach(1922)

[8] Soit  $(E, d)$  un espace métrique complet. Soit  $f : E \rightarrow E$  une application contractante, alors  $f$  admet un point fixe unique  $x \in E$  (c'est -à-dire qu'il existe et un seul  $x \in E$  tel que  $f(x) = x$ ).

De plus, si  $x_0 \in E$  et  $(x_n)$  est une suite donnée par la relation de

réurrence:  $x_n = f(x_{n-1}) (n \geq 1)$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$  et

$$d(x_n, x) \leq k^n (1 - k)^{-1} d(x_1, x_0), \quad n \geq 1$$

$x$  étant le point fixe de  $f$ .

**Preuve.** L'existence: Soit  $y \in E$  un poit arbitraire dans  $E$ .

Considéorons la suite  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  donnée par:

$$\begin{cases} x_0 = y, \\ x_n = f(x_{n-1}), n \geq 1. \end{cases}$$

On doit prouver que  $(x_n)$  est une suite de Cauchy dans  $E$  pour  $m < n$ , on utilise l'inégalité triangulaire:

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x_{m+1}) + d(x_{m+1}, x_{m+2}) + \dots + d(x_{n-1}, x_n),$$

puis que  $f$  est

une contraction on à :

$$d(x_p, x_{p+1}) = d(fx_{p-1}, fx_p) \leq kd(x_{p-1}, x_p) \text{ pour } p \geq 1.$$

En répétant cette inégalité, on obtient :

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leq (k^m + k^{m+1} + \dots + k^{n-1}) d(x_0, x_1) \\ &\leq k^m (1 + k + \dots + k^{n-m-1}) d(x_0, x_1) \\ &\leq k^m (1 - k)^{-1} d(x_0, x_1). \end{aligned}$$

On déduit que  $(x_n)_n$  est de Cauchy dans  $E$  qui est complet, donc  $(x_n)_n$  converge vers  $x$  dans  $E$ .

Par ailleurs puisque  $f$  est continue, on a:

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_{n-1}) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n-1}\right) = f(x),$$

donc  $x$  est un point fixe de  $f$ .

L'unicité:

Supposons  $x = f(x)$  et qu'il existe un autre point fixe  $y$  tel que  $y = f(y)$  alors :

$$d(x, y) = d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y),$$

ce qui implique que  $d(x, y) = 0$  i.e  $x = y$

(puisque  $k < 1$ ). ■

## 2.2 Théorème du Zamfirescu

[10] Soit  $(E, d)$  un espace métrique complet et l'application  $f : E \rightarrow E$ , il existe un réel nombre  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$  telque:  $0 \leq \alpha < 1$  et  $0 \leq \beta, \gamma < \frac{1}{2}$  comme à tout  $x, y \in E$ , au moins l'un des suivants vrais :

$$i) d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x, y),$$

$$ii) d(f(x), f(y)) \leq \beta [d(x, f(x)) + d(y, f(y))],$$

$$iii) d(f(x), f(y)) \leq \gamma [d(x, f(y)) + d(y, f(x))].$$

Alors  $f$  possède un unique point fixe  $p \in E$ , la suite  $(x_n)_{n=0}^{\infty}$  définie par:

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

converge vers  $p \forall x_0 \in E$ .

## 2.3 Théorème Meir-Keeler

[6] Soit  $(E, d)$  est un espace métrique complet, et soit  $f$  l'application dans  $E$  entre lui même la condition suivante:  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$  tel que:

$$\varepsilon \leq d(x, y) < \varepsilon + \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \varepsilon. \quad (2.3.1)$$

Alors  $f$  possède un et seul point fixe  $\xi \in E$ , au plus  $\forall x \in E$ , la suite  $(f_n(x))$  converge vers

$\xi$ , tel que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = \xi. \quad (2.3.2)$$

**Preuve.** Soit  $(E, d)$  un espace métrique, on suppose que l'application  $f : E \rightarrow E$  vérifie pour  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\delta > 0$  tel que:

$$\varepsilon \leq d(x, y) < \varepsilon + \delta \text{ implique } d(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

**Lemme 2.3.1** La suite  $(y_n) = d(x_n, x_{n+1})$  vérifie:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0.$$

• On va montrer par l'absurde, supposons que:

$$y_n = d(x_n, x_{n+1}) \rightarrow l > 0,$$

où  $x_n = f_n(x)$ , la suite  $(y_n)$  est décroissante

$$y_n = d(x_n, x_{n+1}) < \varepsilon = d(x_{n-1}, x_n),$$

alors il existe  $\delta > 0$  tel que  $(y_n)$  vrais pour  $\varepsilon = l$ , ce que implique  $L \leq y_n \leq y_{n-1} < l$ ,

où est une contradiction donc:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0.$$

**Lemme 2.3.2** La suite  $(x_n)$  est une suite de Cauchy.

• Suppose que  $(x_n)$  n'est pas de Cauchy, alors il existe  $\varepsilon = 2\delta > 0$  tel que pour tous  $n, m$  on a:

$$|d(x_m, x_k) - d(x_m, x_{k+1})| \leq d(x_k, x_{k+1}) < \frac{\varepsilon}{3}$$

ce que implique et comme  $d(x_m, x_{m+1}) < \varepsilon$  et  $d(x_m, x_n) > 2\varepsilon > \varepsilon + \delta$   
qu'il existe  $k \in [m, n]$  tel que :

$$\varepsilon + 2\frac{\delta}{3} < d(x_m, x_k) < \varepsilon + \delta,$$

pour tout  $m, k$  on a :

$$d(x_m, x_k) \leq d(x_m, x_{m+1}) + d(x_{m+1}, x_{k+1}) + d(x_{k+1}, x_k)$$

alors:

$$\varepsilon + 2\frac{\delta}{3} < d(x_m, x_k) \leq y_m + \varepsilon + y_k < \frac{\delta}{3} + \varepsilon + \frac{\delta}{3},$$

d'où est une contradiction, donc  $(x_n)$  est de Cauchy.

**Théorème 2.3.1** Soit  $(E, d)$  est un espace métrique complet et  $f : E \rightarrow E$  une application qui vérifie

pour tout  $x, y \in E$ (2.3.1), alors  $f$  a un point fixe unique .

• D'après le lemme(2.3.2) la suite  $(x_n)$  est une suite de Cauchy et l'espace est complet, alors elle converge vers  $z \in E$ , comme  $f$  est continue donc:

$$f(z) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n f^{n+1}(x) = z$$

ce qui implique  $z$  est un point fixe de  $f$ .

Pour l'unicité supposons qu'il existe deux point fixe  $z, t$  pour  $f$ , alors appliquant (2.3.1) on obtient:

$$\varepsilon \leq d(z, t) < \varepsilon + \delta = d(f(z), f(t)) = d(z, t) < \varepsilon,$$

d'où est une contradiction.

■

**Exemple 2.3.1** Soit  $S_n = \sum_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right)$ , et soit  $X = \{S_n\}$ .

Soit  $f(S_n) = S_{n+1}, \forall n$ . Alors  $d(f(x), f(y)) \leq \psi d(x, y)$  telle que :

$\psi \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1 + \frac{1}{n+1}$ , mais n'est pas point fixe.

## 2.4 Théorème de Branciari

[2] Soit  $(E, d)$  un espace métrique complet  $\alpha \in (0, 1)$  et  $f : x \rightarrow x$  une application de  $E$  dans  $E$  telle que pour tous  $x, y \in E$ ,

$$\int_0^{d(f(x), f(y))} \phi(t) dt \leq \alpha \int_0^{d(x, y)} \phi(t) dt.$$

Où  $\phi : [0, \infty[ \rightarrow [0, \infty[$  est une application intégrable au sens de Lebesgue et sommable (i.e, avec intégral finie) sur chaque sous-ensemble compact de  $\mathbb{R}_+$  où pour tout

$$\varepsilon > 0 \int_0^\varepsilon \phi(t) dt \geq 0 \text{ puis } f \text{ a un point fixe unique } a \in E, \forall x \in E, \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = a.$$

**Preuve. Etape01:**

On a:

$$\int_0^{d(f^n(x), f^{n+1}(x))} \phi(t) dt \leq c^n \int_0^{d(x, f(x))} \phi(t) dt$$

cela découle immédiatement par itération  $n$  fois

$$\int_0^{d(f^n(x), f^{n+1}(x))} \phi(t) dt \leq c \int_0^{d(f^{n-1}(x), f^n(x))} \phi(t) dt \leq \dots \leq c^n \int_0^{d(x, f(x))} \phi(t) dt$$

en conséquence, puisque  $c \in ]0, 1[$  nous avons plus

$$\int_0^{d(f^n(x), f^{n+1}(x))} \phi(t) dt \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow \infty.$$

**Etape02:**

On a  $d(f^n(x), f^{n+1}(x)) \rightarrow 0$  comme  $n \rightarrow \infty$  supposer que:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} d(f^n(x), f^{n+1}(x)) = \varepsilon > 0,$$

alors il existe un  $x_\varepsilon \in \mathbb{N}$  et une séquence  $(f^{n_x}(x))_{x > x_\varepsilon}$  telle que  $d(f^{n_x}(x), f^{n_x+1}(x)) \rightarrow \varepsilon > 0$  comme  $n \rightarrow \infty$  et  $d(f^n(x), f^{n+1}(x)) \geq \frac{\varepsilon}{2}$

pour chaque  $v \geq v_\varepsilon$ , ainsi nous avons la contradiction suivant:

$$0 = \lim_{v \rightarrow \infty} \int_0^{d(f^{n_v}(x), f^{n_v+1}(x))} \phi(t) dt \geq \int_0^{\frac{\varepsilon}{2}} \phi(t) dt > 0.$$

**Etape03:**

Pour chaque  $x \in E$   $(f^n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de Cauchy qui est

$$\forall \varepsilon > 0, \exists v_\varepsilon \in \mathbb{N} \forall n, m \in \mathbb{N}, m > n > v_\varepsilon d(f^m(x), f^n(x)) < \varepsilon.$$

Supposer que il existe un  $\varepsilon > 0$  telle que pour tout  $v \in \mathbb{N}$  il est  $m_v, n_v \in \mathbb{N}$  avec  $m_v > n_v > v$  pour tout

$$d(f^{m_v}(x), f^{n_v}(x)) \geq \varepsilon$$

puis nous choisissons les suites  $(m_v)_{v \in \mathbb{N}}$

et  $(n_v)_{v \in \mathbb{N}}$  telle que pour chaque  $v \in \mathbb{N}$ ,  $m_v$  et minimal dans sens

$$d(f^{m_v}(x), f^{n_v}(x)) \geq \varepsilon$$

mais  $d(f^h(x), f^{n_v}(x)) < \varepsilon$  pour tout

$$h \in \{n_v + 1, \dots, m_v - 1\}, h \in [n_v + 1, m_v + 1].$$

Maintenant nous analyser les propriétés de  $d(f^{m_v}(x), f^{n_v}(x))$  et  $d(f^{m_v+1}(x), f^{n_v+1}(x))$ .

Tout d'abord on a  $d(f^{m_v}(x), f^{n_v}(x)) \rightarrow \varepsilon$  comme  $v \rightarrow \infty$ , en fait, par l'inégalité triangulaire et l'étape (02):

$$\begin{aligned} \varepsilon &\leq d(f^{m_v}(x), f^{n_v}(x)) \\ &\leq d(f^{m_v}(x), f^{m_v-1}(x)) + d(f^{m_v-1}(x), f^{n_v}(x)) \\ &\leq d(f^{m_v}(x), f^{m_v-1}(x)) + \varepsilon \xrightarrow{v \rightarrow \infty} \varepsilon \end{aligned}$$

en outre, il existe  $\mu \in \mathbb{N}$  telle que pour tout nombre naturel  $v > \mu$ . On a

$d(f^{m_v+1}(x), f^{n_v+1}(x)) < \varepsilon$ ; en fait, si il existe une suite  $(v_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$  pour tout

$$d(f^{m_{v_k+1}}(x), f^{n_{v_k+1}}(x)) \geq \varepsilon$$

puis  $\varepsilon \leq d(f^{m_v+1}(x), f^{n_v+1}(x)) \leq d(f^{m_{v_k+1}}(x), f^{m_{v_k}}(x)) + d(f^{m_{v_k}}(x), f^{n_{v_k}}(x))$

$$+ d(f^{n_{v_k}}(x), f^{n_{v_k+1}}(x)) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty}$$

$\varepsilon$ , et de

$$\int_0^{d(f^{m_{v_k}+1}(x), f^{n_{v_k}+1}(x))} \phi(t) dt \leq c \int_0^{d(f^{m_{v_k}}(x), f^{n_{v_k}}(x))} \phi(t) dt \quad \dots (*)$$

laissant maintenant  $k \rightarrow +\infty$  des deux côtés (\*), on a

$$\int_0^\varepsilon \phi(t) dt \leq c \int_0^\varepsilon \phi(t) dt$$

qui est une contradiction être  $c \in ]0, 1[$  et l'intégral, qui est positif. Donc pour un certain  $\mu \in \mathbb{N}$  on a  $d(f^{m_v+1}(x), f^{n_v+1}(x)) < \varepsilon$  pour tout  $v < \mu$ . Enfin, nous prouvons la propriété plus fautive qu'il existe une  $\sigma_\varepsilon \in ]0, \varepsilon[$  et une  $v_\varepsilon \in \mathbb{N}$  telle que pour chaque  $v > v_\varepsilon$  ( $v \in \mathbb{N}$ ) nous telle que:

$$d(f^{m_{v_k}+1}(x), f^{n_{v_k}+1}(x)) \rightarrow \varepsilon - \sigma_\varepsilon \text{ comme } k \rightarrow +\infty$$

puis de

$$\int_0^{d(f^{m_{v_k}+1}(x), f^{n_{v_k}+1}(x))} \phi(t) dt \leq c \int_0^{d(f^{m_{v_k}}(x), f^{n_{v_k}}(x))} \phi(t) dt,$$

laisser  $k \rightarrow +\infty$ , on a, nouveau la contradiction qui

$$\int_0^\varepsilon \phi(t) dt \leq c \int_0^\varepsilon \phi(t) dt.$$

En conclusion de cette étape, nous prouvons le caractère de Cauchy de

$(f^n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  ( $x \in E$ ); en effet pour chaque nombre naturel,  $v > v_\varepsilon$

( $v_\varepsilon$  comme ci-dessus)

$$\begin{aligned} \varepsilon &\leq d(f^{m_v}(x), f^{n_v}(x)) \leq d(f^{m_v}(x), f^{m_v+1}(x)) + d(f^{m_v+1}(x), f^{n_v+1}(x)) + d(f^{n_v+1}(x), f^{n_v}(x)) \\ &< d(f^{m_v}(x), f^{m_v+1}(x)) + (\varepsilon - \sigma_\varepsilon) + d(f^{n_v}(x), f^{n_v+1}(x)) \xrightarrow{v \rightarrow \infty} \varepsilon - \sigma_\varepsilon, \end{aligned}$$

ainsi  $\varepsilon \leq \varepsilon - \sigma_\varepsilon$  ce qui est une

contradiction cela s'évère étape (03).

**Etape04:**

Existe de point fixe. De puis  $(x \rightarrow d)$  est un espace métrique complet, il existe un point  $\alpha \in E$  pour tout

$$\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x),$$

c'est en outre un est point fixe en

effet supposer que  $d(\alpha, f(\alpha)) > 0$ , ainsi

$$0 < d(\alpha, f(\alpha)) \leq d(\alpha, f^{n+1}(x)) + d(f^{n+1}(x), f(\alpha)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

en fait les deux  $d(\alpha, f^{n+1}(x))$  et

$d(f^{n+1}(x), f(\alpha))$  converge vers 0 comme  $n \rightarrow \infty$ , pour le premier, il est évident alors

que pour le second, on a:

$$\int_0^{d(f^{n+1}(x), f(\alpha))} \phi(t) dt \leq c \int_0^{d(f^n(x), \alpha)} \phi(t) dt \xrightarrow{v \rightarrow \infty} 0.$$

Maintenant, si  $d(f^{n+1}(x), f(\alpha))$  n'est pas converge vers 0 comme  $n \rightarrow \infty$ , alors il existe une sous-suite  $(f^{n_v+1}(x))_{v \in \mathbb{N}} \subset (f^{n+1}(x))_{n \in \mathbb{N}}$  telle que  $d(f^{n_v+1}(x), f(\alpha)) \geq \varepsilon$  pour un certain  $\varepsilon > 0$ ; ainsi on a contraction suivant:

$$0 < \int_0^{\varepsilon} \phi(t) dt \leq \int_0^{d(f^{n_v+1}(x), f(\alpha))} \phi(t) dt \xrightarrow{v \rightarrow \infty} 0.$$

**Etape05:**

Unicité du point fixe. Supposer qu'il y ait deux points distincts  $\alpha, \beta \in E$  telle que  $f(\alpha) = \alpha$  et  $f(\beta) = \beta$ , puis par le théorème (2.4) on a la contraction :

$$0 < \int_0^{d(\alpha, \beta)} \phi(t) dt = \int_0^{d(f(\alpha), f(\beta))} \phi(t) dt \leq c \int_0^{d(\alpha, \beta)} \phi(t) dt < \int_0^{d(\alpha, \beta)} \phi(t) dt$$

cette dernière étape prouve également

$$\forall x \in E, \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = \alpha = f(\alpha).$$

■

# Chapitre 3

## Quelques applications

### 3.1 L'application du point fixe dans équations

**Proposition 3.1.1** Soit  $f$  une application continue sur  $[a, b]$  et dérivable sur  $]a, b[$ , et vérifie

$|f'| \leq k < 1$ , alors l'équation

$$f(x) = x$$

admet au moins une solution dans  $[a, b]$ .

**Démonstration.** 1) L'intervalle  $[a, b]$  est fermé dans l'espace Euclidien  $(\mathbb{R}, d)$  ( $d$ : distance usuelle) qui est complet, donc le sous-espace  $([a, b], d_{[a,b]})$  est complet aussi.

2) Selon le théorème des accroissement fini on a :

$\forall x, y \in ]a, b[, \exists c \in ]a, b[ :$

$$|\Delta f| = |f(x) - f(y)| = |x - y| |f'(c)|$$

car  $|f'(c)| \leq k < 1$  donc  $|f(x) - f(y)| = k|x - y|$

ce qui donne  $f$  contraction. Alors  $f$  est contractane sur l'espace complet  $([a, b], d_{[a,b]})$  grace au théorème de Banach, l'application  $f$  admet un point fixe unique  $x_0 \in [a, b]$  telle que:  $f(x_0) = x_0$ . Ou  $x_0$  est la solution de l'équation  $f(x) = x$ . ■

**Exemple 3.1.1** *Resolution de l'équation:*

$$F(x) = 0 \tag{3.1.1}$$

$F$  défini et dérivable sur  $[a, b]$  telque:

$$0 < k_1 < F'(x) < k_2 \text{ et } F(a) \cdot F(b) < 0.$$

D'après le proposition( 3.1.1), on considre la fonction  $f$  défini sur  $[a, b]$  telque:

$$f(x) = x - \lambda F(x) \tag{3.1.2}$$

ou  $\lambda$  réel et different de 0.

La solution de l'équation est équivaut à l'existence du point fixe pour (3.1.2), c'est à dire

$$f(x) = x \Leftrightarrow -\lambda F(x) = 0 \Leftrightarrow F(x) = 0$$

pour l'existence et l'unicité du point fixe il faut et il suffit que  $f$  soit contractante.

On a:

$$f'(x) = 1 - \lambda F'(x)$$

donc:

$$1 - \lambda k_1 < f'(x) \leq 1 - \lambda k_2$$

on peut choisir  $\lambda$  de tel sorte que:

$$1 - \lambda k_2 \leq \alpha < 1.$$

Donc:  $F(x) = 0$  admet une solution unique.

Si on choisir.  $F(x) = x^3 - 3x \forall x$  dans l'interval  $[\frac{3}{2}, 2]$

$F'(x) = 3(x^2 - 1)$  telleque:

$$0 < \frac{3}{2} < 3(x^2 - 1) < 2 \text{ et } F(\frac{3}{2}) \cdot F(2) < 0$$

$$f(x) = x - \lambda(x^3 - 3x), \lambda > 0$$

$$f(x) = x \Leftrightarrow -\lambda(x^3 - 3x) = 0$$

$\Leftrightarrow F(x) = 0$  alors  $f'(x) = 1 - \lambda F'(x) = 1 - \lambda (3(x^2 - 1))$

donc:  $1 - \frac{3}{2}\lambda < f'(x) \leq 1 - 2\lambda$

on pour choisir  $\lambda$  de tel sorte:  $1 - 2\lambda \leq \alpha < 1$  donc:

$F(x) = 0$  admet une solution unique.

## 3.2 L' application aux équations différentielles

Soit l'équation différentielle suivant:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (3.2.1)$$

$f$  est une fonction définie et continue sur  $D$  telle que:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; a \leq x \leq b \text{ et } y \in \mathbb{R}\} \quad (3.2.2)$$

et vérifier la condition de Lipchitz à  $y$  :

$$\forall y_1, y_2 \in \mathbb{R} : |f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq k |y_1 - y_2|, k > 0.$$

On va montrer que pour  $(x_0, y_0) \in D$ , l'équation (3.2.1) admet une solution unique  $y(x)$  qui passe par le point  $(x_0, y_0)$  c-à-d  $y(x_0) = y_0$

**Solution 3.2.1** 1) On sait que l'existence et l'unicité de solution de l'équation (3.2.1) est équivalent

à l'existence et l'unicité de la solution de l'équation intégrale suivante:

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt \quad (3.2.3)$$

on définit l'application  $A$  telle que:

$$A(y(t)) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt \quad (3.2.4)$$

$A$  est défini dans l'espace complet  $([a, b], d_{[a,b]})$  dans lui même. La distance  $d$  est  $\forall y_1, y_2 \in [a, b]$  :

$$d(x, y) = \max_{a \leq x \leq b} |y_1(x) - y_2(x)|$$

de (3.2.1) on peut conclure que l'existence et l'unicité de solution de (3.1.2) équivalent à l'existence l'unicité de point fixe pour l'opérateur  $A$  pour remplir les conditions du théorème de Banach il nous suffit de démontrer que l'opérateur  $A$  est une application contractante sur  $(C[a, b])$  on:

$$\begin{aligned} d(A(y_1), A(y_2)) &= \max_{a \leq x \leq b} |A(y_1) - A(y_2)| \\ &= \max_{a \leq x \leq b} \left| y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_1(t)) dt - y_0 - \int_{x_0}^x f(t, y_2(t)) dt \right| \\ &\leq \max_{a \leq x \leq b} \int_{x_0}^x |f(t, y_1(t)) - f(t, y_2(t))| dt \\ &\leq \max_{a \leq x \leq b} \int_{x_0}^x k |y_1(t) - y_2(t)| dt = \max_{a \leq x \leq b} \int_{x_0}^x k d(y_1, y_2) dt \end{aligned}$$

donc on obtient:

$$d(A(y_1), A(y_2)) \leq k(b-a) d(y_1, y_2)$$

$A$  est contractante si:  $k(b-a) < 1$  c-à-d  $k < \frac{1}{b-a}$ .

On dit que l'équation (3.1.2) admet une solution unique si:  $k < 1$  par conséquence

l'équation (3.1.2) admet une solution unique qui passe par le point  $(x_0, y_0)$

si:  $k(b-a) < 1$ .

**Exemple 3.2.1** Soit le problème de Cauchy suivant:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = 2y - 2x^2 - 3 \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

ce problème équivaut à l'équation intégrale:

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt, \text{ avec } (x_0, y_0) = (0, 2)$$

Soit la suite de récurrence définie par:  $\varphi_0 = y_0 = 2$ , tel que:

$$\varphi_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, \varphi_{n-1}(x)) dt, \text{ donc :}$$

pour  $n = 1$

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= y_0 + \int_{x_0}^x f(t, \varphi_0(t)) dt \\ &= 2 + \int_0^x f(t, 2) dt \\ &= 2 + \int_0^x (4 - 2t^2 - 3) dt \\ &= 2 + x - \frac{2}{3}x^3, \end{aligned}$$

pour  $n = 2$

$$\begin{aligned} \varphi_2(x) &= y_0 + \int_{x_0}^x f(t, \varphi_1(t)) dt \\ &= 2 + \int_0^x (2\varphi_1(t) - 2t^2 - 3) dt \\ &= 2 + \int_0^x [2(2 + t - \frac{2}{3}t^3) - 2t^2 - 3] dt \\ &= 2 + x + x^2 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{3}x^4, \end{aligned}$$

pour  $n = 3$

$$\begin{aligned} \varphi_3(x) &= y_0 + \int_{x_0}^x f(t, \varphi_2(t)) dt \\ &= 2 + \int_0^x (2\varphi_2(t) - 2t^2 - 3) dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2 + \int_0^x \left[ 2 \left( 2 + t + t^2 - \frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{4}t^4 \right) - 2t^2 - 3 \right] dt \\
&= 2 + x + x^2 - \frac{1}{3}x^4 + \frac{2}{15}x^5.
\end{aligned}$$

Donc la solution approximée:

$$y(x) = 2 + x + x^2 - \frac{1}{3}x^4 + \frac{2}{15}x^5.$$

### 3.3 Application aux équations intégrales

#### 3.3.1 Equations de Fredholm

Utilisons maintenant la méthode des contractions pour démontrer l'existence et l'unicité de la solution d'une équation intégrale linéaire non homogène de Fredholm de deuxième espèce, c-à-d d'une équation de la form

$$f(x) = \varphi(x) + \lambda \int_a^b k(x, y) f(y) dy, \quad (3.3.1)$$

où  $k$  (le noyau) et  $\varphi$  sont des fonctions données,  $f$  est la fonction cherchée et  $\lambda$  est un paramètre arbitraire.

Nous verrons que la dite méthode n'est applicable que pour des valeurs assez petites du paramètre  $\lambda$ .

Supposons que  $k(x, y)$  et  $\varphi(x)$  soient continues pour  $a \leq x \leq b$ ,  $a \leq y \leq b$  et donc:

$$|k(x, y)| \leq M.$$

Considérons l'application  $g = Af$  de l'espace complet  $C[a, b]$  dans lui-même, donnée par la formule

$$g(x) = \varphi(x) + \lambda \int_a^b k(x, y) f(y) dy$$

on a  $p(g_1, g_2) = \max |g_1(x) - g_2(x)| \leq |\lambda| M(b-a) \max |f_1(x) - f_2(x)|$

par conséquent, pour  $\lambda < \frac{1}{M(b-a)}$  l'application  $A$  est contractante.

D'après le principe des contractions on conclut que pour tout  $\lambda$  tel que  $|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)}$  l'équation de Fredholm admet une solution unique.

Les approximations successives de cette solution  $f_0, f_1, \dots, f_n$ , sont de la forme

$$f_n(x) = \varphi(x) + \lambda \int_a^b k(x, y) f_{n-1}(y) dy,$$

où en tant que  $f_0(x)$  on peut prendre n'importe quelle fonction continue.

On considère l'application  $A$  définie par:

$$A : C[a, b] \rightarrow C[a, b]$$

$$f \rightarrow A(f) = \varphi(x) + \lambda \int_a^b k(x, y) f(y) dy,$$

puis que l'équation (3.3.1) admet une solution, il satisfait que l'application  $A$  admet un point fixe par cela on va appliquer le principe de Banach.

**Exemple 3.3.1** Soit l'équation intégrale:

$$f(x) = 1 + \frac{1}{2} \int_0^1 x f(y) dy.$$

On considère l'opérateur suivant:

$$Af(x) = 1 + \frac{1}{2} \int_0^1 x f(y) dy, \text{ tel que: } f_0(x) = 1.$$

D'après ce que précède, si on prend:  $k(x, y) = x$  (continue sur  $[0, 1]$ )

$M = 1$ ,  $\lambda = \frac{1}{2}$ , et  $\varphi(x) = 1$  (continue sur  $[0, 1]$ ), alors on peut appliquer le principe de Banach donc la solution existe et unique.

Par calculer la solution on utilise procédure suivante:

$$|x| \leq 1 \Rightarrow M = 1, \lambda = \frac{1}{2}$$

$$\alpha = \lambda |b - a| M = \frac{1}{2} \text{ d'où } \alpha \leq 1,$$

telle que:  $x_n = A(x_{n-1})$

la première approximation :

$$f_1(x) = 1 + \int_0^1 x dy = 1 + x$$

la deuxième approximation:

$$f_2(x) = 1 + \int_0^1 x(1+y) dy = 1 + x \left[1 + \frac{1}{2}\right] = 1 + \frac{3}{2}x$$

la 3<sup>ème</sup> approximation:

$$f_3(x) = 1 + \int_0^1 x \left[1 + y \left(1 + \frac{1}{2}\right)\right] dy, \text{ on bien } f_3(x) = 1 + \int_0^1 x \left(1 + \frac{3}{2}y\right) dy$$

$$f_3(x) = 1 + x \left[1 + \left(1 + \frac{1}{2}\right) \frac{1}{2}\right] = 1 + x \left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right], \text{ on bien}$$

$$f_3(x) = 1 + x \left[1 + \frac{3}{4}\right] = 1 + \frac{7}{4}x$$

la n<sup>ème</sup> approximation:

$$f_n(x) = 1 + x \left[1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}\right] = 1 + \frac{2^n - 1}{2^{n-1}}x.$$

### 3.3.2 Equation de Volterra

Considérons enfin l'équation intégrale de Volterra:

$$f(x) = \varphi(x) + \int_a^x k(x,y) f(y) dy \quad (3.3.2)$$

Ici, à la différence des équations de Fredholm, l'intégrale a pour borne supérieure la variable  $x$ . Formellement cette équation peut être considérée comme un cas particulier de l'équation de Fredholm, en prolongeant la fonction  $k$  par l'égalité:

$$k(x,y) = 0 \text{ pour } y > x.$$

Pourtant, si dans le cas d'une équation intégrale de Fredholm nous étions contraint à nous borner aux valeurs suffisamment petites du paramètre  $\lambda$ , dans le cas d'une équation

de Volterra le principe des contractions

(et la méthode des approximations successives) est applicable pour toutes les valeurs de

$\lambda$ . Plus précisément, il s'agit de la généralisation suivante du principe des contractions: soit  $A$  une application continue de l'espace complet  $\mathbb{R}$  dans lui-même dont une puissance  $B = A^n$  est contraction ; alors l'équation

$$Ax = x$$

a une solution et une seule.

En effet, soit  $x$  un point fixe de l'application  $B$ , c-à-d.  $Bx = x$ . On a:

$$\boxed{Ax = AB^k x = B^k Ax = B^k x_0 \rightarrow x \quad (k \rightarrow \infty)}$$

Car, l'application  $B$  étant contractante, la suite  $Bx_0, B^2x_0, B^3x_0, \dots$  converge pour tout  $x_0 \in \mathbb{R}$  vers le point fixe  $x$  de l'application  $B$ .

Par conséquent,

$$Ax = x.$$

Ce point fixe est unique, car tout point fixe pour l'application  $A$  est fixe aussi pour l'application contractante  $A^n$  qui ne peut avoir qu'un seul point fixe.

Montrons maintenant qu'il existe une puissance de l'application.

$$Af(x) = \varphi(x) + \lambda \int_a^x k(x, y) f(y) dy \tag{3.3.3}$$

possédant la propriété d'être contraction. Soient  $f_1$ , et  $f_2$  deux fonctions continues le segment  $[a, b]$ . Alors

$$|Af_1(x) - Af_2(x)| = |\lambda| \left| \int_a^x k(x, y) (f_1(y) - f_2(y)) dy \right|$$

$$\leq |\lambda| M(x - a) \max |f_1(x) - f_2(x)|,$$

où:

$$M = \max |k(x, y)|.$$

On en déduit que:

$$|A^2 f_1(x) - A^2 f_2(x)| \leq |\lambda|^2 M^2 \frac{(x-a)^2}{2} \max |f_1(x) - f_2(x)|$$

et plus généralement,

$$|A^n f_1(x) - A^n f_2(x)| \leq |\lambda|^n M^n \frac{(x-a)^n}{n} m \leq |\lambda|^n M^n m \frac{(b-a)^n}{n},$$

où:

$$m = \max |f_1(x) - f_2(x)|.$$

Pour toute valeur de  $\lambda$  le nombre  $n$  peut être choisi assez grand pour que:

$$\frac{|\lambda|^n M^n (b-a)^n}{n} < 1.$$

Alors l'application  $A^n$  sera une contraction. Par conséquent, l'équation de Volterra (3.3.2)

admet pour tout  $\lambda$  une solution et une seule.

**Exemple 3.3.2** Soit l'équation intégrale:

$$f(x) = x - \frac{1}{3} \int_0^x (x-y) f(y) dy,$$

on va chercher la solution d'équation suivant dans l'espace  $C([0, 1], \mathbb{R})$ :

$$Af(x) = \varphi(x) + \lambda \int_0^x k(x, y) f(y) dy,$$

$$|Af(x) - Ag(x)| = \left| \int_0^x -\frac{1}{3} (x-y) (f(y) - g(y)) dy \right|$$

$$\leq \left| -\frac{1}{3} \right| \int_0^x |(x-y)| |f(y) - g(y)| dy,$$

telle que:  $|f(y) - g(y)| \leq \max |f(y) - g(y)| = m$  et

$$M = \max |k(x, y)| = \max |x - y|.$$

Alors,

$$|Af(x) - Ag(x)| \leq \left| -\frac{1}{3} \right| M(b-a) \cdot m$$

$$\left| -\frac{1}{3} \right| M(b-a) < 1 \Rightarrow \frac{1}{3} < \frac{1}{M(b-a)}, \text{ telle que } M = 1 \text{ car: } 0 \leq x, y \leq 1$$

$$\text{d'ou } \frac{1}{3} < \frac{1}{1(1-1)} = 1, \text{ donc } \lambda < 1$$

alors l'équation intégrale admet une solution et une seule.

résoudre l'E.I par cette méthode en prend  $f_0(x) = 0$

la première approximation:

$$f_1(x) = x - \int_0^x (x-y)(0)dy = x$$

la deuxième approximation:

$$f_2(x) = x - \int_0^x (x-y)ydy = x - \frac{x^3}{2} + \frac{x^3}{3} = x - \frac{x^3}{6}$$

la 3<sup>ème</sup> approximation:

$$f_3(x) = x - \int_0^x (x-y) \left( y - \frac{y^3}{6} \right) dy = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{24} - \frac{x^5}{30} = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$$

$$f_3(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$$

la n<sup>ème</sup> approximation:

$$f_n(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + \frac{(-1)^n x^{2n-1}}{(2n-1)!}.$$

# Bibliographie

- [1] **A.Branciari**; A fixed point theorem for mappings satisfying a general contractive condition of integral type, *Int.J.Math.Math.Sci*, 29(2002) , No, 9, 531-536
- [2] **H.Bresis Analyse fonctionnelle**; théorie et application, Masson (1983)
- [3] **S.K.Chatterjea**; fixed point theorems, *C.R.Acad.Bulgare sci*.25(1972), 727-730.MR48-2845
- [4] **M.Edelstein**; on fixed an periodic points under contractive mappings, *J.London Math.soc*.37 (1962), 74-79.MR 24-A2936.
- [5] **A.Kolmogorov**; S.fomine, éléments de la théorie des fonction et de l'analyse fonctionnelle, editions de Mosco (1977)
- [6] **A.Meir and E.Keeler**; "A theorem on contraction mappings", *Journal of mathematical Analysis and Application*, Vol.326-329, 1969
- [7] **B.E.Rhoades**; A comparison of verious definitions of contractive mappings, *Trans.Amer.Math.Soc*.226 (1977), 257 àAs 290
- [8] **D.R.Smart**; fixed point theory, combridge uni.Press, combridge 1974.
- [9] **Ronga-version**; 6 décembre 2001, à15 h 08
- [10] **T.Zamfirescu**; fixed point theorems in metric espaces, *Arch.Math.(Base)*23(1972), 292-298-MR46-9957.

## Résumé

Dans ce travail, on a donné quelques types des contractions et leur applications dans la théorie du point fixe métrique, la dernière devient un outil très important dans l'étude de certains problèmes soit dans: la biologie, mathématique, l'économie, la physique ..., aussi on a cité quelques théorèmes du point fixe comme:

théorème du Banach, Meir-Keeler et Branciari .

Par ailleurs, on va quelques applications concernant les équations différentielle, les équations intégrales.

## Les mots clé

Espace métrique - contractante -Distance – Application Lipchitzien-Espace complet.

## Abstract

In this work, we gave some types of contractions and their applications in fixed point theory within a metric space, the last one is very important in solving many problems in the field: mathematics, physics, biology and economics, also we mentioned some fixed point theorems by including theorem of Banach ,theorem of Meir-keeler and theorem of Branciari.

On the other hand we have provided some of its applications and related solving differential equations and integral equations.

## The keys words

Metric space – Contractant – Distance – Lipchitzien mapping –  
complet space .

قمنا في هذا العمل بإعطاء بعض أنواع التقلصات و تطبيقاتها في نظرية النقطة الثابتة ضمن فضا حيث كانت هاته الأخيرة وسيلة جد مهمة في حل العديد من المشاكل في مجال: الرياضيات الفيزياء البيولوجيا أيضا ذكرنا بعض نظريات النقطة الثابتة التي من بينها نظرية *Banach* نظرية *Meir- Keller* ونظرية *Branciari*. ومن جهة أخرى قدمنا بعض التطبيقات لها والمتعلقة بحل المعادلات التفاضلية .

## الكلمات المفتاحية

- متتالية كوشي – تطبيق لبشيتزي -