



UNIVERSITÉ HAMMA LAKHDAR EL OUED

FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES

Mémoire de fin d'étude

MASTER ACADEMIQUE

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Spécialité : Mathématiques fondamentales et appliquées

Thème

Problème aux limites pour une
équation différentielle fractionnaire
impulsive dans un espace de Banach.

Présenté par: GORI HANA

HOUBA OUISSAL

Soutenu publiquement devant le jury composé de:

M: Meneceur Bakkar MCA Univ. El-Oued Président

M: Guedda Lamine Pr Univ. El-Oued Rapporteur

M: Ben Ali Ibrahim MCA Univ. El-Oued Examineur

Année universitaire : 2025 – 2026

Remerciements

Nous remercions Allah, l'unique, qui nous a comblés de ses bienfaits et qui, par Sa grâce immense, a insufflé en nous l'esprit de persévérance et de travail. Louange et gratitude à Allah, le Meilleur des Maîtres et le Meilleur des Soutiens.

Nos remerciements vont également à notre Messenger Habib Mohammed (que la paix et le salut d'Allah soient sur lui), qui a fait sortir l'humanité des ténèbres vers la lumière du savoir.

*Nous adressons nos plus vifs remerciements à notre professeur encadrant **Dr.Lamine Guedda**, qui nous a guidés par ses précieux conseils et n'a ménagé ni son temps ni son savoir pour nous permettre de mener à bien ce travail. Qu'il trouve ici l'expression de notre profonde gratitude et de notre reconnaissance. Nous prions Allah le Tout-Puissant de lui accorder santé et bien-être, de l'aider à réaliser ses ambitions et ses souhaits, et de lui accorder une immense récompense.*

Enfin, nous tenons à exprimer notre sincère gratitude à tous les professeurs de la Faculté Des Sciences Exactes qui ont veillé sur notre formation et notre apprentissage au sein de l'université.

Dédicace

Au nom de Dieu, le Tout-Miséricordieux, le très Miséricordieux. Louange à Dieu qui a perfectionné toute création. Louange à Dieu sans qui aucune plume n'aurait tracé de mots, aucun pas n'aurait été franchi, et aucun projet n'aurait abouti. Je Le loue, Gloire à Lui, et Je Le remercie pour Sa grâce, Son inspiration, et pour les bienfaits dont Il m'a comblée, tels que la raison et la réflexion, qui m'ont permis d'achever cet humble travail. Car la grâce et la réussite reviennent à Dieu, en premier et en dernier lieu.

*À celle sous les pieds de qui se trouvent les jardins du Paradis : À celle dont les prières ont été mon rempart, et qui a veillé tant de nuits pour mon confort. À la source de la tendresse, ma mère chérie, **ma précieuse maman.***

*À celui qui porte dans son cœur un amour inconditionnel : Au grand cœur, au visage radieux, à celui qui ne m'a jamais privée de ses prières ni de ses encouragements. Il a semé en moi une ambition qui touche le ciel. À celui dont je porte le plus beau nom : **mon cher père.***

*À mon partenaire de vie et compagnon de route : Celui qui a été pour moi le soutien inébranlable et le pilier sur lequel je m'appuie dans mes moments de faiblesse et de fatigue. À celui qui a cru en moi alors que je doutais de mes propres capacités, qui a supporté avec moi les pressions des études avec patience et amour. **À mon cher mari.***

*À ceux avec qui j'ai grandi et qui sont mes piliers : Mes soutiens dans cette vie, **mes frères et sœurs.** Merci d'avoir toujours été ma première source de joie et d'encouragement, et d'avoir fait de mon parcours une expérience empreinte d'amour et de solidarité.*

***En conclusion,** je demande à Dieu de faire de ce travail une œuvre sincère pour Son Noble Visage, une lumière pour mes chemins futurs, et une pierre utile à l'édifice de la science et du savoir.*

**HANA
GORI**

Dédicace

*Dieu ne se glorifie point par la nuit sans Ton adoration, ni par le jour sans Ton obéissance. Les instants ne sont précieux que par Ton évocation, l'au-delà n'est digne que par Ton pardon, et le Paradis ne trouve sa splendeur qu'en Ta vision, **Allah.***

*À la main pure qui a écarté les épines de mon chemin, et dessiné mon avenir avec les lignes de l'espoir et de la confiance. À celui pour qui les mots de gratitude et de reconnaissance ne sauraient suffire : **mon père.***

*À celle dont le don a transcendé le temps, nous offrant sa santé et son âme pour bâtir notre vie. À la source éternelle de tendresse, À celle en qui je trouve refuge et espoir: **ma mère.***

*À mes compagnons d'âme et partenaires d'ambition, **mes chers frères et ma sœur.***
Vous qui avez été pour moi secours, tendresse et encouragement à chaque moment de faiblesse. Vous êtes le sang qui coule dans mes veines et la joie qui couronne ma réussite aujourd'hui.

***En conclusion,** je n'ai d'autre souhait que d'élever mes prières vers le Seigneur Tout-Puissant, afin qu'Il accepte ce modeste travail avec bienveillance. Puisse-t-Il m'accorder la meilleure des récompenses, et faire de cette réussite une source de fierté pour mes parents et de bonheur pour tous ceux qui m'aiment.*

**OUISSAL
HOUBA**

Table des matières

Table des Notations	1
INTRODUCTION	2
1 Rappels et notions fondamentales	4
1.1 Notions topologiques et quelques espaces fonctionnels	4
1.1.1 Espaces métriques	4
1.1.2 Espace de Banach	5
1.2 Quelques espaces fonctionnels	6
1.3 Rappel sur les opérateurs	7
1.3.1 Opérateurs linéaires bornés	7
1.3.2 Opérateurs compacts	7
1.3.3 Théorème d'Ascoli-Arzelà	8
1.3.4 Fonctions convexes	9
1.4 Quelques théorèmes du point fixe	9
1.4.1 Théorème de point fixe de Schauder	9
1.4.2 Théorème de point fixe de Krasnoselskii	10
2 Eléments sur le calcul fractionnaire et les mesures de Non-compacité	11
2.1 Fonctions spéciales utiles	11
2.1.1 La fonction Gamma	11
2.1.2 La fonction Bêta	12
2.2 Intégration et dérivation fractionnaires	13
2.2.1 Intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville.	13
2.2.2 Dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville	14
2.2.3 Dérivées fractionnaires de Caputo	16
2.3 Mesures de Non-compacité	16
2.3.1 La mesure de Non-compacité de Kuratowski	16
2.3.2 La mesure de Non-compacité de Hausdorff	18
3 Résolution d'un problème aux limites pour une équation différentielle fractionnaire impulsive	19
3.1 Introduction et position du problème	19
3.2 Reformulation du problème	20
3.3 Résultat d'existence et d'unicité	22
3.4 EXEMPLES	29
Conclusion générale	31

Table des Notations

Notation	Désignation
$\mathbb{R}$	L'ensemble des nombres réels.
$\mathbb{R}^+$	L'ensemble des nombres réels positifs.
$I = [a, b]$	Un intervalle compact de $\mathbb{R}$.
E	Un espace de Banach.
$\ \cdot\ $	La norme dans E .
$C(I)$	L'espace des fonctions $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continues sur I .
$L^p(I)$	L'espace des fonctions $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ mesurables telles que f^p est intégrables au sens de Lebesgue sur I .
$AC^n(I)$	L'espace des fonctions absolument continues d'ordre n .
$PC(I)$	L'espace des fonctions continues par morceaux.
$\Gamma(z)$	La fonction Gamma d'Euler.
$B(p, q)$	La fonction Bêta d'Euler.
I_{0+}^q	L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville.
${}^CD_{0+}^q$	La dérivée fractionnaire de Caputo.
$\chi(B)$	La mesure de non-compacité de Hausdorff.
$\alpha(B)$	La mesure de non-compacité de Kuratowski.
$\text{diam}(A)$	Le diamètre d'un ensemble A .
$\text{conv}(A)$	L'enveloppe convexe d'un ensemble A .
$\text{Fix}(T)$	L'ensemble des points fixes de l'opérateur T .

INTRODUCTION

La théorie du calcul fractionnaire constitue une extension fondamentale du calcul classique les ordres entiers des dérivées et des intégrales vers des ordres fractionnaires . Ce domaine s'est imposé avec force ces dernières décennies comme un outil de modélisation indispensable dans les sciences avancées voir par exemple [15] [20] et dépassant. Contrairement aux équations différentielles d'ordre entier qui décrivent des processus locaux et instantanés, les équations fractionnaires se distinguent par leur capacité unique pour formuler des systèmes possédant une mémoire longue et des propriétés héréditaires . Cette caractéristique essentielle explique leur large diffusion dans divers domaines tels que la physique des milieux complexes, la modélisation des systèmes biologiques et la dynamique des fluides pour plus de détail consulter [13] et [18]. Parallèlement, le cadre des équations différentielles impulsives offre une base mathématique idéale pour décrire les systèmes subissant des perturbations soudaines ou des changements brusques d'état à des moments précis de leur évolution [2] [7] [25]. Ces phénomènes sont particulièrement courants dans les domaines de la mécanique, de la pharmacologie, notamment lors de l'administration de doses médicamenteuses, ainsi que dans l'analyse des systèmes financiers soumis à des chocs externes [24]. L'intégration de ces deux domaines, à savoir le calcul fractionnaire et les effets impulsifs, dans l'étude des équations différentielles représente aujourd'hui un défi mathématique majeur. Ce défi est accentué lors du passage des espaces euclidiens de dimension finie aux espaces de Banach de dimension infinie. Dans ces structures plus complexes, la difficulté technique principale réside dans la perte de la propriété de compacité. Ce constat nous oblige à introduire et à exploiter les mesures de non-compacité afin de garantir la convergence des suites fonctionnelles et d'établir des critères rigoureux pour l'existence des solutions voir [3] [27]. Compte tenu de cette importance scientifique et technique, ce travail de recherche est structuré de manière progressive à travers trois chapitres principaux qui forment une unité cohérente.

Le premier chapitre est entièrement consacré à l'exposition de la base topologique et analytique nécessaire à notre étude. Nous y explorons les propriétés fondamentales des espaces de Banach, avec un intérêt particulier pour l'espace des fonctions continues par morceaux. Cet espace constitue le cadre naturel pour l'analyse des systèmes impulsifs. En complément, nous passons en revue une série de théorèmes du point fixe, tels que ceux de Banach, Schauder et Krasnoselskii, qui forment l'ossature technique permettant de démontrer l'existence et l'unicité des solutions dans les chapitres suivants.

Le deuxième chapitre aborde les outils techniques avancés du calcul fractionnaire. Nous y présentons de manière détaillée les définitions et les propriétés des opérateurs de Riemann-Liouville et de Caputo, en mettant en évidence les relations intégrales qui les lient. Une partie importante de

ce chapitre est également réservée à l'étude des mesures de non-compacité, notamment celles de Kuratowski et de Hausdorff. Ces outils nous permettent de caractériser la compacité relative dans les espaces de fonctions et de surmonter les obstacles liés à la dimension infinie.

Le troisième chapitre constitue le pilier fondamental de notre mémoire. Nous visons à y présenter une analyse qualitative approfondie d'un problème aux limites impulsif, décrit par le système suivant :

$$\begin{cases} {}^c D_{t_k}^\beta u(t) = f(t, u(t)), & t \in J = [0, 1], t \neq t_k, \\ \Delta u|_{t=t_k} = I_k(u(t_k)), \quad \Delta u'|_{t=t_k} = \overline{I}_k(u(t_k)), & t_k \in (0, 1), k = 1, 2, \dots, m, \\ u(0) = h(u), \quad u(1) = g(u). \end{cases}$$

où ${}^c D_{0+}^\beta$ désigne la dérivée fractionnaire de Caputo, avec $1 < \beta \leq 2$, $f : [0, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue et $I_k, \overline{I}_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions continues. On note :

$$\Delta u|_{t=t_k} = u(t_k^+) - u(t_k^-), \quad \Delta u'|_{t=t_k} = u'(t_k^+) - u'(t_k^-).$$

L'intérêt porté à l'étude de cette classe d'équations réside dans sa grande capacité à modéliser des phénomènes soumis à des changements brusques (impulsions) à des instants précis, tout en tenant compte des effets de mémoire et d'hérédité offerts par les dérivées fractionnaires au sens de Caputo. Pour mener à bien cette étude, nous avons adopté une méthodologie analytique rigoureuse commençant par la définition du cadre fonctionnel approprié, à savoir l'espace des fonctions continues par morceaux $PC(J, \mathbb{R})$ muni de la norme uniforme, ce qui permet de prendre en compte les sauts aux points d'impulsion t_k . La structure de ce chapitre s'articule autour de trois points essentiels :

- **Représentation intégrale** : Nous cherchons d'abord à établir une formulation intégrale équivalente au problème étudié en construisant directement l'opérateur intégral associé à partir du problème auxiliaire. Cette étape préliminaire est cruciale pour transformer le problème différentiel en un problème de point fixe.
- **Existence et unicité** : En mobilisant les outils de l'analyse fonctionnelle et divers théorèmes du point fixe (notamment celui de Krasnoselskii), nous établissons les conditions suffisantes garantissant l'existence des solutions. Nous exploitons également les mesures de non-compacité pour traiter des conditions moins restrictives sur la fonction f .

Rappels et notions fondamentales

Dans ce chapitre, nous rappelons les notions et les résultats fondamentaux de l'analyse fonctionnelle qui constituent la base de notre étude.

1.1 Notions topologiques et quelques espaces fonctionnels

1.1.1 Espaces métriques

Définition 1.1.1 (Distance) [23] Soit X un ensemble non vide. Une distance (ou métrique) sur X est une application $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$ satisfaisant les propriétés suivantes :

- $\forall u, v \in X, d(u, v) \geq 0$ et $d(u, v) = 0 \iff u = v$, (séparation)
- $d(u, v) = d(v, u)$, (symétrie)
- $\forall u, v, w \in X, d(u, w) \leq d(u, v) + d(v, w)$. (inégalité triangulaire)

Exemple 1.1.1

- Sur $\mathbb{R}^n$ on peut considérer les distances suivantes :

$$d_1(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|,$$

$$d_2(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2},$$

$$d_\infty(x, y) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|.$$

- Sur $C([0, 1], \mathbb{R}) = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ continue}\}$. On peut définir les distances suivantes :

$$d_1(f, g) = \int_0^1 |f(t) - g(t)| dt,$$

$$d_2(f, g) = \sqrt{\int_0^1 (f(t) - g(t))^2 dt},$$

$$d_\infty(f, g) = \sup_{t \in [0, 1]} |f(t) - g(t)|.$$

Définition 1.1.2 (Espace métrique) Un espace métrique est un couple (X, d) où X est un ensemble non vide et d une distance sur X .

Distances équivalentes : Pour comparer les structures topologiques définies par deux métriques différentes, on introduit la notion d'équivalence entre deux distances.

Définition 1.1.3 Soient d_1 et d_2 deux métriques sur l'ensemble X . On dit qu'elles sont équivalentes s'il existe deux constantes $k_1, k_2 > 0$ telles que pour tout $(x, y) \in X \times X$ on a :

$$k_1 d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq k_2 d_1(x, y).$$

Exemple 1.1.2

- Sur $\mathbb{R}^n$, les distances d_1 , d_2 et d_∞ sont deux à deux équivalentes,
- Sur $C([0, 1], \mathbb{R})$, les distances d_1 et d_∞ ne sont pas équivalentes.

Définition 1.1.4 (Diamètre) Si S est une partie non vide d'un espace métrique (E, d) , le diamètre de S est le nombre de $[0, \infty]$ noté $\text{diam}(S)$:

$$\text{diam}(S) = \sup\{d(x, y) : (x, y) \in S^2\}.$$

Par convention $\text{diam}(\emptyset) = 0$,

Une partie d'un espace métrique (E, d) est dite bornée s'il existe une constante $R > 0$ et $x_0 \in S$ telle que $d(x_0, x) \leq R$ pour tout $x \in S$. En d'autres termes, S est bornée si et seulement si $\text{diam}(S) < \infty$. Une fonction f à valeurs dans E est dite bornée si son image est une partie bornée de E .

Proposition 1.1.1 Soit (E, d) un espace métrique. C, D deux ensembles bornés de E , et $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors :

- (a) $\text{diam}(C \cup D) \leq \text{diam}(C) + \text{diam}(D)$,
- (b) $\text{diam}(\alpha C) = |\alpha| \text{diam}(C)$.

Démonstration 1.1.1

- (a) Soient $x, y \in C \cup D$. Alors il existe $C_1, C_2 \in C$ et $D_1, D_2 \in D$ tels que $x = C_1 + D_1$ et $y = C_2 + D_2$. Ainsi :

$$d(x, y) = d(C_1 + D_1, C_2 + D_2) \leq d(C_1, C_2) + d(D_1, D_2) \leq \text{diam}(C) + \text{diam}(D).$$

Donc $\text{diam}(C \cup D) \leq \text{diam}(C) + \text{diam}(D)$.

- (b) Soient $x, y \in \alpha C$ avec $\alpha \neq 0$. Il existe $C_1, C_2 \in C$ tels que $x = \alpha C_1$ et $y = \alpha C_2$. Par conséquent :

$$d(x, y) = d(\alpha C_1, \alpha C_2) = |\alpha| d(C_1, C_2) \leq |\alpha| \text{diam}(C),$$

Donc $\text{diam}(\alpha C) \leq |\alpha| \text{diam}(C)$. Réciproquement, on obtient l'égalité $\text{diam}(\alpha C) = |\alpha| \text{diam}(C)$.

1.1.2 Espace de Banach

Définition 1.1.5 (Espace vectoriel normé) [19] Soit E un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On appelle norme sur E toute application notée $\|\cdot\|$, définie de E à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ vérifiant pour tous $x, y \in E$ et $\alpha \in \mathbb{K}$,

- (1) $\|x\| = 0$ si et seulement si $x = 0$,
- (2) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$,
- (3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Propriété 1.1.1 Si $\|\cdot\|$ est une norme sur l'espace vectoriel E , alors la fonction réelle $d : (x, y) \mapsto \|x - y\|$ est une distance sur E , dite la distance canonique associée à la norme $\|\cdot\|$.

Définition 1.1.6 (Suite de Cauchy) [11] Dans un espace métrique (E, d) , une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite de Cauchy si et seulement si elle satisfait :

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p, q > N \implies d(x_p, x_q) < \epsilon.$$

Définition 1.1.7 (Suite simplement convergente) [17] Soit (E, d) un espace métrique. Une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans E est dite simplement convergente vers $x \in E$ si et seulement si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n > N \implies d(x_n, x) < \epsilon.$$

Proposition 1.1.2 [14] *Toute suite convergente est une suite de Cauchy.*

Remarque 1.1.1 *La réciproque n'est pas toujours vraie.*

Définition 1.1.8 (Espace complet) [11] *Un espace métrique E est dit complet si toute suite de Cauchy dans E converge dans E .*

Définition 1.1.9 (Espace de Banach) *Un espace de Banach est un espace vectoriel normé complet pour la distance associée à sa norme. C'est-à-dire que dans cet espace, toute suite de Cauchy est convergente.*

Définition 1.1.10 (Équivalence de normes) [5] *Soit E un espace vectoriel normé. Deux normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sur E sont dites équivalentes s'il existe $c_1, c_2 > 0$ tels que, pour tout $x \in E$:*

$$c_1 \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq c_2 \|x\|_1.$$

Définition 1.1.11 (Partie bornée) *Une partie A d'un espace normé $(E, \|\cdot\|)$ est dite bornée s'il existe une constante $L < \infty$ telle que $\|x\| \leq L$ pour tout $x \in A$. Une fonction f à valeurs dans E est dite bornée si son image est une partie bornée de E .*

Exemple 1.1.3 *On note l'espace des suites multiples bornées par :*

$$l^\infty(\mathbb{N}^d) = \left\{ x : \mathbb{N}^d \rightarrow \mathbb{K} \mid \sup_{k \in \mathbb{N}^d} |x(k)| < \infty \right\},$$

et pour tout $x \in l^\infty(\mathbb{N}^d)$, on pose :

$$\|x\|_\infty = \sup_{k \in \mathbb{N}^d} |x(k)|,$$

Alors $l^\infty(\mathbb{N}^d)$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ est un espace de Banach.

1.2 Quelques espaces fonctionnels

Dans toute la suite de cette section, J désigne un intervalle compact de $\mathbb{R}$, noté $J = [a, b]$ avec $a < b$.

Définition 1.2.1 (L'espace $C(J)$) [29] *L'espace des fonctions continues de J dans $\mathbb{R}$. Muni de la norme :*

$$\|f\|_\infty = \sup_{t \in J} |f(t)|,$$

c'est un espace de Banach.

Définition 1.2.2 (L'espace $PC(J)$) [29] *L'espace des fonctions continues par morceaux sur J ayant des limites à droite et à gauche, muni de la norme :*

$$\|g\|_{PC} = \max \left\{ \sup_{t \in J} |g(t+0)|, \sup_{t \in J} |g(t-0)| \right\},$$

C'est un espace de Banach.

Définition 1.2.3 (L'espace $PC^1(J)$) [29] *Défini par $\{h \in PC(J) : h' \in PC(J)\}$, muni de la norme :*

$$\|h\|_{PC^1} = \|h\|_{PC} + \|h'\|_{PC}.$$

Définition 1.2.4 (L'espace $L^p(J)$) [29] Pour tout $1 \leq p \leq \infty$, l'espace $L^p(J)$ est muni de la norme :

- Pour $1 \leq p < \infty$: $\|f\|_{L^p} = \left(\int_J |f(t)|^p dt \right)^{1/p} < +\infty$,
- Pour $p = \infty$: $\|f\|_{L^\infty} = \inf\{\lambda > 0 : |f(t)| \leq \lambda \text{ p.p. sur } J\}$,

Ces espaces sont des espaces de Banach.

Définition 1.2.5 (L'espace $AC^n(J)$) [29] Soit $J = [0, T]$ avec $0 < T < +\infty$. On dit qu'une fonction $f : J \rightarrow \mathbb{R}$ appartient à $AC(J)$ si elle admet une écriture sous la forme :

$$f(t) = f(0) + \int_0^t g(s) ds \quad \text{pour tout } t \in J,$$

où $g \in L^1(J)$. On appelle $AC(J)$ l'espace des fonctions absolument continues sur J . Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $AC^n(J)$ l'espace des fonctions $f : J \rightarrow \mathbb{R}$ telles que :

- $f^{(k)}$ existe sur J et est continue pour tout $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$,
- $f^{(n-1)} \in AC(J)$.

1.3 Rappel sur les opérateurs

1.3.1 Opérateurs linéaires bornés

Définition 1.3.1 Soient X et Y deux espaces normés. Un opérateur $A : X \rightarrow Y$ est dit linéaire s'il vérifie la condition suivante : pour tout $u, v \in X$ et tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$A(\alpha u + \beta v) = \alpha Au + \beta Av.$$

Définition 1.3.2 Un opérateur linéaire $A : X \rightarrow Y$ est dit borné s'il existe une constante positive m telle que :

$$\|Au\|_Y \leq m\|u\|_X, \quad \forall u \in X.$$

Définition 1.3.3 Soient X et Y deux espaces normés et $T : X \rightarrow Y$ un opérateur linéaire. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- T est continu sur X ,
- T est continu au point 0_X ,
- T est borné.

1.3.2 Opérateurs compacts

Définition 1.3.4 (Opérateur compact - relativement compact) Soit M un sous-ensemble d'un espace vectoriel normé X .

- M est dit **compact** si de tout recouvrement ouvert de M , on peut extraire un sous-recouvrement fini.
- M est dit **relativement compact** si l'adhérence de M est compacte. (Cas particulier : Si X est de dimension finie, toute partie fermée et bornée de X est compacte).
- M est dit **précompact** (ou **totalelement borné**) si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe des points $x_1, x_2, \dots, x_N \in X$ tels que $M \subset \bigcup_{k=1}^N B(x_k, \varepsilon)$.
- M est dit **séquentiellement compact** si de toute suite contenue dans M , on peut extraire une sous-suite convergente vers un élément de M .

Proposition 1.3.1 Soit (X, d) un espace métrique compact. Alors (X, d) est totalement borné.

Démonstration 1.3.1 Soit $\varepsilon > 0$. La famille $\{B(x, \varepsilon)\}_{x \in X}$ constitue un recouvrement ouvert de X . Comme X est compact, il existe $N \in \mathbb{N}$ et $x_1, \dots, x_N \in X$ tels que $X \subset \bigcup_{k=1}^N B(x_k, \varepsilon)$. Cela signifie que X est totalement borné.

Définition 1.3.5 Soit T un opérateur d'un espace vectoriel normé X dans un espace vectoriel normé Y . On dit que T est un opérateur compact s'il envoie tout ensemble borné de X sur un ensemble relativement compact de Y .

Définition 1.3.6 (Opérateur complètement continu) L'opérateur T est dit complètement continu s'il est continu et compact. Si l'opérateur T est linéaire, alors la continuité implique la compacité, d'où l'équivalence entre la compacité et la complète continuité dans ce cas.

Définition 1.3.7 Une famille de fonctions $\mathcal{F} \subset C(X, \mathbb{R})$ est dite **uniformément bornée** s'il existe $M > 0$ telle que :

$$|u(x)| \leq M, \quad \forall x \in X, \quad \forall u \in \mathcal{F}.$$

Définition 1.3.8 Soit (X, d) un espace métrique. Une famille de fonctions $\mathcal{F} \subset C(X, \mathbb{R})$ est dite **équicontinue** si et seulement si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall (x, y) \in X^2, (d(x, y) < \delta \implies \forall u \in \mathcal{F}, |u(x) - u(y)| < \epsilon).$$

1.3.3 Théorème d'Ascoli-Arzelà

Soient (X, d_X) un espace métrique compact et (Y, d_Y) un espace métrique complet. Notons par $C(X, Y)$ l'espace vectoriel de toutes les fonctions continues $f : X \rightarrow Y$.

Définition 1.3.9 La famille $\mathcal{F} \subset C(X, Y)$ est dite **équicontinue** si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$ pour tout $x, y \in X$ satisfaisant $d_X(x, y) < \delta$ et pour toute fonction $f \in \mathcal{F}$.

Théorème 1.3.1 La famille $\mathcal{F} \subset C(X, Y)$ est relativement compacte si et seulement si :

- $\mathcal{F}$ est équicontinue ,
- Pour tout $t \in X$, l'ensemble $M(t) = \{f(t) : f \in \mathcal{F}\}$ est relativement compact dans Y .

Cas particuliers :

- Si Y est un espace de Banach de dimension finie, la deuxième condition du théorème d'Ascoli-Arzelà est équivalente au fait que $\mathcal{F}$ est uniformément bornée, c'est-à-dire qu'il existe $M > 0$ tel que pour tout $f \in \mathcal{F}$:

$$\|f\|_\infty = \sup_{t \in X} \|f(t)\| \leq M.$$

En particulier, pour $Y = \mathbb{R}$, $\overline{M(t)}$ est un fermé borné d'un espace de dimension finie.

- Si Y est un espace métrique compact, alors la famille $\mathcal{F} \subset C(X, Y)$ est relativement compacte si et seulement si $\mathcal{F}$ est équicontinue.

Lemme 1.3.1 (Arzelà-Ascoli pour $PC(J, Y)$) Soit Y un espace de Banach et soit $M \subset PC(J, Y)$. Si M est équicontinue et $M(t)$ est relativement compact, alors M est relativement compact dans $PC(J, Y)$.

Théorème 1.3.2 (Convergence dominée) [4] Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables sur un espace mesuré $(E, \mathcal{A}, \mu)$, à valeurs réelles ou complexes, telle que :

- La suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction f ,
- il existe une fonction L^1 -intégrable g telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in E, |f_n(x)| \leq g(x).$$

Alors,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n d\mu = \int_E f d\mu.$$

1.3.4 Fonctions convexes

Définition 1.3.10 [8] Un sous-ensemble C d'un espace vectoriel normé X est dit convexe si pour tout $x, y \in C$ et tout $\lambda \in [0, 1]$ on a :

$$\lambda x + (1 - \lambda)y \in C.$$

L'enveloppe convexe d'un ensemble A , notée $\text{conv}(A)$, est le plus petit ensemble convexe contenant A :

$$\text{conv}(A) = \bigcap \{C \subset X \mid C \text{ est convexe et } A \subset C\}.$$

Définition 1.3.11 (Fonction convexe) Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On dit que f est convexe sur I si pour tout $x, y \in I$ et tout $\lambda \in [0, 1]$, on a :

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

Exemple 1.3.1

- Les boules d'un espace vectoriel normé sont des parties convexes,
- Les parties convexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.

1.4 Quelques théorèmes du point fixe

Définition 1.4.1 (Point fixe) [17] Soit (X, d) un espace métrique et $f : X \rightarrow X$ une application. On dit que $x \in X$ est un point fixe de f si $f(x) = x$.

Théorème 1.4.1 (Théorème de Banach) [22] Soit (E, d) un espace métrique complet non vide et soit $f : E \rightarrow E$ une k -contraction, c'est-à-dire qu'il existe $0 < k < 1$ tel que $d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y)$ pour tout $x, y \in E$. Alors f possède un unique point fixe.

Démonstration 1.4.1

- **(i) Unicité** : Soient $x, y \in E$ deux points fixes de f , alors $f(x) = x$ et $f(y) = y$. On a :

$$d(x, y) = d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y).$$

Comme $0 < k < 1$, on en déduit que $d(x, y) = 0$, donc $x = y$.

- **(ii) Existence** : Soit $x_0 \in E$ quelconque. On définit la suite (x_n) par $x_n = f(x_{n-1})$. Par récurrence, on montre que $d(x_n, x_{n+1}) \leq k^n d(x_0, x_1)$. Pour $p > 0$:

$$d(x_n, x_{n+p}) \leq \sum_{i=n}^{n+p-1} d(x_i, x_{i+1}) \leq d(x_0, x_1) \sum_{i=n}^{n+p-1} k^i \leq d(x_0, x_1) k^n \sum_{j=0}^{p-1} k^j \leq \frac{k^n}{1-k} d(x_0, x_1).$$

Ainsi, $d(x_n, x_{n+p}) \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$. La suite (x_n) est de Cauchy dans E . Puisque E est complet, x_n converge vers un élément x . Par continuité de f , $x_{n+1} = f(x_n) \rightarrow f(x)$, d'où $f(x) = x$.

1.4.1 Théorème de point fixe de Schauder

Théorème 1.4.2 (Point fixe de Schauder) [28] Soit X un espace de Banach et $\Omega \subset X$ un ensemble convexe et fermé. Si $T : \Omega \rightarrow \Omega$ est un opérateur continu tel que $T(\Omega)$ soit relativement compact dans X , alors T admet au moins un point fixe dans Ω .

Corollaire 1.4.1 (Alternative non linéaire de Leray–Schauder) [10] Soit Ω un sous-ensemble convexe non vide de X et $D \subset \Omega$ un ouvert tel que $0 \in D$. Soit $S : \overline{D} \rightarrow \Omega$ un opérateur compact et continu. Alors, soit :

- S admet un point fixe, soit
- Il existe $y \in \partial D$ et $\lambda \in [0, 1)$ tels que $y = \lambda S(y)$.

1.4.2 Théorème de point fixe de Krasnoselskii

Théorème 1.4.3 (Krasnoselskii, 1955) [22] Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach et $M \subset E$ une partie non vide, bornée, convexe et fermée. Soient $A, B : M \rightarrow E$ deux opérateurs tels que :

- $Ax + By \in M$ pour tout $x, y \in M$,
- A est complètement continu,
- B est une contraction de constante $\alpha < 1$.

Alors, $Au + Bu = u$ admet une solution dans M .

Remarque 1.4.1 Ce théorème généralise les théorèmes de point fixe de Banach et de Schauder.

Remarque 1.4.2 Si $A = 0$, le théorème se résume au théorème de Banach. Si $B = 0$, le théorème n'est autre que le théorème de Schauder.

Éléments sur le calcul fractionnaire et les mesures de Non-compacité

Dans ce chapitre, nous présentons les notions essentielles du calcul fractionnaire (intégrales et dérivées) ainsi que les propriétés des mesures de non-compacité. Ces outils constituent le socle mathématique nécessaire pour traiter l'existence et l'unicité des solutions dans les chapitres suivants.

2.1 Fonctions spéciales utiles

2.1.1 La fonction Gamma

Définition 2.1.1 [6] La fonction Gamma, notée Γ , est définie par l'intégrale suivante :

$$\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{p-1} dt, \quad \text{Re}(p) > 0. \quad (2.1)$$

Propriété 2.1.1 [6] Une propriété importante de la fonction Gamma $\Gamma(p)$ est la relation de récurrence suivante :

$$\Gamma(p+1) = p\Gamma(p). \quad (2.2)$$

En utilisant l'intégration par parties, on montre que :

$$\begin{aligned} \Gamma(p+1) &= \int_0^{+\infty} e^{-t} t^p dt = [-e^{-t} t^p]_0^{+\infty} + p \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{p-1} dt \\ &= 0 + p\Gamma(p) = p\Gamma(p). \end{aligned}$$

D'après la définition, on a :

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = [-e^{-t}]_0^{+\infty} = 1, \quad (2.3)$$

et

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

La relation entre la fonction Gamma et la factorielle est :

$$\Gamma(n+1) = n!, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (2.4)$$

2.1.2 La fonction Bêta

Définition 2.1.2 [6] La fonction Bêta (intégrale eulérienne de première espèce) est définie pour tous $p > 0$ et $q > 0$ par :

$$B(p, q) = \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt. \quad (2.5)$$

Remarque 2.1.1 [6]

Le lien entre les fonctions Bêta et Gamma est établi par la relation suivante :

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}. \quad (2.6)$$

Démonstration 2.1.1 Soit $D = (0, +\infty) \times (0, +\infty)$. On a, pour $\text{Re}(p) > 0$ et $\text{Re}(q) > 0$:

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = \left(\int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx \right) \left(\int_0^{+\infty} y^{q-1} e^{-y} dy \right) = \iint_D x^{p-1} y^{q-1} e^{-(x+y)} dx dy.$$

En utilisant le changement de coordonnées $u = x + y$ et $v = \frac{x}{x+y}$, on obtient :

$$x = uv, \quad y = u(1-v).$$

Le Jacobien vaut :

$$\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| = \left| \det \begin{pmatrix} v & u \\ 1-v & -u \end{pmatrix} \right| = |-uv - u + uv| = |-u| = u,$$

donc $dx dy = u du dv$. Le domaine D devient $D' = (0, +\infty) \times (0, 1)$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \iint_D x^{p-1} y^{q-1} e^{-(x+y)} dx dy &= \iint_{D'} (uv)^{p-1} (u(1-v))^{q-1} e^{-u} u du dv \\ &= \int_0^{+\infty} \int_0^1 u^{p+q-1} e^{-u} v^{p-1} (1-v)^{q-1} dv du \\ &= \left(\int_0^{+\infty} u^{p+q-1} e^{-u} du \right) \left(\int_0^1 v^{p-1} (1-v)^{q-1} dv \right) \\ &= \Gamma(p+q) B(p, q). \end{aligned}$$

Par conséquent, $\Gamma(p)\Gamma(q) = \Gamma(p+q) B(p, q)$, ce qui donne :

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

Propriété 2.1.2 [6]

1. La fonction Bêta est symétrique : $B(p, q) = B(q, p)$,
2. Par changement de variable approprié, la fonction Bêta peut s'exprimer par :

$$B(p, q) = 2 \int_0^{\pi/2} (\cos \theta)^{2p-1} (\sin \theta)^{2q-1} d\theta. \quad (2.7)$$

Proposition 2.1.1 Soit $q > 0$ et $r > -1$. Alors, pour tout $t > a$, on a :

$$I_{a+}^q((t-a)^r)(t) = \frac{\Gamma(r+1)}{\Gamma(r+q+1)}(t-a)^{r+q}.$$

Démonstration 2.1.2 On a :

$$I_{a+}^q((t-a)^r)(t) = \frac{1}{\Gamma(q)} \int_a^t (t-s)^{q-1} (s-a)^r ds.$$

En effectuant le changement de variable $s = a + (t-a)u$, d'où $ds = (t-a)du$, on obtient :

$$\frac{(t-a)^{q+r}}{\Gamma(q)} \int_0^1 (1-u)^{q-1} u^r du = \frac{(t-a)^{q+r}}{\Gamma(q)} B(r+1, q) = \frac{\Gamma(r+1)}{\Gamma(r+q+1)}(t-a)^{r+q}.$$

2.2 Intégration et dérivation fractionnaires

2.2.1 Intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville.

Définition 2.2.1 (Formule de Cauchy) [29] Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$. On note I_a^1 la fonction primitive de f qui s'annule en a , définie par :

$$(I_a^1 f)(t) = \int_a^t f(u) du.$$

Pour une primitive seconde, d'après le théorème de Fubini, on a :

$$(I_a^2 f)(t) = \int_a^t \left(\int_a^u f(v) dv \right) du = \int_a^t (t-v) f(v) dv.$$

En répétant le processus n fois, on arrive à la n -ième primitive de la fonction f sous la forme :

$$(I_a^n f)(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t-u)^{n-1} f(u) du, \quad t \in [a, b], \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Cette formule est appelée formule de Cauchy. En remarquant que $(n-1)! = \Gamma(n)$, on peut écrire :

$$(I_a^n f)(t) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^t (t-u)^{n-1} f(u) du.$$

Définition 2.2.2 Supposons que $a < t < b$ et $f \in L^1([a, b])$. L'intégrale fractionnaire d'ordre $q > 0$ au sens de Riemann-Liouville à gauche de la fonction f est définie par :

$$(I_{a+}^q f)(t) = \frac{1}{\Gamma(q)} \int_a^t (t-u)^{q-1} f(u) du, \quad t \in [a, b],$$

où Γ désigne la fonction Gamma définie ci-dessus. De même, on définit l'intégrale fractionnaire de

Riemann-Liouville à droite par :

$$(I_{b-}^q f)(t) = \frac{1}{\Gamma(q)} \int_t^b (u-t)^{q-1} f(u) du, \quad t \in [a, b].$$

Remarque 2.2.1 Dans tout ce qui suit, on utilisera uniquement l'intégrale fractionnaire à gauche.

Théorème 2.2.1 Pour toute fonction $f \in L^1([a, b])$, l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville possède la propriété suivante : pour tout $q > 0$ et tout $r > 0$,

$$I_{a+}^q (I_{a+}^r f)(t) = I_{a+}^{q+r} f(t),$$

pour presque tout $t \in [a, b]$. De plus, si $f \in C([a, b])$, alors cette identité est vraie pour tout $t \in [a, b]$.

Démonstration 2.2.1 La preuve découle directement de la définition :

$$I_{a+}^q (I_{a+}^r f)(t) = \frac{1}{\Gamma(q)} \int_a^t (t-u)^{q-1} (I_{a+}^r f)(u) du.$$

Or,

$$(I_{a+}^r f)(u) = \frac{1}{\Gamma(r)} \int_a^u (u-s)^{r-1} f(s) ds.$$

En remplaçant dans la formule et en utilisant le théorème de Fubini pour changer l'ordre d'intégration, on obtient :

$$I_{a+}^q (I_{a+}^r f)(t) = \frac{1}{\Gamma(q)\Gamma(r)} \int_a^t \left[\int_s^t (t-u)^{q-1} (u-s)^{r-1} du \right] f(s) ds.$$

En posant $u = s + z(t-s)$ (avec $z \in (0, 1)$), on a $du = (t-s)dz$. La partie entre crochets devient :

$$\begin{aligned} & \int_0^1 (t - (s + z(t-s)))^{q-1} (s + z(t-s) - s)^{r-1} (t-s) dz \\ &= (t-s)^{q+r-1} \int_0^1 (1-z)^{q-1} z^{r-1} dz = (t-s)^{q+r-1} B(q, r). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$I_{a+}^q (I_{a+}^r f)(t) = \frac{B(q, r)}{\Gamma(q)\Gamma(r)} \int_a^t (t-s)^{q+r-1} f(s) ds = \frac{1}{\Gamma(q+r)} \int_a^t (t-s)^{q+r-1} f(s) ds,$$

ce qui donne $I_{a+}^q (I_{a+}^r f)(t) = I_{a+}^{q+r} f(t)$.

2.2.2 Dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville

Définition 2.2.3 (Dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville) Soit $f \in L^1([a, b])$. La dérivée fractionnaire à gauche d'ordre $q > 0$ est définie par :

$$D_{a+}^q f(t) = \left(\frac{d}{dt} \right)^n I_{a+}^{n-q} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-q)} \left(\frac{d}{dt} \right)^n \int_a^t (t-u)^{n-q-1} f(u) du,$$

où $n = \lfloor q \rfloor + 1$. Si $0 \leq q < 1$ (donc $n = 1$) :

$$D_{a+}^q f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-q)} \frac{d}{dt} \int_a^t (t-u)^{-q} f(u) du.$$

La dérivée à droite est définie par :

$$D_{b-}^q f(t) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-q)} \left(\frac{d}{dt} \right)^n \int_t^b (u-t)^{n-q-1} f(u) du.$$

Proposition 2.2.1 Soient $q > 0$ et $r > 0$. On a :

$$(D_{a+}^q(t-a)^r)(t) = \frac{\Gamma(r+1)}{\Gamma(r-q+1)}(t-a)^{r-q}.$$

Démonstration 2.2.2 D'après la définition de la dérivée fractionnaire :

$$D_{a+}^q(t-a)^r = \frac{d^n}{dt^n} I_{a+}^{n-q}(t-a)^r = \frac{\Gamma(r+1)}{\Gamma(n-q+r+1)} \frac{d^n}{dt^n} (t-a)^{n-q+r}.$$

En dérivant n fois, on obtient le résultat.

Proposition 2.2.2 Soient $q > 0$ et $r > 0$. On a :

$$(D_{a+}^q(t-a)^r)(t) = \frac{\Gamma(r+1)}{\Gamma(r-q+1)}(t-a)^{r-q}.$$

Démonstration 2.2.3 Soit $q > 0$ tel que $n-1 < q < n$ et $r > -1$. D'après la définition de la dérivée fractionnaire, on a :

$$D_{a+}^q(t-a)^r = \frac{d^n}{dt^n} I_{a+}^{n-q}(t-a)^r.$$

En utilisant le résultat précédent sur l'intégrale fractionnaire :

$$I_{a+}^{n-q}(t-a)^r = \frac{\Gamma(r+1)}{\Gamma(r+(n-q)+1)}(t-a)^{r+n-q}.$$

En dérivant n fois par rapport à t :

$$\frac{d^n}{dt^n} (t-a)^{r+n-q} = \frac{\Gamma(r+n-q+1)}{\Gamma(r-q+1)}(t-a)^{r-q}.$$

Par substitution, on obtient :

$$D_{a+}^q(t-a)^r = \frac{\Gamma(r+1)}{\Gamma(r+n-q+1)} \cdot \frac{\Gamma(r+n-q+1)}{\Gamma(r-q+1)}(t-a)^{r-q} = \frac{\Gamma(r+1)}{\Gamma(r-q+1)}(t-a)^{r-q}.$$

Cas particuliers

1. Si $f(t) = c$ (constante), alors :

$$D_{a+}^q c = \frac{c}{\Gamma(1-q)}(t-a)^{-q}.$$

2. Pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, on a :

$$D_{a+}^q(t-a)^{q-i} = 0.$$

Lemme 2.2.1 Supposons que $g \in L^1(0, +\infty)$ et que $q, r > 0$. Alors :

$$I_{0+}^q I_{0+}^r g(t) = I_{0+}^{q+r} g(t), \quad D_{0+}^q I_{0+}^q g(t) = g(t).$$

De plus, si $D_{0+}^q g(t) \in L^1(0, +\infty)$, alors :

$$I_{0+}^q D_{0+}^q g(t) = g(t) + \sum_{i=1}^n c_i t^{q-i},$$

pour certains réels c_i , où $n = [q] + 1$.

2.2.3 Dérivées fractionnaires de Caputo

Définition 2.2.4 (Dérivée au sens de Caputo) Soient $q > 0$ et $n = \lceil q \rceil$ tels que $n - 1 < q < n$ et $f \in C^n([0, T])$. La dérivée fractionnaire d'ordre q au sens de Caputo est définie par :

$${}^c D_{0+}^q f(t) = I_{0+}^{(n-q)} D^{(n)} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-q)} \int_0^t (t-s)^{n-q-1} f^{(n)}(s) ds.$$

Exemple 2.2.1 La dérivée fractionnaire au sens de Caputo de $f(t) = t^r$ est :

$${}^c D_{0+}^q t^r = \frac{\Gamma(r+1)}{\Gamma(r+1-q)} t^{r-q}.$$

La dérivée au sens de Caputo d'une fonction constante est nulle.

Lemme 2.2.2 [9] Pour $q > 0$ et $f \in C([0, T]) \cap L^1([0, T])$, l'équation ${}^c D_{0+}^q f(t) = 0$ admet pour solution :

$$f(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \dots + c_{n-1} t^{n-1}, \quad c_i \in \mathbb{R}.$$

Lemme 2.2.3 [9] Supposons que $f \in C(J) \cap L^1(J)$, ayant une dérivée d'ordre n qui appartient à $C(J) \cap L^1(J)$. Alors, nous avons :

$$I_{0+}^\beta {}^c D_{0+}^\beta f(t) = f(t) + c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \dots + c_{n-1} t^{n-1}, \quad (2.8)$$

où $c_i \in X$ pour $i = 0, 1, \dots, n-1$, et $n = \lceil \beta \rceil + 1$.

2.3 Mesures de Non-compacité

2.3.1 La mesure de Non-compacité de Kuratowski

Définition 2.3.1 (Mesure de Kuratowski) [21] Soit X un espace de Banach. La mesure de non-compacité de **Kuratowski** pour un ensemble borné $M \subset X$ est définie par l'expression suivante :

$$\alpha(M) = \inf \left\{ \epsilon > 0 : M \subset \bigcup_{j=1}^m M_j \text{ et } \text{diam}(M_j) \leq \epsilon \right\} \quad (2.9)$$

La fonction α est appelée mesure de non-compacité de Kuratowski. Clairement

$$\alpha(M) \leq \text{diam}(M) \quad \text{pour chaque sous-ensemble borné } M \text{ de } X.$$

Remarque 2.3.1 Pour simplifier l'écriture dans les démonstrations, on note par $K(M)$ l'ensemble de tous les nombres $\epsilon > 0$ qui satisfont la condition de recouvrement ci-dessus. On a donc par définition :

$$\alpha(M) = \inf K(M)$$

Proposition 2.3.1 [21] La mesure de non-compacité de Kuratowski α possède les propriétés suivantes :

- (i) : $\alpha(M_1) \leq \alpha(M_2)$ pour tous les sous-ensembles bornés M_1, M_2 de X , avec $M_1 \subseteq M_2$.
- (ii) : $\alpha(\{x\} \cup M) = \alpha(M)$ pour tout $x \in X$ et tout sous-ensemble non vide $M \subseteq X$.
- (iii) : $\alpha(M) = 0$ si et seulement si M est relativement compact dans X .
- (iv) : $\alpha(M_1 + M_2) \leq \alpha(M_1) + \alpha(M_2)$ pour tous les sous-ensembles bornés M_1, M_2 de X , où $M_1 + M_2 = \{x + y : x \in M_1, y \in M_2\}$.

(v) : $\alpha(\lambda M) = |\lambda| \alpha(M)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout sous-ensemble borné M de X .

Lemme 2.3.1 [21] Soient M_1 et M_2 des sous-ensembles bornés d'un espace métrique complet (X, d) . Alors, les propriétés suivantes sont satisfaites :

1. $\alpha(M_1 \cup M_2) = \max\{\alpha(M_1), \alpha(M_2)\}$.
2. $\alpha(M_1 \cap M_2) \leq \min\{\alpha(M_1), \alpha(M_2)\}$.

Démonstration 2.3.1 [1]

Nous démontrons ici seulement les propriétés 1 et 2.

1. Nous avons $M_1 \subset M_1 \cup M_2$ et $M_2 \subset M_1 \cup M_2$. Par conséquent :

$$\alpha(M_1) \leq \alpha(M_1 \cup M_2) \quad \text{et} \quad \alpha(M_2) \leq \alpha(M_1 \cup M_2).$$

D'où :

$$\max(\alpha(M_1), \alpha(M_2)) \leq \alpha(M_1 \cup M_2). \quad (2.10)$$

Par la propriété caractéristique de l'infimum, nous avons :

$\forall \varepsilon > 0, \exists D_\varepsilon, \exists N \in \mathbb{N}, \exists (A_i)_{i=1}^N$ tels que $M_1 \subset \bigcup_{i=1}^N A_i$ avec :

$$\text{diam}(A_i) \leq D_\varepsilon, \forall i \in [1, N] \quad \text{et} \quad D_\varepsilon < \alpha(M_1) + \varepsilon \leq \max(\alpha(M_1), \alpha(M_2)) + \varepsilon.$$

De même, il existe $D'_\varepsilon, M \in \mathbb{N}, (B_j)_{j=1}^M$ tels que $M_2 \subset \bigcup_{j=1}^M B_j$ avec $\text{diam}(B_j) \leq D'_\varepsilon, \forall j \in [1, M]$ et :

$$D'_\varepsilon < \alpha(M_2) + \varepsilon \leq \max(\alpha(M_1), \alpha(M_2)) + \varepsilon.$$

Alors :

$$M_1 \cup M_2 \subset \left(\bigcup_{i=1}^N A_i \right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^M B_j \right) = \bigcup_{k=1}^{N+M} C_k,$$

où :

$$C_k = \begin{cases} A_i, & \forall k \in [1, N]; \\ B_j, & \forall k \in [N+1, N+M] \end{cases}$$

et $\text{diam}(C_k) < \max(\alpha(M_1), \alpha(M_2)) + \varepsilon, \forall \varepsilon > 0$.

Ainsi, $\max(\alpha(M_1), \alpha(M_2)) + \varepsilon \in K(M_1 \cup M_2), \forall \varepsilon > 0$. Par conséquent :

$$\alpha(M_1 \cup M_2) \leq \max(\alpha(M_1), \alpha(M_2)) + \varepsilon, \forall \varepsilon > 0.$$

D'où :

$$\alpha(M_1 \cup M_2) \leq \max(\alpha(M_1), \alpha(M_2)). \quad (2.11)$$

À partir de (2.10) et (2.11), nous obtenons :

$$\alpha(M_1 \cup M_2) = \max(\alpha(M_1), \alpha(M_2)).$$

2. Nous avons $M_1 \cap M_2 \subseteq M_1$ et $M_1 \cap M_2 \subseteq M_2$. Par conséquent :

$$\alpha(M_1 \cap M_2) \leq \alpha(M_1) \quad \text{et} \quad \alpha(M_1 \cap M_2) \leq \alpha(M_2).$$

D'où :

$$\alpha(M_1 \cap M_2) \leq \min(\alpha(M_1), \alpha(M_2)).$$

Définition 2.3.2 Soit $J = [0, a]$, $a \in \mathbb{R}^+$. Pour tout $W \subset C(J)$, on définit :

$$\int_0^t W(s)ds = \left\{ \int_0^t u(s)ds : u \in W \right\}, \quad \text{pour } t \in [0, a],$$

où :

$$W(s) = \{u(s) \in X : u \in W\}.$$

Lemme 2.3.2 [12] Si $W \in C(J)$ est borné et équicontinu, alors $t \rightarrow \alpha(W(t))$ est continue sur J , et

$$\alpha(W) = \max_{t \in J} \alpha(W(t)),$$

$$\alpha\left(\int_0^t W(s)ds\right) \leq \int_0^t \alpha(W(s))ds, \quad \text{pour } t \in J.$$

Lemme 2.3.3 [16] Soit $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ une suite de fonctions intégrables au sens de Bochner de J dans X avec $|u_n(t)| \leq m(t)$ pour tout $t \in J$ et tout $n \geq 1$, où $m \in L(J, \mathbb{R}_+)$, alors la fonction $\psi(t) = \alpha(\{u_n(t)\}_{n=1}^\infty)$ appartient à $L(J, \mathbb{R}_+)$ et satisfait :

$$\alpha\left(\left\{\int_0^t u_n(s)ds : n \geq 1\right\}\right) \leq 2 \int_0^t \psi(s)ds.$$

La mesure de non-compacité de Kuratowski constitue l'outil principal utilisé dans ce qui suit. Toutefois, il existe d'autres mesures de non-compacité. Nous mentionnons brièvement ci-dessous la mesure de Hausdorff.

2.3.2 La mesure de Non-compacité de Hausdorff

Définition 2.3.3 (Mesure de Hausdorff) [21] Soit X un espace de Banach muni de la norme $\|\cdot\|$. La mesure de non-compacité de Hausdorff χ est définie pour chaque sous-ensemble borné M de X par :

$$\chi(M) = \inf \left\{ \varepsilon > 0 : M \subset \bigcup_{j=1}^m B_\varepsilon(x_j) \text{ où } x_j \in X \right\} \quad (2.12)$$

où $B_\varepsilon(x_j)$ désigne la boule de centre x_j et de rayon ε .

Théorème 2.3.1 [21] Soit (X, d) un espace métrique et M un sous-ensemble borné de X . Alors

$$\chi(M) \leq \alpha(M) \leq 2\chi(M).$$

Résolution d'un problème aux limites pour une équation différentielle fractionnaire impulsive

Dans ce chapitre, nous étudions l'existence et l'unicité des solutions pour des équations différentielles fractionnaires impulsives. À l'aide des théorèmes de Banach et de Krasnoselskii, nous établissons nos résultats principaux, complétés par un exemple illustratif. Pour plus de détails, voir [26].

3.1 Introduction et position du problème

On considère le problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} {}^c D_{t_k}^\beta u(t) = f(t, u(t)), & t \in J = [0, 1], t \neq t_k, \\ \Delta u|_{t=t_k} = I_k(u(t_k)), \quad \Delta u'|_{t=t_k} = \overline{I}_k(u(t_k)), & t_k \in (0, 1), k = 1, 2, \dots, m, \\ u(0) = h(u), \quad u(1) = g(u). \end{cases} \quad (3.1)$$

où ${}^c D_{0+}^\beta$ désigne la dérivée fractionnaire de Caputo, avec $1 < \beta \leq 2$,

$f : [0, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue et $I_k, \overline{I}_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions continues.

On note :

$$\Delta u|_{t=t_k} = u(t_k^+) - u(t_k^-), \quad \Delta u'|_{t=t_k} = u'(t_k^+) - u'(t_k^-),$$

où $u(t_k^+)$ et $u(t_k^-)$ sont respectivement les limites à droite et à gauche de la fonction inconnue $u(t)$ au point $t = t_k$. g et h sont deux fonctionnelles continues fixées définies sur l'espace de Banach $PC(J)$, qui seront définies dans la suite. De plus g et h peuvent être données par :

$$g(u) = \max_j \frac{|u(\xi_j)|}{\lambda + |u(\xi_j)|}, \quad h(u) = \min_j \frac{|u(\zeta_j)|}{\kappa + |u(\zeta_j)|}$$

où $0 < \xi_j, \zeta_j < 1$, $\xi_j, \zeta_j \neq t_i$, $j = 1, 2, \dots, n$, $i = 1, 2, \dots, m$ et λ, κ sont des constantes positives données. Nous allons appliquer le théorème du point fixe de Banach et le théorème du point fixe de Krasnoselskii et les propriétés des mesures de non-compacité pour prouver l'existence et l'unicité de solutions du problème aux limites (3.1).

3.2 Reformulation du problème

Tout d'abord, nous présentons le lemme suivant :

Lemme 3.2.1 Soit $1 < \beta \leq 2$. Supposons que $r \in C(J)$. Alors le problème :

$$\begin{cases} {}^c D_{t_k}^\beta u(t) = r(t), & t \in J = [0, 1], t \neq t_k, \\ \Delta u|_{t=t_k} = I_k(u(t_k)), \quad \Delta u'|_{t=t_k} = \overline{I}_k(u(t_k)), & t_k \in (0, 1), k = 1, 2, \dots, m, \\ u(0) = h(u), \quad u(1) = g(u). \end{cases} \quad (3.2)$$

admet une solution de la forme suivante :

$$u(t) = \begin{cases} ct + h(u) + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} r(s) ds, & t \in J_0, \\ ct + h(u) + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_{t_k}^t (t-s)^{\beta-1} r(s) ds + \sum_{j=1}^k \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_{t_{j-1}}^{t_j} (t_j-s)^{\beta-1} r(s) ds \\ \quad + \sum_{j=1}^k (t-t_j) \overline{I}_j(u(t_j)) + \sum_{j=1}^k \frac{t-t_j}{\Gamma(\beta-1)} \int_{t_{j-1}}^{t_j} (t_j-s)^{\beta-2} r(s) ds \\ \quad + \sum_{j=1}^k I_j(u(t_j)). & t \in J_k, k = 1, 2, \dots, m \end{cases} \quad (3.3)$$

où

$$\begin{aligned} c = g(u) - h(u) - \sum_{j=1}^{m+1} \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_{t_{j-1}}^{t_j} (t_j-s)^{\beta-1} r(s) ds - \sum_{j=1}^m I_j(u(t_j)) \\ - \sum_{j=1}^m \frac{1-t_j}{\Gamma(\beta-1)} \int_{t_{j-1}}^{t_j} (t_j-s)^{\beta-2} r(s) ds - \sum_{j=1}^m (1-t_j) \overline{I}_j(u(t_j)) \end{aligned} \quad (3.4)$$

Démonstration 3.2.1 Supposons que $u(t)$ est une solution du problème aux limites impulsive (3.3). En utilisant les lemmes (2.2.2) et (2.2.3), nous avons :

$$u(t) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} r(s) ds - c_0 - c_1 t, \quad t \in J_0$$

pour certains c_0, c_1 . Ensuite, nous trouvons que :

$$u'(t) = \frac{1}{\Gamma(\beta-1)} \int_0^t (t-s)^{\beta-2} r(s) ds - c_1.$$

La condition aux limites $u(0) = -h(u)$ implique que $c_0 = h(u)$ et ainsi

$$u(t) = ct + h(u) + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} r(s) ds, \quad t \in J_0$$

avec $c = -c_1$.

Si $t \in J_1$, alors également par les lemmes (2.2.2) et (2.2.3), nous avons

$$u(t) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_{t_1}^t (t-s)^{\beta-1} r(s) ds - d_0 - d_1(t-t_1),$$

et

$$u'(t) = \frac{1}{\Gamma(\beta-1)} \int_{t_1}^t (t-s)^{\beta-2} r(s) ds - d_1.$$

En considérant les conditions $\Delta u|_{t=t_1} = I_1(u(t_1))$, $\Delta u'|_{t=t_1} = \overline{I_1}(u(t_1))$, on obtient

$$\begin{aligned} -d_0 &= ct_1 + h(u) + I_1(u(t_1)) + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^{t_1} (t_1 - s)^{\beta-1} r(s) ds, \\ -d_1 &= c + \overline{I_1}(u(t_1)) + \frac{1}{\Gamma(\beta-1)} \int_0^{t_1} (t_1 - s)^{\beta-2} r(s) ds. \end{aligned}$$

Ainsi, pour $t \in J_1$, nous avons :

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_{t_1}^t (t-s)^{\beta-1} r(s) ds + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^{t_1} (t_1-s)^{\beta-1} r(s) ds \\ &\quad + \frac{t-t_1}{\Gamma(\beta-1)} \int_0^{t_1} (t_1-s)^{\beta-2} r(s) ds \\ &\quad + (t-t_1)\overline{I_1}(u(t_1)) + I_1(u(t_1)) + h(u) + ct. \end{aligned}$$

En répétant la même méthode, nous obtenons l'équation intégrale dont la solution $u(t)$ pour $t \in J_k$ est définie comme suit

$$\begin{aligned} u(t) &= ct + h(u) + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_{t_k}^t (t-s)^{\beta-1} r(s) ds \\ &\quad + \sum_{j=1}^k \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_{t_{j-1}}^{t_j} (t_j-s)^{\beta-1} r(s) ds + \sum_{j=1}^k (t-t_j)\overline{I_j}(u(t_j)) \\ &\quad + \sum_{j=1}^k \frac{t-t_j}{\Gamma(\beta-1)} \int_{t_{j-1}}^{t_j} (t_j-s)^{\beta-2} r(s) ds + \sum_{j=1}^k I_j(u(t_j)). \end{aligned}$$

En appliquant la condition aux limites $u(1) = g(u)$, on déduit l'expression (3.4). Réciproquement, nous supposons que $u(t)$ est une solution de (3.3). Si $t \in J_0$, alors, en utilisant le fait que ${}^c D_{0+}^\alpha$ est l'inverse à gauche de I_{0+}^α , nous obtenons ${}^c D_{0+}^\alpha u(t) = r(t)$. Si $t \in J_k$, $k = 1, 2, \dots, m$, du fait que la dérivée fractionnaire de Caputo d'une constante est égale à zéro, nous pouvons vérifier facilement que $u(t)$ satisfait (3.2). Par conséquent, $u(t)$ est une solution de (3.2).

D'après le lemme (3.2.1), nous obtenons la représentation du problème aux limites impulsive sous la forme d'une équation intégrale.

De plus, toute solutions de l'équation intégrale (3.3) coïncide avec un point fixe de l'opérateur $T : PC(J) \rightarrow PC(J)$ qui est défini comme suit :

$$\begin{aligned} Tu(t) &= c_0 t + (1-t)h(u) + tg(u) + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_{t_k}^t (t-s)^{\beta-1} f(s, u(s)) ds \\ &\quad + \sum_{0 < t_k < t} \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_{t_{k-1}}^{t_k} (t_k-s)^{\beta-1} f(s, u(s)) ds + \sum_{0 < t_k < t} (t-t_k)\overline{I_k}(u(t_k)) \\ &\quad + \sum_{0 < t_k < t} \frac{t-t_k}{\Gamma(\beta-1)} \int_{t_{k-1}}^{t_k} (t_k-s)^{\beta-2} f(s, u(s)) ds + \sum_{0 < t_k < t} I_k(u(t_k)). \end{aligned} \tag{3.5}$$

où

$$\begin{aligned} c_0 &= - \sum_{k=1}^{m+1} \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_{t_{k-1}}^{t_k} (t_k-s)^{\beta-1} f(s, u(s)) ds - \sum_{k=1}^m I_k(u(t_k)) \\ &\quad - \sum_{k=1}^m \frac{1-t_k}{\Gamma(\beta-1)} \int_{t_{k-1}}^{t_k} (t_k-s)^{\beta-2} f(s, u(s)) ds - \sum_{k=1}^m (1-t_k)\overline{I_k}(u(t_k)). \end{aligned} \tag{3.6}$$

Comme $f, I_k, \overline{I_k}, g$ et h sont continus, T est bien définie sur $PC(J)$.

Notre premier résultat est basé sur le théorème du point fixe de Banach.

3.3 Résultat d'existence et d'unicité

Théorème 3.3.1 *Supposons que les conditions suivantes sont satisfaites :*

(H1) $f : J \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue et satisfait la condition de Lipschitz :

$$|f(t, u) - f(t, v)| \leq L_1 |u - v|$$

avec la constante $L_1 > 0$ pour tout $u, v \in \mathbb{R}$, et $t \in J$.

(H2) $I_k, \overline{I}_k$ sont des fonctions continues et il existe $L_2, L_3 > 0$ telles que :

$$|I_k(u) - I_k(v)| \leq L_2 |u - v|, \quad |\overline{I}_k(u) - \overline{I}_k(v)| \leq L_3 |u - v|,$$

pour tout $u, v \in \mathbb{R}$, $k = 1, 2, \dots, m$.

(H3) g, h sont des fonctionnelles continues et satisfont les conditions de Lipschitz avec des constantes de Lipschitz $L_4, L_5 > 0$.

Si l'inégalité suivante est vérifiée :

$$\frac{4m+2}{\Gamma(\beta)} L_1 + 2m(L_2 + L_3) + L_4 + L_5 < 1,$$

Alors le problème aux limites impulsive (3.1) admet une unique solution.

Nous allons utiliser le théorème du point fixe de Banach pour prouver que l'opérateur T défini par (3.5) possède un point fixe unique. D'abord on pose :

$$M_1 = \sup_{t \in J} |f(t, 0)|, \quad M_2 = \max_k |I_k(0)|, \quad M_3 = \max_k |\overline{I}_k(0)|, \quad M_4 = |h(0)|, \quad M_5 = |g(0)|,$$

et on considère le sous-ensemble B de $PC(J)$ défini par :

$$B := \{u(t) \in PC(J) : \|u\|_{PC} \leq R_0\},$$

où le rayon R_0 est choisi tel que :

$$R_0 \geq \frac{(4m+2)M_1 + 2m\Gamma(\beta)(M_2 + M_3) + \Gamma(\beta)(M_4 + M_5)}{\Gamma(\beta) - (4m+2)L_1 - 2m\Gamma(\beta)(L_2 + L_3) - \Gamma(\beta)(L_4 + L_5)}.$$

Lemme 3.3.1 *On peut démontrer que : $|c_0| \leq \frac{2m+1}{\Gamma(\beta)} (L_1 \|u\|_{PC} + M_1) + m(L_2 \|u\|_{PC} + M_2) + m(L_3 \|u\|_{PC} + M_3)$.*

Démonstration 3.3.1 *On utilise le fait que chacune des fonction f, I_k et $\overline{I}_k$ est de lipschitz et que*

$0 \leq t_k - s \leq 1$, on obtient :

$$\begin{aligned}
|c_0| &\leq \frac{1}{\Gamma(\beta)} \sum_{k=1}^{m+1} \int_{t_{k-1}}^{t_k} (t_k - s)^{\beta-1} |f(s, u(s)) - f(s, 0)| ds + \sum_{k=1}^m |I_k(u(t_k)) - I_k(0)| \\
&\quad + \sum_{k=1}^m |I_k(0)| + \frac{1}{\Gamma(\beta-1)} \sum_{k=1}^m \int_{t_{k-1}}^{t_k} (t_k - s)^{\beta-2} |f(s, u(s)) - f(s, 0)| ds \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \sum_{k=1}^{m+1} \int_{t_{k-1}}^{t_k} (t_k - s)^{\beta-1} |f(s, 0)| ds + \sum_{k=1}^m |\bar{I}_k(u(t_k)) - \bar{I}_k(0)| + \sum_{k=1}^m |\bar{I}_k(0)| \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(\beta-1)} \sum_{k=1}^m \int_{t_{k-1}}^{t_k} (t_k - s)^{\beta-2} |f(s, 0)| ds \\
&\leq \frac{m+1}{\Gamma(\beta+1)} (L_1 \|u\|_{PC} + M_1) + \frac{m}{\Gamma(\beta)} (L_1 \|u\|_{PC} + M_1) + m(L_2 \|u\|_{PC} + M_2) \\
&\quad + m(L_3 \|u\|_{PC} + M_3) \\
&\leq \frac{2m+1}{\Gamma(\beta)} (L_1 \|u\|_{PC} + M_1) + m(L_2 \|u\|_{PC} + M_2) + m(L_3 \|u\|_{PC} + M_3).
\end{aligned}$$

Démonstration 3.3.2 (Démonstration du théorème principal) Tout d'abord, nous montrons que T applique B dans B . De plus, pour tout $u \in B$ et $t \in J_k =]t_k, t_{k+1}]$, $k = 0, 1, \dots, m$, Par les hypothèses (H1), (H2), (H3) et le lemme (3.3.1) et le fait que $\frac{1}{\beta} < 1$, on a les estimations suivantes :

$$\begin{aligned}
|h(u)| &\leq |h(u) - h(0)| + |h(0)| \\
&\leq L_4 \|u\|_{PC} + M_4,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|g(u)| &\leq |g(u) - g(0)| + |g(0)| \\
&\leq L_5 \|u\|_{PC} + M_5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\Gamma(\beta)} \left| \int_{t_k}^t (t-s)^{\beta-1} f(s, u(s)) ds \right| &\leq \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_{t_k}^t (t-s)^{\beta-1} |f(s, u(s)) - f(s, 0)| ds \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_{t_k}^t (t-s)^{\beta-1} |f(s, 0)| ds \\
&\leq \frac{L_1 \|u\|_{PC} + M_1}{\beta \Gamma(\beta)} \leq \frac{L_1 \|u\|_{PC} + M_1}{\Gamma(\beta)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{0 < t_k < t} \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_{t_{k-1}}^{t_k} (t_k - s)^{\beta-1} |f(s, u(s))| ds \right| &\leq \sum_{0 < t_k < t} \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_{t_{k-1}}^{t_k} (t_k - s)^{\beta-1} |f(s, u(s)) - f(s, 0)| ds \\
&\quad + \sum_{0 < t_k < t} \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_{t_{k-1}}^{t_k} (t_k - s)^{\beta-1} |f(s, 0)| ds \\
&\leq \frac{m(L_1 \|u\|_{PC} + M_1)}{\beta \Gamma(\beta)} \leq \frac{m(L_1 \|u\|_{PC} + M_1)}{\Gamma(\beta)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{0 < t_k < t} \frac{t - t_k}{\Gamma(\beta-1)} \int_{t_{k-1}}^{t_k} (t_k - s)^{\beta-2} f(s, u(s)) ds \right| &\leq \sum_{0 < t_k < t} \frac{t - t_k}{\Gamma(\beta-1)} \int_{t_{k-1}}^{t_k} (t_k - s)^{\beta-2} |f(s, u(s)) - f(s, 0)| ds \\
&\quad + \sum_{0 < t_k < t} \frac{t - t_k}{\Gamma(\beta-1)} \int_{t_{k-1}}^{t_k} (t_k - s)^{\beta-2} |f(s, 0)| ds \\
&\leq \frac{m(L_1 \|u\|_{PC} + M_1)}{\Gamma(\beta)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left| \sum_{0 < t_k < t} I_k(u(t_k)) \right| &\leq \sum_{0 < t_k < t} |I_k(u(t_k)) - I_k(0)| + m |I_k(0)| \\ &\leq m (L_2 \|u\|_{PC} + M_2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left| \sum_{0 < t_k < t} (t - t_k) \bar{I}_k(u(t_k)) \right| &\leq \sum_{0 < t_k < t} (t - t_k) |\bar{I}_k(u(t_k)) - \bar{I}_k(0)| + m |\bar{I}_k(0)| \\ &\leq m (L_3 \|u\|_{PC} + M_3). \end{aligned}$$

Alors on aura :

$$\begin{aligned} |Tu(t)| &\leq |c_0| + |h(u)| + |g(u)| + \frac{1}{\Gamma(\beta + 1)} (L_1 \|u\|_{PC} + M_1) + \frac{m}{\Gamma(\beta)} (L_1 \|u\|_{PC} + M_1) \\ &\quad + \frac{m}{\Gamma(\beta + 1)} (L_1 \|u\|_{PC} + M_1) + m(L_2 \|u\|_{PC} + M_2) + m(L_3 \|u\|_{PC} + M_3) \\ &\leq \frac{4m + 2}{\Gamma(\beta)} (L_1 \|u\|_{PC} + M_1) + 2m(L_2 \|u\|_{PC} + M_2) + 2m(L_3 \|u\|_{PC} + M_3) \\ &\quad + (L_4 \|u\|_{PC} + M_4) + (L_5 \|u\|_{PC} + M_5) \\ &\leq R_0 \end{aligned}$$

Par conséquent, $\|Tu\|_{PC} \leq R_0$ et par suite T applique B dans lui-même.

Dans la suite, nous allons montrer que T est une contraction. Soient $u, v \in PC(J)$, alors pour tout $t \in J_k$, $k = 0, 1, \dots, m$, nous déduisons facilement de (3.5) et (3.6) que :

$$\begin{aligned} |Tu(t) - Tv(t)| &\leq |c_u - c_v|t + (1 - t)|h(u) - h(v)| + t|g(u) - g(v)| \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_{t_k}^t (t - s)^{\beta-1} |f(s, u(s)) - f(s, v(s))| ds \\ &\quad + \sum_{0 < t_k < t} \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_{t_{k-1}}^{t_k} (t_k - s)^{\beta-1} |f(s, u(s)) - f(s, v(s))| ds \\ &\quad + \sum_{0 < t_k < t} (t - t_k) |\bar{I}_k(u(t_k)) - \bar{I}_k(v(t_k))| \\ &\quad + \sum_{0 < t_k < t} \frac{t - t_k}{\Gamma(\beta - 1)} \int_{t_{k-1}}^{t_k} (t_k - s)^{\beta-2} |f(s, u(s)) - f(s, v(s))| ds \\ &\quad + \sum_{0 < t_k < t} |I_k(u(t_k)) - I_k(v(t_k))| \end{aligned}$$

Toujours d'après les hypothèses (H1), (H2), (H3) on a des estimations similaires :

$$\begin{aligned} |h(u) - h(v)| &\leq L_4 \|u - v\|_{PC}, \\ |g(u) - g(v)| &\leq L_5 \|u - v\|_{PC}, \\ \sum_{0 < t_k < t} |I_k(u(t_k)) - I_k(v(t_k))| &\leq m L_2 \|u - v\|_{PC}, \\ \sum_{0 < t_k < t} (t - t_k) |\bar{I}_k(u(t_k)) - \bar{I}_k(v(t_k))| &\leq m L_3 \|u - v\|_{PC}. \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_{t_k}^t (t-s)^{\beta-1} |f(s, u(s)) - f(s, v(s))| ds &\leq \frac{L_1 \|u-v\|_{PC}}{\beta \Gamma(\beta)}, \\ \sum_{0 < t_k < t} \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_{t_{k-1}}^{t_k} (t_k-s)^{\beta-1} |f(s, u(s)) - f(s, v(s))| ds &\leq \frac{m L_1 \|u-v\|_{PC}}{\beta \Gamma(\beta)}, \\ \sum_{0 < t_k < t} \frac{t-t_k}{\Gamma(\beta-1)} \int_{t_{k-1}}^{t_k} (t_k-s)^{\beta-2} |f(s, u(s)) - f(s, v(s))| ds &\leq \frac{m L_1 \|u-v\|_{PC}}{\Gamma(\beta)}. \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} |c_u - c_v| &\leq \sum_{k=1}^{m+1} \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_{t_{k-1}}^{t_k} (t_k-s)^{\beta-1} |f(s, u(s)) - f(s, v(s))| ds + \sum_{k=1}^m |I_k(u(t_k)) - I_k(v(t_k))| \\ &\quad + \sum_{k=1}^m \frac{1-t_k}{\Gamma(\beta-1)} \int_{t_{k-1}}^{t_k} (t_k-s)^{\beta-2} |f(s, u(s)) - f(s, v(s))| ds \\ &\quad + \sum_{k=1}^m (1-t_k) |\overline{I}_k(u(t_k)) - \overline{I}_k(v(t_k))| \\ &\leq \frac{m L_1 \|u-v\|_{PC}}{\beta \Gamma(\beta)} + m L_2 \|u-v\|_{PC} + \frac{m L_1 \|u-v\|_{PC}}{\Gamma(\beta)} + m L_3 \|u-v\|_{PC} \\ &= \left(\frac{2m L_1}{\Gamma(\beta)} + m L_2 + m L_3 \right) \|u-v\|_{PC}. \end{aligned}$$

Et par conséquent,

$$\begin{aligned} |Tu(t) - Tv(t)| &\leq \left(\frac{2m L_1}{\Gamma(\beta)} + m L_2 + m L_3 \right) \|u-v\|_{PC} \\ &\quad + \left(L_5 + L_4 + \frac{L_1}{\Gamma(\beta)} + \frac{m L_1}{\Gamma(\beta)} + m L_3 + \frac{m L_1}{\Gamma(\beta)} + m L_2 \right) \|u-v\|_{PC} \\ &= \left(\frac{4m+2}{\Gamma(\beta)} L_1 + 2m L_2 + 2m L_3 + L_4 + L_5 \right) \|u-v\|_{PC}. \end{aligned}$$

Comme par hypothèse $\frac{4m+2}{\Gamma(\beta)} L_1 + 2m L_2 + 2m L_3 + L_4 + L_5 < 1$, alors T est une contraction et par le théorème du point fixe de Banach T admet un unique point fixe dans $PC(J)$ qui est l'unique solution de (3.1).

Le second résultat est basé sur le théorème du point fixe de Krasnoselskii.

Théorème 3.3.2 En plus de la condition **(H3)** supposons que les hypothèses ci-dessous sont satisfaites :

(H4) Il existe une fonction positive $a(t) \in L^1(J, \mathbb{R}^+)$ telle que :

$$|f(t, u)| \leq a(t) + l_1 |u|^\rho,$$

et pour tout $u \in X$, $k = 1, 2, \dots, m$,

$$|I_k(u)| \leq l_2 |u|^\mu, \quad |\overline{I}_k(u)| \leq l_3 |u|^\nu,$$

$$|h(u)| \leq l_4 |u|^\theta, \quad |g(u)| \leq l_5 |u|^\gamma,$$

où $l_1 \geq 0$, $l_i > 0$, $i = 2, \dots, 5$, et $0 < \rho, \mu, \nu, \theta, \gamma \leq 1$. De plus,

$$\frac{2(2m+1)l_1}{\Gamma(\alpha)} + 2m l_2 + 2m l_3 + l_4 + l_5 < 1.$$

(H5) Pour tout sous-ensemble borné $H \subset \mathbb{R}$, il existe $d_1 > 0$ tel que :

$$\alpha(f(s, H)) \leq d_1 \alpha(H).$$

(H6) Pour tout sous-ensemble borné $H \subset \mathbb{R}$, il existe $d_2, d_3 > 0$ tels que :

$$\alpha(I_k(H)) \leq d_2 \alpha(H), \quad \alpha(\overline{I_k}(H)) \leq d_3 \alpha(H), \quad k = 1, 2, \dots, m.$$

Si :

$$L_4 + L_5 < 1,$$

et

$$\frac{2(2m+1)d_1}{\Gamma(\beta)} + md_2 + md_3 < 1.$$

Alors le problème aux limites impulsive (3.1) admet au moins une solution dans $PC(J)$.

Nous décomposons l'opérateur T défini par (3.5) à la somme de deux opérateurs F et G définis respectivement par :

$$\begin{aligned} Fu(t) &= c_0 t + (1-t)h(u) + tg(u) \\ Gu(t) &= \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_{t_k}^t (t-s)^{\beta-1} f(s, u(s)) ds + \sum_{0 < t_k < t} \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_{t_{k-1}}^{t_k} (t_k-s)^{\beta-1} f(s, u(s)) ds \\ &+ \sum_{0 < t_k < t} \frac{t-t_k}{\Gamma(\beta-1)} \int_{t_{k-1}}^{t_k} (t_k-s)^{\beta-2} f(s, u(s)) ds + \sum_{0 < t_k < t} (t-t_k) \overline{I_k}(u(t_k)) + \sum_{0 < t_k < t} I_k(u(t_k)). \end{aligned}$$

Ainsi, l'existence d'une solution du problème aux limites impulsive (3.1) équivalent à l'existence d'un point fixe de l'opérateur $F + G$.

Nous utiliserons le théorème du point fixe de Krasnoselskii pour démontrer ce résultat. La preuve sera donnée en plusieurs étapes chacune est représentée par un lemme.

Soit W le sous-ensemble de $PC(J)$ défini par :

$$W := \{u(t) \in PC(J) : \|u\|_{PC} \leq R\},$$

où R est réel positif choisi tel que :

$$R \geq \max \left\{ 1, \frac{\frac{4}{\Gamma(\beta)} \sum_{k=1}^{m+1} \int_{t_{k-1}}^{t_k} (t_k-s)^{\beta-2} a(s) ds}{1 - \left[\frac{2(2m+1)l_1}{\Gamma(\beta)} + 2ml_2 + 2ml_3 + l_4 + l_5 \right]} \right\}.$$

Il est clair que W est un sous-ensemble convexe fermé borné de $PC(J)$.

Lemme 3.3.2 On peut démontrer que :

$$|c_0| \leq \frac{2}{\Gamma(\beta)} \sum_{k=1}^{m+1} \int_{t_{k-1}}^{t_k} (t_k-s)^{\beta-2} a(s) ds + \frac{(2m+1)l_1 R^\rho}{\Gamma(\beta)} + ml_2 R^\mu + ml_3 R^\nu$$

Démonstration 3.3.3 Par l'hypothèse (H4) on a pour tout $u, v \in W$:

$$|c_0| \leq \frac{1}{\Gamma(\beta)} \sum_{k=1}^{m+1} \int_{t_{k-1}}^{t_k} (t_k-s)^{\beta-1} a(s) ds + \frac{l_1 R^\rho}{\Gamma(\beta)} \sum_{k=1}^{m+1} \int_{t_{k-1}}^{t_k} (t_k-s)^{\beta-1} ds + ml_2 R^\mu + ml_3 R^\nu.$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{\Gamma(\beta-1)} \sum_{k=1}^m \int_{t_{k-1}}^{t_k} (t_k - s)^{\beta-2} a(s) ds + \frac{l_1 R^\rho}{\Gamma(\beta-1)} \sum_{k=1}^m \int_{t_{k-1}}^{t_k} (t_k - s)^{\beta-1} ds \\
& \leq \frac{1}{\Gamma(\beta)} \sum_{k=1}^{m+1} \int_{t_{k-1}}^{t_k} (t_k - s)^{\beta-1} a(s) ds + \frac{1}{\Gamma(\beta-1)} \sum_{k=1}^m \int_{t_{k-1}}^{t_k} (t_k - s)^{\beta-2} a(s) ds \\
& \quad + \frac{(m+1)l_1 R^\rho}{\Gamma(\beta+1)} + \frac{ml_1 R^\rho}{\Gamma(\beta)} + ml_2 R^\mu + ml_3 R^\nu \\
& \leq \frac{1}{\Gamma(\beta)} \sum_{k=1}^{m+1} \int_{t_{k-1}}^{t_k} [(t_k - s)^{\beta-1} + (t_k - s)^{\beta-2}] a(s) ds + \frac{(2m+1)l_1 R^\rho}{\Gamma(\beta)} + ml_2 R^\mu + ml_3 R^\nu \\
& \leq \frac{2}{\Gamma(\beta)} \sum_{k=1}^{m+1} \int_{t_{k-1}}^{t_k} (t_k - s)^{\beta-2} a(s) ds + \frac{(2m+1)l_1 R^\rho}{\Gamma(\beta)} + ml_2 R^\mu + ml_3 R^\nu.
\end{aligned}$$

Lemme 3.3.3 Pour tout $u, v \in W$, $Fu + Gv \in W$.

Démonstration 3.3.4 En effet, pour tout $u, v \in W$ et $t \in J$ nous avons :

$$\begin{aligned}
|Fu(t) + Gv(t)| & \leq |c_0| + |g(u)| + |h(u)| \\
& \quad + \frac{l_1 R^\rho}{\Gamma(\beta)} \int_{t_k}^t (t - s)^{\beta-1} a(s) ds + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_{t_k}^t (t - s)^{\beta-1} a(s) ds \\
& \quad + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \sum_{k=1}^m \int_{t_{k-1}}^{t_k} (t_k - s)^{\beta-1} a(s) ds + \frac{l_1 R^\rho}{\Gamma(\beta)} \sum_{k=1}^m \int_{t_{k-1}}^{t_k} (t_k - s)^{\beta-1} ds \\
& \quad + \frac{1}{\Gamma(\beta-1)} \sum_{k=1}^m \int_{t_{k-1}}^{t_k} (t_k - s)^{\beta-2} a(s) ds + \frac{l_1 R^\rho}{\Gamma(\beta-1)} \sum_{k=1}^m \int_{t_{k-1}}^{t_k} (t_k - s)^{\beta-2} ds \\
& \quad + ml_2 R^\mu + ml_3 R^\nu \\
& \leq |c_0| + |g(u)| + |h(u)| \\
& \quad + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \sum_{k=1}^{m+1} \int_{t_{k-1}}^{t_k} (t_k - s)^{\beta-1} a(s) ds + \frac{l_1 R^\rho}{\Gamma(\beta)} \sum_{k=1}^{m+1} \int_{t_{k-1}}^{t_k} (t_k - s)^{\beta-1} ds \\
& \quad + \frac{1}{\Gamma(\beta-1)} \sum_{k=1}^m \int_{t_{k-1}}^{t_k} (t_k - s)^{\beta-2} a(s) ds + \frac{l_1 R^\rho}{\Gamma(\beta-1)} \sum_{k=1}^m \int_{t_{k-1}}^{t_k} (t_k - s)^{\beta-2} ds \\
& \quad + ml_2 R^\mu + ml_3 R^\nu \\
& \leq |c_0| + \frac{2}{\Gamma(\beta)} \sum_{k=1}^{m+1} \int_{t_{k-1}}^{t_k} (t_k - s)^{\beta-2} a(s) ds + \frac{(m+1)l_1 R^\rho}{\Gamma(\beta+1)} + \frac{ml_1 R^\rho}{\Gamma(\beta)} \\
& \quad + ml_2 R^\mu + ml_3 R^\nu + l_4 R^\theta + l_5 R^\gamma \\
& \leq |c_0| + \frac{2}{\Gamma(\beta)} \sum_{k=1}^{m+1} \int_{t_{k-1}}^{t_k} (t_k - s)^{\beta-2} a(s) ds + \frac{(2m+1)l_1 R^\rho}{\Gamma(\beta)} \\
& \quad + ml_2 R^\mu + ml_3 R^\nu + l_4 R^\theta + l_5 R^\gamma \\
& \leq \frac{4}{\Gamma(\beta)} \sum_{k=1}^{m+1} \int_{t_{k-1}}^{t_k} (t_k - s)^{\beta-2} a(s) ds + \frac{2(2m+1)l_1 R^\rho}{\Gamma(\beta)} \\
& \quad + 2ml_2 R^\mu + 2ml_3 R^\nu + l_4 R^\theta + l_5 R^\gamma \\
& \leq \frac{4}{\Gamma(\beta)} \sum_{k=1}^{m+1} \int_{t_{k-1}}^{t_k} (t_k - s)^{\beta-2} a(s) ds + \frac{2(2m+1)l_1 R}{\Gamma(\beta)} \\
& \quad + 2ml_2 R + 2ml_3 R + l_4 R + l_5 R \\
& \leq R.
\end{aligned}$$

ce qui implique que $Fu + Gv \in W$.

Lemme 3.3.4 F est un opérateur contractant.

Démonstration 3.3.5 En effet, pour tout $u, v \in W$:

$$\begin{aligned} |Fu(t) - Fv(t)| &\leq |h(u) - h(v)| + |g(u) - g(v)| \\ &\leq (L_4 + L_5)\|u - v\|_{PC}. \end{aligned}$$

Ainsi, F est un opérateur contractant car $L_4 + L_5 < 1$.

Lemme 3.3.5 G est un opérateur complètement continu.

Démonstration 3.3.6 Il est très facile d'en déduire que G est continu puisque $f, I_k, \bar{I}_k$, $k = 0, 1, \dots, m$, sont des fonctions continues. Démontrons que G envoie les ensembles bornés vers des ensembles uniformément bornés dans $PC(J)$. Soit $u \in W$ arbitraire, comme dans la démonstration précédente, nous pouvons montrer que :

$$|Gu(t)| \leq \frac{4}{\Gamma(\beta)} \sum_{k=1}^{m+1} \int_{t_{k-1}}^{t_k} (t_k - s)^{\beta-2} a(s) ds + \frac{2(2m+1)l_1 R}{\Gamma(\beta)} + ml_2 R + ml_3 R =: R_1.$$

Ainsi, pour tout $v \in W$, $G(W)$ est inclu dans la boule $B_{R_1} := \{v(t) \in PC(J) : \|v\|_{PC} \leq R_1\}$. Maintenant, nous prouvons que G envoie les ensembles bornés vers des ensembles équicontinus de $PC(J)$. Nous prenons $N_f = \max_{t \in J} |f(t, u)| + 1$, soit $t, \sigma \in J_k$ avec $t < \sigma$. Pour tout $u \in W$, nous avons :

$$\begin{aligned} |Gu(\sigma) - Gu(t)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\beta)} \left| \int_{t_k}^{\sigma} (\sigma - s)^{\beta-1} f(s, u) ds - \int_{t_k}^t (t - s)^{\beta-1} f(s, u) ds \right| \\ &\quad + \frac{\sigma - t}{\Gamma(\beta - 1)} \sum_{k=1}^m \left| \int_{t_{k-1}}^{t_k} (t_k - s)^{\beta-2} f(s, u) ds \right| + \sum_{k=1}^m (\sigma - t) |\bar{I}_k(u)| \\ &\leq \frac{N_f}{\Gamma(\beta)} \left| \int_{t_k}^{\sigma} (\sigma - s)^{\beta-1} ds - \int_{t_k}^t (t - s)^{\beta-1} ds \right| + ml_3 R^\nu (\sigma - t) \\ &\quad + \frac{N_f(\sigma - t)}{\Gamma(\beta - 1)} \sum_{k=1}^m \int_{t_{k-1}}^{t_k} (t_k - s)^{\beta-2} ds \\ &\leq \frac{N_f(\sigma - t)}{\Gamma(\beta)} \sum_{k=1}^m (t_{k-1} - t_k)^{\beta-1} + \frac{N_f}{\Gamma(\beta)} \left| \int_{t_k}^{\sigma} (\sigma - s)^{\beta-1} ds - \int_{t_k}^t (t - s)^{\beta-1} ds \right| \\ &\quad + ml_3 R^\nu (\sigma - t) \\ &\leq ml_3 R^\nu (\sigma - t) + \frac{N_f(\sigma - t)}{\Gamma(\beta)} \sum_{k=1}^m (t_{k-1} - t_k)^{\beta-1} + \frac{N_f}{\Gamma(\beta + 1)} [(\sigma - t_k)^\beta - (t - t_k)^\beta]. \end{aligned}$$

Lorsque $\sigma \rightarrow t$, le membre de droite de l'inégalité ci-dessus tend vers zéro, donc nous concluons que $G(W)$ est équicontinu.

Considérons un ensemble borné :

$$W(t) := \{u_n(t); Gu_n(t)\} \subset B_{R_1}.$$

En appliquant la proposition(2.3.1) et le lemme(2.3.2), nous savons que $t \mapsto \alpha(W(t))$ est continue sur J . De plus,

$$\begin{aligned} (t_k - s)^{\beta-1} |f(s, u_n)| &\leq (t_k - s)^{\beta-1} (a(t) + l_1 r^\rho) \in L^1(J, \mathbb{R}^+), \\ (t_k - s)^{\beta-2} |f(s, u_n)| &\leq (t_k - s)^{\beta-2} (a(t) + l_1 r^\rho) \in L^1(J, \mathbb{R}^+). \end{aligned}$$

En utilisant (H5)-(H6) et le lemme(2.3.3), nous avons :

$$\begin{aligned}
\alpha(W(t)) &\leq \frac{2}{\Gamma(\beta)} \int_{t_k}^t (t-s)^{\beta-1} \alpha(f(s, W(s))) ds + \sum_{0 < t_k < t} \frac{2}{\Gamma(\beta)} \int_{t_{k-1}}^{t_k} (t_k-s)^{\beta-1} \alpha(f(s, W(s))) ds \\
&+ \sum_{0 < t_k < t} \frac{2(t-t_k)}{\Gamma(\beta-1)} \int_{t_{k-1}}^{t_k} (t_k-s)^{\beta-2} \alpha(f(s, W(s))) ds \\
&+ \sum_{0 < t_k < t} \alpha(I_k(W(s))) + \sum_{0 < t_k < t} (t-t_k) \alpha(\bar{I}_k(W(s))) \\
&\leq \frac{2d_1}{\Gamma(\beta)} \int_{t_k}^t (t-s)^{\beta-1} \alpha(W(s)) ds + \sum_{0 < t_k < t} \frac{2d_1}{\Gamma(\beta)} \int_{t_{k-1}}^{t_k} (t_k-s)^{\beta-1} \alpha(W(s)) ds \\
&+ \sum_{0 < t_k < t} \frac{2d_1}{\Gamma(\beta-1)} \int_{t_{k-1}}^{t_k} (t_k-s)^{\beta-2} \alpha(W(s)) ds \\
&+ \sum_{0 < t_k < t} d_2 \alpha(W(s)) + \sum_{0 < t_k < t} d_3 \alpha(W(s)),
\end{aligned}$$

ce qui implique que :

$$\begin{aligned}
\alpha(W) &\leq \frac{2d_1}{\Gamma(\beta+1)} \alpha(W) + \frac{2md_1}{\Gamma(\beta+1)} \alpha(W) + \frac{2md_1}{\Gamma(\beta)} \alpha(W) + md_2 \alpha(W(s)) + md_3 \alpha(W) \\
&\leq \left[\frac{2(2m+1)d_1}{\Gamma(\beta)} + md_2 + md_3 \right] \alpha(W) \\
&< \alpha(W),
\end{aligned}$$

d'après la condition

$$\frac{2(2m+1)d_1}{\Gamma(\beta)} + md_2 + md_3 < 1.$$

Alors nous pouvons déduire que $\alpha(W) = 0$. Par conséquent, en invoquant la régularité de la mesure de non-compacité de Kuratowski, nous savons que $G(W)$ est relativement compact, de sorte qu'il existe une sous-suite de (u_n) qui converge uniformément dans J vers un certain $u^* \in PC(J)$ d'après le théorème d'Arzelà-Ascoli. Ceci prouve que G est un opérateur complètement continu.

Grâce aux lemmes précédents, le théorème du point fixe de Krasnoselskii implique que $F + G$ possède au moins un point fixe qui est une solution du problème aux limites impulsive(3.1), et le théorème est démontré.

3.4 EXEMPLES

Exemple 3.4.1 . Considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} {}^c D_{t_k}^{\frac{7}{4}} u_n(t) = \frac{1}{10} t(t - \frac{1}{3}) \frac{u_n}{1 + u_n^2}, & t \in J = [0, 1], t \neq \frac{1}{3} \\ \Delta u_n(\frac{1}{3}) = \frac{1}{10} \ln(1 + u_n(\frac{1}{3})^2), & \Delta u'_n(\frac{1}{3}) = \frac{1}{10 + |u(\frac{1}{3})|} \\ u_n(0) = \min_j \frac{|u_n(\zeta_j)|}{15 + |u_n(\zeta_j)|}, & u_n(1) = \max_j \frac{1}{15 + |u_n(\xi_j)|}. \end{cases}$$

où $\xi_j, \zeta_j \neq \frac{1}{3}, j = 1, 2, \dots, 10$.

Un calcul simple montre que $L_1 = L_4 + L_5 = \frac{1}{15}$, $L_2 = L_3 = \frac{1}{10}$, alors :

$$\frac{4m+2}{\Gamma(\beta)} L_1 + 2m(L_2 + L_3) + L_4 + L_5 \approx 0.969 < 1.$$

Donc, par le théorème (3.3.1), ce problème aux limites impulsive a une unique solution.

Exemple 3.4.2 . Considérons le problème :

$$\begin{cases} {}^c D_{t_k}^{\frac{5}{3}} u_n(t) = (t - \frac{1}{2})^4 \frac{|u_n|^{\frac{1}{4}}}{1 + |u_n|}, & t \in J = [0, 1], t \neq \frac{1}{2} \\ \Delta u_n(\frac{1}{2}) = \frac{|u_n(\frac{1}{2})|^{\frac{1}{4}}}{12 + |u_n(\frac{1}{2})|}, & \Delta u'_n(\frac{1}{2}) = \frac{|u_n(\frac{1}{2})|^{\frac{1}{5}}}{10 + |u_n(\frac{1}{2})|} \\ u_n(0) = \min_j \frac{|u_n(\zeta_j)|^{\frac{1}{3}}}{15 + |u_n(\zeta_j)|}, & u_n(1) = \max_j \frac{|u_n(\xi_j)|^{\frac{1}{2}}}{15 + |u_n(\xi_j)|}. \end{cases}$$

où $\xi_j, \zeta_j \neq \frac{1}{2}, j = 1, 2, \dots, 10$.

Puisque nous obtenons $l_1 = d_1 = \frac{1}{16}$, $l_2 = l_5 = d_2 = L_5 = \frac{1}{12}$, $l_3 = l_4 = d_3 = L_4 = \frac{1}{15}$, nous avons :

$$L_4 + L_5 = 0.15 < 1,$$

$$\frac{2(2m+1)d_1}{\Gamma(\beta)} + md_2 + md_3 \approx 0.565 < 1,$$

$$\frac{2(2m+1)l_1}{\Gamma(\beta)} + 2ml_2 + 2ml_3 + l_4 + l_5 \approx 0.865 < 1.$$

Par conséquent, d'après le théorème (3.3.2), nous avons que le problème ci-dessus admet au moins une solution.

Conclusion générale

En conclusion, ce mémoire a été consacré à l'étude de l'existence et de l'unicité des solutions pour une classe d'équations différentielles fractionnaires impulsives dans les espaces de Banach. À travers les deux premiers chapitres, nous avons établi le cadre topologique nécessaire et introduit les outils du calcul fractionnaire, en nous basant essentiellement sur la mesure de non-compacité de Kuratowski. Enfin, dans le troisième chapitre, nous avons réussi à formuler directement l'opérateur intégral associé à notre problème d'ordre $1 < \beta \leq 2$, démontrant ainsi l'existence et l'unicité des solutions, tout en appuyant nos résultats théoriques par des exemples illustratifs.

Comme perspectives, nous suggérons d'étendre ce travail à l'analyse de la stabilité au sens d'Ulam-Hyers et à l'étude des problèmes de contrôlabilité pour ces systèmes impulsifs.

Bibliographie

- [1] **Alarfaj, A.**, “Mesures de non-compacité et applications,” Thèse de doctorat, Université islamique Imam Muhammad ibn Saud, 2018.
- [2] **Bainov, D. D. et Simeonov, P. S.**, *Systems with Impulsive Effect : Stability, Theory and Applications*, Ellis Horwood Series in Mathematics and Its Applications, Chichester, 1989.
- [3] **Banaś, J.**, “Sur les mesures de non-compacité dans les espaces de Banach,” *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae*, vol. 21, no. 1, pp. 131–143, 1980.
- [4] **Brezis, H.**, *Analyse Fonctionnelle : Théorie et applications*, Masson, Paris, 1987.
- [5] **Brun, J. M.**, *Analyse Fonctionnelle*, Cours de Master, 2009.
- [6] **Bell, W. W.**, *Special Functions for Scientists and Engineers*, D. Van Nostrand Company Ltd, London, 1968.
- [7] **Benchohra, M., Henderson, J. et Ntouyas, S. K.**, *Impulsive Differential Equations and Inclusions*, Contemporary Mathematics and Its Applications, vol. 2, Hindawi Publishing Corporation, New York, 2006.
- [8] **Carl, S. et Heikkilä, S.**, *Fixed Point Theory in Ordered Sets and Applications*, Springer, New York, 2010.
- [9] **Diethelm, K.**, *The Analysis of Fractional Differential Equations*, Springer, Berlin, 2010.
- [10] **Djebali, S.**, *Le Degré Topologique et Applications*, B.P. 92 Kouba, Alger, 2006.
- [11] **El Jai, A.**, *Éléments de topologie et espaces métriques*, Presses Universitaires de Perpignan, Perpignan, 2007.
- [12] **Guo, D. J., Lakshmikantham, V. and Liu, X. Z.**, *Nonlinear Integral Equations in Abstract Spaces*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1996.
- [13] **Hilfer, R. (Ed.)**, *Applications of Fractional Calculus in Physics*, World Scientific, Singapore, 2000.
- [14] **Jeanjean, L.**, *Espaces métriques : Cours et TD*, Université de Franche-Comté, Besançon, 2016.
- [15] **Kilbas, A. A. et Marzan, S. A.**, “Équations différentielles non linéaires avec la dérivée fractionnaire de Caputo dans l'espace des fonctions continûment différentiables,” *Differential Equations*, vol. 41, no. 1, pp. 84–89, 2005.
- [16] **Mönch, H.**, “Problèmes aux limites pour les équations différentielles ordinaires non linéaires du second ordre dans les espaces de Banach,” *Nonlinear Analysis : Theory, Methods & Applications*, vol. 4, no. 5, pp. 985–999, 1980.

- [17] **Mortad, M. H.**, *Introductory Topology : Exercises and Solutions*, 2nd ed., World Scientific, Singapore, 2019.
- [18] **Nagpurkar, M. B. et Kachhia, K. B.**, “Une nouvelle méthode numérique pour la résolution d’équations différentielles fractales-fractionnaires à mémoires exponentielles,” *Journal of Applied Mathematics and Computing*, vol. 71, no. 1, pp. 1453–1475, 2025.
- [19] **Paulin, F.**, *Topologie, analyse et calcul différentiel*, Cours de troisième année de licence, École Normale Supérieure, Paris, 2009.
- [20] **Podlubny, I.**, *Fractional Differential Equations*, Mathematics in Science and Engineering, vol. 198, Academic Press, San Diego, 1999.
- [21] **Rakočević, V.**, “Mesures de non-compacité et quelques applications,” *Filomat*, vol. 12, no. 2, pp. 87–120, 1998.
- [22] **Smart, D. R.**, *Fixed Point Theorems*, Cambridge University Press, Cambridge, 1974.
- [23] **Sinacer, M. L., Nieto, J. J. et Ouahab, A.**, “Théorème du point fixe aléatoire dans les espaces de Banach généralisés et applications,” *Random Operators and Stochastic Equations*, vol. 24, no. 2, pp. 93–112, 2016.
- [24] **Stamova, I. et Stamov, G. T.**, *Applied Impulsive Mathematical Models*, Springer, Cham, 2016.
- [25] **Wang, Q., Lu, D. C. and Fang, Y. Y.**, “Stability analysis of impulsive fractional differential systems with delay,” *Applied Mathematics Letters*, vol. 40, pp. 1–6, 2015.
- [26] **Yang, S. and Zhang, Z.**, “Boundary value problems for impulsive fractional differential equations in Banach spaces,” *Filomat*, vol. 31, no. 18, pp. 5605–5617, 2017.
- [27] **Zajac, T.**, “Le concept de mesures de non-compacité dans les espaces de Banach,” *Symmetry*, vol. 17, no. 8, pp. 1248–1260, 2025.
- [28] **Zeidler, E.**, *Nonlinear Functional Analysis and its Applications : I. Fixed-Point Theorems*, Springer-Verlag, New York, 1986.
- [29] **Zhou, Y.**, *Basic Theory of Fractional Differential Equations*, 3rd ed., World Scientific, Singapore, 2014.

Résumé

Ce mémoire s'est consacré à l'étude de l'existence et d'unicité des solutions pour une classe de problèmes aux limites pour une équation différentielle fractionnaire impulsive dans un espace de Banach. Les démonstrations reposent sur les méthodes de mesures de non-compacité, sur les théorèmes du point fixe de Banach et celui de Krasnoselskii. Quelques exemples illustrent l'applicabilité des résultats principaux obtenus.

Mots clé: Problème aux limites, équation différentielle fractionnaire impulsive, espace de Banach, théorème de point fixe, Mesures de non-compacité.

Abstract

This thesis is devoted to the study of the existence and uniqueness of solutions for a class of boundary value problems for an impulsive fractional differential equation in a Banach space. The proofs are based on measures of non-compactness methods, and on the Banach and Krasnoselskii fixed-point theorems. Some examples are provided to illustrate the applicability of the main results obtained.

Keywords: Boundary value problem, fractional differential equation impulsive, Banach space, fixed-point theorem, measures of non-compactness.

ملخص

خصصنا هذه المذكرة لدراسة وجود ووحدانية الحلول لفئة من مسائل القيم الحدودية لمعادلة تفاضلية كسرية نبضية في فضاء بناخ. تعتمد البراهين على طرق مقاييس عدم التراص وعلى نظريات النقطة الثابتة لبناخ وكراسنوسيلسكي. توضح بعض الأمثلة مدى قابلية تطبيق النتائج الرئيسية المحصل عليها.

الكلمات المفتاحية: مسألة القيم الحدودية، معادلة تفاضلية كسرية نبضية، فضاء بناخ، نظرية النقطة الثابتة، قياسات عدم التراص.