



République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère De L'enseignement Supérieur et De
La Recherche Scientifique



UNIVERSITÉ ECHAHID HAMMA LAKHDAR
D'EL OUED

FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES
Mémoire de fin d'étude

En Vue de l'obtention du Diplôme de

MASTER ACADEMIQUE

Domaine : Mathématiques et informatique

Filière : Mathématiques

Option : Mathématiques fondamentales

Thème

Schéma de Crank-Nicolson pour la Résolution Numérique d'une
EDP Parabolique

Présenté par: Djemil Roumaïssa

Nemsi Fatma

Soutenu publiquement devant le jury composé de

Dr. Habita Khaled	MCA	Président	Univ. El Oued
Dr. Beggas Mohammed	MCA	Rapporteur	Univ. El Oued
Dr. Doudi Nadjat	MCB	Examineur	Univ. El Oued

Année universitaire : 2020/2021

Dédicace

Au nom du dieu le clément et le miséricordieux louange à **ALLAH** le tout puissant.

Je dédie ce travail, à celui dont le seul but était notre réussite, à la source de notre courage et de notre persévérance, à ma mère bien-aimée, **Farida**.

A ceux qui ont travaillé pour notre confort, mon soutien et mon bonheur, mon cher père, **Abdellazize**.

A mes soeurs qui m'ont encouragé et m'ont soutenu à mes esprits **Asma, Nour, Aicha** et **Hana**. A mes frères qui m'ont le coeur **Abde Arahmen** et **Omor**.

A celui qui m'a aidé et soutenu à mon fiancé, **Abdelhai**.

Aux personnes qui m'ont toujours aidé et encouragé, qui étaient toujours à mes côtés, mes aimables amis, collègues d'étude, et frères de coeur, toi **Salsabile, Afrah**.

A mon binôme **Roumaissa**.

A tous mes professeurs de mon cours, merci.

Et à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin pour que ce projet soit possible, je vous dis merci.

Fatma

Louange et remerciements à **Dieu**, qui nous a aidés et approuvés dans l'accomplissement de cette humble œuvre.

A ceux qui ne peuvent être récompensés par nos actions **mes généreux parents**, que **Dieu** les préserve et prolonge leur vie :

Au propriétaire d'une biographie parfumée et d'un grand crédit, qui a eu le premier crédit pour mon éducation, à qui je porte son nom avec fierté **Mon cher père**.

A celle qui a mis **Dieu** le ciel sous ses pieds, qui m'a mis sur le chemin de la vie
Chère maman.

A tous mes frères qui étaient mon soutien **Aissa, Moussa, Ibrahim, Al-Akhdar, cher Mohammed**.

A mes soeurs ma vie **Soumia, Maimouna**.

A qui j'ai partagé ce travail avec mon amie, ma compagne **Fatma**.

A mes amies, sœurs **Salsabil, Saeeda, Fatima Zahra, Basma**.

A mes compagnons **Iman** et ma belle tante **Warda**.

Tous ceux qui ont contribué à ce projet de près ou de loin.

A tous ceux qui liront cette note.

Roumaissa

Remerciements

Avant tout, nous remercions **DIEU** le tout puissant de nous avoir donné la volonté d'accomplir et d'achever ce mémoire.

Tout d'abord, nous tenons à remercier le **Dr. Beggas Mohammed** , pour la disponibilité, la confiance, les conseils, l'encadrement tout au long la période de recherche.

Nos remerciements s'adressent au **Dr. Bekkouche Moumen** pour son aide pratique.

Nous tenons également à remercier messieurs les membres de jury pour l'honneur qu'ils nous ont fait en acceptant de juger notre travail.

D'ailleurs, nous remercions chaleureusement tous les membres de nos familles surtout nos parents pour leur effort et leur fatigue.

Nos remerciements s'adressent également à tous nos professeurs pour leurs générosités et la grande patience dont ils ont su faire preuve malgré leurs charges académiques et professionnelles.

Nos profonds remerciements à toute personne ayant contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

Notations

$C^K([a, b])$	Espace de fonctions k fois Continûment dérivable sur $[a, b]$.
$L^p(\Omega)$	Espaces de Lebesgue.
∇	Gradient.
Δ	Laplacien.
A	Matrice.
A^t	Matrice transposé.
A^{-1}	Matrice inverse.
I	Matrice unité.
$\sigma(A)$	Rayon spectrale de la matrice A .
λ	Valeur propre.
$M_n(\mathbb{K})$	Ensemble des matrices carrées.
$E.D.P$	Équations aux dérivées partielles.
$E.D.O$	Équations différentielles ordinaires.
$C.I$	Condition initiale.
$C.L$	Conditions aux limites.
$D.F$	Différences finies.
P_c	Problème continu.
P_h	Problème discret.
Δx	Le pas en espace.
Δt	Le pas en temps.
R_i	Erreur de consistance.
u	Solution de problème continu.
u_h	Solution de problème discret.
$C - N$	Crank-Nicolson.

Table des figures

3.1	Discrétisation par D.F en D1	21
3.2	Discrétisation par D.F en D2	27
5.1	Représentation graphique de la solution analytique $U_{exact}(x_i, t_j)$	42
5.2	Courbe de la solution numérique, méthode de C-N $U_{app}(x_i, t_j)$	45

Table des matières

Notations	vi
Introduction	1
1 Préliminaires	4
1.1 Espaces fonctionnels	4
1.1.1 Espace $C^k([a, b])$	4
1.1.2 Espaces des Lebesgue $L^p(\Omega)$	4
1.2 Opérateurs différentiels	5
1.2.1 Gradient d'un vecteur	5
1.2.2 Divergence d'un vecteur	5
1.2.3 Laplacien	5
1.2.4 Combinaison convexe	5
1.3 Formules de Taylor et développements limités	6
1.3.1 Formule de Taylor	6
1.3.2 Généralisation	6
1.4 Rappel sur les matrices	7
1.4.1 Matrices particulières	7
1.4.2 Norme matricielle :	9
1.4.3 Valeur propre	10
2 EDP parabolique	12
2.1 Généralité	12
2.1.1 E.D.P linéaire d'ordre deux à coefficients constants en dimension 2	13

2.1.2	Classification	14
2.1.3	Le problème aux limites	14
2.1.4	Condition initiale	15
2.1.5	Problème bien posé	15
2.1.6	Problème mal posé	15
2.2	Problème parabolique	16
2.2.1	L'équation de la chaleur	16
2.2.2	L'équation de la chaleur en dimension 1 (D1)	16
2.2.3	L'équation de la chaleur en dimension 2 (D2)	16
2.3	Le problème de la chaleur	17
2.3.1	Domaine non borné	17
2.3.2	Domaine borné	17
2.4	Existence et unicité de la solution	17
2.4.1	La solution analytique	18
2.5	La relation entre l'équation de la chaleur et l'équation d'advection -diffusion	19
2.6	Le problème de la chaleur en dimension 2 (D2)	19
3	Principe de la méthode de différences finies	20
3.1	Différences finies en dimension 1	20
3.2	Discrétisation de domaine	20
3.3	Cas D1	21
3.3.1	Dérivée d'ordre 1	21
3.3.2	Schéma d'ordre supérieur	22
3.3.3	Dérivée d'ordre supérieur	22
3.3.4	L'erreur de Troncature	23
3.3.5	Ordre de schéma	23
3.3.6	Consistance	24
3.3.7	La stabilité	24
3.3.8	Interprétation de la condition de Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) : . .	26
3.3.9	Convergence	26
3.4	Discrétisation de temps	26

3.5	Schéma classique en temps	27
3.5.1	Les dérivées premières	27
4	Approximation de l'équation de la chaleur par le schéma de Crank-Nicolson	29
4.1	Le problème continu en D1	29
4.2	Discretisation du problème	29
4.2.1	Schéma de Crank-Nicolson	30
4.3	Résolution numérique de l'EDP	30
4.4	Consistance	31
4.5	Stabilité	33
4.5.1	Stabilité au sens de Von Neuman	33
4.5.2	Stabilité matricielle	34
4.5.3	Stabilité en norme L^∞	35
4.6	Convergence	36
4.7	L'erreur	36
4.8	Conclusion	37
5	Application	38
5.1	Problème modèle de la chaleur	38
5.2	Discretisation	38
5.3	Consistance	38
5.4	Stabilité	39
5.5	Convergence	39
5.6	Résolution numérique	39
5.7	Programmation de la solution analytique	40
5.7.1	Résultats numériques	42
5.8	Programation de la solution par le schéma de Crank-Nicolson	42
5.8.1	Résultats numériques :	45
5.9	Comparaison entre la solution approximative et la solution exacte :	46
	Bibliographie	47

Introduction générale

Historique :

En mathématiques, en analyse numérique, le schéma de **Crank-Nicolson** est un algorithme simple permettant de résoudre des systèmes d'équations aux dérivées partielles. Cette méthode utilise les différences finies pour approcher une solution du problème : elle est numériquement stable, et quadratique pour le temps. On peut facilement la généraliser à des problèmes à deux ou trois dimensions.

Cette schéma, publiée en 1947, est le résultat des travaux de la mathématicienne britannique **Phyllis Nicolson** (1917 , 1968) et du physicien **John Crank** (1916 , 2006). Ils l'utilisèrent dans la résolution de l'équation de la chaleur. Mais, peu après la méthode est devenue usuelle dans plusieurs problèmes numériques.

En 1928, **Richard Courant**, **Kurt Friedrichs** et **Hans Lewy** publient un article concernant les conditions permettant d'assurer la stabilité numérique d'une méthode et ainsi d'éviter la propagation des erreurs. Ces conditions portent le nom de leurs découvreurs : les conditions CFL. Elles sont fréquemment utilisées, notamment pour les problèmes d'évolutions, elles imposent généralement un maillage assez fin. [1]

Introduction :

Depuis toujours, l'Homme essaye de comprendre les phénomènes qui se produisent dans le monde. Cela a amené de nombreux scientifiques de l'époque, à chercher à traduire certains de ces phénomènes en modèles mathématiques. Ces modèles sont constitués d'équations dont l'inconnue est une fonction et qui fait intervenir non seulement cette fonction mais aussi ses dérivées partielles ($F(x, u, D_u, \dots, D_u^\alpha) = 0$). Ces équations sont appelées équations aux dérivées partielles (EDP). Au fil du temps, l'on s'est rendu compte que les EDP peuvent modéliser la plupart des phénomènes de la physique, de la mécanique, de la chimie, de la biologie, de l'économie, de la sociologie, $\dots$. Celles qui vont retenir notre attention comportent deux variables :

- une variable $x \in \mathbb{R}^N$ $N = 1, 2, 3$ appelée variable d'espace .
- une variable $t \in \mathbb{R}_+$ appelée variable du temps.

En vue de passage d'un problème exacte (continu) au problème approché (discret) on dispose plusieurs techniques :

Les différences finies, les éléments finis et les volumes finies.

Nous limiterons ici à l'exposé de technique des différences finies.

L'objet de ce mémoire de master est d'étudier l'équation de la chaleur par le schéma de **Crank-Nicolson**, en analyse numérique, c'est schéma est un algorithme simple permettant de résoudre des systèmes d'équations aux dérivées partielles. Cette méthode utilise les différences finies pour approcher une solution du problème : elle est numériquement stable en dimension un. On peut facilement la généraliser à des problèmes à deux ou trois dimensions.

Dans le premier chapitre nous rappelons quelques résultats et définitions.

Dans le deuxième chapitre, on va présenter le problème de la chaleur, après avoir donné une généralité sur les EDP.

Le troisième chapitre consacré à l'étude du principe de la méthode de différences finies, avec clarification de quelques schémas de discrétisation.

La résolution de l'équation de la chaleur par le schéma de **Crank-Nicolson** c'est l'objectif du quatrième chapitre.

La résultante de notre étude est la résolution numérique de l'équation de la chaleur discrétisé par le schéma de **Crank-Nicolson**, par l'application du programme de Matlab.

Chapitre 1

Préliminaires

Ce chapitre est consacré à un rappel sur les espaces fonctionnels, les opérateurs différentiels, la formule de Taylor et les matrices que nous utiliserons par la suite.

1.1 Espaces fonctionnels

1.1.1 Espace $C^k([a, b])$

Définition 1.1.1.

$(f \in C^k[a, b]) \iff (f \text{ est continûment dérivable jusqu'à l'ordre } k).$

1.1.2 Espaces des Lebesgue $L^p(\Omega)$

Définition 1.1.2. [2]

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < +\infty$ l'espace des classes des fonctions mesurables de puissance p -ème intégrable, est définie :

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid \text{mesurable et } \int_{\Omega} |f(x)|^p dx < +\infty\}$$

muni de la norme :

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

- Pour $p = 1$

L'espace $L^1(\Omega)$ est un espace de toutes les fonctions intégrables sur Ω .

- Pour $p = +\infty$

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable et } \exists C > 0 \text{ telle que } |f(x)| < C \text{ p.p sur } \Omega\}$$

muni de la norme :

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf\{C; |f(x)| < C \text{ p.p sur } \Omega\} = \sup_{\text{ess}} f.$$

1.2 Opérateurs différentiels

1.2.1 Gradient d'un vecteur

Soit u une fonction scalaire, $u = u(x, y, z), \forall i, j, k \in \mathbb{N}$

$$\overrightarrow{grad}(u) = \nabla u = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} \end{pmatrix}_{(i,j,k)}.$$

1.2.2 Divergence d'un vecteur

Soit U une fonction vectorielle de trois variables (x, y, z) définie sur un domaine Ω de $\mathbb{R}$ et à valeurs U_1, U_2, U_3 dans $\mathbb{R}$. On appelle divergence du vecteur U et on note $div(U)$ ou $\nabla \cdot U$ le scalaire :

$$div(U) = \nabla \cdot U = \frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial U_2}{\partial y} + \frac{\partial U_3}{\partial z}.$$

1.2.3 Laplacien

On appelle Laplacien de u et on note Δu ou $\nabla^2 u$, le scalaire :

$$\Delta u = div(grad u) = \nabla \cdot \nabla(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

1.2.4 Combinaison convexe

On dit que $u_1, u_2, \dots, u_n$ est une combinaison convexe de u_{n+1} tel que :

$$u_{n+1} = \sum_{i=1}^n a_i u_i$$

si :

1. $a_i \geq 0, \forall i = \overline{1, n}$.
2. $\sum_{i=1}^n a_i = 1$.

1.3 Formules de Taylor et développements limités

1.3.1 Formule de Taylor

Si une fonction $f(x)$ est définie et continue sur $[a, b]$, ainsi que ses n premières dérivées, et si elle admet dans l'intervalle $]a, b[$ une dérivée d'ordre $n + 1$, alors il existe une valeur $c \in]a, b[$ pour laquelle :

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!}f''(a) + \dots + \frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \frac{(b-a)^{(n+1)}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)$$

Cette égalité peut encore s'écrire avec $h = b - a$:

$$f(a+h) = f(a) + (h)f'(a) + \frac{(h)^2}{2!}f''(a) + \dots + \frac{(h)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \frac{(h)^{(n+1)}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a+\theta h)$$

avec $0 < \theta < 1$

On prend $a = x_0$. Et $h + a = b = x$:

$$f(x) = f(x_0) + (h)f'(x_0) + \frac{(h)^2}{2!}f''(x_0) + \dots + \frac{(h)^n}{n!}f^{(n)}(x_0) + O(h^{n+1})$$

et $R(h) = O(h^{n+1})$

$$\lim_{h \rightarrow 0} R(h) = 0.$$

1.3.2 Généralisation

$$f : \Omega \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, f \in C^p(\Omega).$$

Pour $p = 1$:

$$Df(x_0)(h) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)h_i,$$

Pour $p = 2$:

$$D^2 f(x_0)(h^2) = \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2}}(h_{i_1}, h_{i_2}).$$

Si on pose :

$$p = n = 2 \quad , \quad x_{i_1} = x \quad , \quad x_{i_2} = y \quad , \quad h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$$

$$D^2 f(x_0, y_0)(h, h) = D^2 f(x_0)(h^2) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)h_1^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)h_2^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)h_1 h_2$$

Formule de Taylor :

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^p \frac{1}{k!} D^k f(x_0) h^k + O(\|h\|^p).$$

Si $p = n = 2$:

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)h_2 + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)h_1^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)h_2^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)h_1 h_2 \right]$$

Si $p = 1, n = 3, h = (h_1, h_2, h_3) \in \mathbb{R}^3$

$$f(x, y, z) = f(x_0, y_0, z_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)h_2 + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)h_3 + O(\|h\|).$$

1.4 Rappel sur les matrices

1.4.1 Matrices particulières

On appelle matrices m lignes et n colonnes ($m \times n$), on note dans $\mathbb{K}$:

$$A = (a_{ij}), i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n.$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Si : $\mathbb{K} = \mathbb{R}$: $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

Si : $\mathbb{K} = \mathbb{C}$: $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$.

• Matrice carrée

Une matrice carrée d'ordre n est une matrice de dimension $n \times n$, autrement dit une matrice

à un n lignes et n colonnes.

- **Transposé d'une matrice**

On appelle transposée d'une matrice $A = (a_{ij})$ de type $p \times q$, la matrice $B = (b_{ij})$ de type $q \times p$. Obtenue en échangeant lignes et colonnes de A : $b_{ij} = a_{ji}$.

- **Matrice symétrique**

C'est une matrice A carrée telle que : $A = A^t$.

- **Forme quadratique, matrice définie positive**

On appelle forme quadratique associée à la matrice A la forme

$$Q(x) = X^t A X.$$

Une matrice A est dite définie positive si

$$X^t A X > 0, \quad \forall X \neq 0.$$

Remarque 1.4.1.

- Une matrice A est positive mais non définie positive si :

$$X^t A X \geq 0, \quad \forall X \neq 0.$$

- Une matrice carrée est définie positive si la forme quadratique qui lui est associée est définie positive.

- **Matrice par blocs**

Une matrice par blocs $A = A_{ij}$, $1 < i < m$, $1 < j < n$ est une matrice dont les entrées a_{ij} sont des matrices au lieu d'être des scalaires.

On doit toutefois respecter les deux règles suivantes :

1. Toutes les matrices d'un même ligne (A_{ij} avec $1 < j < n$) ont le même nombre de lignes.
2. Toutes les matrices d'un même colonne (A_{ij} avec $1 < i < m$) ont le même nombre de colonnes. Ainsi il existe des nombres entiers n_j et m_i tel que $A_{ij} \in \mathbb{C}^{m_i \times n_j}$.

- **Matrice tridiagonale (bande)**

On dit qu'une matrice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ou $\mathbb{C}^{m \times n}$ est une matrice bande si elle n'admet des éléments

non nuls que sur un certain nombre de diagonales autour de la diagonale principale. Plus précisément :

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{quand } i < j + p \quad \text{c'est une matrice bande-}p \text{ inférieure} \\ 0 & \text{quand } j > i + q \quad \text{c'est une matrice bande-}q \text{ supérieure} \end{cases}$$

• Matrice tridiagonale par blocs

Soit A une matrice tridiagonale tel que :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & & & \\ a_{21} & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ & & & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

On définit la matrice tridiagonale par blocs tel que :

$$B = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & & & \\ A_{21} & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & A_{n-1,n} \\ & & & A_{n,n-1} & A_{n,n} \end{pmatrix}$$

où les A_{ij} sont des sous-matrices de B .

1.4.2 Norme matricielle :

Définition 1.4.1. [3]

On appelle norme matricielle $\|\cdot\|$ définie de $M_n(K)$ dans $\mathbb{R}_+$ ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$) vérifiant les propriétés suivantes, $\forall A \in M_n(K)$:

1. $\|A\| = 0 \iff A = 0$.
2. $\|\alpha A\| = \alpha \|A\| \quad \forall \alpha \in \mathbb{K}$. (propriété d'homogénéité)
3. $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|, \forall (A, B) \in M_n(\mathbb{K})^2$. (inégalité triangulaire)

$$4. \|AB\| \leq \|A\| \|B\|, \forall (A, B) \in M_n(\mathbb{K})^2.$$

Exemple 1.4.1.

$$\|A\|_1 = \max_{j=1 \dots n} \sum_{i=1}^n |a_{i,j}|,$$

$$\|A\|_\infty = \max_{i=1 \dots n} \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|.$$

1.4.3 Valeur propre

Définition 1.4.2.

1. Soit A une matrice carrée d'ordre n . Un vecteur propre de A est un vecteur non nul $\vec{X}$ tel que $A\vec{X} = \lambda\vec{X}$, pour un certain scalaire λ .
2. Un scalaire λ est appelé une valeur propre de A si l'équation $A\vec{X} = \lambda\vec{X}$ admet une solution non triviale $\vec{X}$, $\vec{X}$ est appelé le vecteur propre associé à λ .

Remarque 1.4.2.

1. λ est une valeur propre de A si et seulement si

$$(A - \lambda I)\vec{X} = 0 \quad (\star)$$

2. L'espace solution de $(\star)$ n'est pas autre que $\ker(A - \lambda I)$. Cet espace est appelé l'espace propre de A associé à valeur propre λ .

• Rayon spectrale

Spectre

Le spectre $A \in M_n(K)$, $n < \infty$, est l'ensemble des valeurs propres de A :

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{K}, \quad (A - \lambda I) \text{ singulière}\}.$$

Le rayon spectrale de A est le plus grand des modules des valeurs propres de A

$$\rho(A) = \max \{ |\lambda|, \quad \lambda \in \sigma(A) \},$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^t A)},$$

où :

$$\rho(A) = \max_i |\lambda_i|,$$

λ_i : les valeurs propres de A .

si la matrice A est symetrique alors :

$$\begin{aligned}\|A\|_2 &= \sqrt{\rho(A^2)} \\ &= (\sqrt{\rho(A)})^2 \\ &= \rho(A) \quad (\rho(A) \geq 0).\end{aligned}$$

Lemme 1.4.1. [10]

(Valeurs propres de A) L'ensemble $\lambda_k(A)$ des valeurs propres de la matrice A est donné par :

$$\lambda_k(A) = 4 \sin^2 \frac{k\pi}{2(M+1)}, \quad k = 1, \dots, M.$$

Chapitre 2

EDP parabolique

Dans ce chapitre, on va citer quelques définitions qui concerne les équations aux dérivées partielles, ainsi des phénomènes physiques modéliser par des équations aux dérivées partielles (en abrégé E.D.P).

2.1 Généralité

Une équation aux dérivées partielles est une relation entre une fonction de plusieurs variables u et ses dérivées partielles et une fonction f donnée :

$$F(u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x_1}, \dots, \frac{\partial^m u}{\partial^m x_n}) = f, \quad (2.1)$$

Ω est une ouvert de $\mathbb{R}^n$, F est une fonction de plusieurs variable réelles. L'ordre de dérivation le plus élevé est appelé l'ordre de l'E.D.P.

Remarque 2.1.1.

1. Notons que si $n = 1$, alors l'E.D.P est une équation différentielle ordinaire (E.D.O).
2. Si dans (2.1) f est nulle, on dit que l'équation est homogène.

Définition 2.1.1.

Si le coefficient est ses dérivées apparaissent séparément dans l'E.D.P, celle ci est dit linéaire.

Exemple 2.1.1.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

1^{er} ordre linéaire et homogène.

Définition 2.1.2.

Si u n'est pas linéaire en au moins une dérivée dans l'E.D.P, alors l'E.D.P est non linéaire.

Exemple 2.1.2.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f$$

2^{ème} ordre et non linéaire.

Exemple 2.1.3.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} = f$$

3^{ème} ordre linéaire.

La forme la plus générale pour une E.D.P linéaire du 1^{er} ordre est :

$$A(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + B(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} + C(x, y)u = D(x, y).$$

2.1.1 E.D.P linéaire d'ordre deux à coefficients constants en dimension 2

Elles sont de la forme :

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + Fu = G(x, y) \quad (2.2)$$

les trois premier termes A,B,C sont des constantes.

2.1.2 Classification

Le type de l'E.D.P (2.2) dépend de signe de $\Delta = B^2 - 4AC$

- Si $\Delta > 0$, alors l'E.D.P est dit hyperbolique.
- Si $\Delta = 0$, alors l'E.D.P est dit parabolique.
- Si $\Delta < 0$, alors l'E.D.P est dit elliptique.

Exemple 2.1.4.

1. L'équation des ondes hyperbolique :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - C^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0; \quad C > 0,$$
$$B^2 - 4AC = 4C^2.$$

2. L'équation de la diffusion parabolique :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - d \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0; \quad d > 0,$$
$$B^2 - 4AC = 0.$$

3. L'équation de Laplace elliptique :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$
$$B^2 - 4AC = -4.$$

2.1.3 Le problème aux limites

Soient u et une E.D.P valide sur un ouvert Ω , les trois principaux types de conditions aux frontières sont :

1. On impose la valeur de u sur $\partial\Omega$, c'est la condition de Dirichlet.
2. On impose la valeur de $\frac{\partial u}{\partial n}$, $\frac{\partial u}{\partial n} = (\vec{gradu}) \cdot \vec{n}$ c'est la condition de Neumann.
3. On impose ces deux condition sur $\partial\Omega$ c'est la condition mixte.

Remarque 2.1.2.

Si l'E.D.P est valide dans tout l'espace, il n'y a pas de frontière, on impose souvent des conditions à l'infini.

2.1.4 Condition initiale

Si l'E.D.P modélise un problème d'évolution, on ajoute la condition initiale qui dépend du temps.

Remarque 2.1.3.

(E.D.P + conditions aux limites) $\Rightarrow$ problème aux limites.

2.1.5 Problème bien posé

Soit (P) un problème aux limites.

Proposition 2.1.1.

On dit que (P) bien posé si :

1. Il existe une solution de (P) satisfaisant les conditions aux frontières.
2. La solution doit-être unique.
3. La solution doit-être stable par rapport aux conditions aux frontières imposées.

2.1.6 Problème mal posé

Un problème qui n'est pas bien posé est dit mal posé.

Exemple 2.1.5.

$$(P) \begin{cases} u''(x) = 0, \\ u'(a) = u_0, \\ u'(b) = v_0. \end{cases}$$

$$u'' = 0 \Rightarrow u' = C_1 \Rightarrow u = C_1x + C_2$$

$$u'(a) = u_0, u'(b) = v_0$$

cas 1 :

Si $u_0 \neq v_0$ le problème (P) n'admet aucune solution.

cas 2 :

Si $u_0 = v_0$ le problème (P) admet une infini de solution : $u(x) = u_0x + C$.

Donc le problème (P) est mal posé.

2.2 Problème parabolique

2.2.1 L'équation de la chaleur

Un modèle de la physique

Considérons un domaine Ω de l'espace $\mathbb{R}^N$, $N = 1, 2$ ou 3 que l'on suppose occupé par un matériau homogène, isotrope, et conducteur de la chaleur. On note x la variable d'espace, c'est-à-dire un point de Ω , et t la variable de temps. Dans Ω , les sources de chaleur (éventuellement non uniformes ou locales en espace et variables dans le temps) sont représentées par une fonction donnée $f(x)$, tandis que la température est une fonction inconnue $u(x, t)$. La quantité de chaleur est proportionnelle à la température u et vaut cu où c est une constante physique (qui dépend du type de matériau) appelée chaleur spécifique. Avec k est une constante positive (qui dépend du type de matériau) appelée conductivité thermique et ρ est la densité.

2.2.2 L'équation de la chaleur en dimension 1 (D1)

On appelle équation de la chaleur (linéaire) en dimension 1 l'E.D.P parabolique, du premier ordre en temps (t), second ordre en espace (x) :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{k}{c\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad t \in \mathbb{R}^+, x \in \mathbb{R}.$$

- c : chaleur spécifique.
- k : conductivité thermique.
- ρ : la densité.

2.2.3 L'équation de la chaleur en dimension 2 (D2)

On appelle équation de la chaleur (linéaire) en dimension 2 l'E.D.P parabolique, du premier ordre en temps (t), second ordre en espace ($x \in \mathbb{R}^2$) tel que :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{k}{c\rho} \Delta u, \quad t \in \mathbb{R}^+, x \in \mathbb{R}^2,$$

et Δ est le Laplacien en espace, défini par :

$$\Delta u = \sum_{\alpha=1}^d \frac{\partial^2 u}{\partial x_{\alpha}^2}.$$

2.3 Le problème de la chaleur

En ajoutant les conditions aux limites et initiales, nous obtenons le problème aux limites. Dans le cas où le domaine est non borné, on obtient seulement les conditions initiales.

2.3.1 Domaine non borné

Dans un domaine non borné ce problème consiste à chercher :

$u : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, vérifie :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \frac{k}{c\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t), & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x) & C.I. \end{cases}$$

2.3.2 Domaine borné

On considère une barre de longueur L dont la température est fixée à zéro aux extrémités. L'équation de la température au cours du temps s'écrit :

Si le domaine est borné, en temps et espace :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \frac{k}{c\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t), & \forall x \in]0, L[\quad \text{et} \quad t \in]0, T[, \\ u(x, 0) = u_0(x) & C.I., \\ u(0, t) = u(L, t) = 0 & C.L, \end{cases} \quad (2.3)$$

$Q_T =]0, 1[\times]0, T[.$

2.4 Existence et unicité de la solution

Théorème 2.4.1. [2]

Si : $u_0 \in C([0, 1], \mathbb{R})$, alors (2.3) admet une solution unique et $u \in C^2(Q_T, \mathbb{R}) \cap C(\overline{Q_T}, \mathbb{R})$.

Proposition 2.4.1. (*Principe du maximum*)

Soit u la solution de (P), alors :

1. Si $u_0(x) > 0, \forall x \in [0, 1]$, alors : $u(x, t) > 0, (x, t) \in Q_T$
2. $\|u\|_{L^\infty(Q_T)} \leq \|u_0\|_{L^\infty([0, 1])}$.

2.4.1 La solution analytique

La solution analytique du problème est donnée par :

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-(nv\pi)^2 t} \sin(n\pi x).$$

$$v = \frac{k}{c\rho} = 1$$

Où C_n sont les coefficients de Fourier de la donnée initiale $u_0(x)$ associés au sinus, c'est à dire :

$$C_n = 2 \int_0^1 u_0(x) \sin(n\pi x) dx \quad n = 1, 2, \dots$$

Remarque 2.4.1. [4]

Dans ce modèle de propagation de la chaleur, il nous faut préciser les unités ou dimensions physiques : la température u s'exprime en Kelvin (**K**), la chaleur spécifique c en Joule par kilogramme par Kelvin ($J/(kg \times K)$), la conductivité thermique (par unité de masse) k en Joule mètre carré par kilogramme par Kelvin par seconde ($Jm^2/(kg \times K \times s)$). D'un point de vue mathématique, nous allons très souvent oublier les unités, et même les constantes, en supposant que c et k valent 1.

Remarque 2.4.2. [4]

Le problème (2.3) n'est pas seulement un modèle de propagation de la chaleur. On le retrouve comme modèle de nombreux phénomènes sans aucun rapport entre eux (il faut simplement changer le nom des diverses variables du problème). Par exemple, (2.3) est aussi connue sous le nom d'**équation de diffusion**, et modélise la diffusion ou migration

d'une concentration ou densité à travers le domaine Ω (imaginer un polluant diffusant dans l'atmosphère, ou bien une espèce chimique migrant dans un substrat). Dans ce cas, u est la concentration ou la densité en question, k est la diffusivité, et c est la densité volumique de l'espèce.

2.5 La relation entre l'équation de la chaleur et l'équation d'advection -diffusion

L'équation advection-diffusion est :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + \alpha \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) - \gamma \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = 0.$$

Le deux équations sont de type parabolique.

Si :

$\alpha = 0$ et $\gamma = k$, l'équation de la chaleur coïncide avec l'équation d'advection-diffusion.

Remarque 2.5.1.

Si v est solution de l'E.D.P l'équation d'advection-diffusion. Alors, la solution u de problème est définie par :

$$v(t, x) = u(t, x - \alpha t).$$

2.6 Le problème de la chaleur en dimension 2 (D2)

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \frac{k}{c\rho} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(x, t) + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}(x, t) \right), & \forall x \in [0, a] \times [0, b] \quad \text{et} \quad t \in [0, T], \\ u(x, 0) = u_0(x), & C.I \\ u(0, t) = u(a, t) = 0 & C.L \\ u(0, t) = u(b, t) = 0, & \end{array} \right.$$

pour l'existence et l'unicité de la solution le théorème 2.4.1 est valable pour notre problème dans $\mathbb{R}^2$.

Chapitre 3

Principe de la méthode de différences finies

La méthode consiste à remplacer les dérivées partielles par des différences divisées ou combinaisons de valeurs ponctuelles de la fonction en un nombre fini de points discrets ou noeuds du maillage.

Avantages : grande simplicité d'écriture et faible coût de calcul.

Inconvénient : limitation de la géométrie des domaines des calculs (simple, non complexe), difficultés de prise en compte des conditions aux limites et en général absence de résultats de majoration d'erreurs.

3.1 Différences finies en dimension 1

Tout les méthode numériques présupposent les discrétisations du domaines géométrique pour passer d'un problème continue a une infinité d'inconnues à un problème discret ne comptant d'un nombre finie d'inconnues.

3.2 Discrétisation de domaine

On discrétise le segment $[a, b]$ et on approche les dérivées aux points de discrétisation, par des opérateurs aux différences. Plus précisément, on se donne un entier N à partir du

quel on définit le pas de discrétisation $h = \frac{b-a}{N+1}$, on introduit les $N + 2$ points $x_i = ih$ pour $i = 0, \dots, N + 1$ qui forment alors une subdivision régulière de l'intervalle $[a, b]$. On définit Ω_h le maillage intérieur à (a, b) par

$$\Omega_h = \{x_i, 1 \leq i \leq N\}$$

et $\overline{\Omega}_h$ le maillage complet de $[a, b]$ par

$$\overline{\Omega}_h = \{x_i, 0 \leq i \leq N + 1\}$$

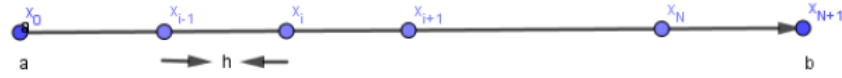


FIGURE 3.1 – Discrétisation par D.F en D1

3.3 Cas D1

3.3.1 Dérivée d'ordre 1

Développement de Taylor :

Pour $u \in C^2$ la formule de Tylor à l'ordre 2 aux point $u(x + h)$, et $u(x - h)$ nous donne :

$$u_{i+1} = u(x_i + \Delta x) = u_i + \Delta x \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_i + O(\Delta x^2),$$

$$u_{i-1} = u(x_i - \Delta x) = u_i - \Delta x \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_i + O(\Delta x^2).$$

Notation :

On note u_i la valeur discrète de $u(x)$ au point x_i , soit $u_i = u(x_i)$. De même pour la dérivée de $u(x)$ au noeud x_i , on note $\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x=x_i} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_i = u'_i$.

Cette notation s'utilise de façon équivalente pour toutes les dérivées d'ordre successif de la grandeur u .

Le schéma aux différences finies d'ordre 1 présenté au-dessus s'écrit, en notation indicielle :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_i = \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x} + O(\Delta x).$$

Ce schéma est dit "avant" ou "décentré avant" ou upwind.

Il est possible de construire un autre schéma d'ordre 1, appelé "arrière" :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i = \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta x} + O(\Delta x).$$

3.3.2 Schéma d'ordre supérieur

Des schémas aux différences finies d'ordre supérieur peuvent être construits en manipulant des développements de Taylor au voisinage de x_i . On écrit :

$$u_{i+1} = u(x_i + \Delta x) = u_i + \Delta x \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i + \frac{\Delta x^2}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i + O(\Delta x^3),$$

$$u_{i-1} = u(x_i - \Delta x) = u_i - \Delta x \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i + \frac{\Delta x^2}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i + O(\Delta x^3).$$

La soustraction de ces deux relations donne :

$$u_{i+1} - u_{i-1} = 2\Delta x \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i + O(\Delta x^3).$$

Ce qui permet d'obtenir le schéma d'ordre deux dit "centré" pour approximer la dérivée première de u :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta x} + O(\Delta x^2).$$

Pour obtenir des ordres supérieurs, il faut utiliser plusieurs noeuds voisins de x_i . Le nombre de points nécessaire à l'écriture du schéma s'appelle le stencil. Par exemple, un schéma aux différences finies d'ordre 3 pour la dérivée première s'écrit :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i = \frac{-u_{i+2} + 6u_{i+1} - 3u_i - 2u_{i-1}}{6\Delta x} + O(\Delta x^3).$$

3.3.3 Dérivée d'ordre supérieur

Le principe est identique et repose sur les développements de Taylor au voisinage de x_i . Par exemple pour construire un schéma d'approximation de la dérivée seconde de u , on écrit :

$$u_{i+1} = u(x_i + \Delta x) = u_i + \Delta x \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i + \frac{\Delta x^2}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i + \frac{\Delta x^3}{6} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_i + O(\Delta x^4)$$

$$u_{i-1} = u(x_i - \Delta x) = u_i - \Delta x \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_i + \frac{\Delta x^2}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_i - \frac{\Delta x^3}{6} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right)_i + O(\Delta x^4)$$

En faisant la somme de ces deux égalités, on aboutit à :

$$u_{i+1} + u_{i-1} - 2u_i = \Delta x^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_i + O(\Delta x^4)$$

Ce qui permet d'obtenir le schéma d'ordre deux dit "centré" pour approximer la dérivée seconde de u :

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_i = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2)$$

Il existe aussi une formulation "avant" et "arrière" pour la dérivée seconde, toute deux d'ordre un :

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_i = \frac{u_{i+2} - 2u_{i+1} + u_i}{\Delta x^2} + O(\Delta x), \quad \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_i = \frac{u_i - 2u_{i-1} + u_{i-2}}{\Delta x^2} + O(\Delta x).$$

Il est également possible de construire, par le même procédé, des schémas aux différences finies d'ordre supérieur pour les dérivées deuxième, troisième, etc...

3.3.4 L'erreur de Troncature

Définition 3.3.1. *La puissance de Δx avec la quelle l'erreur de troncature tend vers 0 est appelée : l'ordre de la méthode.*

L'erreur de troncature est l'erreur commise lors de la discrétisation de termes de dérivées. Cette erreur est générée lors du choix de l'ordre de précision de la discrétisation, c'est à-dire du terme à partir duquel nous négligeons le reste du développement limité :

$$u_{i+1} = u_i + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_i \Delta x + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_i \frac{\Delta x^2}{2} + (\dots)(\Delta x^3).$$

L'erreur commise suite à la troncature des termes à partir d'un certain rang $(2, 3, \dots)$ est nommée erreur de troncature.

3.3.5 Ordre de schéma

On dit qu'un schéma numérique à N points de discrétisation est d'ordre $p \in \mathbb{N}$ s'il existe une constante $C \in \mathbb{R}$, indépendante de la solution exacte telle que l'erreur de consistance vérifie :

$$\max_{i=1, \dots, N} (R_i) \leq Ch^p.$$

Où R_i est l'erreur de troncature et h est le pas de maillage (c'est à dire le maximum de $x_{i+1} - x_i$).

3.3.6 Consistance

Définition 3.3.2.

pour l'opérateur différentiel, posons :

$$L : u \rightarrow -v \quad \text{opérateur de (P),}$$

$$L_h : u \rightarrow D_h(D_h v) \quad \text{opérateur de } (P_h).$$

L'erreur de consistance de (P_h) par rapport à (P) est défini par :

$$R_h u(x) = Lu(x) - L_h u(x).$$

Le problème (P_h) est dit consistant par rapport à (P) si :

$$R_h u \rightarrow 0 \quad \text{quand } h \rightarrow 0,$$

cette convergence à la norme discrète du maximum, définie par :

$$\|u\|_{h,\infty} = \max_{1 \leq i \leq N} |u(x_i)|,$$

donc :

$$\|R_h\| \leq Ch^p.$$

3.3.7 La stabilité

On dit que le problème (P_h) est stable si pour toute fonction f . La solution correspondante u_h de (P_h) avec f est bornée par la donnée f . La notion de stabilité dépend de la norme utilisées.

• Stabilité en norme L^∞

$\exists C > 0$ tel que pour tous $\Delta t, \Delta x$ assez petits :

$$\|u^n\|_\infty \leq C \|u^0\|_\infty, \quad \forall n, 0 \leq n\Delta t \leq T$$

- **Stabilité au sens de Von-Neumann**

Pour cela, commençons par définir la transformation de fourier discrète.

On a la transformation de fourier d'une fonction u :

$$\hat{u} = F(u) = \int_{\mathbb{R}} u e^{-2i\Pi t} dt$$

où ($i^2 = -1$).

Alors, on peut définir la transformation de fourier discrète comme suite :

$$\hat{U}^n = \sum_j u_j^n e^{\frac{-2i\Pi k j}{N}}.$$

Et aussi

$$\begin{aligned} \sum_j u_{j+1}^n e^{\frac{-2i\Pi k j}{N}} &= \sum_j u_j^n e^{\frac{-2i\Pi k (j-1)}{N}} \\ &= \left(\sum_j u_j^n e^{\frac{-2i\Pi k j}{N}} \right) e^{\frac{2i\Pi k}{N}} \\ &= e^{\frac{-2i\Pi k}{N}} \hat{U}^n \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \sum_j u_{j-1}^n e^{\frac{-2i\Pi k j}{N}} &= \sum_j u_j^n e^{\frac{-2i\Pi k (j+1)}{N}} \\ &= \left(\sum_j u_j^n e^{\frac{-2i\Pi k j}{N}} \right) e^{\frac{-2i\Pi k}{N}} \\ &= e^{\frac{-2i\Pi k}{N}} \hat{U}^n \end{aligned}$$

après compensation, nous obtenons la relation suivante :

$$\hat{U}^{n+1} = \xi_p \hat{U}^n.$$

Proposition 3.3.1. [7]

Le schéma est stable au sens de Von-Neumann si $|\xi_p| < 1$.

3.3.8 Interprétation de la condition de Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) :

La condition de Courant Friedrichs Lewy souvent mentionnée exprime la compatibilité nécessaire entre domaine de dépendance théorique et domaine de dépendance numérique. Le pas de temps Δt doit rester inférieur à la valeur limite au de laquelle des parties du domaine de dépendance théorique ne seraient pas prises en compte dans le schéma numérique

3.3.9 Convergence

Théorème 3.3.1. (Lax) [10] *Dans un problème bien posé. Et avec un schéma numérique consistant, la stabilité est une condition nécessaire et suffisante pour la convergence.*

Utilisation de la théorie de Lax :

$$(\text{Consistance} + \text{Stabilité}) \Rightarrow \text{Convergence}$$

3.4 Discrétisation de temps

La discrétisation consiste à donner un ensemble de points $t^n, n = 0, \dots, M$ de l'intervalle $]0, T[$ et un ensemble de points $x_i, i = 0, \dots, N + 1$. Pour simplifier, on considère un pas constant en temps et en espace.

Soit $h = \frac{b-a}{N+1} = \Delta x$ le pas de discrétisation en espace et $k = \Delta t = \frac{T}{M}$, le pas de discrétisation en temps.

On pose : $t^n = nk$ pour $n = 0, \dots, M$ et $x_i = ih, i = 0, \dots, N + 1$. $\Omega_{h,k} = \{(ih, nk)\}$ Les inconnues discrètes sont notées : $u_i^n, i = \overline{1, N}$ et $n = \overline{1, M}$

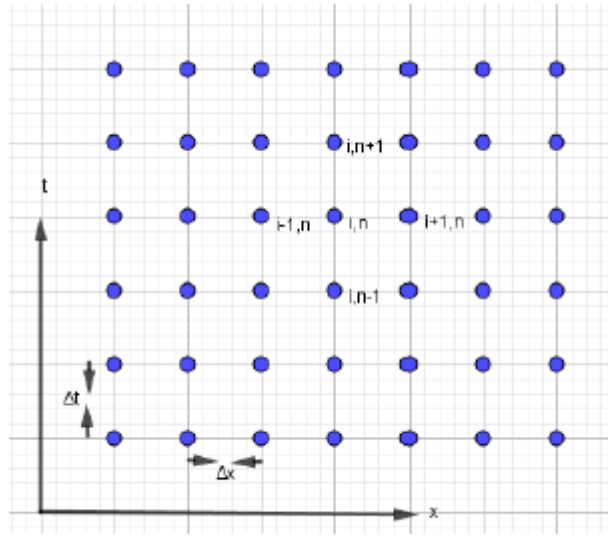
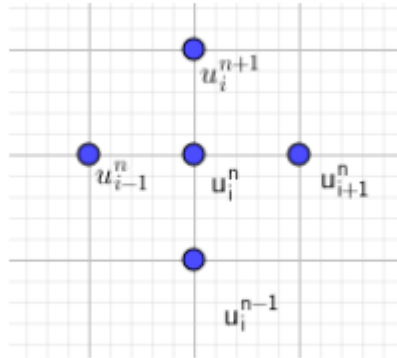


FIGURE 3.2 – Discrétisation par D.F en D2



3.5 Schéma classique en temps

3.5.1 Les dérivées premières

Par le développement limité de Taylor par rapport à la variable de temps (x_i étant fixé), on obtient :

$$u(x_i, t^{n+1}) = u(x_i, t^n) + \Delta t \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t^n) + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, \xi^+) \quad , \xi^+ \in [t^n, t^{n+1}]$$

$$u(x_i, t^{n-1}) = u(x_i, t^n) - \Delta t \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t^n) + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, \xi^-) \quad , \xi^- \in [t^{n-1}, t^n]$$

De la même manière on obtient :

• **Schéma centré :**

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_i^n = \frac{u_i^{n+1} - u_i^{n-1}}{2\Delta t} + O(\Delta t^2).$$

Ce schéma appelé schéma saute-mouton est à la fois explicite et d'ordre 2 en temps. Cependant, il est toujours instable, donc numériquement inutilisable.

• **Schéma explicite :**

Nous utilisons un schéma (en avant) d'ordre 1 pour évaluer la dérivée temporelle et en espace :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_i^n = \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + O(\Delta t).$$

• **Schéma implicite :**

Nous utilisons un schéma (en arrière) d'ordre 1 pour évaluer la dérivée temporelle et en espace :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_i^{n+1} = \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + O(\Delta t).$$

On constate que les inconnues à l'itération, $(n+1)$ sont reliées entre elles par une relation implicite (d'où le nom de la méthode).

Chapitre 4

Approximation de l'équation de la chaleur par le schéma de Crank-Nicolson

4.1 Le problème continu en D1

$u : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, vérifie : Si le domaine est borné, en temps et espace :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \frac{k}{c\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) & x \in]0, L[, t \in]0, T[, \\ u(x, 0) = u_0(x) & C.I., \\ u(0, t) = u(L, t) = 0 & C.L. \end{cases} \quad (4.1)$$

pour simplifier en prenons : $\frac{k}{c\rho} = 1$.

4.2 Discritisation du problème

En utilisant la méthode de différences finies :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_i^n &= \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + O(\Delta t), \\ \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_i^n &= \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2), \\ \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_i^{n+1} &= \frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2). \end{aligned}$$

4.2.1 Schéma de Crank-Nicolson

$$\begin{cases} \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = \frac{1}{2} \left(\frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{(\Delta x)^2} + \frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{(\Delta x)^2} \right), \\ u_i^0 = u_0(x_i), \forall i = 1 \dots M+1. \\ u_0^n = u_{N+1}^n = 0, \forall n = 1 \dots N. \end{cases} \quad (4.2)$$

4.3 Résolution numérique de l'EDP

Nous remplaçons les dérivées partielles par leurs approximations déjà établies pour avoir l'équation numérique suivante

$$\begin{aligned} \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} &= \frac{1}{2} \left(\frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{(\Delta x)^2} + \frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{(\Delta x)^2} \right) \\ \Rightarrow u_i^{n+1} - u_i^n &= \frac{\Delta t}{2(\Delta x)^2} (u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n + u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}). \end{aligned}$$

Posons $r = \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$, on trouve l'équation :

$$-\frac{1}{2}ru_{i-1}^{n+1} + (1+r)u_i^{n+1} - \frac{1}{2}ru_{i+1}^{n+1} = \frac{1}{2}u_{i-1}^n + (1-r)u_i^n + \frac{1}{2}u_{i+1}^n.$$

Ceci est le schéma numérique de Crank - Nicolson. Lorsque nous fixons j et faisons varier i, nous obtenons le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}ru_0^{n+1} + (1+r)u_1^{n+1} - \frac{1}{2}ru_2^{n+1} = \frac{1}{2}u_0^n + (1-r)u_1^n + \frac{1}{2}u_2^n \\ -\frac{1}{2}ru_1^{n+1} + (1+r)u_2^{n+1} - \frac{1}{2}ru_3^{n+1} = \frac{1}{2}u_1^n + (1-r)u_2^n + \frac{1}{2}u_3^n \\ -\frac{1}{2}ru_2^{n+1} + (1+r)u_3^{n+1} - \frac{1}{2}ru_4^{n+1} = \frac{1}{2}u_2^n + (1-r)u_3^n + \frac{1}{2}u_4^n \\ \vdots \\ \vdots \\ -\frac{1}{2}ru_{N-2}^{n+1} + (1+r)u_{N-1}^{n+1} - \frac{1}{2}ru_N^{n+1} = \frac{1}{2}u_{N-1}^n + (1-r)u_N^n + \frac{1}{2}u_{N+1}^n \end{cases}$$

Avec :

$$M_1 = \begin{pmatrix} (1+r) & -\frac{r}{2} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -\frac{r}{2} & (1+r) & -\frac{r}{2} & \ddots & & \vdots \\ 0 & -\frac{r}{2} & (1+r) & -\frac{r}{2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & -\frac{r}{2} & (1+r) & -\frac{r}{2} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -\frac{r}{2} & (1+r) \end{pmatrix}, \quad N_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}ru_0^{n+1} \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ -\frac{1}{2}ru_N^{n+1} \end{pmatrix}$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} (1-r) & \frac{r}{2} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \frac{r}{2} & (1-r) & \frac{r}{2} & \ddots & & \vdots \\ 0 & \frac{r}{2} & (1-r) & \frac{r}{2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \frac{r}{2} & (1-r) & \frac{r}{2} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \frac{r}{2} & (1-r) \end{pmatrix}, \quad N_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}ru_0^n \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{1}{2}ru_N^n \end{pmatrix}$$

$$M_1 U^{n+1} + N_1 = M_2 U^n + N_2$$

$$\Rightarrow M_1 U^{n+1} = [M_2 U^n + (N_2 - N_1)]$$

M_1 des matrices tridiagonale symétrique et définie positive, alors la matrice M_1^{-1} existe.

$$\Rightarrow U^{n+1} = M_1^{-1} [M_2 U^n + (N_2 - N_1)].$$

Ce système matriciel est linéaire d'ordre $n - 1$.

Donc le système admet une solution unique.

4.4 Consistance

Proposition 4.4.1.

Le schéma (4.2) pour la discrétisation du problème (4.1) est d'ordre 2 en espace. Il est d'ordre 2 en temps.

Démonstration :

On pose

$$u_j^n = u(x_j, t_n)$$

$$h = \frac{1}{N+1}$$

$$R_i^{(n)} = \frac{u_i^{(n+1)} - u_i^{(n)}}{\Delta t} + \frac{1}{2\Delta x^2}(-2u_i^{(n+1)} + u_{i-1}^{(n+1)} + u_{i+1}^{(n+1)}) + \frac{1}{2\Delta x^2}(-2u_i^{(n)} + u_{i-1}^{(n)} + u_{i+1}^{(n)})$$

On va montrer, en effectuant des développements limités, que : $|R_i^{(n)}| \leq C(\Delta t^2 + \Delta x^2)$ En effet, on décompose

$$R_i^{(n)} = T_i^{(n,1)} + \frac{1}{2}T_i^{(n,2)} + \frac{1}{2}T_i^{(n,3)}$$

avec :

$$T_i^{(n,1)} = \frac{u_i^{(n+1)} - u_i^{(n)}}{\Delta t}$$

$$T_i^{(n,2)} = \frac{1}{2\Delta x^2}(-2u_i^{(n+1)} + u_{i-1}^{(n+1)} + u_{i+1}^{(n+1)})$$

$$T_i^{(n,3)} = \frac{1}{2\Delta x^2}(-2u_i^{(n)} + u_{i-1}^{(n)} + u_{i+1}^{(n)})$$

Effectuons un développement limité pour calculer $T_i^{(n,1)}$:

$$T_i^{(n,1)} = u_t(x_i, t_n) + \frac{\Delta t}{2}u_{tt}(x_i, t_n) + R_1 \quad \text{avec } |R_1| \leq c\Delta t^2$$

Faisons de même pour $T_i^{(n,2)}$:

$$T_i^{(n,2)} = \frac{1}{2}(u_{xx}(x_i, t_{n+1}) + R_2) \quad \text{avec } |R_2| \leq c\Delta x^2$$

or $u_{xx}(x_i, t_{n+1}) = u_{xx}(x_i, t_n) + \Delta t u_{xxt}(x_i, t_n) + R_3$ avec $|R_3| \leq c\Delta t^2$ donc

$$T_i^{(n,2)} = \frac{1}{2}(u_{xx}(x_i, t_n) + \Delta t u_{xxt}(x_i, t_n) + R_4) \quad \text{avec } |R_4| \leq C(\Delta x^2 + \Delta t^2).$$

De même pour $T_i^{(n,3)}$ on a :

$$T_i^{(n,3)} = \frac{1}{2}(u_{xx}(x_i, t_n) + R_5) \quad \text{avec } |R_5| \leq c\Delta x^2$$

En regroupant, on obtient que

$$R_i^n = u_t(x_i, t_n) - u_{xx}(x_i, t_n) + \frac{\Delta t}{2}u_{tt}(x_i, t_n) - \frac{\Delta t}{2}u_{xxt}(x_i, t_n) + R$$

avec $R = R_1 + R_4 + R_5$ on a un schéma d'ordre 2 en temps et en espace.

En effet,

$$\frac{\Delta t}{2}u_{tt}(x_i, t_n) - \frac{\Delta t}{2}u_{xxt}(x_i, t_n) = \frac{\Delta t}{2}\frac{\partial}{\partial t}(u_t(x_i, t_n) - u_{xx}(x_i, t_n)) \quad \text{et} \quad u_t - u_{xx} = 0$$

$$\begin{aligned}
|R_i^n| &= |R_1 + R_4 + R_5| \\
|R_i^n| &\leq |R_1| + |R_4| + |R_5| \\
|R_i^n| &\leq c\Delta t^2 + c(\Delta x^2 + \Delta t^2) + c\Delta t^2 \\
|R_i^n| &\leq C(\Delta x^2 + \Delta t^2) \quad C = \max(c, 3c).
\end{aligned}$$

4.5 Stabilité

Nous étudierons la stabilité de trois manières :

- Stabilité au sens de Von Neuman.
- Stabilité matricielle.
- Stabilité en norme L^∞ .

4.5.1 Stabilité au sens de Von Neuman

Les schémas d'Euler implicite et de Crank-Nicolson sont inconditionnellement stables.

Démonstration :

On remplace les conditions aux limites de Dirichlet sur $[0, 1]$ par des conditions périodiques sur $[0, 2\pi]$. La solution exacte s'écrit alors :

$$u = \sum_{p \in \mathbb{Z}} c_p(0) e^{-p^2 t} e^{ipx}.$$

Prenons comme condition initiale $u_0(x) = e^{ipx}$. On a :

$$u_i^{(n+1)} - u_i^n = \frac{\Delta t}{\Delta x} - \left[\frac{1}{2}(2u_i^{(n+1)} - u_{i-1}^{(n+1)} - u_{i+1}^{(n+1)}) - \frac{1}{2}(2u_i^{(n)} - u_{i-1}^{(n)} - u_{i+1}^{(n)}) \right]$$

ce qui s'écrit encore, avec $\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$

$$(1 + \lambda)u_i^{(n+1)} - \frac{\lambda}{2}u_{i-1}^{(n+1)} - \frac{\lambda}{2}u_{i+1}^{(n+1)} = (1 + \lambda)u_i^{(n)} - \frac{\lambda}{2}u_{i-1}^{(n)} - \frac{\lambda}{2}u_{i+1}^{(n)}.$$

En discrétisant la condition initiale (mode de Fourier) on obtient $u_i^{(0)} = e^{ipjh}$ et on cherche le facteur d'amplification ξ_p tel que $u_i^1 = \xi_p u_i^0 = \xi_p e^{ipjh}$: en appliquant le schéma ci-dessus

pour en appliquant le schéma ci-dessus pour $n = 0$ on obtient :

$$(1 + \lambda)\xi_p - \frac{\lambda\xi_p}{2}[e^{-iph} + e^{iph}] = (1 - \lambda) + \frac{\lambda}{2}[e^{-iph} + e^{iph}],$$

et donc :

$$\xi_p = \frac{(1 - \lambda) + \frac{\lambda}{2}[e^{-iph} + e^{iph}]}{(1 + \lambda) - \frac{\lambda}{2}[e^{-iph} + e^{iph}]} = \frac{(1 - \lambda) + \lambda \cos ph}{(1 + \lambda) - \lambda \cos ph} = \frac{1 - \lambda(1 - \cos(ph))}{1 + \lambda(1 - \cos(ph))},$$

utiliser la relation : $\sin^2(a) = \frac{1 - \cos(2a)}{2}$.

$$\xi_p = \frac{1 - 2\lambda \sin^2(\frac{ph}{2})}{1 + 2\lambda \sin^2(\frac{ph}{2})}$$

Pour que le schéma soit stable au sens de Von Neumann, il faut que : $|\xi_p| < 1$ pour tout p , soit encore :

$$1 - 2\lambda \sin^2(\frac{ph}{2}) < 1 + 2\lambda \sin^2(\frac{ph}{2}).$$

L'inégalité est toujours vérifiée.

4.5.2 Stabilité matricielle

Soit le schéma suivant :

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = \frac{1}{2} \frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2} + \frac{1}{2} \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2},$$

poson : $r = \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$.

On a :

$$\begin{aligned} u_i^{n+1} - \frac{r}{2}(u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}) &= \frac{r}{2}(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n) + u_i^n \\ u_i^{n+1} + \frac{r}{2}(-u_{i+1}^{n+1} + 2u_i^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}) &= u_i^n - \frac{r}{2}(-u_{i+1}^n + 2u_i^n - u_{i-1}^n) \end{aligned}$$

on obtient la forme matricielle

$$u_i^{n+1} + \frac{r}{2}Au^{n+1} = (1 - \frac{r}{2}A)u^n$$

$$(I + \frac{r}{2}A)u^{n+1} = (I - \frac{r}{2}A)u^n$$

$A = \text{tridiagonale } (-1, 2, -1)$.

$$C = (I + \frac{r}{2}A)^{-1}(I - \frac{r}{2}A).$$

$$\lambda_k = 4 \sin^2\left(\frac{k\pi}{2(M+1)}\right) \quad k = 1 \dots M.$$

λ_k : Valeurs propres de A.

M_k : Valeurs propres de C.

$\rho(A)$: Rayon spectrale de A.

On soit que :

$$\rho(A) = \max |\lambda_k| = 4 \sin^2\left(\frac{k\pi}{2(M+1)}\right) \geq 0.$$

et :

$$r = \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \geq 0.$$

Donc :

$$\frac{r}{2} \lambda_k \geq 0.$$

Alors :

$$1 + \frac{r}{2} \lambda_k > 1 - \frac{r}{2} \lambda_k,$$

$$M_k = \frac{1 - \frac{r}{2} \lambda_k}{1 + \frac{r}{2} \lambda_k} < 1 \quad \forall \Delta t, \forall \Delta x.$$

Le schéma de Crank-Nicolson Toujours stable.

4.5.3 Stabilité en norme L^∞

Soit :

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = \frac{1}{2} \frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2} + \frac{1}{2} \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2},$$

poson :

$$r = \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$$

$$u_k^{n+1} = M = \max_j u_j^{n+1} \text{ donc } \frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2} = 0.$$

On a :

$$u_i^{n+1} = \frac{\Delta t}{2\Delta x^2} (u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n) + u_i^n$$

$$u_i^{n+1} = \frac{r}{2} u_{i+1}^n - r u_i^n + \frac{r}{2} u_{i-1}^n + u_i^n$$

$$u_i^{n+1} = (1-r)u_i^n + \frac{r}{2}u_{i+1}^n + \frac{r}{2}u_{i-1}^n.$$

La nombre à droite est une combinaison convexe car :

- $r = \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \geq 0$.
- $(1-r \geq 0) \Rightarrow r \leq 1$ donc : $\frac{\Delta t}{\Delta x^2} \leq 1 \Rightarrow \Delta t \leq \Delta x^2$.
- $1-r + \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = 1$. alors :

$$\begin{aligned} \|u_i^{n+1}\|_\infty &\leq \|u_i^n\|_\infty \\ \|u^n\|_\infty &\leq \|u^0\|_\infty. \end{aligned}$$

donc, le schéma est stable au sens de la norme L^∞ pour la conditions $\Delta t \leq \Delta x^2$, C.F.L .

Remarque 4.5.1.

La stabilité dépend de la norme utilisée.

4.6 Convergence

D'après le théorème de Lax 3.3.1, le schéma de C-N Consistant et stable en $\| \cdot \|_2$.

Donc le schéma converge.

Sous la condition $\Delta t \leq \Delta x^2$ le schéma de C-N convergente pour le norme $\| \cdot \|_\infty$.

4.7 L'erreur

Soient :

u_i^n : solution approximative.

$u(x_i, t^n)$: solution exacte

$$e_i^n = u(x_i, t^n) - u_i^n$$

$$\frac{u(x_i, t^{n+1}) - u(x_i, t^n)}{\Delta t} - \frac{u(x_{i+1}, t^n) - 2u(x_i, t^n) + u(x_{i-1}, t^n)}{2\Delta x^2} = R_i u \quad (4.3)$$

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} - \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{2\Delta x^2} = 0 \quad (4.4)$$

$$(4.3) - (4.4) \Leftrightarrow \frac{e_i^{n+1} - e_i^n}{\Delta t} - \frac{e_{i+1}^n - 2e_i^n + e_{i-1}^n}{2\Delta x^2} = R_i u$$

poson : $r = \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$

$$e_i^{n+1} = \frac{r}{2}e_{i+1}^n + \frac{r}{2}e_{i-1}^n + (1-r)e_i^n + \Delta t R_i u$$

• $r = \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \geq 0$

• $(1-r \geq 0) \Rightarrow r \leq 1$ *donc* : $\frac{\Delta t}{\Delta x^2} \leq 1 \Rightarrow \Delta t \leq \Delta x^2$

• $1-r + \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = 1$

donc e_i^n combinaison convexe

$$\|e_i^{n+1}\|_{\infty} \leq \|e^n\|_{\infty} + \Delta t \|R_i u\|_{\infty}$$

$$\|e_i^{n+1}\|_{\infty} \leq \|e^0\|_{\infty} + (n+1)\Delta t \|R_i u\|_{\infty}$$

$$\|e^{n+1}\|_{\infty} \leq CT(\Delta t^2 + \Delta x^2)$$

$$e^0 = u_0 - u_0 = 0$$

$$T(n+1)\Delta t, C = \text{constance}$$

4.8 Conclusion

Ce tableau récapitule ses auditeurs dans cette chapitre :

Schéma	Crank-Nicolson.
Consistance	$R_i^n \leq C(\Delta x^2 + \Delta t^2)$.
Stabilité au sens Von Neuman	Inconditionnellement stable pour la norme $\ \cdot \ _2$.
Stabilité matricielle	Toujours stable pour la norme $\ \cdot \ _2$.
Stabilité en norme L^∞	Stable sous la condition C.F.L , $\Delta t \leq \Delta x^2$.
La convergence	Pour la norme $\ \cdot \ _2$ le schéma converge sans conditions Pour la norme $\ \cdot \ _\infty$ le schéma converge sous la condition $\Delta t \leq \Delta x^2$.

Chapitre 5

Application

5.1 Problème modèle de la chaleur

On considère une corde de longueur L ($L=2\text{cm}$) fixée aux extrémités. L'équation de déplacement transversal au cours de temps s'écrit :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \frac{k}{c\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) & x \in]0, 2[, t \in]0, 3[, \\ u(x, 0) = u_0(x), & C.I \\ u(0, t) = u(2, t) = 0, & C.L \end{cases} \quad (5.1)$$

D'après le théorème 2.4.1, (5.1) admet une solution unique.

5.2 Discrétisation

Prendre $\Delta x = 0.25$, $\Delta t = 0.75$, $\frac{k}{c\rho} = 1$:

$$\begin{cases} \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = \frac{1}{2} \left(\frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{(\Delta x)^2} + \frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{(\Delta x)^2} \right) \\ u_i^0 = u_0(x_i) = 0, \quad i \in \{0, \dots, 9\} \\ u_0^n = u_9^n = 0, \quad i \in \{1, \dots, 4\} \end{cases} \quad (5.2)$$

5.3 Consistance

Le schéma est consistant d'ordre 2 en temps et d'ordre 2 en espace.

5.4 Stabilité

Le schéma de C-N stable en $\| \cdot \|_2$ sans condition.

Sous la condition $\Delta t \leq \Delta x^2$ le schéma de C-N stable pour le norme $\| \cdot \|_\infty$.

$$\begin{aligned} r &= \frac{k}{c\rho} \times \frac{\Delta t}{\Delta x} < \frac{1}{2} \\ \frac{0.13}{7.8 \times 0.11} \times \frac{\Delta t}{0.0625} &< \frac{1}{2} \\ \frac{0.13 \times \Delta t}{7.8 \times 0.11 \times 0.0625} &< \frac{1}{2} \\ \frac{0.13}{0.0536} \Delta t &< \frac{1}{2} \\ 2.4254 \Delta t &< \frac{1}{2} \\ \Delta t &< \frac{0.5}{2.4254} \\ \Delta t &< 0.2061 \end{aligned}$$

5.5 Convergence

D'après le théorème de Lax 3.3.1, le schéma de C-N est consistant et stable en $\| \cdot \|_2$.

Donc le schéma converge.

Sous la condition $\Delta t \leq \Delta x^2$ le schéma de C-N convergent pour la norme $\| \cdot \|_\infty$.

5.6 Résolution numérique

Les composantes de vecteur solution U est donné à partir le schéma suivant

Remarque 5.6.1.

Numération du bas vers haut et de la gauche vers la droite :

On a :

$$U = \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ u^3 \\ u^4 \end{pmatrix}$$

$$\text{Tel que : } u^1 = \begin{pmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \\ u_3^1 \\ u_4^1 \\ u_5^1 \\ u_6^1 \\ u_7^1 \end{pmatrix} ; u^2 = \begin{pmatrix} u_1^2 \\ u_2^2 \\ u_3^2 \\ u_4^2 \\ u_5^2 \\ u_6^2 \\ u_7^2 \end{pmatrix} ; u^3 = \begin{pmatrix} u_1^3 \\ u_2^3 \\ u_3^3 \\ u_4^3 \\ u_5^3 \\ u_6^3 \\ u_7^3 \end{pmatrix} ; u^4 = \begin{pmatrix} u_1^4 \\ u_2^4 \\ u_3^4 \\ u_4^4 \\ u_5^4 \\ u_6^4 \\ u_7^4 \end{pmatrix}$$

5.7 Programmation de la solution analytique

Soit :

$$U_{\text{exact}}(x, t) = 800 \times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\pi^2(2n+1)^2} \times \cos \frac{\pi(2n+1)(x-1)}{2} \times e^{-0.3738(2n+1)^2 t}$$

Puisque nous sommes en analyse numérique et non en analyse fondamentale nous devons savoir que nous ne travaillons qu'avec des points d'un maillage et non dans tout le domaine comme on aurait cru le faire. Pour évaluer la valeur numérique de u_{exact} pour tout point appartenant dans la grille, nous devons faire une boucle qui, pour chaque point (x_i, t_j) , calcule $U_{\text{exact}}(x_i, t_j)$.

Posons $\infty = 100$ acceptable en analyse numérique, nous avons donc le programme suivant qui calcule les éléments de la matrice v représentant exactement les valeurs de $U(x_i, t_j)$ dans le cadrillage.

On utilise maintenant un programme Matlab pour la résolution exacte de (5.1).

• Le programme :

```
clc; clear;
```

```

k=0.13;c=0.11; p=7.8;dx=0.25;
r=1/4
dt=dx*dx*c*p*r/k;
Tmax=100*dt;
cla=0; clb=0;
a=0;b=2;
nx=(b-a)/dx;
nt=Tmax/dt;
x=0:dx:b; t=0:dt:Tmax;
U_exacte=zeros(nx+1,nt+1);
n=0;
while(n <= 100)
for i=1:nx+1
for j=1:nt+1
U(i , j) = U_exacte(i , j)+800*1/(pi^2*(2*n+1)^2)*cos(pi*(2 *n+1)*(x(i)-1)/2)
*exp(-0.3738*(2*n + 1)^2*t(j));
U_exacte(i,j)=U(i,j);
end
end
n=n+1;
end
mesh(t,x,U_exacte)

```

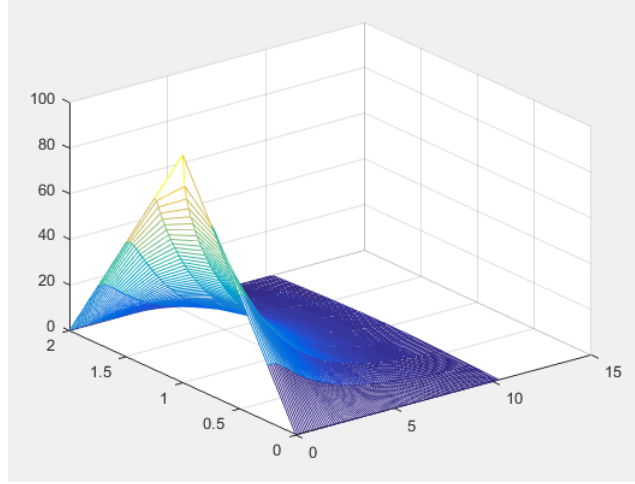


FIGURE 5.1 – Représentation graphique de la solution analytique $U_{exact}(x_i, t_j)$

5.7.1 Résultats numériques

$x \backslash t$	$u_{exacte}^1(t^1 = 0.75)$	$u_{exacte}^2(t^2 = 1.5)$	$u_{exacte}^3(t^3 = 2.25)$	$u_{exacte}^4(t^4 = 3)$
$x_1 = 0.25$	23.5854	18.7014	14.3404	10.5403
$x_2 = 0.5$	44.6794	34.6547	26.5063	19.4765
$x_3 = 0.75$	59.8495	45.4080	34.6436	25.4480
$x_4 = 1$	65.4529	49.2073	37.5031	27.5451
$x_5 = 1.25$	59.8495	45.4080	34.6436	25.4480
$x_6 = 1.5$	44.6794	34.6547	26.5063	19.4765
$x_7 = 1.75$	23.5854	18.7014	14.3404	10.5403

5.8 Programation de la solution par le schéma de Crank-Nicolson

Voici le programme qui sert à donner la courbe de la solution numérique de la méthode de Crank- Nicolson. Pour avoir la solution (la courbe) pour le deuxième cas, il suffit de remplacer r par 0.25 :

On utilise maintenant un programme Matlab pour la résolution approximation de (5.2)

• Le programme :

```
clc; clear;
k=0.13;c=0.11;
p=7.8;dx=0.25;
r=0.625;
dt=dx*dx*c*p*r/k;
Tmax=100*dt;
a=0;b=2;
cla=0;clb=0;
nx=(b-a)/dx; nt=Tmax/dt;
x=0:dx:b; t=0:dt:Tmax;
for i=1:nx-1
N1(i)=0;
N2(i)=0;
end
N2(1)=-r*cla;
N2(nx-1)=-r*clb;
for i=1:nx-2
M1(i,i)=2+2*r;
M1(i,i+1)=-r;
M1(i+1,i)=-r;
M2(i,i)=2-2*r;
M2(i,i+1)=r;
M2(i+1,i)=r;
end
M1(nx-1,nx-1)=2+2*r;
M2(nx-1,nx-1)=2-2*r;
for i=1:nx+1
if x(i)<1
Ci(i)=100*x(i);
```

```

else
Ci(i)=100*(2-x(i));
end
end
for i=1:nx-1
h(i)=Ci(i+1);
end
j=1;
h=h';
I=eye(nx-1)
while(j<nt+2)
for i=1:nx-1
U_app(i,j)=h(i);
end
h=(M1\I)*(M2*h+(N2'-N1')));
j=j+1;
end
for i=nx:-1:2
for j=nt+1:-1:1
U_app(i,j)=U_app(i-1,j);
end
end
for j=1:nt+1
U_app(1,j)=0;
U_app(nx+1,j)=0;
end
mesh(t,x,U_app);

```

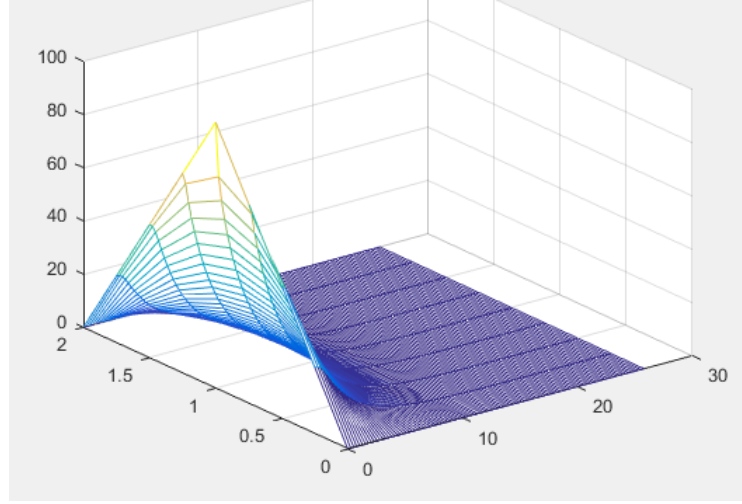


FIGURE 5.2 – Courbe de la solution numérique, méthode de C-N $U_{app}(x_i, t_j)$

5.8.1 Résultats numériques :

$x \backslash t$	$u_{app}^1(t^1 = 0.75)$	$u_{app}^2(t^2 = 1.5)$	$u_{app}^3(t^3 = 2.25)$	$u_{app}^4(t^4 = 3)$
$x_1 = 0.25$	23.3418	18.9956	14.2204	10.5763
$x_2 = 0.5$	44.3712	35.2720	26.2910	19.5437
$x_3 = 0.75$	59.7198	46.3116	34.3705	25.3568
$x_4 = 1$	65.4710	50.2292	37.2112	27.6416
$x_5 = 1.25$	59.7198	46.3116	34.3705	25.3568
$x_6 = 1.5$	44.3712	35.2720	26.2910	19.5437
$x_7 = 1.75$	23.3418	18.9956	14.2204	10.5763

5.9 Comparaison entre la solution approximative et la solution exacte :

$\begin{array}{c} t \\ \backslash \\ x \end{array}$	$u_{app}^4(t^4 = 3)$	$u_{exacte}^4(t^4 = 3)$	$e_i^n = u_{exacte} - u_{app} $
$x_1 = 0.25$	10.5763	10.5403	0.036
$x_2 = 0.5$	19.5437	19.4765	0.0672
$x_3 = 0.75$	25.5368	25.4480	0.0888
$x_4 = 1$	27.6416	27.5451	0.0965
$x_5 = 1.25$	25.5368	25.4480	0.0888
$x_6 = 1.5$	19.5437	19.4765	0.0672
$x_7 = 1.75$	10.5763	10.5403	0.036

Bibliographie

- [1] R. B. Kellogg A. Tsan, *Analysis of some difference approximations for a singularly perturbed problem without turning points*, Math Comp, 32(1978), 1025-1039
- [2] Haim Brezis, *Analyse fonctionnelle théorie et applications*, paris, 1987.
- [3] Alfio. Quarteroni, Riccardo. Sacco, Fausto. Saleri, *Méthodes Numériques Algorithmes, analyse et applications*, Springer-Verlag Italia, Milano 2004.
- [4] G. Allaire, *Analyse numérique et optimisation*, Éditions Ellipses, Paris (2006)
- [5] Fatima ezzahra El yahyaoui, *Résolution numérique des équation aux dérivées partielles elliptiques*, Université Sidi Mohammed Ben Abdellah, 09 juin 2016.
- [6] Laureène.Jouve, *Introduction aux méthodes numériques de résolution des équations aux dérivées partielles (EDP)*, octobre 2017.
- [7] G.stoltz, *Intégration des équations aux dérivées partielles*, paris, 12 février 2015.
- [8] P.G. Ciarlet *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation*. Masson (1982).
- [9] Curtis F. Gerald, Patrick O. Wheatley, *Applied Numerical Analysis*. Third Edition, AddisonWesley Publishing Company.
- [10] Raphaële Herbin. *Analyse numérique des équations aux dérivées partielles*. Engineering school. Marseille, 2011.
- [11] Dr Harnane. Yamina, *Méthodes numériques I-Méthodes des différences finies*, Cours, Université- Larbi Ben M'hidi-Oum El-Bouaghi, 2015-2016.
- [12] Francois Cuvelier, *Méthodes numériques, Notes de cours*, Université Paris XIII.
- [13] Eric Goncalvès, *Résolution numérique, discrétisation des EDP et EDO*, septembre 2005.

- [14] Sébastien. Charnoz et Adrian. Daerr, *Résolution numérique des équations aux dérivées partielles*, Univ Paris 7.

Résumé

Le but de ce travail est l'application du schéma de Crank-Nicolson pour l'équation de la chaleur, Après avoir étudié : la consistance, stabilité et la convergence du schéma.

Mots clés:

EDP- équation de la chaleur- Méthode de différences finies- schéma de Crank-Nicolson

Abstract

The aim of this work is the application of the Crank-Nicolson scheme for the chaleur equation, After studying: consistency, stability and convergence of the scheme

Keys words:

PDE - chaleur equation - finite differences method - Crank-Nicolson scheme

ملخص

الهدف من هذا العمل هو تطبيق طريقة كرانك نيكلسون لمعادلة الحرارة، بعد دراسة: التلاؤم، الإستقرار، التقارب للمعادلة.

الكلمات المفتاحية:

المعادلات التفاضلية الجزئية- معادلة الحرارة- الفروق المنتهية- طريقة كرانك نيكلسون.