



République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la
Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ ECHAHID HAMMA LAKHDAR
ELOUED

FACULTÉ DES SCIENCES ET DE TECHNOLOGIE

Mémoire de fin d'étude

LICENCE ACADEMIQUE

Domaine: Mathématiques et Informatique

Filière: Mathématiques

Spécialité: Modélisation mathématiques & simulation
numérique

Thème

Généralisation du théorème de
Cauchy-Lipchitz
dans le cas fractionnaire

Présenté par:

BALI Miloud

CHOUCHANI ABIDI Elhachemi

LAHRECH Salah

Sous la supervision de :

MENECEUR Bekkar

MAB

Année universitaire 2014 – 2015

Remerciement

La louange est à Allah, qui nous a facilité l'accomplissement de ce travail de recherche chose ne peut être qu'avec la volonté de Dieu -à lui la toute puissance et la Majesté- et que la louange initiale et finale appartient à Allah, Seigneur des mondes

*Aussi, il nous fait plaisir que nous, au commencement de ce travail, présentons nos grands remerciements, estimations et reconnaissances à notre encadreur puissant " **MENECEUR BEKKAR**" de nous avoir encourager moralement la durée de recherche et que ce travail est le fruit de ces encouragements*

Nous présentons nos véritables remerciements à toute personne, du proche ou du loin, qui nous a donné un coup de main, à fin de terminer ce travail de recherche
En fin, nous remercions vivement nos familles pour l'aide matérielle et morale durant la période de préparation

"Que la Grace et la paix soient sur notre prophète Muhammad ainsi que sur sa famille et ses compagnons".

Table des matières

Introduction	1
Notations et coventions	2
1 la dérivation fractionnaire	3
1.1 Terminologie	3
1.2 outils de base	5
1.2.1 La fonction Gamma et la fonction Béta	5
1.2.2 La Transformée de Laplace	5
1.3 Intégration fractionnaire	6
1.4 Dérivation fractionnaire	7
1.4.1 Approche de Grünwald-Letnikov	7
1.4.2 Approche de Riemann-Liouville	12
1.4.3 Approche de Caputo	14
1.5 Quelques propriétés des dérivées fractionnaires	16
1.5.1 Linéarité	16
1.5.2 Règle de Leibniz	17

2	Quelques type de théorème de Cauchy-Lipchitz	18
2.1	Fonction k-lipschiteziennes	18
2.2	Théorème de Cauchy-Lipschitz	19
2.3	Existence et unicité de la solution	23
3	Quelques théorème d'existence et unicité dans le cas fractionnaire	26
3.1	Equations différentielles fractionnaire	26
3.1.1	Equation différentielle fractionnaire linéaire	26
3.1.2	Equation différentielle fractionnaire de forme plus générale	28
3.1.3	Existence et unicité	33
3.2	Résolution numérique	35
3.2.1	Présentation de l'algorithme	36
3.2.2	Extension au système d'équations	37
3.3	Conclusion générale	38
	Bibliographie	39

Introduction générale

L'objectif principal de cette mémoire est l'étude du théorème de Cauchy-Lipchitz dans le cas fractionnaire ,où nous allons dans théorème de Cauchy-Lipchitz en remplaçant l'opérateur de dérivée entier par un opérateur de dérivée fractionnaire on obtient une équation différentielle est dite fractionnaire, l'objectif de ce travail étudier et démontrer d'existence et l'unicité de solution de cette problème .

Dans le premier chapitre: nous avons donné un aperçu du calcul fractionnaire.On a introduit trois approches des dérivées fractionnaires (l'approche de GrunwaldLetnikov, de Riemann Liouville et celle de Caputo) ainsi que leurs propriétés.

Au deuxième chapitre : nous avons donné et démontré le théorème de Cauchy-Lipchitz (présentent la fonction k -lipschitzienne,et étudier d'existence et l'unicité de solution de ce théorème).

Au troisième chapitre : nous avons discuté équations de dérivées fractionnaires pour lesquelles les conditions d'existence et d'unicité de la solution sont données, ainsi que des méthodes analytiques et numériques pour la résolution.

Notations et conventions

$\mathbb{R}$	Ensemble de nombres réels
$C^1(\mathbb{R}^n)$	Ensemble des fonctions différentiables
$\ \cdot\ $	Norme
Γ	Fonction Gamma
β	Fonction Bêta
ε	Une valeur positive proche de
Max	Maximum
Min	Minimum
$f^{(n)}$	La dérivée de f à l'ordre n
$\langle -, - \rangle$	produit scalaire
f, g	Deux fonctions
D^p	La dérivée fractionnelle d'ordre p
$\sum$	La somme
$\int$	L'intégrale

Chapitre 1

la dérivation fractionnaire

1.1 Terminologie

Les mathématiques sont l'art de donner des choses trompantes des noms. la belle et mystérieuse appellation (à première vue) "le calcul fractionnaire" est juste un de ces termes mal appropriés que sont l'essence des mathématiques.

Par exemple, nous connaissons de tels noms comme les naturels et les nombres réels que nous utilisons très souvent; réfléchissons un moment à ces noms. La notion d'un nombre naturel est une abstraction naturelle mais est-ce que le nombre est lui-même naturel ?

La notion d'un nombre réel est une généralisation de la notion d'un nombre naturel. Le mot réel accentue qu'on prétend à ce qu'il reflète des quantités réelles. Les nombres réels reflètent de vraies quantités, mais ceci ne peut changer le fait qu'elles n'existent pas. Tout est en ordre dans l'analyse mathématique, et la notion d'un nombre réel la facilite, mais si on veut calculer quelque chose, on se rend compte immédiatement qu'il n'y a aucune place pour les nombres réels dans le vrai monde; de nos jours, des calculs sont exécutés la plupart du temps sur les calculateurs numériques, qui peuvent fonctionner seulement avec les ensembles finis de fractions finies, qui servent à approcher d'irréels nombres réels.

Retournons à l'appellation "calcul fractionnaire". Il ne signifie pas le calcul des fractions. Il ne signifie pas non plus une fraction de n'importe quel calcul différentiel, intégral ou calcul de variations.

Le calcul fractionnaire est un nom pour la théorie d'intégrales et de dérivées d'ordre arbitraire, qui uni ent et généralisent les notions de différentiation d'ordre entier et d'intégration répétées n -fois. Considérons la suite infinie d'intégrales et dérivées répétées n -foi :

$$..... \int_a^t d\Gamma_2 \int_a^{\tau_2} f(t) d\Gamma_1. \int_a^t f(t) d\Gamma_1. f(t) . \frac{df(t)}{dt}, \frac{d^2 f(t)}{dt^2}$$

La dérivée d'ordre α réel quelconque peut être considérée comme une interpolation de cette suite d'opérateurs; pour laquelle on utilisera la notation suggérée et utilisée par Davis [3], à savoir

$${}_a D_t^\alpha f(t)$$

La courte appellation des dérivées d'ordre réel quelconque α est dérivées fractionnaires. Les indices a et t désignent les deux bornes liées à l'opération de différentiation fractionnaire; comme Ross [2] nous les appellerons les bornes de la différentiation fractionnaire. La présence des bornes dans le symbole de la différentiation partielle est essentielle. Ceci permet d'éviter des ambiguïtés dans les applications des dérivés fractionnaires aux problèmes réels.

Les mots intégrales fractionnaires signi ent, dans ce chapitre, intégrales fractionnaires d'ordre arbitraire et correspondant aux valeurs négatives de α . Nous n'utiliserons pas une notation différente pour les intégrales fractionnaires ; nous noterons l'intégrale fractionnaire d'ordre $\beta > 0$ par

$${}_a D_T^{-\beta}$$

Une équation différentielle fractionnaire est une équation contenant des dérivées fractionnaires; une équation intégrale fractionnaire est une équation intégrale contenant des intégrales fractionnaires. Un système d'ordre fractionnaire est un système décrit par une équation différentielle fractionnaire ou une équation intégrale fractionnaire ou un système de telles équations.

1.2 outils de base

1.2.1 La fonction Gamma et la fonction Béta

1. La fonction Γ d'Euler est une fonction qui prolonge la factorielle aux valeurs réelles et complexes[1].

Pour $\operatorname{Re}(\alpha) > 0$ on définit $\Gamma(\alpha)$ par :

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt \quad (1.2.1)$$

La fonction Γ s'étend (en une fonction holomorphe) à $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-$ tout entier On a :

$$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha \Gamma(\alpha)$$

et pour n entier on a $n! = \Gamma(n + 1)$, pour plus d'informations sur la fonction Γ voir [1]

2. La fonction Béta est définie par :

$$\beta(p; q) = \int_0^1 \tau^{p-1} (1 - \tau)^{q-1} d\tau = \frac{\Gamma(p) \Gamma(q)}{\Gamma(p + q)} \text{ avec } \operatorname{Re}(p) > 0 \text{ et } \operatorname{Re}(q) > 0$$

1.2.2 La Transformée de Laplace

1. Si la fonction f est d'ordre exponentiel α (c'est à dire qu'il existe deux constantes positives M et T telles que $|f(t)| \leq M e^{\alpha t}$ pour $t > T$) alors la fonction F de la variable complexe s définie par :

$$F(s) = L\{f(t)\}(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt$$

est appelée la transformée de Laplace de la fonction f .

2. On peut reconstituer f à partir de sa transformée F à l'aide de la transformée de Laplace inverse $f(t) = L^{-1}\{F(s)\}(t) = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{st} F(s) ds$ $c = \operatorname{Re}(s)$

3. La Transformée de Laplace du produit de deux fonctions f et g qui sont nulles pour $t < 0$ est égale au produit de leur transformées de Laplace.

4. La transformée de Laplace d'une dérivée d'ordre entier est :

$$\begin{aligned} L[f^{(n)}(t)](s) &= s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^{(k)}(0) \\ &= s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k f^{(n-k-1)}(0) \end{aligned}$$

5. La transformée de Laplace de la fonction t^{p-1} est :

$$L[t^{p-1}](s) = \Gamma(p) s^{-p}$$

1.3 Intégration fractionnaire

Considérons une fonction f définie pour $t > \alpha$ on pose

$$(If)(t) = \int_{\alpha}^t f(\tau) d\tau \quad ; \quad (I^2 f)(t) = \int_{\alpha}^t (If)(u) du = \int_{\alpha}^t \left(\int_{\alpha}^u f(\tau) d\tau \right) du$$

en répétant n fois on obtient d'après la formule de Cauchy

$$(I^n f)(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_{\alpha}^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau) d\tau$$

en utilisant la fonction Γ d'Euler(1.2.1) on aura (voir[3], [4]) la définition suivante :

Définition 1.3.1 soit $\alpha \in \mathbb{R}_+$; l'opérateur I^{α} , définit sur $L_1[a, b]$ par :

$$(I^{\alpha} f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{\alpha}^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau \quad (1.3.1)$$

pour $t \in [a, b]$ est appelé opérateur d'intégration fractionnaire de Riemann Liouville d'ordre α .

Théorème 1.3.1 soit $f \in L_1[a, b]$ et $\alpha > 0$, l'intégrale $(I^{\alpha} f)(t)$ existe pour tout $t \in [a, b]$ et la fonction $I^{\alpha} f$ elle même est un élément de $L_1[a, b]$. Pour la démonstration de ce théorème voir [4]

Remarque 1.3.1

1. pour $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ on a $I^\alpha \circ I^\beta = I^\beta \circ I^\alpha = I^{\alpha+\beta}$

2. **(Transformée de Laplace)** On prend $a = 0$, pour une fonction f qui possède la transformée de Laplace $F(s)$ dans le demi plan $\text{Re}(s) > 0$ nous avons :

$$L(I^\alpha f)(s) = s^{-\alpha} F(s)$$

Exemple 1.3.1

$$\begin{aligned} I^\alpha (t-a)^m &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} (\tau-a)^m d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (t-a)^{\alpha+m} \int_0^1 (1-x)^{\alpha-1} x^m dx \\ &= \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(\alpha+m+1)} (t-a)^{\alpha+m} \end{aligned}$$

pour $\alpha = 0.5$, $m = 1$ et $a = 0$ on aura $I^{0.5}(t) = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(2.5)} (t)^{1.5} = \frac{\sqrt{t^3}}{\Gamma(2.5)}$

1.4 Dérivation fractionnaire

Il y a beaucoup d'approches pour la dérivation fractionnaire, nous allons souligner les approches qui sont fréquemment utilisées dans les applications.

1.4.1 Approche de Grünwald-Letnikov

L'idée de cette approche est basée sur la remarque qu'on peut exprimer la dérivée d'ordre entier p (si p est positif) et l'intégrale répétée $(-p)$ fois (si p est négatif) d'une fonction f par la formule générale suivante :

$${}_a D_t^p f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} h^{-p} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{p}{k} f(t - kh) \text{ avec } \binom{p}{k} = \frac{p(p-1)\dots(p-k+1)}{k!}$$

qui représente la dérivée d'ordre entier p si $0 < p < n$ et l'intégrale répétée $(-p)$ fois si $-n < p < 0$ avec $nh = t - a$

La généralisation de cette formule pour p non entier

(avec $0 \leq n-1 < p < n$ et $(-1)^k \binom{p}{k} = \frac{-p(1-p)(2-p)\dots(k-p-1)}{k!} = \frac{\Gamma(k-p)}{\Gamma(k+1)\Gamma(-p)}$) nous donne:

$${}_a^G D_t^p f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} h^{-p} \sum_{k=0}^n \frac{\Gamma(k-p)}{\Gamma(k+1)\Gamma(-p)} f(t - kh) \quad (1.4.1)$$

et

$${}_a^G D_t^{-p} f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} h^p \sum_{k=0}^n \frac{\Gamma(k+p)}{\Gamma(k+1)\Gamma(p)} f(t - kh) = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_a^t (t - \tau)^{p-1} f(\tau) d\tau \quad (1.4.2)$$

si f est de classe C^n alors en utilisant l'intégration par parties on obtient :

$${}_a^G D_t^{-p} f(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a) (t-a)^{k+p}}{\Gamma(k+p+1)} + \frac{1}{\Gamma(n+p)} \int_a^t (t - \tau)^{n+p-1} f^{(n)}(\tau) d\tau \quad (1.4.3)$$

et aussi :

$${}_a^G D_t^p f(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a) (t-a)^{k-p}}{\Gamma(k-p+1)} + \frac{1}{\Gamma(n-p)} \int_a^t (t - \tau)^{n-p-1} f^{(n)}(\tau) d\tau \quad (1.4.4)$$

1. La dérivée d'une fonction constante au sens de Grünwald-Letnikov :

En générale la dérivée d'une fonction constante au sens de Grünwald-Letnikov n'est pas nul le ni constante.

si $f(t) = c$ et p non entier on a : $f^{(k)}(t) = 0$ pour $k = 1, 2, 3, \dots, n$

$${}_a^G D_t^p = \frac{C}{\Gamma(1-p)} (t-a)^{-p} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a) (t-a)^{k-p}}{\Gamma(k-p+1)} + \frac{1}{\Gamma(n-p)} \int_a^t (t-p)^{n-p-1} f^{(n)}(\tau) d\tau$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a) (t-a)^{k-p}}{\Gamma(k-p+1)} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{1}{\Gamma(n-p)} \int_a^t (t-p)^{n-p-1} f^{(n)}(\tau) d\tau = 0$$

$$\Rightarrow {}_a^G D_t^p = \frac{c}{\Gamma(1-p)} (t-a)^{-p}$$

2. la dérivée de $f(t) = (t-a)^\alpha$ au sens de Grünwald-Letnikov :

soit p non entier et $0 \leq n-1 \leq p < n$ avec $\alpha > n-1$ alors on a :
 $f^{(k)}(a) = 0$ pour $k = 0, 1, \dots, n-1$ et $f^{(n)}(\tau) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-n+1)} (\tau-a)^{\alpha-n}$ d'où

$${}_a^G D_t^p (t-a)^\alpha = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)} \int_a^t (t-\tau)^{n-p-1} (\tau-a)^{\alpha-n} d\tau$$

En faisant le changement de variable $\tau = a + s(t-a)$ on aura :

$$\begin{aligned} {}_a^G D_t^p (t-a)^\alpha &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)} \int_0^1 (t-\tau)^{n-p-1} (\tau-a)^{\alpha-n} d\tau \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)} (t-a)^{\alpha-p} \int_0^1 (1-s)^{n-p-1} s^{\alpha-n} ds \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+1) \beta(n-p, \alpha-n+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)} (t-a)^{\alpha-p} \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+1) \Gamma(n-p) \Gamma(\alpha-n+1)}{\Gamma(n-p) \Gamma(\alpha-n+1) \Gamma(\alpha-p+1)} (t-a)^{\alpha-p} \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-p+1)} (t-a)^{\alpha-p} \end{aligned}$$

par exemple ${}_0^G D_t^{\frac{1}{2}} t = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(1.5)} \sqrt{t} = \frac{\sqrt{t}}{\Gamma(1.5)}$

Propriétés 1. Composition avec les dérivées d'ordre entier

Pour m entier positif et p non entier on a :

$$\begin{aligned} \frac{d^m}{dt^m} ({}_a^G D_t^p f(t)) &= {}_a^G D_t^{m+p} f(t) \\ \text{et } {}_a^G D_t^p \left(\frac{d^m}{dt^m} f(t) \right) &= {}_a^G D_t^{m+p} f(t) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(\alpha) (t-\alpha)^{k-p-m}}{\Gamma(k-p-m+1)} \end{aligned}$$

Démonstration. Pour m entier positif et P non entier avec $(n-1 < p < n)$ on a :

$$\begin{aligned} \frac{d^m}{dt^m} ({}_a^G D_t^p f(t)) &= \sum_{k=0}^{n+m-1} \frac{f^{(k)}(\alpha) (t-\alpha)^{k-(p+m)}}{\Gamma(k-(p+m)+1)} \\ &+ \frac{1}{\Gamma(n+m-(p+m))} \int_\alpha^t (t-\tau)^{n+m-(p+m)-1} f^{(n+m)}(\tau) d\tau \end{aligned}$$

alors

$$\frac{d^m}{dt^m} ({}_a^G D_t^p f(t)) = {}_a^G D_t^{m+p} f(t)$$

mais

$$\begin{aligned} {}_a^G D_t^p \left(\frac{d^m}{dt^m} f(t) \right) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(m+k)}(a) (t-a)^{k-(p+m)}}{\Gamma(k-p+1)} + \frac{1}{\Gamma(n-p)} \int_a^t (t-\tau)^{n-p-1} f^{(n+m)}(\tau) d\tau \\ &= \sum_{k=0}^{n+m+1} \frac{f^{(k)}(\alpha) (t-\alpha)^{k-(p+m)}}{\Gamma(k-(p+m)+1)} + \frac{1}{\Gamma(n+m-(p+m))} \int_\alpha^t (t-\tau)^{n+m-(p+m)-1} f^{(n+m)}(\tau) d\tau \\ &\quad - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(\alpha) (t-\alpha)^{k-p-m}}{\Gamma(k-p-m+1)} \\ &= {}_\alpha^G D_t^{m+p} f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(\alpha) (t-\alpha)^{k-p-m}}{\Gamma(k-p-m+1)} \end{aligned}$$

On déduit alors que la différentiation fractionnaire et la différentiation conventionnelle ne commutent que si: $f^{(k)}(\alpha) = 0$ pour tout $k = 0, 1, 2, \dots, m-1$ ■

2. Composition avec les dérivées fractionnaires

* Si $q < 0$ et $p \in \mathbb{R}$ alors :

$${}_a^G D_t^p ({}_a^G D_t^q (f(t))) = {}_a^G D_t^{p+q} f(t)$$

*Si $0 \leq m-1 < q < m$ et $p < 0$ alors :

$${}_a^G D_t^p ({}_a^G D_t^q (f(t))) = {}_a^G D_t^{p+q} f(t)$$

seulement si $f^{(k)}(a) = 0$ pour tout $k = 0, 1, 2, \dots, m-2$

*Si $0 \leq m-1 < q < m$ et $0 \leq n-1 < p < n$ alors :

$${}_a^G D_t^p ({}_a^G D_t^q (f(t))) = {}_a^G D_t^q ({}_a^G D_t^p f(t)) = {}_a^G D_t^{p+q} f(t)$$

seulement si $f^{(k)}(\alpha) = 0$ pour tout $k = 0, 1, 2, \dots, r-2$ avec $r = \max(m, n)$

Démonstration. *Si $q < 0$ et $p < 0$ alors:

$$\begin{aligned}
 {}^G D_t^p ({}^G D_t^q f(t)) &= \frac{1}{\Gamma(-p)} \int_{\alpha}^t (t-\tau)^{-p-1} ({}^G D_t^q f(t)) d\tau \\
 &= \frac{1}{\Gamma(-p)\Gamma(-q)} \int_{\alpha}^t (t-\tau)^{-p-1} d\tau \int_{\alpha}^{\tau} (\tau-s)^{-q-1} f(s) ds \\
 &= \frac{1}{\Gamma(-p)\Gamma(-q)} \int_{\alpha}^t f(s) ds \int_s^t (\tau-s)^{-q-1} (t-\tau)^{-p-1} d\tau \\
 &= \frac{1}{\Gamma(-(p+q))} \int_{\alpha}^t (t-s)^{-p-q-1} ds \\
 &= {}^G D_t^{p+q} f(t)
 \end{aligned}$$

*Si $q < 0$ et $0 \leq n-1 < p < n$ on a $p = n + (p-n)$ avec $(p-n) < 0$ alors :

$$\begin{aligned}
 {}^G D_t^p ({}^G D_t^q f(t)) &= \frac{d^n}{dt^n} \{ {}^G D_t^{p-n} ({}^G D_t^q f(t)) \} \\
 &= \frac{d^n}{dt^n} ({}^G D_t^{q+p-n} f(t)) \\
 &= {}^G D_t^{p+q} f(t)
 \end{aligned}$$

* pour $0 \leq m-1 < q < m$ et $p < 0$ on a :

$${}^G D_t^q = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(\alpha) (t-\alpha)^{k-q}}{\Gamma(k-q+1)} + \frac{1}{\Gamma(m-q)} \int_{\alpha}^t (t-\tau)^{m-q-1} f^{(m)}(\tau) d\tau$$

et $(t-a)^{k-q}$ ont des singularités non-intégrables donc ${}^G D_t^p ({}^G D_t^q f(t))$ n'existe que si $f^{(k)}(a) = 0$ pour tout $k = 0, 1, 2, \dots, m-2$ et dans ce cas on a :

$${}^G D_t^q f(t) = \frac{f^{(m-1)}(\alpha) (t-\alpha)^{m-1-q}}{\Gamma(m-q)} + {}^G D_t^{q-m} f^{(m)}(t)$$

alors

$$\begin{aligned}
 {}^G D_t^p ({}^G D_t^q f(t)) &= \frac{f^{(m-1)}(\alpha) (t-\alpha)^{m-1-q-p}}{\Gamma(m-q-p)} + {}^G D_t^{p+q-m} f^{(m)}(t) \\
 &= \frac{f^{(m-1)}(\alpha) (t-\alpha)^{m-(q+p)-1}}{\Gamma(m-p-q)} + \frac{1}{\Gamma(m-(p+q))} \int_{\alpha}^t (t-\tau)^{m-(p+q)-1} f^{(m)}(\tau) d\tau \\
 &= {}^G D_t^{p+q} f(t)
 \end{aligned}$$

* pour $0 \leq m-1 < q < m$ et $0 \leq n-1 < p < n$ on a :

$$\begin{aligned} {}^G D_t^p ({}^G D_t^q (f(t))) &= \frac{d^n}{dt^n} \{ {}^G D_t^{p-n} ({}^G D_t^q (f(t))) \} \\ Si f^{(k)}(a) &= 0 \text{ pour tout } k = 0, 1, 2, \dots, m-2 \text{ alors:} \\ {}^G D_t^{p-n} ({}^G D_t^q f(t)) &= {}^G D_t^{q+p-n} (f(t)) \text{ par suite:} \\ {}^G D_t^p ({}^G D_t^q (f(t))) &= \frac{d^n}{dt^n} ({}^G D_t^{q+p-n} (f(t))) \\ &= {}^G D_t^{p+q} f(t) \end{aligned}$$

■

3. Transformée de Laplace

Soit f une fonction qui possède la transformée de Laplace $F(s)$ pour $0 \leq p < 1$ on a :

$$\begin{aligned} {}^G D_t^p f(t) &= \frac{f(0) t^{-p}}{\Gamma(1-p)} + \frac{1}{\Gamma(1-p)} \int_0^t (t-\tau)^{-p} f'(\tau) d\tau \text{ alors:} \\ L[{}^G D_t^p f(t)](s) &= \frac{f(0)}{S^{1-p}} + \frac{1}{S^{1-p}} [sF(s) - f(0)] \\ &= s^p F(s) \end{aligned}$$

Pour $p \geq 1$ il n'existe pas de transformée de Laplace dans le sens classique mais dans le sens des distributions on a aussi:

$$L[{}^G D_t^p f(t)](s) = s^p F(s)$$

1.4.2 Approche de Riemann-Liouville

Soit f une fonction intégrable sur $[a; t]$ alors la dérivée fractionnaire d'ordre p (avec $n-1 \leq p < n$) au sens de Riemann-Liouville est définie par:

$$\begin{aligned} {}^R D_t^p f(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-p)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t-\tau)^{n-p-1} f(\tau) d\tau \\ &= \frac{d^n}{dt^n} (I^{n-p} f(t)) \end{aligned} \tag{1.4.5}$$

Remarque 1.4.1 Si f est de classe C^n alors en faisant des intégrations par parties et des différentiations répétées on obtient :

$$\begin{aligned} {}^R D_t^p f(t) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a) (t-a)^{k-p}}{\Gamma(k-p+1)} + \frac{1}{\Gamma(n-p)} \int_a^t (t-\tau)^{n-p-1} f^{(n)}(\tau) d\tau \\ &= {}^G D_t^p f(t) \end{aligned}$$

Dans ce cas l'approche de Grünwald-Letnikov et l'approche de Riemann-Liouville sont équivalentes.

Exemple 1.4.1

1. La dérivée non entière d'une fonction constante au sens de Riemann-Liouville.

En générale la dérivée non entière d'une fonction constante au sens de Riemann-Liouville n'est pas nulle ni constante mais on a :

$${}_a^R D_t^p C = \frac{C}{\Gamma(1-p)} (t-a)^{-p}$$

2. La dérivée de $f(t) = (t-a)^\alpha$ au sens de Riemann-Liouville.

Soit p non entier et $0 \leq n-1 < p < n$ et $\alpha > -1$ alors on a :

$${}_a^R D_t^p (t-a)^\alpha = \frac{1}{\Gamma(n-p)} \int_a^t (t-\tau)^{n-p-1} (\tau-a)^\alpha d\tau$$

En faisant le changement de variable $\tau = \alpha + s(t-a)$ on aura :

$$\begin{aligned} {}_a^R D_t^p (t-a)^\alpha &= \frac{1}{\Gamma(n-p)} \frac{d^n}{dt^n} (t-a)^{n+\alpha-p} \int_0^1 (1-s)^{n-p-1} s^\alpha ds \\ &= \frac{\Gamma(n+\alpha-p+1) \beta(n-p, \alpha+1)}{\Gamma(n-p) \Gamma(\alpha-p+1)} (t-a)^{\alpha-p} \\ &= \frac{\Gamma(n+\alpha-p+1) \Gamma(n-p) \Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n-p) \Gamma(\alpha-p+1) \Gamma(n+\alpha-p+1)} (t-a)^{\alpha-p} \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-p+1)} (t-a)^{\alpha-p} \end{aligned}$$

$$\text{Par exemple } {}_0^R D_t^{0.5} t^{0.5} = \frac{\Gamma(1.5)}{\Gamma(1)} = \Gamma(1.5)$$

Propriétés:

1. Composition avec l'intégrale fractionnaire

* ${}_a^R D_t^p (I^p f(t)) = f(t)$; alors l'opérateur de différentiation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville est un inverse gauche de l'opérateur d'intégration fractionnaire, et en générale on a :

$${}_a^R D_t^p (I^q f(t)) = {}_a^R D_t^{p-q} f(t)$$

(si $p-q < 0$ on pose ${}_a^R D_t^{p-q} f(t) = I_t^{q-p} f(t)$)

$$* {}_a^R D_t^{-p} ({}_a^R D_t^q f(t)) = {}_a^R D_t^{p-q} f(t) - \sum_{k=0}^m \left[{}_a^R D_t^{q-k} f(t) \right]_{t=0} \frac{(t-a)^{p-k}}{\Gamma(p-k+1)}$$

(avec $m - 1 \leq q < m$) on déduit alors que la différentiation et l'intégration fractionnaire ne commutent pas en général.

2. Composition avec les dérivées d'ordre entier

$$\begin{aligned} \frac{d^n}{dt^n} ({}_a^R D_t^p f(t)) &= {}_a^R D_t^{n+p} f(t) \\ \text{mais } {}_a^R D_t^p \left(\frac{d^n}{dt^n} f(t) \right) &= {}_a^R D_t^{n+p} f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a) (t-a)^{k-p-n}}{\Gamma(k-p-n+1)} \end{aligned}$$

On déduit alors que la différentiation fractionnaire et la différentiation conventionnelle ne commutent que si : $f^{(k)}(a) = 0$ pour tout $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$

3. Composition avec les dérivées fractionnaires:

Soit $n-1 \leq p < n$ et $m-1 \leq q < m$ alors :

$$\begin{aligned} {}_a^R D_t^p ({}_a^R D_t^q f(t)) &= {}_a^R D_t^{p+q} f(t) - \sum_{k=0}^m \left[{}_a^R D_t^{q-k} f(t) \right]_{t=a} \frac{(t-a)^{-p-k}}{\Gamma(-p-k+1)} \quad \text{et} \\ {}_a^R D_t^q ({}_a^R D_t^p f(t)) &= {}_a^R D_t^{p+q} f(t) - \sum_{k=0}^n \left[{}_a^R D_t^{p-k} f(t) \right]_{t=a} \frac{(t-a)^{-q-k}}{\Gamma(-q-k+1)} \end{aligned}$$

par suite deux opérateurs de dérivations fractionnaires ${}_a^R D_t^p$ et ${}_a^R D_t^q$ ne commutent que si $p = q$ et $\left[{}_a^R D_t^{p-k} f(t) \right]_{t=a} = 0$ pour tout $k = 1, 2, \dots, n$ et $\left[{}_a^R D_t^{q-k} f(t) \right]_{t=a} = 0$ pour tout $k = 1, 2, \dots, m$.

4. Transformée de Laplace:

Si f possède la transformée de Laplace $F(s)$ alors :

$$L \{ {}_0^R D_t^p f(t); (s) \} = s^p F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k \left[{}_0^R D_t^{p-k-1} f(t) \right]_{t=0} \quad (\text{avec } n-1 \leq p < n)$$

L'application de cette transformée est limitée à cause de l'absence de l'interprétation physique des valeurs limites des dérivées fractionnaires en la borne inférieure $t = 0$.

1.4.3 Approche de Caputo

Dans la modélisation mathématique l'utilisation des dérivées fractionnaires au sens de Riemann-Liouville mène à des conditions initiales contenant les valeurs limites des dérivées fractionnaires en la borne inférieure $t = a$

.Une certaine solution de ce problème a été proposée par M .Caputo.

soit $p \geq 0$ (avec $n - 1 \leq p < n$ et $n \in \mathbb{N}^*$) f est une fonction telle que $\frac{d^n}{dt^n} f \in L_1 [a, b]$ La dérivée fractionnaire d'ordre p de f au sens de Caputo est définie par :

$$\begin{aligned} {}^C D_t^p f(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-p)} \int_a^t (t-\tau)^{n-p-1} f^{(n)}(\tau) d\tau \\ &= I^{n-p} \left(\frac{d^n}{dt^n} f(t) \right) \end{aligned}$$

propriétés

1.Relation avec la dérivée de Riemann Liouville:

soit $p \geq 0$ (avec $n - 1 \leq p < n$ et $n \in \mathbb{N}^*$) supposons que f est une fonction telle que ${}^C D_t^p f$ et ${}^R D_t^p f$ existent alors :

$${}^C D_t^p f(t) = {}^R D_t^p f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(\alpha) (t-a)^{k-p}}{\Gamma(k-p+1)}$$

On déduit que si $f^{(k)}(\alpha) = 0$ pour $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ on aura ${}^C D_t^p f(t) = {}^R D_t^p f(t)$

2.Composition avec l'opérateur d'intégration fractionnaire

Si f est continue on a :

$${}^C D_t^p I_a^p f = f \quad \text{et} \quad I_a^p {}^C D_t^p f(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(\alpha) (t-a)^k}{k!}$$

Alors l'opérateur de dérivation de Caputo est un inverse gauche de l'opérateur d'intégration fractionnaire mais il n'est pas un inverse droite.

3.Transformée de Laplace

Si f possède la transformée de Laplace $F(s)$ alors :

$$L \left[{}^C D_t^p f(t) \right] (s) = s^p F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{p-k-1} f^{(k)}(0) \quad (\text{avec } n-1 \leq p < n)$$

Comme cette transformée induit les valeurs de la fonction f et ces dérivées $f^{(k)}$ en la borne inférieure $t = 0$ pour lesquelles certaine interprétation physique existe elle peut être très utile dans l'application .

1. La dérivée d'une fonction constante au sens de Caputo .

La dérivée d'une fonction constante au sens de Caputo est nulle : ${}_a^C D_t^p C = 0$

2. La dérivée de $f(t) = (t - a)^\alpha$ au sens de Caputo .

soit p non entier et $0 \leq n - 1 < p < n$ avec $\alpha > n - 1$ alors on a :

$$f^{(n)}(\tau) = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha - n + 1)} (\tau - a)^{\alpha - n} \quad \text{d'où}$$

$${}_a^C D_t^p (t - a)^\alpha = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(n - p) \Gamma(\alpha - n + 1)} \int_a^t (t - \tau)^{n - p - 1} (\tau - a)^{\alpha - n} d\tau$$

En faisant le changement de variable $\tau = a + s(t - a)$ on aura :

$$\begin{aligned} {}_a^C D_t^p (t - a)^\alpha &= \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(n - p) \Gamma(\alpha - n + 1)} \int_a^t (t - \tau)^{n - p - 1} (\tau - a)^{\alpha - n} d\tau \\ &= \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(n - p) \Gamma(\alpha - n + 1)} (t - a)^{\alpha - p} \int_0^1 (1 - s)^{n - p - 1} s^{\alpha - n} ds \\ &= \frac{\Gamma(\alpha + 1) \beta(n - p, \alpha - n + 1)}{\Gamma(n - p) \Gamma(\alpha - n + 1)} (t - a)^{\alpha - p} \\ &= \frac{\Gamma(\alpha + 1) \Gamma(n - p) \Gamma(\alpha - n + 1)}{\Gamma(n - p) \Gamma(\alpha - n + 1) \Gamma(\alpha - p + 1)} (t - a)^{\alpha - p} \\ &= \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha - p + 1)} (t - a)^{\alpha - p} \end{aligned}$$

1.5 Quelques propriétés des dérivées fractionnaires

1.5.1 Linéarité

La différentiation fractionnaire est une opération linéaire :

$$D^p (\lambda f(t) + \mu g(t)) = \lambda D^p f(t) + \mu D^p g(t)$$

où D^p désigne n'importe quelle approche de dérivation considérée dans ce mémoire.

1.5.2 Règle de Leibniz

Pour n entier on a :

$$\frac{d^n}{dt^n} (f(t) \cdot g(t)) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(t) g^{(n-k)}(t)$$

La généralisation de cette formule nous donne :

$$D^p (f(t) \cdot g(t)) = \sum_{k=0}^n \binom{p}{k} f^{(k)}(t) D^{p-k} g(t) - R_n^p(t)$$

$$\text{ou } n \geq p+1 \text{ et } R_n^p(t) = \frac{1}{n! \Gamma(-p)} \int_{\alpha}^t (t-\tau)^{-p-1} g(\tau) d\tau \int_{\tau}^t f^{(n+1)}(\xi) (\tau-\xi)^n d\xi.$$

$$\left(\text{on a } \lim_{n \rightarrow +\infty} R_n^p(t) = 0 \right)$$

Si f et g avec toutes ses dérivées sont continues dans $[a, t]$ la formule devient :

$$D^p (f(t) \cdot g(t)) = \sum_{k=0}^n \binom{p}{k} f^{(k)}(t) D^{p-k} g(t)$$

D^p est la dérivée fractionnaire au sens de Grünwald-Letnikov et au sens de RiemannLiouville.

Chapitre 2

Quelques type de théorème de Cauchy-Lipchitz

2.1 Fonction k-lipschiteziennes

soit M et N deux espaces métriques. Soit g une application de M dans N . Soit K un nombre réel. On dit que g est k-lipschitzienne[10] si

$$\forall x, y \in M, d(g(x), g(y)) \leq k.d(x, y).$$

On dira aussi que qu'une fonction f est localement lipschitzienne, si tout point possède un voisinage sur lequel f est lispchitzienne.

1. Il est immédiat de vérifier que toute fonction k-lipschitzienne est continue.

2. La réciproque n'est pas vraie : il existe des fonctions continues qui ne sont pas lipschitziennes, même localement. Un exemple simple est la fonction f de $\mathbb{R}$ dans lui-même définie par $x \rightarrow \sqrt{x}$. comme

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|f(x) - f(0)|}{|x - 0|} = +\infty,$$

la fonction f n'est lipschitzienne pour la métrique usuelle sur aucun voisinage de 0. item

3. Par contre, soit E et F deux espaces vectoriels normés. Soit U un ouvert de E . Soit f définie sur U à valeurs dans F . Si f est C^1 sur U , alors f est localement lipschitzienne. En effet, la différentielle de f dépend continûment du point. Dès lors, tout point x de U possède un voisinage convexe C -une boule - sur lequel $\|Df\|$ est bornée par un nombre k .

D'après le théorème des accroissements finis on a.

$$\forall x, y \in C, \|f(x) - f(y)\| \leq k \|x - y\|.$$

2.2 Théorème de Cauchy-Lipschitz

Une fonction:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m &\rightarrow \mathbb{R}^p \\ (t, y) &\rightarrow f(t, y) \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

est **localement Lipschitz** en y au point (t_0, y_0) si il existe des voisinages V de t_0 et W de y_0 et un nombre $k > 0$ tels que pour tout $(t, y) \in V \times W$ on ait

$$\|f(t_0, y_0) - f(y, y_0)\| \leq k \|y - y_0\|. \quad (2.2.2)$$

La fonction est localement Lipschitz sur un ouvert U et $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ si elle est localement Lipschitz en chaque point de U

Proposition 2.2.1 (*Limite uniforme de fonctions continues*[11])

Soit X un espace topologique et (Y, d) un espace métrique. Si une suite de fonctions $f_n : X \rightarrow Y$ continues converge uniformément, alors la limite est séquentiellement continue.

Démonstration.

Soit $a \in X$ et prouvons que f est séquentiellement continue en a . Pour cela nous considérons une suite $x_n \rightarrow a$ dans X . Nous savons que $f(x_n) \xrightarrow{Y} f(x)$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, tout $n \in \mathbb{N}$

et tout $x \in X$ nous avons la majoration

$$\|f(x_n) - f(x)\| \leq \|f(x_n) - f_k(x_n)\| + \|f_k(x_n) - f_k(x)\| + \|f_k(x) - f(x)\| \quad (2.2.3)$$

$$\leq 2 \|f - f_k\|_\infty + \|f_k(x_n) - f_k(x)\|. \quad (2.2.4)$$

Soit $\varepsilon > 0$. Si nous choisissons k suffisamment grand le premier terme est plus petit que ε . Et par continuité de f_k , en prenant n assez grand, le dernier terme est également plus petit que ε . ■

Proposition 2.2.2 .

Soit X un espace topologique métrique compact et (Y, d) un espace métrique complet. Alors l'espace des fonctions continues $X \rightarrow Y$ muni de la norme uniforme $(C(X, Y), \|\cdot\|_\infty)$ est complet.

Démonstration.

Notons que l'hypothèse de compacité de X sert à donner un sens à la norme uniforme : vu que X est compact et que les fonctions sont continues, elles sont bornées. Soit (f_n) une suite de Cauchy dans $C(X, Y)$, c'est à dire que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que si $k, l > N$ nous avons $\|f_k - f_l\|_\infty \leq \varepsilon$. Cette suite vérifie le critère de Cauchy uniforme et donc converge uniformément vers une fonction $f : X \rightarrow Y$. La continuité de la fonction f découle de la convergence uniforme et de la proposition (Limite uniforme de fonctions continues) (c'est pour avoir l'équivalence entre la continuité séquentielle et la continuité normale que nous avons pris l'hypothèse d'espace métrique). ■

Lemme 2.2.1 Soient A et B deux espaces compacts. L'ensemble des fonctions continues de A vers B muni de la norme uniforme est complet.

Démonstration.

Soit (f_k) une suite de Cauchy de fonctions dans $C(A, B)$. Pour chaque $x \in A$ nous avons

$$\|f_k(x) - f_l(x)\|_B \leq \|f_k - f_l\|_\infty \quad (2.2.5)$$

de telle sorte que la suite $(f_k(x))$ est de Cauchy dans B et converge donc vers un élément de B . La suite de Cauchy (f_k) converge donc ponctuellement vers une fonction $f : A \rightarrow B$. Nous devons encore voir que cette fonction est continue ; ce sera l'uniformité de la norme qui donnera la continuité. En effet soit $x_n \rightarrow x$ une suite dans A convergent vers $x \in A$. Pour chaque $k \in \mathbb{N}$ nous avons

$$\|f(x_n) - f(x)\| \leq \|f(x_n) - f_k(x_n)\| + \|f_k(x_n) - f_k(x)\| + \|f_k(x) - f(x)\| \quad (2.2.6)$$

En prenant k et n assez grands, cette expression peut être rendue aussi petite que l'on veut ; le premier et le troisième terme par convergence ponctuelle $f_k \rightarrow f$ le second terme par continuité de f_k . La suite $f(x_n)$ est donc convergente vers $f(x)$ et la fonction f est continue. ■

Théorème 2.2.1 (Cauchy-Lipschitz[11]).

Nous considérons l'équation différentielle

$$\begin{cases} y' &= f(t, y) \\ y(t_0) &= y_0 \end{cases} \quad (2.2.7)$$

avec $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ où U est un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Nous supposons que f est continue sur U et localement Lipschitz par rapport à y . Alors le système (2.2.7) admet une unique solution maximale. Cette solution est C^1 .

L'écriture $\ll y' = f(t; y) \gg$ est un abus de notation pour demander que pour chaque t nous ayons $y'(t) = f(t; y(t))$.

Démonstration.

Si y est une solution de l'équation différentielle considérée, elle vérifie :

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(u, y(u)) du \quad (2.2.8)$$

Ceci nous incite à considérer l'opérateur $\Phi : F \rightarrow F$ défini par

$$\Phi(y)(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(u, y(u)) du \quad (2.2.9)$$

■

Cylindre de sécurité et espace fonctionnel :

Précisons l'espace fonctionnel F adéquat. Soient V et W les voisinages de t_0 et y_0 sur lesquels f est localement Lipschitz. Nous considérons les quantités suivantes :

- (1) $\sup_{v \times w} f$;
- (2) $r > 0$ tel que $\overline{B(y_0, r)} \subset V$
- (3) $T > 0$ tel que $\overline{B(t_0, T)} \subset W$ et $T < r/M$

Nous considérons alors F , l'ensemble des fonctions continues $\overline{B(t_0, T)} \rightarrow \overline{B(y_0, r)}$ muni de la norme uniforme. Par le lemme (2.2.1) l'espace F est complet.

Le fait que $\Phi(y)$ soit continue lorsque y est continue est une propriété de l'intégration et du fait que f soit continue en ses deux variables. Prouvons que $\Phi(y)(t) \in \overline{B(y_0, r)}$. Pour cela, notons que

$$|\Phi^p(y)(t) - y_0| \leq \int_{t_0}^t |f(u, y(u))| du \leq |t - t_0| \|f\|_\infty \quad (2.2.10)$$

Étant donné que $t \in \overline{B(t_0, T)}$ nous avons $|t - t_0| \leq r/M$ et donc $|\Phi(y)(t) - y_0| \leq r$.

L'équation (2.2.8) signifie que y est un point fixe de Φ . L'espace $\mathcal{F}$ étant complet le théorème de point fixe de Picard s'applique. Nous allons montrer qu'il existe un $p \in \mathbb{N}$ tel que Φ^p soit contractante. Par conséquent Φ^p aura un unique point fixe qui sera également unique point fixe de Φ .

Une contraction Prouvons donc que Φ^p est contractante pour un certain p . Pour cela nous commençons par montrer la formule suivante par récurrence :

$$\|\Phi^p(x)(t) - \Phi^p(y)(t)\| \leq \frac{k^p |t - t_0|}{p!} \|x - y\|_\infty \quad (2.2.11)$$

pour tout $x, y \in \mathcal{F}$, et pour tout $t \in \overline{B(t_0, T)}$. Pour $p = 0$ la formule (2.2.11) est vérifiée parce que $\|x - y\|_\infty$ est le supremum de $\|x(t) - y(t)\|$ pour $t \in \overline{B(t_0, T)}$. Supposons que la formule soit

vraie pour p et calculons pour $p + 1$. Pour tout $t \in \overline{B(t_0, T)}$ nous avons

$$\|\Phi^{p+1}(x)(t) - \Phi^{p+1}(y)(t)\| \leq \left| \int_{t_0}^t \|f(u, \Phi^p(x)(u)) - f(u, \Phi^p(y)(u))\| du \right| \quad (2.2.12)$$

$$\leq \left| \int_{t_0}^t k \|\Phi^p(x)(u) - \Phi^p(y)(u)\| du \right| \quad (2.2.13)$$

$$\leq \left| \int_{t_0}^t k \frac{k^p |t - t_0|}{p!} \|x - y\|_\infty du \right| \quad (2.2.14)$$

$$= \frac{k^{p+1} |t - t_0|^{p+1}}{(p+1)} \|x - y\|_\infty \quad (2.2.15)$$

Justifications :

—(2.2.13) parce que f est Lipschitz.

—(2.2.14) par hypothèse de récurrence.

La formule(2.2.11) est maintenant établie. Nous pouvons maintenant montrer que Φ^p est une contraction pour un certain p . Pour tout $t \in \overline{B(t_0, T)}$ nous avons

$$\|\Phi^p(x)(t) - \Phi^p(y)(t)\| \leq \frac{k^p}{t!} |t - t_0|^p \|x - y\|_\infty \leq \frac{k^p T^p}{p!} \|x - y\|_\infty \quad (2.2.16)$$

où nous avons utilisé le fait que $|t - t_0| < T^p$. En prenant le supremum sur t des deux côtés il vient

$$\|\Phi^p(x) - \Phi^p(y)\|_\infty \leq \frac{k^p T^p}{p!} \|x - y\|_\infty \quad (2.2.17)$$

Le membre de droite tend vers zéro lorsque $p \rightarrow \infty$ parce que $k < 1$ et $T^p/p! \rightarrow 0$. Nous concluons donc que Φ^p est une contraction pour un certain p .

Conclusion 2.2.1 *L'unique point fixe de Φ est alors l'unique solution continue de l'équation différentielle(2.2.7). Par ailleurs l'équation elle-même $y' = f(t, y)$ demande implicitement que y soit dérivable et donc continue. Nous concluons que l'unique point fixe de Φ est l'unique solution de l'équation différentielle donnée. Cette dernière est automatiquement C^1 parce que si y est continue alors $u \rightarrow f(u, y(u))$ est continue, c'est à dire que y' est continue.*

2.3 Existence et unicité de la solution

Nous utiliserons les mêmes notations que précédemment. Nous considérons ε_1 donné par le lemme ci-dessus. Soit toujours

$$T_{(t_0, x_0)} : \begin{cases} M_\epsilon & \rightarrow & E_\epsilon \\ Y & \rightarrow & T(y) \end{cases} .$$

où $T(y) : t \rightarrow x_0 + \int_{t_0}^t f(y(s), s) ds$

Nous remarquons à nouveau que x est solution de conditions initiales (t_0, x_0) sur I_ε , si et seulement si $T_{(t_0, x_0)}(x) = x$. Comme pour les équations linéaires, le théorème découle du théorème de Picard et du lemme suivant.

Lemme 2.3.1 *Il existe $\varepsilon_0 \leq \varepsilon_1$, tel que si $\varepsilon \leq \varepsilon_0$, alors pour tout $(t_0, x_0) \in I \times U$, on a*

$$\forall x, y \in M_\varepsilon, \quad \|T_{(t_0, x_0)}(x) - T_{(t_0, x_0)}(y)\| \leq \frac{1}{2} \|x - y\|.$$

Soit $\varepsilon_0 = \inf(\varepsilon_1, \frac{1}{4k})$. Nous avons

$$\begin{aligned} \|T(x)(t) - T(y)(t)\| &\leq \left\| \int_{t_0}^t f(s, x(s)) - f(s, y(s)) ds \right\| \\ &\leq \int_{t_0}^t \|f(s, x(s)) - f(s, y(s))\| ds. \end{aligned}$$

En utilisant le fait que $z \rightarrow f(t, z)$ est k -lipschitzienne, il vient

$$\begin{aligned} \|T(x)(t) - T(y)(t)\| &\leq \int_{t_0}^t k \|x(s) - y(s)\| ds \\ &\leq \|x - y\|_\infty \int_{t_0}^t k ds \\ &\leq k_\varepsilon \|x - y\|_\infty \end{aligned}$$

Autrement dit, si

$$\varepsilon \leq \varepsilon_0 = \inf\left(\varepsilon_1, \frac{1}{2k}\right),$$

il vient

$$\|T(x) - T(y)\|_\infty \leq \frac{1}{2} \|x - y\|_\infty$$

C'est l'inégalité que nous recherchions

Unicité

Nous passons maintenant à la partie «prolongement maximum» du théorème. Soient x_1 et x_2 deux solutions maximales du problème(2.2.7) sur des intervalles I_1 et I_2 respectivement.

Les intervalles I_1 et I_2 contiennent $\overline{B(t_0, r)}$ sur lequel $x_1 = x_2$ par unicité. Nous allons maintenant montrer que pour tout $t \geq t_0$ pour lequel x_1 ou x_2 est défini, $x_1(t)$ et $x_2(t)$ sont définis et sont égaux. Le raisonnement sur $t \leq t_0$ est similaire. Supposons que l'ensemble des $t \geq t_0$ tels que $x_1 = x_2$ soit ouvert à droite, c'est à dire soit de la forme $[t_0, b[$. Dans ce

cas, soit x_1 soit x_2 (soit les deux) cesse d'exister en b . En effet si nous avons les fonctions x_i sur $[t_0, b + \varepsilon[$ alors l'équation $x_1 = x_2$ définirait un fermé dans $[t_0, b + \varepsilon[$. Supposons pour fixer les idées que x_1 cesse d'exister : le domaine de x_1 (parmi les $t \geq 0$) est $[t_0, b[$ et sur ce domaine nous avons $x_1 = x_2$. Dans ce cas x_1 pourrait être prolongé en x_2 au-delà de b . Si x_1 et x_2 s'arrêtent d'exister en même temps en b , alors nous avons bien $x_1 = x_2$. Nous devons donc traiter le cas où $x_1 = x_2$ sur $[t_0, b]$ alors que x_1 et x_2 existent sur $[t_0, b + \varepsilon[$ pour un certain ε . Nous pouvons appliquer le théorème d'existence locale au problème

$$\begin{cases} y' &= f(t, y) \\ y(b) &= x_1(b) \end{cases} \quad (2.3.1)$$

Il existe un voisinage de b sur lequel la solution est unique. Sur ce voisinage nous devons donc avoir $x_1 = x_2$, ce qui contredit le fait que $x_1 \neq x_2$ en dehors de $[t_0, b]$.

Chapitre 3

Quelques théorème d'existence et unicité dans le cas fractionnaire

3.1 Equations différentielles fractionnaire

3.1.1 Equation différentielle fractionnaire linéaire

Dans ce paragraphe nous discutons l'existence et l'unicité de solutions de problèmes à valeurs initiales pour des équations différentielles fractionnaires linéaires avec dérivées au sens de Riemann-Liouville.

Considérons lmanifolde problème à valeur initiale suivant :

$$\begin{cases} {}_0D_t^\alpha &= f(t), (0 < t < T \prec \infty) \\ [{}_0D_t^{\alpha-1}y(t)]_{t=0} &= b \end{cases} \quad (3.1.1)$$

où $0 < \alpha \leq 1$ et $f(t) \in L_1(0, T)$, i.e.

$$\int_0^T |f(t)| dt \prec \infty$$

Théorème 3.1.1 *Si $f(t) \in L_1(0, T)$, alors le problème (3.1.1) admet une unique solution $y(t) \in L_1(0, T)$.*

Démonstration.

Construisons donc une solution du problème considéré. En appliquant, à la première équation de (3.1.1), la formule de la transformée de Laplace (1.4.6) d'une dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville, à savoir

$$\mathcal{L} \{ {}_0D_t^\alpha \Psi(t); s \} = s^\alpha \mathcal{L} \{ \Psi(t); s \} - [{}_0D_t^{\alpha-1} \Psi(t)]_{t=0}, \alpha \in]0, 1[\quad (3.1.2)$$

on aura

$$s^\alpha Y(s) - [{}_0D_t^{\alpha-1} y(t)]_{t=0} = F(s), \quad (3.1.3)$$

où $Y(s)$ et $F(s)$ désignent les transformées de Laplace de $y(t)$ et $f(t)$. En s'aidant de la condition initiale introduite dans (3.1.1), on peut écrire

$$Y(s) = s^{-\alpha} F(s) + s^{-\alpha} b \quad (3.1.4)$$

et la transformée de Laplace inverse donne

$$y(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau + \frac{b}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1}. \quad (3.1.5)$$

En utilisant la règle de la différentiation fractionnaire de Riemann-Liouville de la fonction polynôme $((t-\alpha)^v)$ avec $p = \alpha, a = 0$ et $v = \alpha - 1$, laquelle dans notre cas est nulle, puisque

$${}_0D_t^\alpha t^{\alpha-1} = \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(0)} t^{-1} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\Gamma(0)} = 0$$

on aura

$${}_0D_t^\alpha y(t) = {}_0D_t^\alpha \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau \right)$$

D'autre part, comme

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau = {}_0D_t^{-\alpha} f(t)$$

c'est-à-dire l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre α , et grâce à la propriété fondamentale

$${}_0D_t^\alpha ({}_0D_t^{-\alpha} f(t)) = f(t)$$

on a alors

$${}_0D_t^\alpha y(t) = f(t)$$

ce qui veut dire que notre $y(t)$ défini par (3.1.5) est bien solution, dans $L_1(0, T)$, de la première équation de (3.1.1).

Par ailleurs, on sait que:

$${}_0D_t^{\alpha-1} t^{\alpha-1} = \Gamma(\alpha) \quad (3.1.6)$$

Il suit alors, de (3.1.5),

$$\left\{ \begin{array}{l} {}_0D_t^{\alpha-1} y(t) = {}_0D_t^{\alpha-1} \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau \right) + b \\ \quad = {}_0D_t^{\alpha-1} ({}_0D_t^{-\alpha} f(t)) + b \\ \quad = {}_0D_t^{-1} f(t) + b \\ \quad = \frac{1}{\Gamma(1)} \int_0^t f(\tau) d\tau + b \end{array} \right.$$

D'où $[{}_0D_t^{\alpha-1} y(t)]_{t=0} = b$, c'est à dire que la condition initiale introduite dans (3.1.1) est bien vérifiée. Par conséquent la fonction construite $y(t)$ est solution du problème (3.1.1).

Reste à montrer l'unicité de cette dernière. Pour cela, posons

$$z(t) = y_1(t) - y_2(t),$$

où y_1 et y_2 sont deux solutions (dans $L_1(0, T)$) du problème (3.1.1). Et donc $z(t)$ sera solution du problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} {}_0D_t^\alpha z(t) = 0 \\ [{}_0D_t^{\alpha-1} z(t)]_{t=0} = 0 \end{array} \right. \quad (3.1.7)$$

En appliquant la transformée de Laplace dans les deux membres de la première équation de (3.1.7), on obtient

$$z(t) = \mathcal{L} \{ z(t); s \} = 0$$

et donc $z(t) = 0$ pour presque tout $t \in (0, T)$, ce qui prouve que la solution $y(t)$ est l'unique solution dans $L_1(0, T)$ du problème (3.1.1). ■

3.1.2 Equation différentielle fractionnaire de forme plus générale

En plus des équations différentielles fractionnaires linéaires, les équations non-linéaires apparaissent aussi dans les applications. Et c'est pour cette raison que nous discutons dans

cette section l'existence et l'unicité de solution d'un problème à valeur initiale pour l'équation différentielle fractionnaire plus générale ayant un terme de dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville. Toute fois, dû aux liens entre les dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville, de Grünwald-Letnikov et de Caputo, les résultats donnés ci-dessous peuvent être utilisés pour toutes ces mutations de différentiation fractionnaire.

Considérons donc le problème à valeur initiale suivant :

$$\begin{cases} {}_0D_t^\alpha y(t) &= f(t, y(t)) \\ f(t, y(t)) &= b \end{cases} \quad (3.1.8)$$

où, $0 < \alpha \leq 1$. Nous supposons que $f(t, y)$ est définie dans un domaine G du plan (t, y) et nous définissons une région $R(h, K) \subset G$ comme étant l'ensemble des points $(t, y) \in G$, qui vérifient les inégalités suivantes :

$$0 < t < h, \quad \left| t^{1-\alpha} y(t) - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} b \right| \leq k, \quad (3.1.9)$$

où h et K sont des constantes.

Théorème 3.1.2 Soit $f(t, y)$ une fonction continue à valeurs réelles, définie dans le domaine G , satisfaisant dans G la condition de Lipschitz par rapport à y , i.e.,

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq A |y_1 - y_2|,$$

et telle que

$$|f(t, y)| \leq M < \infty \quad \text{pour tout } (t, y) \in G$$

soit aussi

$$K \geq \frac{Mh}{\Gamma(1+\alpha)}$$

Alors il existe, dans la région $R(h, K)$, une unique solution continue $y(t)$ du problème (3.1.8).

Démonstration. La méthode de la preuve de ce théorème est basée sur l'idée due à M. A. Al-Bassam [9].

Tout d'abord, nous réduisons le problème (3.1.8) à une équation intégrale fractionnaire équivalente. En utilisant la formule (3.1.5), nous obtenons

$$y(t) = \frac{b}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau, y(\tau)) d\tau \quad (3.1.10)$$

On voit donc que si $y(t)$ vérifie (3.1.8), alors elle vérifie aussi l'équation (3.1.10).

D'autre part, si $y(t)$ est une solution de (3.1.10), alors en appliquant à (3.1.10) l'opérateur dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville ${}_0D_t^\alpha$ et en tenant compte du fait que la dérivée ${}_0D_t^\alpha t^{\alpha-1}$ est nulle, nous obtenons l'équation différentielle fractionnaire (3.1.8). En outre, comme ${}_0D_t^{\alpha-1} t^{\alpha-1} = \Gamma(\alpha)$, alors si $y(t)$ vérifie (3.1.10), elle satisfait donc la condition initiale introduite dans (3.1.8). Par conséquent, l'équation (3.1.10) est équivalente au problème à valeur initiale (3.1.8).

Définissons maintenant la suite de fonctions $y_0(t), y_1(t), \dots$, par les relations suivantes :

$$y_0(t) = \frac{b}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1}, \quad (3.1.11)$$

$$y_m(t) = y_0(t) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau, y_{m-1}(\tau)) d\tau \quad (3.1.12)$$

$$m = 1, 2, 3, \dots$$

Nous allons montrer que la $\lim_{m \rightarrow \infty} y_m(t)$ existe et donne la solution souhaitée $y(t)$ de l'équation (3.1.10).

Tout d'abord, on peut montrer par récurrence que pour $0 < t \leq h$, on a $y_m(t) \in R(h, K)$ pour tout m . En effet,

$$\left| t^{1-\alpha} y_m(t) - \frac{b}{\Gamma(\alpha)} \right| = \left| \frac{t^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau, y_{m-1}(\tau)) d\tau \right| \leq \frac{Mt}{\Gamma(1+\alpha)} \leq \frac{Mh}{\Gamma(1+\alpha)} \leq K, \quad (3.1.13)$$

et pour la même raison on a la même inégalité pour $y_1(t)$:

$$\left| t^{1-\alpha} y_1(t) - \frac{b}{\Gamma(\alpha)} \right| \leq \frac{Mh}{\Gamma(1+\alpha)} \leq K.$$

De plus, on peut aussi montrer par récurrence que, pour tout m ,

$$|y_m(t) - y_{m-1}(t)| \leq \frac{MA^{m-1}t^{m\alpha}}{\Gamma(1+m\alpha)} \quad (3.1.14)$$

En effet, en utilisant (3.1.13), on a pour $m = 1$:

$$|y_1(t) - y_0(t)| \leq \frac{Mt^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}, \quad (0 < t \leq h). \quad (3.1.15)$$

Supposons que

$$|y_{m-1}(t) - y_{m-2}(t)| \leq \frac{MA^{m-2}t^{(m-1)\alpha}}{\Gamma(1 + (m-1)\alpha)}. \quad (3.1.16)$$

Alors, en utilisant (3.1.12) et (3.1.16), et en s'aidant de la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville de la fonction polynôme, on aura

$$\begin{aligned} |y_m(t) - y_{m-1}(t)| &\leq \frac{A}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} |y_{m-1}(\tau) - y_{m-2}(\tau)| d\tau \\ &\leq \frac{MA^{m-1}}{\Gamma(1 + (m-1)\alpha)} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \tau^{(m-1)\alpha} d\tau \\ &= \frac{MA^{m-1}}{\Gamma(1 + (m-1)\alpha)} {}_0D_t^{-\alpha} t^{(m-1)\alpha} \\ &= \frac{MA^{m-1}}{\Gamma(1 + (m-1)\alpha)} \frac{\Gamma(1 + (m-1)\alpha) t^{(m-1)\alpha + \alpha}}{\Gamma(1 + (m-1)\alpha + \alpha)} \\ &= \frac{MA^{m-1}t^{m\alpha}}{\Gamma(1 + m\alpha)} \end{aligned} \quad (3.1.17)$$

Et donc (3.1.14) a lieu pour tout m .

Considérons maintenant la série

$$y^\star(t) = \lim_{m \rightarrow \infty} (y_m(t) - y_0(t)) = \sum_{j=0}^{\infty} (y_j(t) - y_{j-1}(t)). \quad (3.1.18)$$

En vertu de (3.1.12) et pour $0 \leq t \leq h$, on a

$$\forall j \geq 0; |y_j(t) - y_{j-1}(t)| \leq \frac{M A^{j-1} h^{j\alpha}}{\Gamma(1 + j\alpha)} \leq \frac{M}{A} \frac{(Ah^\alpha)^j}{\Gamma(1 + \alpha j)}$$

Dans le membre de droite, on voit apparaître le terme général d'une série convergente, à savoir, la série $\sum_{k \geq 0} \frac{z^k}{\Gamma(\lambda k + \mu)}$ laquelle est convergente et a pour somme la fonction de Mittag-Leffler :

$$E_{\lambda, \mu}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\lambda k + \mu)}, \quad \lambda, \mu > 0,$$

Et donc la série (3.1.18) est uniformément convergente et on a

$$y^\star(t) \leq \frac{M}{A} \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(Ah^\alpha)^j}{\Gamma(\alpha j + 1)} - 1 \right) = \frac{M}{A} (E_{\alpha, 1}(Ah^\alpha) - 1) \quad (3.1.19)$$

Evidemment, chaque terme $(y_j(t) - y_{j-1}(t))$ de la série (3.1.18), $y^\star(t)$, est une fonction continue pour $0 \leq t \leq 0$ et

$$y(t) = \lim_{m \rightarrow \infty} y_m(t) = y_0(t) + y^\star(t)$$

est donc une fonction continue pour $0 < t < h$.

La convergence uniforme de la suite $y_m(t)$ nous permet de faire tendre m vers l'infini dans la relation (3.1.12). Ce qui donne l'équation (3.1.10) et montrant que $y(t)$, la fonction limite du processus défini par (3.1.11) et (3.1.12) est solution de (3.1.10).

Finalelement, prouvons l'unicité de la solution. Supposons donc que $\hat{y}(t)$ est une autre solution de l'équation (3.1.10), qui est continue sur l'intervalle $0 < t \leq h$. Alors, il suit de (3.1.10) que la fonction

$z(t) = y(t) - \hat{y}(t)$ vérifie l'équation

$$z(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} [f(\tau, y(\tau)) - f(\tau, \hat{y}(\tau))] d\tau, \quad (3.1.20)$$

De plus, cette fonction est continue pour $0 \leq t \leq h$. Par conséquent, $|z(t)| < B$ pour $0 \leq t \leq h$, où B est une constante. Et grâce au caractère lipschitzien de f par rapport à y , avec la relation (3.1.20), on en déduit

$$|z(t)| \leq \frac{ABt^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}, \quad (0 \leq t \leq h). \quad (3.1.21)$$

En répétant ces estimations j fois, on aura

$$|z(t)| \leq \frac{A^j B t^{j\alpha}}{\Gamma(1+j\alpha)}, \quad j = 1, 2, \dots \quad (3.1.22)$$

Dans le membre de droite, on récupère (à une constante près) le terme général de la série associée à la fonction de Mittag-Leffler $E_{\alpha,1}(At^\alpha)$, et donc pour tout t

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{A^j t^{j\alpha}}{\Gamma(1+j\alpha)} = 0$$

En faisant tendre $j \rightarrow \infty$ dans (3.1.22), on conclut que $z(t) \equiv 0$, et $\hat{y}(t) \equiv y(t)$ pour $0 < t \leq h$. Ce qui achève la preuve du théorème (3.1.2). ■

On se restreint dans cette section aux équations d'un seul terme de dérivation de la forme :

$$D_0^\alpha y(t) = f(t, y(t))$$

3.1.3 Existence et unicité

Soit α un réel positif vérifiant $m - 1 < \alpha \leq m$, ${}^C D^\alpha$ désigne l'opérateur de dérivation au sens de Caputo .

On se donne le problème aux conditions initiales suivant :

$$\begin{cases} {}^C D_0^\alpha y(t) &= f(t, y) \\ D_0^k y(0) &= y_0^{(k)}, k = 0, 1, \dots, m-1 \end{cases}$$

Si la fonction f est continue alors le problème aux conditions initiales (3.1.23) est équivalent à l'équation intégrale non linéaire de Volterra suivante:

$$y(t) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^k}{k!} y_0^{(k)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau, y(\tau)) d\tau \quad (3.1.23)$$

Premièrement supposons que y est solution de(3.1.24), on peut écrire cette équation sous la forme réduite :

$$y(t) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^k}{k!} y_0^{(k)} + I_0^\alpha f(t, y(t))$$

En appliquant l'opérateur de différentiation D_0^α sur les deux cotés de cette relation on aura immédiatement que y est solution de l'équation différentielle de(3.1.23) .

Appliquons maintenant l'opérateur D_0^k , $0 \leq k \leq m-1$ sur l'équation de Volterra (3.1.24)

$$D_0^k y(t) = \sum_{j=0}^{m-1} D_0^k \frac{(t)^j}{j!} y_0^{(j)} + D_0^k I_0^\alpha I_0^{\alpha-k} f(t, y(t)) .$$

$D_0^k (t)^j = 0$ pour $j < k$ alors si $t = 0$ on a :

$$D_0^k y(0) = D_0^k \frac{(t)^k}{k!} y_0^{(k)} |_{t=0} + I_0^{\alpha-k} f(t, y(t)) |_{t=0}$$

et comme $\alpha - k \geq 1$, l'intégral est nul $I_0^{\alpha-k} f(t, y(t)) |_{t=0} = 0$ par suite $D_0^k y(0) = y_0^{(k)}$

D'autre part on définit $z(t) = f(t, y(t))$ alors $z \in C[0, h]$ on réécrit l'équation de la forme :

$$z(t) = f(t, y(t)) = {}^C D_0^\alpha y(t) = D_0^\alpha (y - T_{m-1}[y; 0])(t)$$

$$= D_0^m I_0^{m-\alpha} (y - T_{m-1} [y; 0]) (t)$$

$T_{m-1} [y; 0]$ est le polynôme de Taylor de degré $m - 1$ $\left(T_{m-1} [y; 0] = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^k}{k!} y_0^{(k)} \right)$ pour la fonction f autour de 0. En appliquant l'opérateur I_0^m sur les deux termes de cette relation elle devient :

$$I_0^m z(t) = I_0^{m-\alpha} (y - T_{m-1} [y; 0]) (t) + q(t)$$

Avec q un polynôme de degré ne dépassant pas $m - 1$. Comme z est continue la fonction $I_0^m z$ a un zéro d'ordre au moins m à l'origine. En outre la différence $y - T_{m-1} [y; 0]$ a la même propriété par construction. Et donc la fonction $I_0^{m-\alpha} (y - T_{m-1} [y; 0])$ doit avoir un zéro d'ordre m aussi. Par suite le polynôme q a la même propriété mais comme il est de degré ne dépassant pas $m - 1$ il en résulte que $q = 0$, par conséquent

$$I_0^m z(t) = I_0^{m-\alpha} (y - T_{m-1} [y; 0]) (t)$$

En appliquant l'opérateur de dérivation de Riemann-Liouville $D_0^{m-\alpha}$ sur les deux cotés de cette équation elle devient :

$$y(t) - T_{m-1} [y; 0] (t) = I_0^\alpha z(t)$$

En substituant $z(t)$ et $T_{m-1} [y; 0] (t)$ on retrouve l'équation de Volterra :

$$y(t) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^k}{k!} y_0^{(k)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau, y(\tau)) d\tau$$

soient $k > 0, h^* > 0$, et $y_0^{(i)} \in \mathbb{R}, i = 0, 1, \dots, m-1$. définissent $G = [0, h^*] \times [y_0^{(0)} - k, y_0^{(0)} + k]$

et soit $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, satisfaisant la condition de Lipchitz par rapport à y suivante :

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq A |y_1 - y_2|, A = \text{constante}$$

posent $h = \min \left\{ h^*, (k\Gamma(\alpha + 1) \wedge M)^{1/\alpha} \right\}$ avec $M = \sup_{(t,z) \in G} |f(t, z)|$, alors il existe une

fonction unique $y \in C[0, h]$ solution du problème(3.1.23)

Dans le cas linéaire le théorème suivant donne une expression explicite de la solution en utilisant la transformée de Laplace et la fonction de Mittag-Leffler E_α défini par :

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(1 + \alpha k)}$$

Théorème 3.1.3

soit $\alpha > 0, m$ entier tel que $m - 1 < \alpha \leq m$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. La solution du problème aux conditions initiales suivant:

$$\begin{cases} {}^C D_0^\alpha y(t) &= \lambda y(t) + q(t) \\ y^{(k)}(0) &= y_0^{(k)}, k = 0, 1, \dots, m-1 \end{cases}$$

Où $q \in C[0; h]$ est la fonction donnée par:

$$y(t) = \sum_{k=0}^{m-1} y_0^{(k)} u_k(t) + \hat{y}(t)$$

$$\begin{aligned} \text{avec } \hat{y}(t) &= \begin{cases} I_0^\alpha q(t) & \text{si } \lambda = 0 \\ \frac{1}{\lambda} \int_0^t q(t-\tau) \dot{u}_0(\tau) d\tau & \text{si } \lambda \neq 0 \end{cases}, \\ u_k(t) &= I_0^k e_\alpha(t), k = 0, 1, \dots, m-1 \text{ et } e_\alpha(t) = E_\alpha(\lambda t^\alpha). \end{aligned}$$

3.2 Résolution numérique

Il y a plusieurs méthodes pour la résolution des systèmes fractionnaires. Dans le cas linéaire la méthode la plus simple et rapide est basée sur la définition de la dérivation fractionnaire au sens de Grunwald-Letnikov.

La méthode la plus adaptée pour les équations non linéaires est la méthode prédiction correction (PCEC, Predict-Evaluate-Correct-Evaluate) qui est une généralisation naturelle de la méthode très connue de Adams-Bashforth-Moulton, c'est cette méthode que nous allons utiliser dans notre travail.

3.2.1 Présentation de l'algorithme

Le principe de cette méthode est de remplacer l'équation originale (3.1.23) par l'équation intégrale de Volterra (3.1.24) et on utilise la formule (produit de quadrature des trapezes) pour remplacer l'intégrale par les noeuds $t_j, j = 0, 1, \dots, n+1$ qui sont prises respectivement à la fonction $(t_{n+1} - \cdot)^{\alpha-1}$ c'est à dire

$$\begin{aligned} \int_0^{t_{n+1}} (t_{n+1} - \tau)^{\alpha-1} g(\tau) d\tau &\approx \int_0^{t_{n+1}} (t_{n+1} - \tau)^{\alpha-1} \hat{g}_{n+1}(\tau) d\tau \\ &= \frac{h^\alpha}{\alpha(\alpha+1)} \sum_{j=0}^{n+1} \alpha_{j,n+1} g(t_j) \end{aligned}$$

$$\text{avec } \alpha_{j,n+1} = \begin{cases} n^{\alpha+1} - (n-\alpha)(n+1)^\alpha & \text{si } j=0 \\ (n-j+2)^{\alpha+1} + (n-j)^{\alpha+1} - 2(n-j+1)^{\alpha+1} & \text{si } 1 \leq j \leq n \\ 1 & \text{si } j=n+1 \end{cases}$$

Cela nous donne la formule de correction (corrector) :

$$yh(t_{n+1}) = \sum_{k=0}^{m_2-1} \frac{t_{n+1}^k}{k!} y_0^{(k)} + \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+2)} \left[f(t_{n+1}, y_{n+1}^p) + \sum_{j=0}^n \alpha_{j,n+1} f(t_j, y_j) \right]$$

pour déterminer la formule de prédiction (predictor) qui donne y_{n+1}^p , on procède de la même manière comme précédemment mais cette fois l'intégrale sera remplacée en utilisant la méthode des rectangles

$$\int_0^{t_{n+1}} (t_{n+1} - \tau)^{\alpha-1} g(\tau) d\tau \approx \sum_{j=0}^n b_{j,n+1} g(t_j)$$

où $b_{j,n+1} = \frac{h^\alpha}{\alpha} ((n+1-j)^\alpha - (n-j)^\alpha)$ par conséquent on a :

$$y_{n+1}^p = \sum_{k=0}^{m_2-1} \frac{t_{n+1}^k}{k!} y_0^{(k)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{j=0}^n b_{j,n+1} f(t_j, y_{h_j})$$

L'algorithme est bien déterminé par ces formules, l'erreur est estimée (voir[5]) par :

$$\max_{j=0,1,\dots,N} |y_j - y_{h_j}| = O(h^p), \text{ avec } p = \min(2, 1 + \alpha)$$

3.2.2 Extension au système d'équations

Un système ayant trois équations différentielles fractionnaire de la forme :

$$\begin{cases} D^{\alpha_1} x(t) = f_1(t, x, y, z), x^{(k)}(0) = x_0^k, k = 1, 2, \dots, m_1 - 1 \\ D^{\alpha_2} y(t) = f_2(t, x, y, z), y^{(k)}(0) = y_0^k, k = 1, 2, \dots, m_2 - 1 \\ D^{\alpha_3} z(t) = f_3(t, x, y, z), z^{(k)}(0) = z_0^k, k = 1, 2, \dots, m_3 - 1 \end{cases}$$

équivalent au système a trois équations intégrales de Volterra suivant :

$$\begin{cases} x(t) = \sum_{k=0}^{m_1-1} \frac{t^k}{k!} x^{(k)}(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha_1-1} f_1(\tau, x(\tau), y(\tau), z(\tau)) d\tau \\ y(t) = \sum_{k=0}^{m_2-1} \frac{t^k}{k!} y^{(k)}(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha_2)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha_2-1} f_2(\tau, x(\tau), y(\tau), z(\tau)) d\tau \\ z(t) = \sum_{k=0}^{m_3-1} \frac{t^k}{k!} z^{(k)}(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha_3)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha_3-1} f_3(\tau, x(\tau), y(\tau), z(\tau)) d\tau \end{cases} \quad (3.2.1)$$

soit $h = \frac{T}{N}, t_n = nh, n = 0, 1, 2, \dots, N$

La discrétisation de (3.2.1) nous donne :

$$\begin{cases} x(t_{n+1}) = \sum_{k=0}^{m_1-1} \frac{t_{n+1}^k}{k!} x_0^k + \frac{h^{\alpha_1}}{\Gamma(\alpha_1+2)} [f_1(t_{n+1}, x_{n+1}^p, y_{n+1}^p, z_{n+1}^p) + \sum_{j=0}^n a_{j,n+1}^1 f_1(t_j, x_j, y_j, z_j)] \\ y(t_{n+1}) = \sum_{k=0}^{m_2-1} \frac{t_{n+1}^k}{k!} y_0^k + \frac{h^{\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_2+2)} [f_2(t_{n+1}, x_{n+1}^p, y_{n+1}^p, z_{n+1}^p) + \sum_{j=0}^n a_{j,n+1}^2 f_2(t_j, x_j, y_j, z_j)] \\ z(t_{n+1}) = \sum_{k=0}^{m_3-1} \frac{t_{n+1}^k}{k!} z_0^k + \frac{h^{\alpha_3}}{\Gamma(\alpha_3+2)} [f_3(t_{n+1}, x_{n+1}^p, y_{n+1}^p, z_{n+1}^p) + \sum_{j=0}^n a_{j,n+1}^3 f_3(t_j, x_j, y_j, z_j)] \end{cases}$$

,

$$\text{Où } \begin{cases} x_{n+1}^p = \sum_{k=0}^{m_1-1} \frac{t_{n+1}^k}{k!} x_0^k + \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \sum_{j=0}^n b_{j,n+1}^1 f_1(t_j, x_j, y_j, z_j) \\ y_{n+1}^p = \sum_{k=0}^{m_2-1} \frac{t_{n+1}^k}{k!} y_0^k + \frac{1}{\Gamma(\alpha_2)} \sum_{j=0}^n b_{j,n+1}^2 f_2(t_j, x_j, y_j, z_j) \\ z_{n+1}^p = \sum_{k=0}^{m_3-1} \frac{t_{n+1}^k}{k!} z_0^k + \frac{1}{\Gamma(\alpha_3)} \sum_{j=0}^n b_{j,n+1}^3 f_3(t_j, x_j, y_j, z_j) \end{cases}$$

$$a_{j,n+1}^i = \begin{cases} n^{\alpha_i+1} - (n - \alpha_i)(n+1)^{\alpha_i} & \text{si } j = 0 \\ (n-j+2)^{\alpha_i+1} + (n-j)^{\alpha_i+1} - 2(n-j+1)^{\alpha_i+1} & \text{si } 1 \leq j \leq n \\ 1 & \text{si } j = n+1 \end{cases}$$

$i = 1, 2, 3.$

$$b_{j,n+1}^i = \frac{h^{\alpha_i}}{\alpha_i} [(n+1-j)^{\alpha_i} - (n-j)^{\alpha_i}], 0 \leq j \leq n, i = 1, 2, 3.$$

L'algorithme est bien déterminé par ces formules, l'erreur est estimée par :

$$\max \left\{ \max_{0 \leq j \leq N} |x_j - x_{h_j}|, \max_{0 \leq j \leq N} |y_j - y_{h_j}|, \max_{0 \leq j \leq N} |z_j - z_{h_j}| \right\} = O(h^p)$$

avec $p = \min \{2, 1 + \alpha_1, 1 + \alpha_2, 1 + \alpha_3\}$

3.3 Conclusion générale

Dans cette mémoire nous avons donné un aperçu du calcul fractionnaire et la théorie de chauchy-lipscitz .

Nous avons terminé de cette mémoire par un chapitre consacré aux équations aux dérivées fractionnaires pour lesquelles les conditions d'existence et d'unicité de la solution sont données (les résultats éventuels vont généraliser les résultats de problème de Cauchy-Lipchitz)., ainsi que des méthodes analytiques et numériques pour la résolution.

Bibliographie

- [1] **Artin E**, (1931) Einführung in die Theorie der Gammafunktion. Teubner, Leipzig
(English translation : The Gamma Function. Published 1964 by Holt, Rinehart and Winston, New York)
- [2] **B. Ross**, Fractional calculus : an historical apologia for the development of a calculus using differentiation and antidifferentiation of non integral orders, Mathematics Magazine, vol. 50, no. 3, May 1977, p. 155-122
- [3] **H. D. Davis**, The Theory of Linear Operators, Principia Press, Bloomington, Indiana, 1936
- [4] **Kai Diethelm**, Fractional Differential Equations Theory and Numerical Treatment February 13, 2003.
- [5] **Kamel Haouam** , "Existence et non existence de solutions des équations différentielles fractionnaires", Thèse de Doctorat Univ.Mentouri. Constantine 2008.
- [6] **Keith B. Oldham, Jerome Spanier**, "The fractional calculus theory and application of differentiation and integration to arbitrary order" academic press, INC.
- [7] **K.S. Miller, B. Ross**, An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations, John Wiley and Sons, 1993
- [8] **Livio Flaminio**, Eléments de géométrie différentielle. 29 octobre 2009. URL http://www-gat.univ-lille1.fr/~flaminio/M403/2009-2010/cours_geo_top.pdf

- [9] **M. A. Al-Bassam**, Some existence theorems on differential equations of generalized order, *Journal für Reine und Angewandte Mathematik*, vol. 218, 1965, p.p. 70-78
- [10] **Orsay cedex**, F-91405 1Univ. Paris-Sud, Laboratoire de Mathématique ,Introduction aux systemes dynamiques François LABOURIE¹ 26 avril 2007
- [11] **Sandrine Caruso**. Théorème de Cauchy-Lipschitz. 2009.
<http://boumbo.toonywood.org/sandrine/pageperso/agreg/cauchy-lipschitz.pdf>
Voir aussi la page toute pleine de développement
<http://boumbo.toonywood.org/sandrine/pageperso/agreg.html>.

الملخص

في ه ذه المذكرة تطرقنا الى عموميات على نظرية كوشي ليبشيتز في المشتقات الكسرية ابتداء من دراسة مدخل في المشتقات الكسرية ثم دراسة لنظرية كوشي ليبشيتز .

وأخيرا قمنا بدراسة نظرية كوشي في المشتقات الكسرية باستبدال مؤثر المشتق الطبيعي بمؤثر المشتقات الكسرية ، واثبات الوجود والوحدانية لهذه المشكلة .
الكلمات المفتاحية: المؤثر الكسري- المؤثر الطبيعي- كوشي ليبشيتز-المشتق الكسري

Résumé

Dans cette mémoire, nous avons parlé à des outs sur la théorie de cauchy-lipscitz dans les dérivées fractionnaires.

A partir de l'examan d'entrée dans les dérivés fractionnaires et l'étude de la théorie de cauchy-lipschitz.

Enfin, nous avons étudié de théorie cauchy dans la diffirentés fractionnée, en remplacer l'operateur de dérivé entier par operateur de dérives fractionnaires et prouve l'existence et l'unicité de ce problème.

Mots clés: dérivé entier, dérives fractionnaires, cauchy-lipschitz,l'existence et l'unicité.

Abstract

In This memory we talked or the outs theory Cauchy-lipschitz in the fractional derivatives.

Starting from the entrance examination in fractional derivatives and study of the theory of Cauchy-lipschitz.

Finally ,we studied the theory in Cauchy hardships fractional replace the operator of derivatives integer by the operator of fractional derivatives and prove the existence and oneness of this problem.

Key words: derivatives integer, fractional derivatives, Cauchy-lipschitz, the existence and oneness.