République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de
la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ HAMMA LAKHDAR
-EL OUED-
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES

Mémoire de fin d'étude

MASTER ACADEMIQUE

Domaine : Mathématiques et informatique

Filière : Mathématiques

Option : Mathématiques fondamentales et appliquées

Thème

Fondements et applications sur les équations différentielles ordinaires du premier ordre

Présenté par : Aissaoui Amira
Sahra Thalja

Soutenu publiquement le 16/06/2022, devant le jury composé de

Mr. Guabsi Hocine	Président	MCB	Univ. Eloued
Mr. Ghendir Aoun Abdellatif	Rapporteur	MCB	Univ. Eloued
Mr. Ben Ali Ibrahim	Examinateur	MCA	Univ. Eloued

Année universitaire 2021 – 2022

Dédicace

Nous dédions ce modeste travail :

A le père cher .

A la mère chère .

A les frères et sœurs.

A tous la famille.

A tous les amis.

Remerciements

Avant toute chose, nous tenons à remercier "Allah" le tout puisant, pour nous avoir donné assez de courage pour accomplir ce travail.

Comme nous tenons à remercier vivement, encadreur de mémoire Dr.Ghendir Aoun Abdellatif.

de Conférence à l'université Echahid Hamma Lakhder d'El Oued, pour sa patience, son encouragement et sa disponibilité ainsi le soutien très précieux tout au long de ce travail.

Nos sentiments de reconnaissance Que tous ceux qui n'ont pas été mentionnés et qui ont contribué à la réalisation, de près ou de loin, de ce travail vous nos remerciements.

Enfin ,Nous remercions tous nos Personnel universitaires qui nous accueillent chaque matin avec le sourire.

Merci !

Amira & Chal ✍

Table des matières

Introduction

Les équations différentielles, ordinaires et partielles, comptent parmi les branches les plus importantes des mathématiques appliquées : la physique, l'astronomie, la biologie et la chimie... Les équations différentielles sont un système cinétique tel que : mouvement planétaire, la balistique, la transmission des ondes, la propagation de la chaleur et la croissance démographique. Là où les équations différentielles contrôlent le comportement des systèmes cinétiques, et grâce à notre solution d'équations différentielles, nous pouvons détecter le comportement de ce système et prédire son comportement dans le passé ou dans le futur. Une équation différentielle ordinaire se rapporte à une fonction dans une variable, telle que : Équation cinématique de Newton

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{m}{h^2}$$

Il régit les trajectoires des planètes autour du soleil et prédit son comportement et sa position à tout moment, mais nous constatons que la trajectoire de Mercure s'écarte de sa trajectoire supposée selon l'équation de Newton. Einstein a pu corriger l'équation du mouvement de Newton en ajoutant le terme non linéaire $3mu^2$ pour devenir

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{m}{h^2} + 3mu^2$$

Et exprime la perturbation qui entraîne le déplacement de l'orbite de Newton d'une quantité $6m^2\Pi/h^2$ qui est cohérente avec l'orbite de Mercure autour du soleil. Ce déplacement de l'orbite de Mercure est le résultat du champ gravitationnel du soleil tordant sévèrement l'espace de temps qui lui est adjacent.

Si des solutions analytiques ne sont pas atteintes, des solutions approchées peuvent être atteintes par des solutions numériques aux équations différentielles. Connaître les conditions initiales du système est très important et dépend d'elles pour extrapoler le comportement futur du système étudié.Plus nous connaissons les conditions initiales et les conditions initiales avec précision, plus nous pouvons prédire avec précision son comportement futur.

Parfois, les conditions initiales peuvent ne pas être suffisantes, comme le dit le philosophe et mathématicien Laplace : ń Si un être devait être conscient des conditions initiales à partir desquelles l'univers est né, y compris la matière, le temps, le lieu, la masse, la vitesse, la chaleur et la pression, et possédait la mentalité d'analyser ces significations et ces données, il serait en mesure de savoir avec certitude le comportement futur de l'univers
C'est comme si Laplace faisait référence à Dieu Tout-Puissant, qui, bien sûr, possède ces capacités auxquelles Laplace faisait référence, L'équation aux dérivées partielles (qui se rapporte à une fonction dans plus d'une variable) est essentielle à la compréhension de la physique et est utilisée dans
-L'équation d'onde contrôle la transmission des ondes lumineuses, sonores et aquatiques
-L'égalisation de la chaleur contrôle la diffusion de la chaleur.
-L'équation de diffusion décrit le flux de particules et d'énergie.
-L'équation d'onde de Schrödinger prédit les propriétés et le comportement des systèmes atomiques et moléculaires et constitue l'épine dorsale de la théorie quantique.
-Équation Klein-Gordan C'est une équation du second ordre à la fois dans le temps et dans l'espace

$$\psi_{xx}(x,t) - (1/c^2)\psi_{tt}(x,t) - (m^2c^2/h^2)\psi(x,t) = 0$$

Dans le premier chapitre, nous avons inclus les équations différentielles en général, ordinaires et partielles, et leurs classifications (degré et ordre) et les méthodes pour les créer et les utiliser dans les applications. Nous avons également abordé l'équation différentielle du premier ordre sa forme générale, et la définition de la solution.
Dans le deuxième chapitre, nous avons étudié quelques types d'équations différentielles du premier ordre, qui sont des variables discrètes, homogènes, linéaires, les équations de Bernoulli et de Riccati et nous avons discuté des moyens de le résoudre avec l'inclusion d'exemples d'utilisation de ces méthodes.
Dans le troisième chapitre, nous avons traité le problème de Cauchy en utilisant la condition initiale, et nous avons étudié la méthode des approximations successives de Picard et inclus la théorème de l'existence et de l'unité avec des exemples illustratifs.
Dans le quatrième chapitre, nous avons utilisé quelques applications dans différents domaines, où l'équation différentielle du premier ordre est utilisée pour décrire différents phénomènes et là, nous avons étudié les problèmes de croissance et décroissance, problèmes de maladies infectieuses et problèmes mécaniques.

Notation

$\mathbb{N}$	L'ensemble de nombres naturels.
$\mathbb{R}$	L'ensemble de nombres réels.
$y' = \frac{dy}{dx}$	La différentielle y du premier ordre par rapport à x.
$y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n}$	La différentielle y d'ordre n par rapport à x.
$\frac{\partial z}{\partial x}$	La différentiel partiel de z par rapport à x.
m	La masse d'un corps en mouvement dans le temps.
v	Vitesse du mobile dans le temps t.
y_h	Solution générale .
y_p	Solution particulière.
$i.e.$	C'est-à-dire .
I	Intervalle.

Chapitre 1

Outils des bases

Dans ce chapitre, on donne quelques définitions et propriétés que nous utiliserons dans la suite de ce travail.

1.1 Équation différentielle

C'est toute équation qui relie la variable indépendante x à la fonction inconnue $y(x)$ est ses dérivées d'ordre différent $y^{'}, y^{''}$...
Soit f une fonction connue $(n+1)$ son nombre de variables où $n \in \mathbb{N}$. On appelle une équation différentielle d'ordre n chaque équation de la forme

$$y^{(n)} = f(x, y, y^{'}..., y^{(n-1)}).$$

1.2 Classes des équations différentielles

1.2.1 Équations différentielles ordinaires

C'est une équation différentielle qui contient les dérivées ou différentielles d'une fonction inconnue qui dépendent d'une variable indépendante.
Exemple

$$y^{'} = x^2 + y$$

$$(y')^2 + 4y = \sin^3 x$$

1.2.2 Équations aux dérivées partielles

Une équation différentielle qui contient une fonction inconnue pour plus d'une variable indépendante avec des dérivées partielles pour les variables indépendantes.

Exemple

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial z}{\partial y} = x$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} + 2\frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

Nous limiterons l'étude dans cette mémoire note aux équations différentielles ordinaires.

1.3 Classification des équations différentielles ordinaire

Les équations différentielles sont classées selon leur ordre et leur degré.

1.3.1 Définition de l'ordre d'une équation différentielle

C'est l'ordre du coefficient différentiel le plus élevé dans l'équation.

1.3.2 Définition du degré d'une équation différentielle

C'est le degré ou la puissance du coefficient différentiel le plus élevé de l'équation à condition que tous les coefficients différentiels soient exempts de puissances fractionnaires.

Exemple

$$y^{'''} - (sinx)y^{''} + 3y = 0$$

une équation du troisième ordre et du premier degré.

$$y^{''} = (x + y^2)^{\frac{1}{3}}$$

Au cube des deux côtés on trouve

$$(y'')^3 = (x + y^2)$$

qui est une équation différentielle du deuxième ordre et du troisième degré.

1.4 Solution l'équation différentielle

Définition Soit I un intervalle ouvert dans $\mathbb{R}$. On dit que la fonction $y = y(x)$ est une solution de l'équation différentielle

$$F(x, y, y', ..., y^n) = 0 \tag{1.1}$$

si

1) $y \in C^n(I)$

2) $y(x)$ vérifier l'équation (1.1).

Exemple

On montre que $y(x) = c \sin x$ est une solution de l'équation différentielle $y^{''}(x) + y(x) = 0$ où c est une constante réelle.

De $y(x) = c \sin x$, on a $y^{'}(x) = c \cos x$ et $y^{''}(x) = -c \sin x$.

En remplaçant dans l'équation, on trouve $y^{''}(x) + y(x) = -c \sin x + c \sin x = 0$

$y(x) = c \sin x$ une solution à l'équation différentielle .

1.4.1 Classification des solutions aux équations différentielles

Dèfinition(une solution explicite) Les solutions aux équations différentielles peuvent être classées en deux catégories : solution explicite - solution implicite.

La solution explicite d'une équation différentielle est chacune de la forme suivante $y = f(x) + c$ où c est une constante facultative.

Dèfinition(une solution implicite) La solution implicite d'une équation différentielle est une relation entre la variable indépendante x et la fonction inconnue y c'est-à-dire $G(x, y) = 0$. Sa dérivation aboutit implicitement à l'équation différentielle d'origine.

Exemple 1

Solution explicite : Dans l'exemple précédent $y = c \sin x$.

C'est une solution explicite de l'équation $y'' + y = 0$.

Exemple 2

La relation $x^2 + y^2 - 4 = 0$ est une solution implicite de l'équation $y' = \dfrac{-x}{y}$ sur le domaine $x \in]-2, 2[$.

Pour vérifier cela, nous dérivons l'expression de la variable x et nous trouvons $2x + 2yy' = 0$. Alors $y' = \dfrac{-x}{y}$.

La solution générale - la solution particulière - la solution anormale

Dèfinition(la solution générale) solution générale de l'équation différentielle d'ordre n est une solution qui contient n des constantes facultatives et satisfait l'équation différentielle, c'est-à-dire qu'elle est de la forme $y = \varphi(x, c_1, c_2, ..., c_n)$ où $c_1, c_2, ..., c_n$sont des constantes facultatives.

Dèfinition (la solution particulier) : La solution particulière à une équation différentielle est la solution que nous obtenons en donnant des valeurs spécifiques aux des constantes facultatives dans l'énoncé solution générale.

Exemple

Nous pouvons assurer comment que

$$y = c_1 + c_2 e^{2x} + c_3 e^{3x}$$

où c_1, c_2, c_3 sont des constantes facultatives est une solution d'une équation différentielle

$$y''' - 5y + 6y' = 0.$$

Nous trouvons des solutions particulières

$c_1 = 0; c_2 = 1; c_3 = -1; y = e^{2x} - e^{3x}$.

$c_1 = \sqrt{2}; c_2 = 0; c_3 = 0; y = \sqrt{2}$.

Une solution anormale à une équation différentielle est toute solution qui ne peut pas être extraite de l'énoncé de solution générale en donnant des valeurs pour les constantes facultatives.

Exemple

On considère l'équation différentielle

$y'^2 - 4y = 0$ dont la solution générale est : $y = (x + c)^2$.

C'est une solution anormale à cette équation car il n'est pas possible $(y = 0)$ que la solution nulle puisse être extraite de l'énoncé de la solution générale en donnant une valeur à la constante c.

1.4.2 Problème des conditions initiales

C'est une équation différentielle en plus des conditions sur la fonction inconnue et ses dérivées toutes données de la même valeur pour la variable indépendante et on l'appelle aussi problème de Cauchy. Les conditions supplémentaires sont appelées conditions initiales (ou condition de Cauchy).

Lemme[8] (inégalité de Gronwall) Soient f et g des fonctions continues positives sur le domaine de $[a, b]$ et vérifient l'inégalité suivante

$$f(x) \leq N + \int_a^x f(s)g(s)ds$$

où N constante $(N \geq 0)$

Puis

$$\forall x \in [a, b]; f(x) \leq N e^{\int_a^x g(s)} ds.$$

1.5 Quelques utilisations des équations différentielles

1.5.1 En physique

La modélisation mathématique de nombreux phénomènes physiques nous conduit souvent à des équations différentielles. Par exemple, la moitié de l'équation différentielle :

$$\frac{dx}{dt} = -kx$$

Le phénomène de désintégration radioactive d'une substance radioactive tel qu'il représente x quantité de substance non désintégrant à l'instant t représente la dérivée $\frac{dx}{dt}$ taux de décroissance radioactive k c'est la constante de désintégration radioactive de la substance étudiée.

1.5.2 Équation de croissance

Supposons que nous ayons une quantité Q d'une substance, la quantité de celle-ci augmente avec le temps. Si la quantité de cette substance (est dans le temps) $t = 0$ il est Q_0 ce qu'il faut, c'est trouver la fonction $Q = f(t)$ Pour représenter une fonction qui relie la variable indépendante t et la variable dépendante Q. Pour ce faire, supposons que le taux d'augmentation de la quantité est Q proportion à tout moment à la valeur de la quantité Q cela signifie que

$$\frac{dQ}{dt} = kQ \qquad k > 0$$

où k une constante est connue sous le nom de constante de croissance et l'équation c'est ce qu'on appelle l'équation de la croissance organique.

1.5.3 Équation de décroissance

Supposons que nous ayons une quantité Q d'une substance avec une contradiction dans sa quantité avec le temps, donc si la quantité de cette substance est dans le temps a l'instant $t = 0$ il est Q_0. Ce qu'il faut, c'est trouver la fonction $Q = f(t)$. Pour représenter une fonction qui relie la variable indépendante t et la variable dépendante Q. Pour ce faire, supposons que le taux de diminution de la quantité est Q il est proportionnel à tout moment à la valeur de la quantité Q. Cela signifie que

$$\frac{dQ}{dt} = -\lambda Q \qquad \lambda > 0$$

tandis que λ une constante est connue sous le nom de constante de de composition, qui est une equation différentielle et est une appelle équation de composition organique.

1.5.4 Mouvement du corps

Le problème du mouvement des corps éjectés de la surface de la terre verticalement vers le haut ou des corps descendant d'en haut vers la surface de la terre, nous supposons que l'accélération due à la gravité est g et la masse du corps du projectile m ce sont des magnitudes fixes où l'accélération de la gravité terrestre est $g = 32ft/sec^2$.
Nous supposons que la direction positive est de haut en bas pour les objets descendant de bas en haut et pour les objets éjectés verticalement vers le haut et d'après la loi du mouvement de Newton nous avons

$$F = m\frac{dv}{dt}$$

où F ce sont les forces agissant sur un corps en mouvement.
m : La masse d'un corps (en mouvement dans le temps.)
v : Vitesse du mobile dans le temps a l'instant t.

1.6 Créer une équation différentielle

Il n'est peut-être pas approprié de parler dans notre sujet des équations différentielles sans aborder certaines des raisons de l'émergence des équations différentielles.

1.6.1 Créez des équations différentielles à l'aide d'un ensemble de courbes

Soit l'ensemble des courbes dans le plan (xoy) défini par l'équation

$$\psi(x, y, c_1, c_2, ..., c_n) = 0 \tag{1.2}$$

pour tout $x \in I \subset \mathbb{R}$ et relatif à n constante facultative. Pour trouver l'équation différentielle de ces courbes, on dérive (1.2) n fois puis on annule les constantes.

Exemple

Trouver l'équation différentielle de l'ensemble des cercles

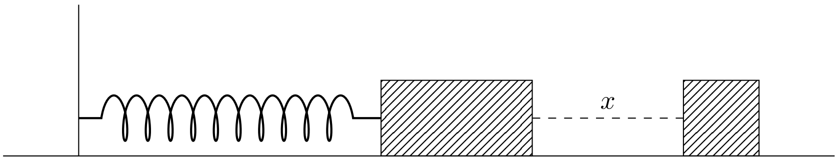
$$x^2 + y^2 = c^2$$

Nous dérivons cette relation pour x une fois, nous trouvons

$$2x + 2yy' = 0 \qquad \Longrightarrow y' = -\frac{x}{y}; y \neq 0$$

1.6.2 Créez une équation différentielle à l'aide de problèmes de physique

Laissez un corps de masse m être placé sur une surface lisse. Il n'y a pas de frottement. Nous connectons le corps à un ressort comme indiqué sur la figure



Déplacez le corps dans la direction opposée au point d'ancrage d'une distance x physiquement, selon la loi d'Hooke(La loi de Hooke s'exprime par la relation mathématique suivante : Force = − déplacement multiplier par constante d'élasticité. Et avec des symboles :$F = -kx$), ce corps sera soumis à une force F proportionnelle à la distance x c'est-à-dire $F = kx$ où k est la constante d'élasticité. D'autre part, d'après (la seconde loi de Newton), on a $F = mx^{''}$($x^{''}$ accélération). Et à partir de là $mx^{''} = kx$

lequel $mx^{''} - kx = 0$

C'est une équation différentielle du second ordre.

Chapitre 2

Quelques types d'équation différentielle ordinaire du premier ordre

On appelle une équation différentielle du premier ordre. Toute équation s'écrit sous la forme générale :

$$y^{'} = f(x, y) \tag{2.1}$$

ou

$$f(x, y, y^{'}) = 0$$

où x est la variable indépendante et y l'inconnue et en fonction de x.

Observation L'équation (2.1) peut s'écrire comme suit

$$dy = f(x, y)dx. \tag{2.2}$$

2.1 Équation différentielle des variables séparés

Si possible on écrit l'équation (2.2) sous la forme

$$M(x)dx + N(y)dy = 0.$$

On dit que c'est une équation à variables séparés. Pour le résoudre on passe a l'intégrale

$$\int M(x)dx + \int N(y)dy = c$$

où c une constante.

Exemple 1

On trouve la solution générale et la courbe particulière qui passe par le point de $(0, 0)$ de l'équation différentielle

$$e^x \cos y dx + (1 + e^x) \sin y dy = 0.$$

En séparant les variables et en divisant les deux côtés de l'équation donnée par $\cos y(1+e^x)$ nous obtenons

$$\frac{e^x}{1+e^x}dx + \frac{\sin y}{\cos y}dy = 0$$

Par intégration directe

$$\ln(1+e^x) - \ln|\cos y| = \ln c$$

$$\ln\frac{(1+e^x)}{|\cos y|} = \ln c$$

Ainsi, la solution générale de cette équation est

$$1+e^x = c|\cos y|.$$

En compensation de $y=0,\ x=0$ et on trouve

$$c = 2$$

Et la propre solution

$$1+e^x = 2|\cos y|.$$

Exemple 2 On trouve l'équation des courbes qui satisfait l'équation

$$xydy - \frac{1+y^2}{1+x^2}dx = 0 \tag{2.3}$$

puis on trouve ensuite la solution de l'équation (2.3) qui donne un chiffre passant par le point (1,-3).

En séparant les variables, on obtient

$$\frac{1}{1+y^2}dy - \frac{1}{x(1+x^2)}dx = 0.$$

En utilisant des fractions partielles

$$\frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{A}{x} + \frac{B_1x+B_2}{1+x^2}$$

$$1 = A(1+x_2) + (B_1x+B_2)x.$$

En égalant le terme absolu en plus, on obtient $A=1$.

En égalisant le coefficient x^2 sur les côtés on obtient $A+B=0 \quad \Rightarrow B_1=-1$.

En égalisant le coefficient x sur les côtés on obtient $B_2=0$.

C'est-à-dire

$$\frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}$$

Et l'équation devient sur l'image

$$\frac{y}{1+y^2}dy - \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}\right) dx = 0.$$

Par intégration directe, on obtient

$$1/2 \ln(1+y^2) - \ln x + 1/2 \ln(1+x^2) = \ln c.$$

C'est-à-dire

$$\frac{(1+y^2)(1+x^2)}{x^2} = k, \quad c^2 = k.$$

Quand $y = -3,\ x = 1$ être

$$\frac{(10)(2)}{1} = k \quad \Rightarrow k = 20.$$

Par conséquent, une solution particulière est nécessaire

$$(1+x^2)(1+y^2) = 20x^2$$

$$1 - 19x^2 + x^2y^2 + y^2 = 0.$$

Exemple 2 On trouve la solution générale de l'équation

$$y' + e^x y = e^x y^2.$$

Écrivons l'équation sur l'image

$$y' = e^x(y^2 - y).$$

Ensuite, en séparant les variables, on obtient

$$e^x dx = \left(\frac{1}{y(y-1)}\right) dy.$$

En utilisant des fractions partielles, on trouve que

$$e^x dx = \left(\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y}\right) dy.$$

Alors par intégration directe, on obtient

$$e^x = \ln|y-1| - \ln|y| + c.$$

C'est la solution générale.

2.2 Équation différentielle du premier ordre homogène

On dit qu'une équation différentielle $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ est homogène si M et N sont des fonctions homogènes de même degré, étant donné que $f(x,y)$ est une fonction homogène de degré n si $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x,y)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
Par exemple, la fonction f définir par $f(x,y) = x^2 + 3xy - y^2$ est homogène de degré 2 car

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^2 x^2 + 3\lambda^2 xy - \lambda^2 y^2 = \lambda^2 f(x,y).$$

Par conséquent, l'équation différentielle homogène peut être mise sous la forme suivante

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)} = f(x,y).$$

Puisque M et N sont homogènes de même degré, on trouve que$f(x,y)$ est homogène de degré zéro. C'est-à-dire que c'est possible $f(x,y) = f\left(\frac{y}{x}\right)$.
On conclut, L'équation différentielle $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ est homogène si les deux M et N sont homogènes du même degré.
En d'autre terme, l'équation sur la formme $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ être une équation homogène.
Dans ce cas, nous utilisons la compensation $\frac{y}{x} = v$ c'est-à-dire $y = xv$ et donc $dy = xdv + vdx$.
Alors l'équation se transforme en une équation dont les variables peuvent être séparées puis résolues comme précédemment.

Exemple

On trouve la solution générale de l'équation $(x^2 + y^2)dx - 2xydy = 0$.
Il est clair que l'équation est homogène.
Lorsque on pose $y = xv$ et donc $dy = xdv + vdx$, nous avons

$$(x^2 + v^2x^2)dx - 2x^2v(vdx + xdv) = 0.$$

En divisant par x^2 on obtient

$$(1 + v^2)dx - 2v(vdx + xdv) = 0$$

Alors

$$\left(1 + v^2 - 2v^2\right)dx - 2vxdv = 0$$

Donc

$$(1 - v^2)dx - 2vxdv = 0.$$

En séparant les variables, on obtient

$$\frac{1}{x}dx - \frac{2v}{1 - v^2}dv = 0.$$

Par intégration directe

$$\ln|x| + \ln|1 - v^2| = \ln c$$

Tandis que $v = \dfrac{y}{x}$, on a

$$|x^2 - y^2| = cx.$$

La solution générale y de l'équation différentielle donnée est vérifié $(x^2 + y^2)dx - 2xydy = 0$.

2.3 Équation différentielle linéaire du premier ordre

On dit un équation différentielle linéaire du premier ordre toute equation différentielle écrire sous la forme

$$y' + a(x)y = b(x) \tag{2.4}$$

ou a,b sont des fonctions continues de la variable x sur un intervalle I dans $\mathbb{R}$.

On appelle l'équation sans second membre

$$y' + a(x)y = 0 \tag{2.5}$$

l'équation homogène associe à (2.4).

Proposition 2.3.1 *La solution générale y de (2.4) est la somme de la solution générale y_h de (2.5) et d' une solution particulière y_p de (2.4).*

Preuve

y solution générale de (2.4) vérifie

$$y' + a(x)y = b(x)$$

de même y_p solution particulière de (2.4)

$$y_p' + a(x)y_p = b(x)$$

Par soustraction des deux equations différentielle précédentes, nous obtenons

$$y' - y_p' + a(x)(y - y_p) = 0$$

i.e.

$$(y - y_p)' + a(x)(y - y_p) = 0. \tag{2.6}$$

En posant $y_h = y - y_p$, cette solution vérifier l'équation homogène (2.6) et par suite

$$y = y_h + y_p.$$

Proposition 2.3.2 *la solution générale y_h de (2.5) est écrire comme suit*

$$y_h = ce^{-\int a(x)dx}, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Preuve

Pour $y = 0$ est une solution de l'équation.
Pour $y \neq 0$, l'équation (2.5) équivalent $\dfrac{y'}{y} = -a(x)dx$ c'est une équation à variables séparables peut être écrit comme suit $\dfrac{dy}{y} = -a(x)dx$ et en l'intégrant les deux memberes côtes on trouve

$$y = ce^{-\int a(x)dx}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Dans les deux cas, nous avons

$$y_h = ce^{-\int a(x)dx}, \quad c \in \mathbb{R}$$

est une solution de l'équation homogène (2.5).
Exemple *l'équation linéaire homogène $y' - 2xy = 0$ admet une solution c'est immédiate*

$$y_h = ce^{-x^2}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Resolution de l'équation avec second membre

la résolution de l'équation (2.4) avec second membre (non homogène) complète nécessite la connaissance de y_h solution générale de (2.5) définie précédemment et celle de y_p solution particulière de (2.4) qui reste déterminer.
Il y'a au moins trois mèthodes de trouèver la solution particulière y_p , nous les listons sous la forme de trois thèories.

Théoréme 2.3.1 *(**Méthode de variation de la constante**)*
Si $y_h = ce^{-\int a(x)dx}$,$c \in \mathbb{R}$, la solution général de l'équation (2.5) et par de variation de la constante, on déduire que y_p est une solution particulière de l'équation non homogène (2.4).
Preuve
En posant $y_p = c(x)e^{-\int a(x)dx}$ alors on trouve

$$y_p' = c'(x)e^{-\int a(x)dx} - a(x)c(x)e^{-\int a(x)dx}$$

et par compensation dans l'équation (2.4) on obtient $c'(x)e^{-\int a(x)dx} = b(x)$ donc $c'(x) = b(x)e^{\int a(x)dx}$ ce qui implique $c(x) = \int e^{\int a(x)dx}b(x)dx$
on conclut que $y_p = e^{-\int a(x)dx}\int e^{\int a(x)dx}b(x)dx$ comme une solution particulière de l'équation (2.4).

Corollaire 2.3.1 *:La solution générale de l'équation différentielle linéaire de permiére ordre non homogène (2.4) écrire sous la forme*
$y = ce^{-\int a(x)dx} + e^{-\int a(x)dx} \int e^{\int a(x)dx} b(x)dx,\ c \in \mathbb{R}$

Théoréme 2.3.2 (Paramètre d'intégration)
Soit la fonction μ dérivable, non nulle sur l'intervalle I telle que $\mu' = \mu a(x)$, allors la solution générale de l'équation (2.4) écrire sous la forme

$$y = ce^{-\int a(x)dx} + e^{-\int a(x)dx} \int e^{\int a(x)dx} b(x)dx, \qquad c \in \mathbb{R}$$

Preuve 2.3.1 *Par multipliez les deux cotés de l'équation (2.4) par la fonction μ on obtient*

$$\mu y' + \mu a(x)y = \mu b(x) \tag{2.7}$$

et comme $\mu' = \mu a(x)$, l'équation (2.7) dévient

$$\mu y' + \mu' y = \mu b(x)$$

i.e

$$(\mu y)' = \mu b(x) \tag{2.8}$$

L'équation

$$\mu' = \mu a(x)$$

donne

$$\mu = e^{\int a(x)dx}$$

La substitution a (2.8) donne

$$(ye^{\int a(x)dx})' = e^{\int a(x)dx} b(x)$$

ce qui implique

$$ye^{\int a(x)dx} = \int e^{\int a(x)dx} b(x) + c$$

alors

$$y = ce^{-\int a(x)dx} + e^{-\int a(x)dx} \int e^{\int a(x)dx} b(x)dx, c \in \mathbb{R}$$

C'est la solution génerale de l'équation (2.4).

Remarque 2.3.1 *Comme on peut l'écrire la solution général de l'équation (2.4) sous la forme*

$$y = e^{-\int a(x)dx}\left(c + \int e^{\int a(x)dx} b(x)dx\right),\ c \in \mathbb{R}$$

par conséquent, la solution général de l'équation (2.4) peut être exprimée comme un produit de deux fonction après compensation, en déduit ces deux fonction dans le théorème suivant.

Théoréme 2.3.3 (Multiplication de deux fonction)
Si on pose $y = uv$ avec u, v deux fonction dérivables sur I telle que $u' + a(x)u = 0$ alors

$$u = e^{-\int a(x)dx} \qquad v = \int e^{\int a(x)dx} b(x) + c, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Preuve 2.3.2 *De $y = uv$ on a $y' = u'v + uv'$ et par compensation dans l'équation (2.4) nous avons*

$$u'v + uv' + a(x)(uv) = b(x).$$

Comme $u' + a(x)u = 0$ on obtient $u = e^{-\int a(x)dx}$ et l'on a $uv' = b(x)$
i.e. $v' = \frac{b(x)}{u}$ donc

$$v = \int e^{\int a(x)dx} b(x)dx + c, c \in \mathbb{R}.$$

2.4 Équation différentielle du premier ordre Bernoulli

Sa forme générale

$$y' + a(x)y = b(x)y^n \qquad n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$$

Nous remarquons que

Si n=0 alors

$$y' + a(x)y = b(x)$$

C'est une équation différentielle linéaire du premier ordre

Si n=1 alors

$$y' + (a(x) - b(x))y = 0$$

C'est aussi une équation différentielle linéaire du premier ordre.

Tandis que si $n \in N^* - \{1\}$

Pour $y = 0$ C'est une solution apparente de cette équation

Pour $y \neq 0$ On divise les deux membres de l'équation par y^n on obtient

$$\frac{y'}{y^n} + a(x)\frac{y}{y^n} = b(x)$$

$$\frac{y'}{y^n} + a(x)\frac{1}{y^{n-1}} = b(x). \tag{2.9}$$

Lorsque on mette $z = \frac{1}{y^{n-1}}$ *nous trouvons*

$$z' = (1-n)y^{-n}y'$$

$$= (1-n)\frac{y'}{y^n}$$

En le remplaçant dans l'équation (2.9) nous trouvons

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-n}z' + a(x)z &= b(x) \\ z' + (1-n)a(x)z &= (1-n)b(x) \end{aligned}$$

C'est une équation différentielle linéaire du premier ordre on trouve z *puis* y.

Exemple

On résoudre l'équation de Bernoulli suivante

$$y^{'} + \frac{1}{x}y = y^2.$$

On a $y = 0$ *est solution virtuelle de cette équation.*

Lorsque $y \neq 0$. *En divisant les deux membres de l'équation par* y^2, *on trouve*

$$\frac{y^{'}}{y^2} + \frac{1}{x}\frac{1}{y} = 1$$

Après on effectue la transformation suivante

$z = \frac{1}{y}$ *ce qui implique* $z^{'} = \dfrac{-y^{'}}{y^2}$.

En remplaçant, on trouve $-z^{'} + \frac{1}{x}z = 1$ *i.e.* $z^{'} - \frac{1}{x}z = -1$.

C'est une équation différentielle linéaire du premier ordre que l'on résout, on obtient $z = x(-\ln(x) + c)$.

Alors

$$y = 0 \quad ou \quad y = \frac{1}{x(-\ln(x) + c)}, \; x > 0, \; c \in \mathbb{R}.$$

2.5 Équation de Riccati du premier ordre

Sa forme générale

$$y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x) \tag{2.10}$$

tel que a, b, c *des fonctions sont continues sur l'intervalle* I *dans* $\mathbb{R}$.

Théoréme 2.5.1 *Si y_1 est solution particulière d'équation (2.10) alors la solution générale de cette équation donné par $y = y_1 + z$ tel que z est solution de l'équation*

$$z' = (b(x) + 2a(x)y_1)\, z + a(x)z^2.$$

Preuve

Comme y_1, y des solutions d'équation (2.10) on a

$$\begin{aligned} z' + y_1' &= a(x)(z + y_1)^2 + b(x)(z + y_1) + c(x) \\ &= a(x)(z^2 + y_1^2 + 2zy_1) + b(x)z + b(x)y_1 + c(x) \\ &= a(x)z^2 + a(x)y_1^2 + 2a(x)zy_1 + b(x)z + b(x)y_1 + c(x) \\ &= a(x)z^2 + (2a(x)y_1 + b(x))z + a(x)y_1^2 + b(x)y_1 + c(x). \end{aligned}$$

Donc

$$z' = a(x)z^2 + (b(x) + 2a(x)y_1)\, z.$$

Et cette équation est l'équation de Bernoulli. Pour le résoudre, nous créons une nouvelle variable μ et $\mu = \frac{1}{z^{n-1}} = z^{1-n}$, avec $n = 2$ donc $\mu = \dfrac{1}{z}$.

Exemple

Résolvons l'équation de Riccati suivante

$$y' = \frac{1}{x}y^2 - (2 + \frac{1}{x})y + x + 2$$

avec $y_1 = x$ sa solution particulière

On pose $y = y_1 + z$ alors $y = x + z$ donc $y' = 1 + z'$

on remplace dans l'équation donner, donc on obtient

$$\begin{aligned} 1 + z' &= \frac{1}{x}(x + z)^2 - (2 - \frac{1}{x})(x + z) + x + 2 \\ 1 + z' &= \frac{1}{x}(x^2 + z^2 + 2xz) - x - 2z + 1 - \frac{1}{x}z. \end{aligned}$$

Donc

$$z' = x + 2z + \frac{1}{x}z^2 - x - 2z - \frac{1}{x}z.$$

i.e.

$$z' + \frac{1}{x}z = \frac{1}{x}z^2. \tag{2.11}$$

C'est une équation de Bernoulli, pour la résoudre on pose

$$\mu = \frac{1}{z^{n-1}} = z^{1-n}$$

nous avons $n = 2$.

Alors

$$\mu = \frac{1}{z}.$$

Donc

$$\mu' = -\frac{z'}{z^2}$$

En divisant les deux côtés de l'équation (2.11) par z^2*, on obtient*

$$\frac{z'}{z^2} + \frac{1}{x}\frac{1}{z} = \frac{1}{x}$$

Après compensation, on trouve

$$-\mu' + \frac{1}{x}\mu = \frac{1}{x}$$

i.e.

$$\mu' - \frac{1}{x}\mu = -\frac{1}{x}.$$

C'est une équation différentielle linéaire du premier ordre, sa solution générale est

$$\mu = 1 + xc.$$

Ensuite

$$z = \frac{1}{\mu} = \frac{1}{1 + xc}.$$

Donc

$y = x + \frac{1}{1+x}$ *où* c *est une constante facultative.*

Chapitre 3

Problème de Cauchy

Définition

Supposons que nous ayons une équation différentielle $y' = f(x, y)$ *sous réserve de la condition initiale* $y(x_0) = y_0$ *où* $y_0, x_0 \in I$, *on peut l'écrire sous forme de problème comme suit*

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

et elle s'appelle problème de Cauchy.

Proposition (Forme intégrale du problème de Cauchy)

$y(x)$ *est une solution au problème de Cauchy si et seulement si c'est une solution à l'équation intégrale suivante*

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))ds. \tag{3.1}$$

Preuve

Soit y *une solution de l'équation* $y' = f(x, y)$ *avec* $y(x_0) = y_0$. *Nous intégrons les deux côtés par rapport à la variable* x *et nous trouvons*

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))ds.$$

D'autre part, nous dérivons l'expression $y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))ds$ *et nous trouvons ce qui est demandé.*

Conséquence

Toute solution au problème de Cauchy est une solution à l'équation intégrale (3.1) et le contraire *est vrais .*

3.1 Méthode d'approximations successives de Picard

Il existe de nombreuses équations différentielles du premier ordre. Il n'est pas possible d'obtenir une solution précise à ce problème par les méthodes connues adoptées, et nous recourons donc à la méthode de Piccard pour lui trouver des solutions approximatives.
Nous avons vu précédemment que la résolution de l'équation intégrale

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))ds$$

Pour obtenir des approximations de la solution $y(x)$ Pour l'équation (3.1) nous suivons ce qui suit
On substitue $y(s)$ dans la condition initiale y_0 dans l'intégration $\int_{x_0}^{x} f\left(s, y(s)\right) ds$ on obtient la première approximation comme suit :

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y_0)ds$$

Puis on substitue $y(s)$ par $y_1(s)$, on obtient l'approximation deuxième

$$y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y_1(s))ds$$

Et ainsi de suite, jusqu'à obtenir la suite des approximations successives, qui sont les suivantes :

$$\begin{cases} y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y_0)ds \\ y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y_1(s))ds \\ . \\ . \\ . \\ . \\ y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y_{n-1}(s))ds \end{cases}$$

Ainsi, on obtient une série d'approximations successives y_0, $y_1, ..., y_n$. Ce qui convergent vers la solution exacte.

Exemple

À l'aide de la méthode de Picard, calculez les trois solutions approchées du problème suivant

$$\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Puis en déduire la solution approximative.

Première approximation

$$\begin{aligned}
y_1(x) &= y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y_0)ds \\
&= 1 + \int_{0}^{x} f(s, 1)ds \\
&= 1 + \int_{0}^{x} 1ds \\
y_1(x) &= 1 + x
\end{aligned}$$

Deuxième tour

$$\begin{aligned}
y_2(x) &= y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y_1(s))ds \\
&= 1 + \int_{0}^{x} f(s, 1+s)ds \\
&= 1 + \int_{0}^{x} (1+s)ds \\
&= 1 + [s + \frac{1}{2}s^2]_0^x \\
y_2(x) &= 1 + x + \frac{1}{2}x^2
\end{aligned}$$

Troisième approximation

$$\begin{aligned}
y_3(x) &= y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y_2(s))ds \\
&= 1 + \int_{0}^{x} f(s, 1+s+\frac{1}{2}s^2)ds \\
&= 1 + \int_{0}^{x} (1+s+\frac{1}{2}s^2)ds \\
&= 1 + [s + \frac{1}{2}s^2 + \frac{1}{6}s^3]_0^x \\
y_3 &= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3
\end{aligned}$$

Alors

$$y_n = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + ... + \frac{1}{n}x^n$$

C'est proche de la solution exacte $y(x) = e^x$.

3.2 Théorème d'existence et l'unité

Existence de la solution et unité

A *- Posons le problème de Cauchy suivante*

$$\begin{cases} |y'| + |y| = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Ce problème n'accepte aucune solution car $y(x) = 0$ *, C'est la seule solution pour elle, mais cela ne remplit pas la condition* $y(0) = 1$.

B *- Nous considérons maintenant le problème suivante*

$$\begin{cases} y' = x \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

par intégration on trouve $y(x) = \frac{1}{2}x^2 + c$ *et en utilisant la condition initiale on trouve* $c = 1$ *et de lui* $y(x) = \frac{1}{2}x^2 + 1$ *est la seule solution pour elle.*

C*- Enfin, nous considérons le problème suivante*

$$\begin{cases} xy' = y - 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Ce qui est résolu $y(x) = cx + 1$. *En utilisant la condition initiale on voit qu'il n'est pas possible de déterminer la valeur de c. Ainsi, le problème accepte un nombre infini des solutions.*

- Déduire par des exemples A, B, C. Un problème de Cauchy peut avoir une ou plusieurs solutions, ou il peut ne pas avoir de solution. Cela nous amène aux questions suivantes :

Q1 *) Sous quelle condition le problème de Cauchy admet-il au moins une solution (la question de l'existence) ?.*

Q2) *Sous quelles conditions le problème de Cauchy a-t-il une solution unique (La question de l'unité) ?.*

- La théorie qui contient ces conditions s'appelle le théorème existentiel et d'unité.

Théorème de Cauchy-Lipschitz (Théorème d'existence et d'unité)

Si $f(x, y)$ *est une fonction continue sur* R *et remplit la condition lipschitzienne par rapport à la deuxième variable* y *sur celle-ci où* R *est le rectangle dont le centre* (x_0, y_0) *et l'identifiant est le suivant*

$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; |x - x_0| \leqslant a,\ |y - y_0| \leqslant b\}$

(a,b sont deux réels compteurs parfaitement positifs) le problème de Cauchy

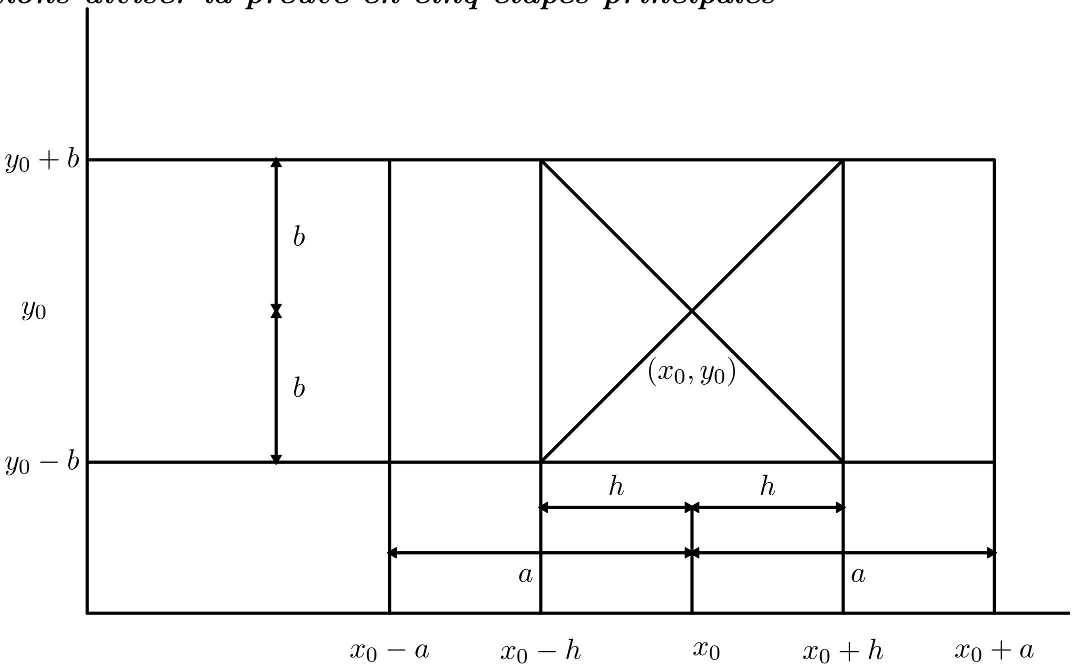
$$(p) : \begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Accepter une solution unique sur le domaine $[x_0-h, x_0+h]$ *où* $M = sup|f(x, y)|; h = min(a, \frac{b}{M})$.

Preuve

Nous prouverons ce théorème en utilisant la méthode d'approximations successives de Picard

Nous allons diviser la preuve en cinq étapes principales



La première étape

On prouve que pour chaque x *du domaine* $[x_0 - h, x_0 + h]$ *une courbe* y_n *située à l'intérieur du rectangle* R *c'est-à-dire*

$$|y_n - y_0| \leq b$$

Nous nous assurons que la propriété est correcte afin de $n = 1$ *c'est-à-dire que nous nous assurons que :* $|y_1 - y_0| \leq b$

nous avons

$$\begin{aligned} |y_1 - y_0| &= |y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y_0)ds - y_0| \\ &= |\int_{x_0}^{x} f(s, y_0)ds| \leq \int_{x_0}^{x} |f(s, y_0)|ds \\ &\leq M|x - x_0| \leq Mh \leq b \end{aligned}$$

Supposer $|y_n - y_0| \leq b$ *et prouver que* $|y_{n+1} - y_0| \leq b$

$$\Longrightarrow |y_{n+1} - y_0| = |y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y_n(s))ds - y_0|$$

$$\begin{aligned}
&= |\int_{x_0}^{x} f(s, y_n(s))ds| \\
&\leq \int_{x_0}^{x} |f(s, y_n(s))ds| \\
&\leq M|x - x_0| \leq Mh \leq b.
\end{aligned}$$

La deuxième étape

Nous prouvons que

$$|y_n - y_{n-1}| \leq \frac{Mk^{n-1}}{n!}|x - x_0|^n$$

Pour prouver cette inégalité, on utilise aussi la preuve par régression.

La propriété est vraie pour $(n = 1)$

Supposons maintenant que l'inégalité est vraie pour n et prouvons qu'elle est vraie pour $n + 1$

c'est-à-dire que nous prouvons

$$|y_{n+1} - y_n| \leq \frac{Mk^n}{(n+1)!}|x - x_0|^{n+1}$$

nous avons

$$\begin{aligned}
|y_{n+1} - y_n| &= |\int_{x_0}^{x} f(s, y_n)ds - f(s, y_{n-1})ds| \\
&\leq \int_{x_0}^{x} |f(s, y_n)ds - f(s, y_{n-1})ds|
\end{aligned}$$

En utilisant la condition de lipschitz, on trouve que

$$|f(s, y_n) - f(s, y_{n-1})| \leq k|y_n - y_{n-1}|$$

et à partir de là

$$\begin{aligned}
|f(s, y_n) - f(s, y_{n-1})| &\leq k\int_{x_0}^{x} |y_n - y_{n-1}|ds \\
&\leq \frac{Mk^{n-1}}{n!}\frac{|x - x_0|^{n+1}}{n+1}
\end{aligned}$$

Et çà veux dire

$$|y_{n+1} - y_n| \leq \frac{Mk^n}{(n+1)!}|x - x_0|^{n+1}$$

C'est l'inégalité requise, alors passons maintenant à l'étape suivante.

***La troisième étape** :*

Nous allons prouver que les séries i.e $y_n(x)$ convergent régulièrement pour chaque x du intervalle $[x_0 - h, x_0 + h]$

De la deuxième étape nous avons $|y_n - y_{n-1}| \leq \frac{Mk^{n-1}}{n!}|x - x_0|^n$

Et donc

$$|y_n - y_{n-1}| \leq \frac{Mk^{n-1}}{n!}h^n$$

On construire la série suivant

$$y_0 + (y_1 - y_0) + (y_2 - y_1) + ... + (y_n - y_{n-1}) + ... \tag{3.2}$$

nous avons :

$y_0 + (y_1 - y_0) + (y_2 - y_1) + ... + (y_n - y_{n-1}) = y_n$

D'après la convergence des séries et des séquences(3.2) la convergence de la série $(y_n)_{n\geqslant 1}$

Est équivalente à la convergence de la série et on a

$|y_0 + (y_1 - y_0) + (y_2 - y_1) + ... + (y_n - y_{n-1}) + ...|$

$\leq |y_0 + (y_1 - y_0) + (y_2 - y_1) + ... + (y_n - y_{n-1}) + ...|$

$\leq |y_0| + |y_1 - y_0| + |y_2 - y_1| + ... + |y_n - y_{n-1}| + ...$

$\leq |y_0| + Mh + \frac{1}{2!}Mh^2 + ... + \frac{1}{n!}Mk^{n-1}h^n + ...$

$\leq |y_0| + \frac{M}{k}(e^{kh} - 1)$

Ainsi la série (3.2) est absolument et régulièrement et alor la série $(y_n(x))$ *convergente régulièrement vers une fonction, soit* $y(x)$ *c'est-à-dire*

$$\lim_{n\to+\infty} y_n(x) = y(x).$$

La quatrième étape *:*

Dans l'étape précédente, nous avons démontré que $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n(x) = y(x)$

Nous prouverons que $y(x)$ *c'est une solution au problème de couchy*

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Utilisation d'une condition pour Lipschitz

$$|f(x, y_n) - f(x, y)| \leq k|y_n(x) - y|$$

alors

$$\lim_{n\to+\infty} f(x, y_n) = f(x, y)$$

nous avons

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y_{n-1}(s))ds$$

En mettant la limite des deux côtés, on obtient

$$\lim_{n\to+\infty} y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} \lim_{n\to+\infty} f(s, y_{n-1}(s))ds$$

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))ds$$

Alors $y(x)$ une solution au problème de Cauchy sur l'intervalle $[x_0 - h, x_0 + h]$.

La cinquième étape (Pour prouver l'unicité) *: On utilise "l'inégalité de Gronwall, ce qui est très important dans les équations différentielles.*

Preuve de l'unicité *: Soit ψ et φ ont deux solutions au problème de Cauchy. Alors ils obtiennent tous les deux*

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, \varphi(s))ds \\ \psi(x) &= y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, \psi(s))ds \end{aligned}$$

Et à partir de là

$$\begin{aligned} |\varphi(x) - \psi(x)| &= |\int_{x_0}^{x} f(s, \varphi(s)) - f(s, \psi(s))ds| \\ &\leq \int_{x_0}^{x} |f(s, \varphi(s) - f(s, \psi(s))|ds \\ &\leq \int_{x_0}^{x} k|\varphi(s) - \psi(s)|ds \end{aligned}$$

Parce que f Lipschitz

En utilisant l'inégalité de Grounnwall et en prenant :

$$g(x) = k; f(x) = |\varphi(x) - \psi(x)| \qquad et \;\; N = 0$$

Nous trouvons :

$$0 \leq |\varphi(x) - \psi(x) \leq 0e^{\int_{x_0}^{x} kds} = 0$$

Oreille :

$$|\varphi(x) - \psi(x)| = 0$$

Et donc : $\psi(x) = \varphi(x)$

C'est l'unité de la solution.

Exemple

On considère le problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} y' = x^2 + y^2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Nous considérons

$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; |x|\leq 1; |y|\leq 1\}$

En utilisant le théorème des plages de Cauchy, prouvons qu'il accepte une seule solution sur un intervalle qui doit être déterminé.

On a

1) *f continu sur $\mathbb{R}^2$ et donc il est continu sur $\mathbb{R}$*

2) *Prouver que f remplit une condition de lipschitz on $\mathbb{R}$*

$\forall(x, y_1); (x; y_2) \in \mathbb{R}$ *:*

$$\begin{aligned} |f(x,y_2) - f(x,y_1)| &= |(x^2 + y_2^2) - (x^2 + y_1^2)| \\ &= |y_2^2 - y_1^2| \\ &= |y_2 + y_1||y_2 - y_1| \\ &\leq (|y_2| + |y_1|)|y_2 - y_1| \\ &\leq 2|y_2 - y_1| \end{aligned}$$

Donc le suiveur f : remplit la condition de lipschitz sur $\mathbb{R}$

Et à partir de là, selon la théorie de Cauchy-lipschitz, le problème accepte une solution unique sur l'intervalle $[x_0 - h, x_0 + h]$ avec $x_0 = 0,\ a = 1,\ b = 1$ on obtient donc

$$h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right) = \min(1, \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$$

$$M = \sup|f(x,y)| = \sup|x^2 + y^2| = 2$$

Alors l'intervalle est $\left[-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right]$.

Chapitre 4

Applications

Dans ce chapitre, nous incluons quelques applications des équations différentielles du premier ordre dans différents domaines pour décrire différents phénomènes en plus des exemples.

Introduction

Les équations différentielles sont importantes pour les non-mathématiciens car elles peuvent être utilisées pour résoudre de nombreux problèmes dans les sciences physiques, biologiques et sociales.....etc. Trois étapes peuvent être identifiées quel que soit le sujet d'application spécifique. la situation physique doit être formulée mathématiquement, et généralement cela peut être fait en établissant des hypothèses sur ce dont il parle afin que les observations pratiques soient cohérentes. Par exemple, il a été observé que le taux de désintégration d'une substance radioactive est proportionnel à la quantité présente, et que la vitesse de passage de la chaleur d'un corps chaud à un corps froid est proportionnelle à la différence de température entre eux. Et que les corps se déplacent selon les lois du mouvement de Newton. Et les communautés isolées d'insectes se reproduisent au rythme du nombre d'insectes présents. Chacune de ces expressions comprend un taux de changement (dérivé) et par conséquent, lorsqu'il est formulé mathématiquement, il faut la forme d'une équation différentielle. Il est important de réaliser que les équations mathématiques sont une description approximative de ce qui se passe réellement. car elles dépendent d'observations, qui à leur tour sont une approximation. Par exemple, des objets qui se déplacent à une certaine vitesse peuvent être comparés à la vitesse de la lumière . Ils ne suivent pas les lois du mouvement de Newton. Et les sociétés d'insectes ne se multiplient pas indéfiniment en raison de la quantité limitée de nourriture qui leur est fournie, et le transfert de chaleur est affecté par des facteurs autres que la différence de température. De plus, le processus de formulation problèmes physiques mathématiquement,Il s'agit souvent de remplacer des processus discrets par des processus continus. Par exemple, le nombre d'insectes dans un *complexe change en quantités discrètes. Mais si la population est importante, il est raisonnable de la considérer comme une variable continue. On peut même parler de sa dérivée. D'une autre manière, nous pouvons considérer que les équations mathématiques décrivent avec précision ce qui se passe, dans un modèle simplifié, qui a été créé pour inclure les caractéristiques les plus importantes qui se produisent réellement.*

Dans tous les cas, lorsque le problème est formulé mathématiquement, l'élève est souvent confronté au problème de trouver une solution à une ou plusieurs équations différentielles. Et s'il ne le fait pas, il doit trouver autant de propriétés que possible pour la solution. Il est possible que ce problème mathématique soit très difficile et dans ce cas, d'autres approximations supplémentaires peuvent être présentées à ce stade afin d'être plus faciles à traiter.Par exemple, une équation non linéaire peut être approchée par une équation linéaire. la fonction changeant lentement peut être remplacée par le taux de ses valeurs.

Il est naturel de tester ce processus d'approximation d'un point de vue physique. Pour s'assurer que le problème mathématique simplifié reflète toujours les principales propriétés du processus physique discuté. En même temps, une connaissance précise de la nature du problème peut suggérer des approximations raisonnables qui rendent le problème plus adapté à l'analyse et à la compréphénomène physique avec la connaissance des méthodes mathématiques et des limites de leur application est une caractéristique importante des mathématiques appliquées et dont on ne peut se passer pour la formation de modèles mathématiqueshension du processus mathématique. Dans le même temps, une connaissance précise de la nature du problème peut suggérer des approximations raisonnables qui rendent le problème plus adapté à l'analyse et à la combinaison de la compréhension du phénomène physique mathématique avec la connaissance des méthodes mathématiques et des limites de leur application, une caractéristique importante en sciences appliquées.Mathématiques et indispensables pour la formation de modèles mathématiques pour des processus physiques précis et enfin lors de l'obtention de la solution ou (info à ce sujet au moins). Elle doit être interprétée en fonction des éléments du contenu physique du problème où elle s'est posée, et en particulier il faut toujours vérifier si la solution mathématique semble raisonnable d'un point de vue physique.Cette dernière exigence est importante car les coefficients de l'équation différentielle et les conditions initiales sont obtenus à la suite de mesures d'une grandeur physique et sont donc sujets à de petites erreurs. Et si ces petites erreurs entraînent de grands changements (ou des changements non continus)dans la solution du problème mathématique correspondant qui n'a pas été observé physiquement La compatibilité du modèle mathématique avec le problème physique doit être reconsidérée. Bien sûr, le fait que l'émergence d'une solution mathématique raisonnable ne garantit pas son exactitude. Mais si la *solution ne concorde pas avec les observations précises du système physique que nous veut que la solution décrive. Cela suggère soit qu'il y a une erreur dans la résolution du problème mathématique, soit que le modèle mathématique choisi n'est pas suffisamment précis pour que les problèmes présentés dans ce chapitre soient des exemples typiques d'applications dans lesquelles apparaissent des équations différentielles du premier ordre.*

4.1 Problèmes de croissance et décroissance

Symbolisons par $N(t)$ la quantité de la matière ou (population totale) présente à tout moment t (temps), ou l'étude de la croissance ou de la décroissance $N(t)$.
Cette matière croît ou décroît à un rythme proportionnel à la quantité présente, cela signifie que le rythme de changement par rapport au temps $\dfrac{dN}{dt}$ est proportionnel à la quantité N donc N l'équation différentielle est atteinte $\dfrac{dN}{dt} = kN$ où K est une constante de proportionnalité (positive en cas de croissance et négative en cas de décroissance).

Exemple 1

Le taux de croissance des bactéries dans une culture bactérienne est proportionnel au nombre d'éléments qu'elle contient. On a constaté qu'au bout d'une heure, la bactérie avait 1000 souches et qu'au bout de quatre heures, elle était devenue 3000 souches .

trouver

a) *Une expression du nombre approximatif de contraintes présentes à un instant donné t (estimé en heures).*

b) *Le nombre approximatif de souches existantes (à l'origine au début).*

La solution

Soit $N(t)$ le nombre de races en ce moment t l'équation appropriée est

$$\frac{dN}{dt} - kN = 0$$

C'est une équation différentielle linéaire du premier ordre qui peut être résolue en séparant les variables et sa solution est

$$N(t) = ce^{kt}, \qquad c \in \mathbb{R} \tag{4.1}$$

Quand $t = 1,\ N = 1000$ être $1000 = ce^{k}$

Quand $t = 4,\ N = 3000$ être $3000 = ce^{4k}$

Il en résulte $k = \frac{1}{3} ln3 \simeq 0.366$

Allons trouver $c \simeq 1000e^{-0.366} \simeq 694$

Et en substituant aux valeurs de c et k en (4.1) on trouve $N(t) \simeq 0.694e^{0.366t}$

En tant qu'expression du nombre de races présentes en ce moment t (estimé en heures).

b) *Le nombre approximatif de races qui existaient à l'origine est $N(0)$ (Pour le moment $t = 0$)*

Elle est $N(0) \simeq 694e^{(0.366)(0)} \simeq 694$.

Exemple 2

Le taux d'augmentation de la population dans une zone donnée est proportionnel au nombre de personnes qui y vivent Si la population a doublé au bout de deux ans et est devenue 2000 au bout de trois ans.

-Trouvez le nombre de personnes vivant dans cette zone depuis le début.

solution

Soit $N(t)$ le nombre de personnes vivant dans cette zone à tout moment t

N_0 Population au départ.

L'équation appropriée est

$$\frac{dN}{dt} - kN = 0$$

Qui est résolu

$N(t) = ce^{k}, \qquad c \in \mathbb{R}$

Quand $t = 0$, $N = N_0$ alors ça produit $N_0 = ce^{k(0)}$

Et donc $c = N_0$ et donc $N = N_0e^{kt}$

Lorsque $t = 2$, $N = 2N_0$

Ce sera $2N_0 = N_0e^{2k}$ et donc $k = \frac{ln2}{2} \simeq 0.347$

On a $N \simeq N_0e^{0.347t}$

Quand $t = 3$, $N = 20000$ alors $20000 \simeq N_0e^{0.347(3)} \simeq N_0(2.832)$

Allons trouver $N_0 \simeq 7062$.

Exemple 3(Décroissance de matières radioactives)

L'isotope radioactif du thorium se désintègre 234 à une vitesse proportionnelle à la quantité présente. Si le montant de 100 mlg se transforme en 82,04 mlg dans un délai d'une semaine (7 jours).

-Trouver une formule pour la quantité présente à un instan t donné (estimée en jours).

-Trouvez ensuite la période de temps qui doit s'écouler jusqu'à ce que la quantité actuelle devienne la moitié de la quantité d'origine.

Solution

Soit $N(t)$ la quantité de l'isotope du taurium 234 présent à tout moment t où N il est mesuré en milligrammes, et le temps est mesuré en jours.

L'isotope du thorium 234 se désintègre à une vitesse proportionnelle à la quantité présente, ce

qui signifie que la vitesse de variation par rapport au temps $\frac{dN}{dt}$ *est proportionnelle à la quantité* N .
Alors N *vérifie l'équation différentielle*

$$\frac{dN}{dt} = kN \tag{4.2}$$

où k *une constante de proportionnalité négative doit être trouvée.*
Trouvons la solution de l'équation (4.2) qui remplit la condition initiale $N(0) = 100$ *Il remplit également la condition* $N(7) = 82,04$.
L'équation différentielle peut être résolue (4.2) soit comme une équation linéaire du premier ordre, soit par la méthode de séparation des variables, et sa solution générale est :

$$N(t) = ce^{kt}, c \in \mathbb{R}$$

Et à partir de $N(0) = 100$ *nous obtenons* $c = 100$
Alors c'est $N(t) = 100e^{7k}$
Et à partir de $N(7) = 82,04$ *on trouve*

$$82,04 = 100e^{7k}$$

Obtenir $k = \frac{\ln(0,8204)}{7} \backsimeq -0,02828$
Ainsi, la formule de la quantite presente a tout instant t *est donnee comme suit*

$$N(t) = 100e^{-0,02828}$$

-La période de temps pendant laquelle la masse est réduite à la moitié de sa valeur d'origine est connue sous le nom de demi-vie de la substance.
Soit T *le temps qui passe pour devenir* $N(t)$ *égal* $50mlg$, *et de* $N(t) = 100e^{kT}$, *on trouve que :*
$50 = 100e^{kT}$ *ou* $kT = -\ln 2$
La demi-vie de l'isotope du thorium 234 *est*

$$T = \frac{\ln 2}{0,02828} \backsimeq 24,5(jour).$$

4.2 Problèmes de maladies infectieuses

La théorie mathématique des maladies infectieuses a été développée selon les directions suivantes.
Supposons qu'il existe une société qui se compose de n *membres* p *de ces membres sont infectés, tandis que* q *d'entre eux ne sont pas infectés, mais sont susceptibles d'être infectés, comme*

$p + q = n$.

D'une autre manière,que ce soit x le pourcentage de maladies, que ce soit y le pourcentage de personnes en bonne santé qu'il en soit ainsi $x = \frac{p}{n}$.et $y = \frac{q}{n}$ et que $x + y = 1$

S'il est n très grand, il est raisonnable de considérer x et y comme des variables continues, et alors le taux de propagation de la maladie est $\frac{dx}{dt}$

Si nous prenons l'hypothèse logique suivante :

la maladie se propage par contact entre Les infectés et les sains sont issus de la communauté. donc $\frac{dx}{dt}$ est proportionnel au nombre de contacts entre les infectés et les sains. Si les personnes infectées et saines se déplacent librement, alors le nombre de cas contacts est proportionnel au produit de x et y et on arrive donc à l'équation différentielle du premier ordre suivante

$$\frac{dx}{dt} = kxy$$

ou alors

$$\frac{dx}{dt} = kx(1 - x) \tag{4.3}$$

où k le coefficient de proportionnalité (valeur positive).

La condition initiale est $x(0) = x_0$. où x_0 la densité des blessés quand $t = 0$ l'équation (4.3) est une équation différentielle du premier ordre qui peut être résolue en séparant les variables, elle est équivalent à

$$\frac{dx}{x(1 - x)} = kdt$$

En insérant l'intégration, on obtient

$$\int (\frac{1}{x} + \frac{1}{1 - x})dx = \int kdt$$

Et à partir de là, $\ln x - \ln(1 - x) = kt + \lambda$

Alors

$\frac{x}{1 - x} = ce^{kt}$ *, où $c = e^{\lambda} \in \mathbb{R}$*

En utilisant la condition initiale $x(0) = x_0$ être $c = \frac{x_0}{1 - x_0}$

Et donc

$$\frac{x}{1 - x} = \frac{x_0}{1 - x_0} e^{kt}$$

Trouver

$$x = \frac{x_0 e^{kt}}{1 - x_0 + x_0 e^{kt}}$$

Ou comme

$$x = \frac{x_0 e^{kt}}{x_0 + (1 - x_0) e^{-kt}}$$

Si c'est $x_0 > 0$ *alors* $x \to 1$ *quand* $x \to +\infty$

Indépendamment de la valeur x_0 *réel.*

Par conséquent, quel que soit le nombre de personnes infectées au début, la maladie infectieuse se propagera et infectera toute la communauté.

Le modèle mathématique décrit dans une partie ou une entité, mais il donne une visualisation, même approximative, de la gravité de la maladie et de l'étendue de sa propagation. Il aide les organismes compétents (autorités sanitaires) à prendre les mesures appropriées pour limiter la propagation de l'infection.

D'une part, si la maladie est très grave, une quarantaine naturelle aura lieu dans la mesure où elle limite les déplacements des personnes infectées. Il est possible pour les autorités sanitaires d'imposer une quarantaine pour limiter également la possibilité de contact entre les personnes infectées et les personnes saines.

De même, les maladies se transmettent par contact pendant une durée déterminée seulement, alors que dans le modèle utilisé, l'infection se transmet de façon continue, et tous ces facteurs trouvent la vitesse de sa propagation comme nous l'attendions plus haut.

Certaines maladies, comme le paludisme, ne se propagent pas par contact direct, mais par un animal ou un insecte. Le modèle mathématique de la propagation d'une telle maladie est beaucoup plus difficile que l'exemple de cette situation en termes de probabilité.

Exemple Certaines maladies (comme la typhoïde) *sont transmises dans une large mesure par les porteurs de la maladie, c'est-à-dire ceux qui peuvent propager la maladie mais qui ne présentent aucun symptôme. Symbolisons* x *et* y *à la densité de porteurs de maladies et à la densité de personnes en bonne santé susceptibles d'être infectées, respectivement, en ce moment* t.

Nous supposons que les porteurs de la maladie sont isolés de la société à un taux de k, *donc*

$$\frac{dx}{dt} = -kx \tag{4.4}$$

Et si nous supposons que la maladie se propage à un rythme égal au produit de x *et* y *alors*

$$\frac{dy}{dt} = -\alpha xy \tag{4.5}$$

A - Trouver une valeur x *à tout instant* t *en trouvant la solution de l'équation (4.4) qui remplit la condition initiale* $x(0) = x_0$.

B - Utiliser le résultat de la question A pour trouver la valeur de y *à tout instant* t *en trouvant l'équation (4.5) qui satisfait la condition initiale* $y(0) = y_0$.

C - Trouver le pourcentage de ceux qui sur vivent à cette maladie contagieuse dans la communauté, c'est-à-dire trouver la valeur finale de y *quand* $t \to +\infty$, *et déterminer comment cette* *quantité change avec chacun de x, k .*

***solution** :*

A - L'équation différentielle

$$\frac{dx}{dt} = -kx$$

équivant

$$\frac{dx}{x} = -kdt$$

Passant à l'intégration, nous trouvons

$$x = ce^{-kt}, \qquad c \in \mathbb{R}$$

Et à partir de la condition initiale $x(0) = x_0$ on trouve $c = x_0$

Alors

$$x = x_0 e^{-kt}$$

. B- En substituant la valeur du dernier x dans l'équation (4.5) nous obtenons

$$\frac{dy}{dt} = -\alpha x_0 e^{-kt} y$$

Ce équivalent

$$\frac{dy}{y} = -\alpha x_0 e^{-kt} dt$$

Passant à l'intégration, on trouve

$$y = ce^{\frac{\alpha}{k} x_0 e^{-kt}}, c \in \mathbb{R}$$

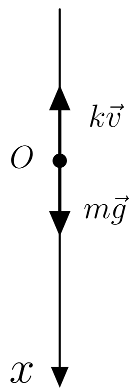
Et à partir de la condition initiale $y(0) = y_0$ on trouve $c = y_0 e^{\frac{-\alpha}{k} x_0}$ alors

$$y = y_0 e^{-\frac{\alpha}{k} x_0 (1-e^{-kt})}$$

C- Quand $t \to +\infty$ alors : $y \to y_0 e^{-\frac{\alpha}{k} x_0}$.

4.3 problèmes mécaniques

***Exemple 1** : Le problème d'un objet tombant du haut Un corps de masse m tombe au milieu de sa résistance R est proportionnelle à sa vitesse instantanée V le coefficient de résistance du milieu est donné par la relation $k = \frac{R}{V}$ c'est $R = kV$ en supposant que la force gravitationnelle de la Terre g est une constante, Trouvons l'emplacement et la vitesse de ce corps à tout moment t.*



Dans ce cas, il est plus approprié de prendre la direction positive de l'axe x vers le

bas et le principe o où le corps a commencé son mouvement (selon la figure correspondante), La seconde loi du mouvement de Newton peut s'écrire (la somme des forces agissant est égale à la masse multipliée par l'accélération) et puisque l'accélération en mouvement est donnée par la relation
$\frac{dv}{dt}$ *(le changement de vitesse par rapport au temps)*
Cette loi est donc donnée sous la forme suivante

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv$$

i.e.

$$\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}v = g$$

ou en d'autres termes

$$v' + \frac{k}{m}v = g$$

C'est une équation différentielle linéaire du premier ordre dans laquelle la vitesse est inconnue V *et la variable indépendante est le temps* t.

-Résoudre cette équation (en utilisant un changement constant)

Il s'écrit comme suit

$$V = V_s + V_p$$

où

$$\begin{aligned} V_s &= ce^{-\int \frac{k}{m}dt} \\ &= ce^{-\frac{k}{m}t} \end{aligned}$$

Sa solution particuliér est donnée par

$$V_p = c(t)e^{\frac{k}{m}t}$$

trouver

$$V_p' = c'(t)e^{-\frac{k}{m}t} - \frac{k}{m}c(t)e^{-\frac{k}{m}t}$$

Après l'avoir substitué dans l'équation, on obtient

$$c'(t)ge^{\frac{k}{m}t}$$

Alors

$$c(t) = g\frac{m}{k}e^{\frac{k}{m}t}$$

devenir

$$V_p = \frac{gm}{k}$$

Et la solution générale

$$V = ce^{-\frac{k}{m}t} + \frac{gm}{k}$$

-La condition initiale de ce problème est $V(0) = 0$ *obtenir* $c = -\frac{gm}{k}$

Par conséquent, la vitesse du corps à tout moment t *est donnée comme suit*

$$V(t) = \frac{gm}{k}(1 - e^{-\frac{k}{m}t})$$

Tant que la vitesse V *représente le changement de distance* x *par rapport au temps* t *c'est-à-dire*

$$\frac{dx}{dt} = V$$

on déduir

$$x = \int_0^t V(s)ds$$

on par écrire

$$x = \int_0^t (\frac{gm}{k} - \frac{gm}{k}e^{-\frac{k}{m}s})ds$$

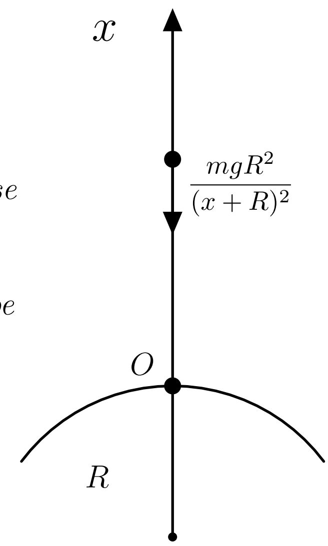
Par intégration on obtient

$$x(t) = \frac{gm}{k}t + \frac{m^2}{k^2}ge^{-\frac{k}{m}t} - \frac{m^2}{k^2}g$$

Qui représente la position du corps à n'importe quel moment t.

Exemple 2

Un objet de masse m *est éjecté de la surface de la Terre avec une vitesse initiale* v_0 *, en supposant qu'il n'y a pas de résistance de l'air.*



Obligatoire

trouver la plus petite vitesse initiale qui permet au corps de ne pas revenir sur Terre (comme les vaisseaux spatiaux) cette vitesse s'appelle la vitesse de fuite.

En supposant l'axe x *avec la direction positive vers le haut et le principe o sur la surface de la terre.*

La seule force qui affecte le corps est son poids $w = mg$, *bien que la masse du corps soit fixe, son poids et son accélération gravitationnelle changent en fonction de la distance du corps au centre du champ gravitationnel terrestre, sachant que le poids est fixe à la surface de la mer uniquement et constante à la surface de la mer uniquement (parce que* g *constante), et la formule générale pour le poids d'un corps avec une masse* m *peut être obtenue en utilisant la loi carrée inverse de Newton de la force de gravité.* R *le rayon de la* *terre et x la hauteur au-dessus du niveau de la mer, puis* $w(x) = \dfrac{k}{(x+R)^2}$ *où k Fixe .lorsque* $x = 0$*(Toute surface de la mer) alors* $w = mg$ *Donc* $k = mgR^2$ *et c'est* $w(x) = \dfrac{mgR^2}{(x+R)^2}$, *Donc l'équation du mouvement du corps est Par conséquent, l'équation du mouvement du corps est*

$$m\frac{dv}{dt} = -\frac{mgR^2}{(x+R)^2} \tag{4.6}$$

Et la condition initiale $v(0) = v_0$

Et puisque x est une variable par rapport au temps (une fonction en termes de temps t)donc

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx}$$

Et l'équation (4.6) devient

$$v\frac{dv}{dx} = -\frac{gR^2}{(x+R)^2}$$

Cela équivaut à

$$vdv = -\frac{gR^2}{(x+R)^2}dx$$

Ce qui représente une équation différentielle du premier ordre à variables séparee et par intégration on trouve

$$\frac{1}{2}v^2 = -\frac{gR^2}{(x+R)} + c$$

Et pour $t = 0$ *nous trouvons que* $x(0) = 0$ *et* $v(0) = v_0$

donc

$$c = \frac{1}{2}v_0^2 - gR$$

alors

$$v^2 = v_0^2 - 2gR + \frac{2gR^2}{x+R}$$

ou en écrivant

$$v^2 - \frac{2gR^2}{x+R} = v_0^2 - 2gR$$

La vitesse de fuite peut être trouvée en supposant toujours la montant $v^2 - \dfrac{2gR^2}{x+R} \geq 0$ *pour trouver* $v_0^2 - 2gR \geq 0$ *c'est-à-dire* $v_0^2 \geq 2gR$ *par conséquent, la vitesse d'échappement v_0 elle*

$$v_0 = \sqrt{2gR}$$

Observation

La vitesse d'échappement v_0 réelle est proche de la réalité si l'on tient compte de l'effet de la résistance de l'air. d'autre part, la vitesse d'échappement peut être considérablement réduite lors du déplacement du corps à une distance aussi élevée que possible au-dessus de la surface *de la mer avant de le relâcher. La gravité terrestre et la force de frottement diminuent avec l'augmentation de la hauteur, en particulier la résistance de l'air diminue très rapidement à mesure que la hauteur augmente.*

Conclusion

Dans cette recherche, nous avons traité des équations différentielles du premier ordre, où nous avons cherché à trouver des solutions pour certains de leurs types (à changements discrets, homogènes, linéaires, Bernoulli et Riccati), puis nous avons étudié le problème de Cauchy avec la condition initiale pour faciliter le fait de savoir si l'équation de la variance du premier ordre accepte une solution unique en incluant la théorie de l'existence et de l'unité, nous avons également contribué à l'inclusion de certaines applications dans différents domaines tels que la physique et la biologie, où l'équation différentielle est du premier ordre comme mécanisme de base pour atteindre des résultats qui ont une importance dans la réalité.

Les applications que nous avons abordées dans cette recherche dans lesquelles nous avons utilisé des équations différentielles du premier ordre pour décrire certains phénomènes et elles peuvent être décrites d'autres manières.
Nous espérons que cette recherche profitera aux chercheurs qui étudient dans la spécialité des équations différentielles, et qu'ils auront du soutien dans d'autres recherches qui sont un prolongement de cette recherche.

Bibliographie

[1] د.حسن العويضي، د.عبد الوهاب عباس ،المعادلات التفاضلية العادية "الجزء الأول والجزء الثاني"، دار الراشد، الطبعة الأولى 2005.

[2] صلاح علي مبخوت، المعادلات التفاضلية ، جامعة ذمار-اليمن، قسم الرياضيات ، اكتوبر 2009.

[3] عمران قوبا، التحليل، الجزء الثالث، من منشورات المعهد العالي العلوم التطبيقية والتكنولوجيا، الجمهورية العربية السورية، الإصدار الأول، الطبعة الأولى،2018.

[4] Brauer, Nohel. Qualitative theory of ODEs, Dover, 1969.

[5] Chicone, C. Ordinary Differential Equations with Applications(TAM 34, Springer, 1999) (ISBN 038798535).

[6] Forsyth, A.R. Vol.2. Theory of differential equations, part 2. Ordinary nonlinear equation, 1900.

[7] GEORGE, M. MURPHY ; Ordinary Differential Equation And Their Solutions, Copyright (1960) by litton Educational Publishing, Ine.

[8] Hartman, P. Ordinary differential equations, Wiley,1964.10.

Résumé

Dans ce mémoire, nous avons étudié certains types d'équations différentielles du premier ordre et représenté dans les équations différentielles à variables discrètes, homogènes, linéaires, Bernoulli et Riccati en plus de l'inclusion du problème de Cauchy utilisant la condition initiale. Nous avons également discuté des moyens de résoudre ces modèles afin de les utiliser dans des applications dans différents domaines tels que la physique et la biologie, où l'équation différentielle du premier ordre était un mécanisme pour décrire certains phénomènes de ces domaines et leurs solutions qui donnent des résultats importants pour résoudre les problèmes en suspens.

Mots clés : Équation différentielle, solution générale, solution particulière, condition initiale, loi du mouvement de Newton

Abstract

In this memoire, we have studied some types of first order differential equations and represented in the differential equations with discrete, homogeneous, linear, Bernoulli and Riccati variables in addition to the inclusion of the Cauchy problem using the initial condition. We also discussed ways to solve these models in order to use them in applications in different fields such as physics and biology, where the first order differential equation was a mechanism to describe some phenomena of these fields and their solutions which yield important results in resolving outstanding issues.

key words: Differential equation, general solution, particular solution, initial condition, Newton's law of motion

ملخص

درسنا في هذا البحث بعض أنماط االمعادلة التفاضلية من الرتبة الأولى و المتمثلة في المعادلات التفاضلية ذات المتغيرات المنفصلة، المتجانسة، الخطية، برنولي و ريكاتي بالاضافة إلى إدراج مسألة كوشي باستعمال الشرط الابتدائي. كما تطرقنا إلى طرق حل هذه الأنماط لهدف توظيفها في التطبيقات لميادين مختلفة كالفيزياء والبيولوجيا حيث كانت المعادلة التفاضلية من الرتبة الأولى آلية لوصف ظواهر معينة لهذه الميادين وحلولها تعطي نتائج مهمة لحل المسائل العالقة فيها.

الكلمات المفتاحية: المعادلة التفاضلية، الحل العام، الحل الخاص، الشرط الإبتدائي، قانون نيوتن للحركة