

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de  
la Recherche Scientifique



UNIVERSITÉ HAMMA LAKHDAR  
-EL OUED-  
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES



Mémoire de fin d'étude  
**MASTER ACADEMIQUE**

Domaine : Mathématiques et informatique

Filière : Mathématiques

Option : Mathématiques fondamentales et appliquées

Thème

**Solution Numérique d'équation Intégrale  
de Volterra par la Méthode de Runge-Kutta**

Présentées par : Grira Wassila  
Zebidi Nesrine

Soutenu publiquement le 16/06/2022, devant le jury composé de

Mdekkel Hamza	Président	MCA	Univ. Eloued
Brahim Ben Ali	Rapporteur	MCA	Univ. Eloued
Dehda Bachir	Examineur	MCA	Univ. Eloued

Année universitaire 2021 – 2022

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Outils de base</b>	<b>1</b>
1.1	Notions d'analyse fonctionnelle . . . . .	1
1.2	Rappel sur les opérateurs . . . . .	3
1.3	Généralités sur les équations intégrales . . . . .	5
1.3.1	Equations intégrales de Volterra : . . . . .	5
1.3.2	Equations intégrales de Fredholm . . . . .	9
<b>2</b>	<b>Méthodes numériques</b>	<b>11</b>
2.1	Définition des méthodes à un Pas, exemples . . . . .	11
2.1.1	Définitions . . . . .	11
2.1.2	Retour sur la méthodes d' Euler . . . . .	11
2.1.3	Méthode de Taylor d'ordre p . . . . .	12
2.1.4	Méthode du point milieu . . . . .	13
2.2	Consistance, Stabilité et Convergence . . . . .	15
2.2.1	La méthode consistante . . . . .	15
2.2.2	La méthode stable . . . . .	15
2.2.3	La méthode convergente . . . . .	15
2.3	Méthodes de Runge-Kutta . . . . .	16
2.3.1	Exemples[5] . . . . .	17
2.3.2	Stabilité Des Méthodes de Runge-Kuta . . . . .	20
2.3.3	Ordre Des Méthodes De Runge-Kutta . . . . .	21
2.4	Méthode Simpson [1] . . . . .	22
2.4.1	Formules de Newton-Cotes simples et composées . . . . .	23
<b>3</b>	<b>Applications</b>	<b>30</b>
3.1	Méthode de Simpson modifiée . . . . .	30
3.1.1	Exemple . . . . .	31
3.2	Méthodes naturelles Volterra Runge-Kutta . . . . .	32
3.2.1	Introduction . . . . .	32
3.2.2	Ordre des étapes et conditions d'ordre . . . . .	33
3.2.3	Analyse de stabilité par rapport à l'équation du test de convolution . . . . .	37
3.2.4	Exemples de méthodes VRK naturelles stables $A$ et $V_0$ . . . . .	41
3.2.5	Expériences numériques : . . . . .	45

# Dédicaces

Louange à Dieu, qui nous a permis de clôturer d'apprécier cette étape de notre parcours universitaire

avec ce mémoire, fruit d'efforts et de réussite, par sa grâce, est dédié aux honorables parents, que Dieu les préserve et les perpétue comme une lumière pour notre chemin, car ils étaient source de vie, d'amour et d'affection.

Aux deux honorables familles (**GRIRA** et **ZEBIDI**).

Pour nous soutenir dans la vie sont nos frères et sœurs.

Aux amis de toute une vie, et aux compagnons de route qui ont partagé ses moments avec nous, que Dieu les bénisse et leur accorde le succès.

# Remerciements

Nous remercions Dieu Tout-Puissant de nous avoir donné la santé et la volonté de commencer et de terminer ce mémorandum. Tout d'abord, je remercie le superviseur, le **Dr. Ben Ali Brahim** pour avoir soulevé ce sujet et pour ses conseils lors de la préparation de ce mémoire. Nous le remercions pour la qualité de son encadrement.

Notre sincère gratitude à tous les membres du jury pour l'honneur qu'ils nous ont fait et pour avoir accepté de présider et de réviser ce travail.

Nos remerciements également à tous nos professeurs pour leur générosité et leur grande patience dont ils ont fait preuve malgré leurs charges académiques et professionnelles.

Nous adressons également nos sentiments de gratitude et de chaleureux remerciements vont également à nos camarades de la classe de mathématiques pour 2022, et à nos amis qui nous ont accompagnés du primaire à l'université, en particulier **Hana RAHIM** pour son soutien et son aide à nous en ces temps où tout allait mal.

Enfin, nous remercions tout le personnel de notre université qui nous accueille chaque matin avec le sourire.

# Introduction générale

Les équations intégrales ont de nombreuses applications en physique et en ingénierie. Cependant, il n'y a pas de solutions analytiques aux équations intégrales ou elles sont difficiles à trouver. C'est précisément pour cette raison que de nombreuses méthodes numériques pour trouver des solutions aux équations intégrales ont été développées. Certaines de ces méthodes s'appliquent uniquement aux équations intégrales linéaires tandis que d'autres s'appliquent à des cas particuliers d'équations intégrales non linéaires de Friedholm et Volterra. L'utilisation des méthodes à une étape précisément celle de RUNGE-KUTTA a pris de l'importance dans la résolution numérique des équations intégrales.

Dans notre travail, nous avons analysé la construction de la solution des équations intégrales de Volterra (VIE) à noyau  $K$  régulier, par la méthode de Runge-Kutta. Puis nous avons mis cette analyse à l'épreuve par une application sur deux exemples d'équations intégrales.

Comme il est bien connu, une méthode numérique est basée sur l'idée d'approximer la solution exacte d'une équation intégrale donnée avec une fonction appropriée appartenant à un espace de dimension finie choisi, généralement un polynôme algébrique par morceaux, qui satisfait l'équation intégrale exactement sur un certain sous-ensemble de l'intervalle d'intégration (appelé l'ensemble des points de collocation).

Il convient de noter que ce type d'équations intervient dans de nombreux problèmes d'évolution : la propagation des épidémies, la croissance des populations biologiques, la dynamique cérébrale, l'élasticité et la plasticité, les problèmes ondulatoires, la conduction thermique, la dynamique des fluides, la théorie de la diffusion, la sismologie, la biomécanique, la théorie des jeux, le contrôle, la théorie des files d'attente, la conception de filtres électroniques et de nombreux autres problèmes de physique, chimie, pharmacologie, médecine, économie peuvent être modélisés à travers des systèmes d'équations intégrales de Volterra. afin d'augmenter l'ordre des méthodes d'agrégation classiques en une étape sans aucun coût de calcul supplémentaire. Cependant, les méthodes d'ordre élevé résultantes ont contraint les régions de stabilité. En raison de la grande variété d'applications, il devient de plus en plus important de développer des méthodes numériques efficaces afin de résoudre ces problèmes et d'imposer des exigences particulières à ces méthodes, telles que des propriétés d'ordre élevé et de stabilité élevée, afin d'augmenter l'ordre des méthodes. Les méthodes d'ordre élevé résultantes avaient, cependant, des régions de stabilité délimitées.

Nous allons étudier l'équation intégrale linéaire de Volterra de seconde espèce et elle s'écrit comme suit :

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t)\varphi(t)dt$$

Notre mémoire comprend trois chapitres :

Le premier chapitre traite des concepts généraux d'espaces et d'opérateurs linéaires et intégraux et généralités sur les équations intégrales (type, linéaire et non linéaire, homogène et non homogène)

Dans le deuxième chapitre, nous avons présenté les méthodes que nous allons appliquer, et nous avons rappelé les méthodes d'Euler et Taylor et point milieu et nous avons étudié la consistance, la stabilité et les droites de convergence . Nous avons présenté les deux méthodes numériques (méthode de Rung Kutta et méthode de Simpson et leurs propriétés).

Dans le troisième chapitre, nous avons fait une projection des méthodes présentées au chapitre 2 sur les équations intégrales, puis nous appuyé ceci par deux exemples d'application. appliqué les deux méthodes (Rung Kutta, Simpson). et Ordre des étapes et conditions d'ordre, et Analyse de stabilité par rapport à l'équation du test de convolution.

Nous essaierons d'appliquer deux exemples dans les deux sens dans MATLAB, et nous saurons lequel est la solution la plus proche de l'autre.

# Chapitre 1

## Outils de base

Dans ce chapitre, nous donnons une idée de la fonction d'analyse sur les espaces fonctionnels, ainsi que des définitions, des propriétés, des types et des méthodes de résolution Équations intégrales dans l'espace des fonctions continues, Et quelques définitions liées à l'analyse numérique. [13]

### 1.1 Notions d'analyse fonctionnelle

#### Espace Vectoriel Normé

**Définition 1.1.1** Soit  $E$  un espace vectoriel sur le corps  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , on dit qu'une application notée  $\| \cdot \|$  de  $E$  dans  $\mathbb{R}^+$  est une norme sur  $E$  si et seulement si pour tout  $(x, y) \in E$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$ . Les conditions suivantes satisfaites :

- (i)  $\| x \| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ .
- (ii)  $\| \lambda x \| = |\lambda| \| x \|$ .
- (iii)  $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$ .

**Propriétés 1.1.1** Tout espace vectoriel normé  $(E, \| \cdot \|)$  de dimension finie est complet.

#### Définition 1.1.2 (Suite de Cauchy)

Soit  $E$  un espace vectoriel normé de norme  $\| \cdot \|$ . Une suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $E$  est dite de Cauchy si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall p, q \in \mathbb{N}; p, q > n_0 \Rightarrow \| x_p - x_q \| < \epsilon$$

#### Définition 1.1.3 (Espace de Banach)

On appelle espace de Banach un espace vectoriel normé complet, c'est-à-dire dans lequel toute suite de Cauchy est convergente.

#### Définition 1.1.4 (Produit scalaire)

Soit  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$ . On appelle produit scalaire sur  $E$  l'application :

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$$

qui vérifie :

- (i)  $\forall x, y \in E, \langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$
- (ii)  $\forall x, y, z \in E; \lambda \in \mathbb{R}, \langle x + \lambda y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \lambda \langle y, z \rangle$
- (iii)  $\forall x \in E, \langle x, x \rangle \geq 0$
- (iv)  $\forall x \in E, (\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0)$

Un produit scalaire réel définit de manière naturelle une norme sur l'espace vectoriel :

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

**Définition 1.1.5** Un espace de Hilbert est un espace vectoriel  $H$  sur  $\mathbb{C}$  muni d'un produit scalaire  $\langle x, x \rangle$  et complet .

**Définition 1.1.6** Soit  $H$  un espace de Hilbert. Un système orthonormé est un sous ensemble  $E$  de  $H$ , tel que pour toute  $e_i, e_j$  de  $E$ , nous avons :

$$\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

**Théorème 1.1.1** Tout espace de Hilbert admet au moins une base hilbertienne dénombrable.

**Définition 1.1.7 (Espace  $C[a; b]$ )**

Espace  $C[a, b]$  des fonctions continues sur  $[a; b]$  muni de la norme  $\|x\|_\infty = \max_{t \in [a; b]} |x(t)|$ .

**Définition 1.1.8 (Espace  $L^1(\Omega)$ )**

Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ , on désigne par  $L^1(\Omega)$  des fonctions intégrable sur  $\Omega$  valeur dans  $\mathbb{R}$  ; on pose

$$\|f\|_1 = \int_{\Omega} |f(x)| dx.$$

**Définition 1.1.9 (L'espace  $L^2(\Omega)$ )**

$$L^2(\Omega) = \left\{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \text{ } f : \text{mesurables avec } \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx < +\infty \right\}.$$

**Définition 1.1.10 (Espace  $L^p(\Omega)$ )**

Soit  $1 \leq p < \infty$ , on pose

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ mesurable et } |f(x)|^p \in L^1(\Omega) \right\}$$

muni de la norme

$$\|f\|_L^p = \|f\|_p = \left( \int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Si  $p = \infty$ , on a  $L^\infty(\Omega)$  est l'espace des fonctions  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  mesurable, vérifiant

$$\exists c > 0 \text{ telle que } |f(x)| \leq c ; p.p. \text{ sur } \Omega.$$

**Définition 1.1.11 (L'espace  $H^1(\Omega)$ )** Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^N$ . L'espace de Sobolev  $H^1(\Omega)$  est défini par :

$$H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) \text{ tel que } \forall i \in \{1, \dots, N\}, \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega) \right\}$$

où  $\frac{\partial u}{\partial x_i}$  est la dérivée partielle faible de  $u$  au sens des distributions définie par :

$$\exists v \in L^2(\Omega) : \int_{\Omega} u(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega} v(x) \varphi(x) dx, \forall \varphi \in D(\Omega)$$

**Propriétés 1.1.2** L'espace  $H^1(\Omega)$  muni du produit scalaire :

$$\langle u, v \rangle_{H^1(\Omega)} = \int_{\Omega} (u(x)v(x) + \nabla u(x) \nabla v(x)) dx$$

et de la norme

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} |u(x)|^2 + |\nabla u(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

est un espace de Hilbert séparable.

## 1.2 Rappel sur les opérateurs

Tout au long de ces paragraphes on va se servir des références [9]

### Les opérateurs

Notons tout d'abord qu'on se place dans la majeure partie des cas dans l'espace  $C[a, b]$  des fonctions continues de l'intervalle  $[a, b]$  dans  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , muni du produit scalaire

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \int_a^b \varphi(x)\psi(x) dx$$

et de la norme de convergence uniforme  $\|\varphi\|_{\infty} = \max_{x \in [a, b]} |\varphi(x)|$

### Opérateur linéaire borné :

**Définition 1.2.1** Soient  $E$  et  $F$  deux espaces normés, un opérateur  $A$  définie sur  $E$  dans  $F$  est dite linéaire si :

pour tout  $u, v$  dans  $E$  et  $\alpha, \beta$  dans  $\mathbb{R}$ , on a :

- i)  $Au \in F$
- ii)  $A(\alpha u + \beta v) = \alpha Au + \beta Av$

**Définition 1.2.2** Soient  $E$  et  $F$  deux espaces normés. un opérateur linéaire  $A : E \rightarrow F$  est dit borné s'il existe une constant  $M > 0$ , telle que :

$$\|Au\|_F \leq M \|u\|_E$$

pour tout  $u \in E$

**Théorème 1.2.1** Soit  $A$  un opérateur linéaire entre deux espaces vectoriels normés  $E$  et  $F$ , alors les assertions suivantes sont équivalentes :

- i)  $A$  est borné.
- ii)  $A$  est continue sur  $E$ .
- iii)  $A$  est continue à l'origine.

**Théorème 1.2.2** Un opérateur linéaire est continue si est seulement s'il est borné.

**Théorème 1.2.3** Tout opérateur linéaire  $A : X \rightarrow Y$  d'un espace  $X$  normé de dimension finie dans un espace  $Y$  est borné.

**Définition 1.2.3**  $A$  un opérateur intégrale linéaire qui admet une formulation de la forme suivante :

$$(A\varphi)x = \int_a^b K(x, t)\varphi(t) dt$$

la fonction  $K$  étant appelée noyau de l'opérateur  $A$ .

## Opérateur Adjoint :

Tout au long de ce paragraphe on va se servir de référence [14]

**Définition 1.2.4** On considère  $C(\Omega)$  muni du produit scalaire identique à celui, défini sur  $L^2(\Omega)$ , à savoir :

$$\forall (f, g) \in C^2(\Omega), \langle f, g \rangle = \int_{\Omega} f(x)g(x)dx$$

ce produit scalaire permet définir la notion d'orthogonalité, ainsi que celle d'adjoint. On dit que  $A : C(\Omega) \rightarrow C(\Omega)$  et  $B : C(\Omega) \rightarrow C(\Omega)$  sont adjoints s'ils vérifient :

$$\forall (f, g) \in C^2(\Omega), \langle Af, g \rangle = \langle f, Bg \rangle$$

Si un opérateur  $A : C(\Omega) \rightarrow C(\Omega)$  admet un adjoint  $B$ , alors cet adjoint est unique et  $A, B$  sont linéaires.

**Théorème 1.2.4** On considère un opérateur  $A$  à noyau c'est-à-dire construit à partir d'un noyau  $K$  continu sur  $\Omega \times \Omega$  par la formule :

$$\forall x \in \Omega, (A\varphi)(x) = \int_{\Omega} K(x, y)\varphi(y)dy$$

Alors l'opérateur  $A$  admet un unique opérateur adjoint  $B$  pour le produit scalaire usuel de  $L^2$ , défini par :

$$\forall x \in \Omega, (B\psi)(x) = \int_{\Omega} K(x, y)\psi(y)dy$$

## Opérateur compact :

**Définition 1.2.5** A un opérateur linéaire d'un espace normé  $E$  dans un espace normé  $F$ , on dit que  $A$  est un opérateur compact s'il envoie tout ensemble borné en un ensemble relativement compact dans  $F$ . [11]

**Théorème 1.2.5** l'addition de deux opérateurs compacts est un opérateur compact i.e :

$$A_1, A_2 \text{ compact} \Rightarrow A_1 + A_2 \text{ compact}$$

**Théorème 1.2.6** On a  $A$  et  $B$  deux opérateurs bornés alors  $A \times B$  est compact, si  $A$  ou  $B$  est compact.

**Théorème 1.2.7** la séquence des opérateur compact définie à partir d'un espace normé  $E$  dans un espace de Banach  $F$  converge uniformément à un opérateur  $A$ . dit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \| A_n - A \| = 0$$

et l'opérateur de limite  $A$  est compact.

**Propriétés 1.2.1** A opérateur compact est borné mais l'inverse n'est pas vrai.

**Théorème 1.2.8** l'opérateur intégral  $A$  de  $C(G)$  dans  $C(G)$  à noyau continu est un opérateur compact.

**Preuve** Soit  $E$  un ensemble borné de  $C(G)$  alors, on a  $\|A\varphi\| \leq M |G| \max |K(x, y)|$   
 $\forall x, y \in G$  et  $\forall \varphi \in E$

cela veut dire que  $A(E)$  est borné. La fonction  $k$  est uniformément continu sur le compact  $G \times G$ ,  
d'où

$$\forall \epsilon \geq 0, \exists \delta \geq 0; \forall x, y, z \in G \mid x - y \mid < \epsilon \Rightarrow \mid K(x, z) - K(y, z) \mid < \frac{\epsilon}{M \mid G \mid}$$

d'où

$$\mid A\varphi(x) - A\varphi(y) \mid < \epsilon$$

pour tout  $\varphi \in E$  et  $x, y \in G$  avec  $\mid x - y \mid < \epsilon$ , ceci exprime que l'ensemble  $A(E)$  est équicontinu,  
d'où  $A(E)$  est relativement compact d'après le théorème d'Arzelà-Ascoli alors  $A$  est compact.

## Opérateur intégrale linéaire :

**Définition 1.2.6** Soit  $K$  une fonction mesurable sur  $\Omega \times \Omega$  dans  $\mathbb{C}$ . et  $\Omega$  un ensemble compact de  $\mathbb{R}^n$ . alors la forme général d'un opérateur intégrale linéaire  $A$ . dit aussi opérateur a noyau, est formellement donné par la forme suivante :

$$A : C(\Omega) \rightarrow C(\Omega)$$

$$\varphi \rightarrow A\varphi$$

$$x \rightarrow (A\varphi) = \int_{\Omega} K(x, t)\varphi(t)dt$$

la fonction  $K(x, t)$  est appelée noyau de l'opérateur  $A$ . la norme  $\|A\|$  est donné par :

$$\|A\| = \max_{x \in \Omega} \int |K(x, t)| dt$$

## 1.3 Généralités sur les équations intégrales

Tout au long de ce paragraphe on va se servir des références [12],[8] :

### 1.3.1 Equations intégrales de Volterra :

On appelle équation intégrale de Volterra non linéaire de seconde espèce une équation de la forme :

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t, \varphi(t))dt$$

où  $\varphi(x)$  est une fonction inconnue et  $K(x, t)$  et  $f(x)$  sont des fonctions connues et  $\lambda$  un paramètre réel

**Définition 1.3.1** Une équation de la forme

$$\int_a^x K(x, t, \varphi(t))dt = f(x)$$

où  $\varphi(x)$  est une fonction inconnue est appelée équation intégrale de Volterra non linéaire de première espèce.

**Définition 1.3.2** On appelle une équation intégrale linéaire de Volterra de seconde espèce une équation de la forme

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t)\varphi(t)dt$$

où  $\varphi(x)$  est une fonction inconnue et  $K(x, t)$  et  $f(x)$  sont des fonctions connues et  $\lambda$  un paramètre réel.

**Définition 1.3.3** Si  $f(x) = 0$  l'équation s'écrit

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^x K(x, t)\varphi(t)dt$$

elle est appelée équation intégrale linéaire homogène de Volterra de seconde espèce.

**Définition 1.3.4** Une équation à une inconnue  $\varphi(x)$ , de la forme

$$\int_a^x K(x, t)\varphi(t)dt = f(x)$$

est appelée équation intégrale linéaire de Volterra de première espèce.

## Exemples

Equations intégrales linéaires non homogènes de Volterra de la seconde et première espèce

$$u(x) = x^2 + \sin x + 1 + \lambda \int_0^x (x^2 - t)u(t)dt$$

$$0 = x^2 + 1 + \lambda \int_0^x (x^2 - t)u(t)dt$$

Equation intégrales linéaires homogènes de Volterra de la seconde et première espèce

$$u(x) = \lambda \int_0^x (x^2 - t)u(t)dt$$

$$0 = \lambda \int_0^x (x^2 - t)u(t)dt$$

## Méthode de résolution de l'équation intégrale de Volterra

Soit l'équation intégrale linéaire de volterra de deuxième espèce suivante

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^x K(x, t)\varphi(t)dt = f(x) \quad (1.1)$$

Supposons que  $K(x, t)$  est continue sur  $a \leq x \leq b$  et  $a \leq t \leq x$  et encore  $f(x)$  continue sur  $[a, b]$ , la solution de l'équation (1.1) est donnée par la formule

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x R(x, t, \lambda)\varphi(t)dt \quad (1.2)$$

$R(x, t, \lambda)$  s'appelle la resolvante de l'équation de volterra de deuxième espèce (1.1) nous cherchons la resolvante  $R(x, t, \lambda)$ . Pour cela nous cherchons la solution de l'équation (1.1) sous la forme d'une série entière

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} y_n(x)\lambda^n \quad (1.3)$$

Portons formellement cette série dans (1.1), il vient

$$\sum_{n=0}^{+\infty} y_n(x)\lambda^n = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t) \sum_{n=0}^{+\infty} y_n(t)\lambda^n dt$$

En procédant par identification nous obtenons

$$y_0(x) = f(x)$$

$$y_1(x) = \int_a^x K(x, t)y_0(t)dt = \int_a^x K(x, t)f(t)dt$$

$$y_2(x) = \int_a^x K(x, t)y_1(t)dt = \int_a^x K_2(x, t)f(t)dt$$

$$y_3(x) = \int_a^x K(x, t)y_2(t)dt = \int_a^x K_3(x, t)f(t)dt \dots etc$$

on établit de façon analogue qu'en général on a

$$y_n(x) = \int_a^x K_n(x, t)f(t)dt; \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (1.4)$$

Ici on a

$$K_n(x, t) = \int_t^x K(x, z)K_{n-1}(z, t)dz; \quad n = 2, 3, \dots \quad (1.5)$$

et on a les relations  $K_1(x, t) = K(x, t)$  et  $K_n(x, t) = 0$  si  $t > x$  Les fonctions  $K_n(x, t)$  définies par (1.4) s'appellent noyaux itérés, les noyaux ont les propriétés suivantes

$$K_n(x, t) = \int_a^x K_m(x, s)K_{n-m}(s, t)ds \quad (1.6)$$

Compte tenu de (1.4) et (1.5) l'égalité (1.3) peut s'écrire

$$\varphi(x) = f(x) + \sum_{v=1}^{+\infty} \lambda^v \int_a^x K_v(x, t) f(t) dt$$

Ainsi d'après (1.2) la résolvante est définie par la série

$$R(x, t, \lambda) = \sum_{v=0}^{+\infty} \lambda^v K_{v+1}(x, t)$$

### Exemple :

Resoudre les équations intégrales de volterra suivantes :

1.  $\varphi(x) + \int_0^x (x-t)\varphi(t)dt = 1, \quad 0 \leq x \leq 1..$

2.  $\varphi(x) - \int_0^x e^{-(x-t)}\varphi(t)dt = 1, \quad 0 \leq x \leq 1.$

### solution

1. on pose

- $\varphi_0(x) = 0$

- $\varphi_1(x) = 1 - \int_0^x (x-t)\varphi_0(t)dt = 1$

- $\varphi_2(x) = 1 - \int_0^x (x-t)dt$   
 $= 1 - \frac{x^2}{2}$

- $\varphi_3(x) = 1 - \int_0^x (x-t)(1 - \frac{x^2}{2})dt$   
 $= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4}$

⋮  
 ⋮

- $\varphi_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2(n-1)}}{2(n-1)!}$

$$\Rightarrow \varphi(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_n(x)$$

$$= \cos(x)$$

2. on a  $f(x) = 1$ ,  $\lambda = 1$ ,  $k(x, t) = e^{-(x-t)}$

- $K_1(x, t) = e^{-(x-t)}$

- $$\begin{aligned} K_2(x, t) &= \int_t^x K(x, s) \cdot K_1(s, t) ds \\ &= \int_t^x e^{-(x-s)} \cdot e^{-(s-t)} ds \\ &= e^{-(x-t)}(x-t). \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} K_3(x, t) &= \int_t^x K(x, s) \cdot K_2(s, t) ds \\ &= \int_t^x e^{-(x-s)} \cdot e^{-(s-t)}(s-t) ds \\ &= e^{-(x-t)} \cdot \frac{(x-t)^2}{2} \end{aligned}$$

⋮  
⋮

- $$\begin{aligned} K_{n+1}(x, t) &= e^{-(x-t)} \cdot \frac{(x-t)^n}{n!} \\ \Rightarrow R(x, t, \lambda) &= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \cdot \frac{(x-t)^n}{n!} \cdot e^{-(x-t)} = e^{\lambda(x-t)} \cdot e^{-(x-t)} \\ &\Rightarrow R(x, t, \lambda) = 1 \\ \Rightarrow \varphi(x) &= f(x) + \lambda \int_0^x R(x, t, \lambda) f(t) dt. \\ &= 1 + \int_0^x dt \\ &= 1 + x \end{aligned}$$

### 1.3.2 Equations intégrales de Fredholm

**Définition 1.3.5** On appelle une équation intégrale de Fredholm non linéaire de seconde espèce une équation de la forme

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, t, \varphi(t)) dt = f(x)$$

où  $\varphi(x)$  est une fonction inconnue et  $K(x, t)$  et  $f(x)$  sont des fonctions connues et  $\lambda$  un paramètre réel.

Si  $f(x) = 0$  l'équation s'écrit

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x, t, \varphi(t)) dt$$

elle est dite équation intégrale de Fredholm non linéaire de seconde espèce homogène, si dans le cas contraire

Si  $f(x) \neq 0$  elle est dite équation intégrale de Fredholm non linéaire de seconde espèce non homogène.

1. On appelle une équation intégrale linéaire de Fredholm de seconde espèce une équation de la forme

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt = f(x)$$

où  $\varphi(x)$  est une fonction inconnue et  $K(x,t)$  et  $f(x)$  sont des fonctions connues et  $\lambda$  un paramètre réel. Si  $f(x) = 0$  et  $\tilde{K}(x,t) = \lambda K(x,t)$  l'équation s'écrit

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b \tilde{K}(x,t)\varphi(t)dt$$

elle est dite équation intégrale de Fredholm de seconde espèce homogène si dans le cas contraire  $f(x) \neq 0$  elle est dite équation intégrale de Fredholm linéaire de seconde espèce non homogène.

2. Une équation de la forme

$$\int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt = f(x)$$

est appelée équation intégrale linéaire de Fredholm de première espèce.

### Exemples :

Equations intégrales linéaires non homogènes de Fredholm de la seconde et première espèce

$$u(x) = x^2 + \sin x + 1 + \lambda \int_{-1}^1 (x^2 - t)u(t)dt$$

$$0 = x^2 + 1 + \lambda \int_{-1}^1 (x^2 - t)u(t)dt$$

Equations intégrales linéaires homogènes de Fredholm de la seconde et première espèce

$$u(x) = \lambda \int_{-1}^1 (x^2 - t)u(t)dt$$

$$0 = \lambda \int_{-1}^1 (x^2 - t)u(t)dt$$

# Chapitre 2

## Méthodes numériques

### 2.1 Définition des méthodes à un Pas, exemples

Tout au long de ces paragraphes on va se servir de référence [10]

#### 2.1.1 Définitions

Les méthodes à un pas sont les méthodes de résolution numérique qui peuvent s'écrire sous la forme

$$y_{n+1} = y_n + h_n \Phi(t_n, y_n, h_n), \quad 0 \leq n < N,$$

où  $\Phi : [t_0, t_0 + T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction que l'on supposera continue. Dans la pratique, la fonction  $\Phi(t, y, h)$  peut n'être définie que sur une partie de la forme  $[t_0, t_0 + T] \times J \times [0, \delta]$  où  $J$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$  (de sorte en particulier que  $[t_0, t_0 + T] \times J$  soit contenu dans le domaine de définition de l'équation différentielle).

#### Exemple :

La méthode d'Euler est la méthode à un pas associée à la fonction  $\Phi(t, y, h) = f(t, y)$ , et définie par la formule de récurrence  $y_{n+1} = y_n + h_n f(t_n, y_n)$

#### 2.1.2 Retour sur la méthodes d' Euler

Soit  $z$  une solution exacte de l'équation (E). On a au premier ordre l'approximation

$$z(t_{n+1}) = z(t_n + h_n) \simeq z(t_n) + h_n z'(t_n) = z(t_n) + h_n f(t_n, z(t_n)).$$

ceci conduit à l'algorithme

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + h_n f(t_n, y_n) \\ t_{n+1} = t_n + h_n. \end{cases}$$

Par définition de l'erreur de consistance, on a  $e_n = z(t_n + h_n) - y_{n+1}$  où

$$y_{n+1} = z(t_n) + h_n f(t_n, z(t_n)) = z(t_n) + h_n z'(t_n).$$

La formule de Taylor-Lagrange donne

$$e_n = z(t_n + h_n) - (z(t_n) + h_n z'(t_n)) = \frac{1}{2} h_n^2 z''(t_n) + o(h_n^2),$$

pourvu que  $z$  soit de classe  $C^2$ . C'est bien le cas si  $f$  est de classe  $C^1$ , et on sait alors que  $z''(t) = f^{[1]}(t, z(t))$  où  $f^{[1]} = f'_t + f'_y f$ . On en déduit par conséquent

$$e_n = \frac{1}{2} h_n^2 f^{[1]}(t_n, y_n) + o(h_n^2)$$

Cette erreur en  $h_n^2$  est relativement importante, à moins que le pas  $h_n$  ne soit choisi très petit, ce qui augmente considérablement le volume des calculs à effectuer. On va donc essayer de construire des méthodes permettant de réduire l'erreur de consistance  $e_n$ .

### 2.1.3 Méthode de Taylor d'ordre $p$

Supposons que  $f$  soit de classe  $C^p$ . Alors toute solution exacte  $z$  est de classe  $C^{p+1}$ , et sa dérivée  $k$ -ième est  $z^{(k)}(t) = f^{[k-1]}(t, z(t))$ . La formule de Taylor d'ordre  $p$  implique

$$z(t_n + h_n) = z(t_n) + \sum_{k=1}^p \frac{1}{k!} h_n^k f^{[k-1]}(t_n, z(t_n)) + o(h_n^p)$$

Lorsque  $h_n$  est assez petit, l'approximation est d'autant meilleure que  $p$  est plus grand. On est donc amené à considérer l'algorithme suivant, appelé méthode de Taylor d'ordre  $p$  :

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \sum_{k=1}^p \frac{1}{k!} h_n^k f^{[k-1]}(t_n, y_n) \\ t_{n+1} = t_n + h_n \end{cases}$$

D'après la définition générale des méthodes à un pas, cet algorithme correspond au choix  $\Phi(t, y, h) = \sum_{k=1}^p \frac{1}{k!} h^{k-1} f^{[k-1]}(t, y)$ . Calculons l'erreur de consistance  $e_n$ .

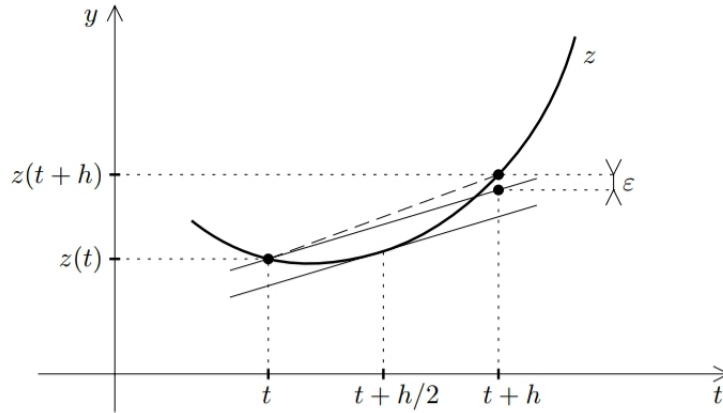
En supposant  $y_n = z(t_n)$ , la formule de Taylor d'ordre  $p+1$  donne

$$\begin{aligned} e_n &= z(t_{n+1}) - y_{n+1} = z(t_n + h_n) - \sum_{k=0}^p \frac{1}{k!} h_n^k z^{(k)}(t_n) \\ &= \frac{1}{(p+1)!} h_n^{p+1} f^{[p]}(t_n, y_n) + o(h_n^{p+1}) \end{aligned}$$

L'erreur est donc maintenant de l'ordre de  $h_n^{p+1}$ . On dira d'une manière générale qu'une méthode est d'ordre  $p$  si l'erreur de consistance est en  $h_n^{p+1}$  chaque fois que  $f$  est de classe  $C^p$  au moins. La méthode d'Euler est le cas particulier  $p = 1$  de la méthode de Taylor. [2]

### 2.1.4 Méthode du point milieu

Cette méthode est décrite par le schéma suivant.



L'idée est que la corde de la fonction  $z$  sur  $[t, t+h]$  a une pente voisine de  $z'(t + \frac{h}{2})$ , alors que dans la méthode d'Euler on approxime brutalement cette pente par  $z'(t)$ .

On écrit donc :

$$z(t+h) \simeq z(t) + hz' \left( t + \frac{h}{2} \right) \quad (2.1)$$

Si  $z$  est de classe  $C^3$ , il vient

$$z(t+h) = z(t) + hz'(t) + \frac{1}{2}h^2z''(t) + \frac{1}{6}h^3z'''(t) + o(h^3),$$

$$z' \left( t + \frac{h}{2} \right) = z'(t) + \frac{1}{2}hz''(t) + \frac{1}{8}h^2z'''(t) + o(h^2).$$

L'erreur commise est donc

$$\varepsilon = z(t+h) - z(t) - hz' \left( t + \frac{h}{2} \right) = \frac{1}{24}h^3z'''(t) + o(h^3),$$

soit une erreur en  $h^3$  au lieu de  $h^2$  dans la méthode d'Euler. On par ailleurs

$$z' \left( t + \frac{h}{2} \right) = f \left( t + \frac{h}{2}, z \left( t + \frac{h}{2} \right) \right).$$

Comme la valeur de  $z \left( t + \frac{h}{2} \right)$  n'est pas connue, on l'approxime par

$$z \left( t + \frac{h}{2} \right) \simeq z(t) + \frac{h}{2}f(t, z(t)), \quad (2.2)$$

d'où en définitive

$$z(t+h) \simeq z(t) + hf \left( t + \frac{h}{2}, z(t) + \frac{h}{2}f(t, z(t)) \right)$$

L'algorithme du point milieu est associé au choix

$$\Phi(t, y, h) = f \left( t + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2}f(t, y) \right)$$

et donne lieu au schéma numérique

$$\begin{cases} y_{n+\frac{1}{2}} = y_n + \frac{h_n}{2} f(t_n, y_n) \\ p_n = f\left(t_n + \frac{h_n}{2}, y_{n+\frac{1}{2}}\right) \\ y_{n+1} = y_n + h_n p_n \\ t_{n+1} = t_n + h_n \end{cases}$$

Calculons l'erreur de consistance :  $e_n = z(t_{n+1}) - y_{n+1}$ , avec  $y_n = z(t_n)$ . On a  $e_n = \varepsilon_n + \varepsilon'_n$  où les erreurs

$$\varepsilon_n = z(t_{n+1}) - z(t_n) - h_n z' \left( t_n + \frac{h_n}{2} \right)$$

$$\varepsilon'_n = h_n z' \left( t_n + \frac{h_n}{2} \right) - (y_{n+1} - z(t_n))$$

$$= h_n \left( f \left( t_n + \frac{h_n}{2}, z \left( t_n + \frac{h_n}{2} \right) \right) - f \left( t_n + \frac{h_n}{2}, y_{n+\frac{1}{2}} \right) \right)$$

proviennent respectivement des approximations (2.1.4) et (2.2). D'après le calcul fait plus hau

$$\varepsilon_n = \frac{1}{24} h_n^3 z'''(t_n) + o(h_n^3) = \frac{1}{24} h_n^3 f^{[2]}(t_n, y_n) + o(h_n^3).$$

D'autre part

$$z \left( t_n + \frac{h_n}{2} \right) - y_{n+\frac{1}{2}} = z \left( t_n + \frac{h_n}{2} \right) - \left( z(t_n) + \frac{h_n}{2} z'(t_n) \right)$$

$$= \frac{1}{8} h_n^2 z''(t_n) + o(h_n^2) = \frac{1}{8} h_n^2 f^{[1]}(t_n, y_n) + o(h_n^2)$$

D'après le théorème des accroissements finis appliqué en  $y$ , on a

$$f \left( t_n + \frac{h_n}{2}, z(t_n + \frac{h_n}{2}) \right) - f \left( t_n + \frac{h_n}{2}, y_{n+\frac{1}{2}} \right)$$

$$= f'_y \left( t_n + \frac{h_n}{2}, c_n \right) \left( z(t_n + \frac{h_n}{2}) - y_{n+\frac{1}{2}} \right)$$

$$= (f'_y(t_n, y_n) + o(h_n)) \left( \frac{1}{8} h_n^2 f^{[1]}(t_n, y_n) + o(h_n^2) \right)$$

$$= \frac{1}{8} h_n^2 f'_y f^{[1]}(t_n, y_n) + o(h_n^2),$$

d'où

$$\varepsilon'_n = \frac{1}{8} h_n^3 f'_y f^{[1]}(t_n, y_n) + o(h_n^3).$$

On en déduit

$$e_n = \varepsilon_n + \varepsilon'_n = \frac{1}{24} h_n^3 (f^{[2]} + 3f'_y f^{[1]})(t_n, y_n) + o(h_n^3).$$

La méthode du point milieu est donc d'ordre 2.

## 2.2 Consistance, Stabilité et Convergence

### 2.2.1 La méthode consistante

On dit que la méthode est consistante si pour toute solution exacte  $z$  la somme des erreurs de consistance relatives à  $z$ , soit  $\sum_{0 \leq n \leq N} |e_n|$ , tend vers 0 quand  $h_{max}$  tend vers 0.

Une autre notion fondamentale est la notion de stabilité. Dans la pratique, le calcul récurrent des points  $y_n$  est en effet entaché d'erreurs d'arrondi  $\varepsilon_n$ . Pour que les calculs soient significatifs, il est indispensable que la propagation de ces erreurs reste contrôlable. On est amené à la définition suivante.

### 2.2.2 La méthode stable

On dit que la méthode est stable s'il existe une constante  $S \geq 0$ , appelée constante de stabilité, telle que pour toutes suites  $(y_n)$ ,  $(\tilde{y}_n)$  définies par

$$y_{n+1} = y_n + h_n \Phi(t_n, y_n, h_n), \quad 0 \leq n < N$$

$$\tilde{y}_{n+1} = \tilde{y}_n + h_n \Phi(t_n, \tilde{y}_n, h_n) + \varepsilon_n, \quad 0 \leq n < N$$

on ait

$$\max_{0 \leq n \leq N} |\tilde{y}_n - y_n| \leq S \left( |\tilde{y}_0 - y_0| + \sum_{0 \leq n < N} |\varepsilon_n| \right).$$

Autrement dit, une petite erreur initiale  $|\tilde{y}_0 - y_0|$  et de petites erreurs d'arrondi  $\varepsilon_n$  dans le calcul récurrent des  $\tilde{y}_n$  provoquent une erreur finale  $\max |\tilde{y}_n - y_n|$  contrôlable. Une dernière notion importante en pratique est la suivante.

### 2.2.3 La méthode convergente

On dit que la méthode est convergente si pour toute solution exacte  $z$ , la suite  $y_n$  telle que  $y_{n+1} = y_n + h_n \Phi(t_n, y_n, h_n)$  vérifie

$$\text{Max}_{0 \leq n \leq N} |y_n - z(t_n)| \rightarrow 0$$

quand  $y_0 \rightarrow z(t_0)$  et quand  $h_{max} \rightarrow 0$ .

La quantité  $\text{Max}_{0 \leq n \leq N} |y_n - z(t_n)|$  s'appelle l'erreur globale (de la suite  $y_n$  calculée par rapport à la solution exacte  $z$ ). C'est évidemment cette erreur qui importe dans la pratique.

## 2.3 Méthodes de Runge-Kutta

### Principe générale

On considère un problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(x, y) & t \in [t_0, t_0 + T] \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

et on cherche à discrétiser ce problème par rapport à une subdivision  $t_0 < t_1 < \dots < t_N = t_0 + T$ . L'idée est de calculer par récurrence les points  $(t_n, y_n)$  en utilisant des points intermédiaires  $(t_{n,i}, y_{n,i})$  avec

$$t_{n,i} = t_n + c_i h_n, \quad 1 \leq i \leq q, \quad c_i \in [0, 1].$$

A chacun de ces points on associe la pente correspondante

$$p_{n,i} = f(t_{n,i}, y_{n,i}).$$

Soit  $z$  une solution exacte de l'équation. On a

$$\begin{aligned} z(t_{n,i}) &= z(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n,i}} f(t, z(t)) dt \\ &= z(t_n) + h_n \int_0^{c_i} f(t_n + u h_n, z(t_n + u h_n)) du \end{aligned}$$

grâce au changement de variable  $t = t_n + u h_n$ . De même

$$z(t_{n+1}) = z(t_n) + h_n \int_0^1 f(t_n + u h_n, z(t_n + u h_n)) du$$

On se donne alors pour chaque  $i = 1, 2, \dots, q$  une méthode d'intégration approchée

$$(M_i) \quad \int_0^{c_i} g(t) dt \simeq \sum_{1 \leq j < i} a_{ij} g(c_j),$$

ces méthodes pouvant être a priori différentes. On se donne également une méthode d'intégration approchée sur  $[0, 1]$  :

$$(M) \quad \int_0^1 g(t) dt \simeq \sum_{1 \leq j < q} b_j g(c_j),$$

En appliquant ces méthodes d'intégration à  $g(u) = f(t_n + u h_n, z(t_n + u h_n))$ , il vient

$$z(t_{n,i}) \simeq z(t_n) + h_n \sum_{1 \leq j < i} a_{ij} f(t_{n,j}, z(t_{n,j})),$$

$$z(t_{n+1}) \simeq z(t_n) + h_n \sum_{1 \leq j < q} b_j f(t_{n,j}, z(t_{n,j})).$$

La méthode Runge-Kutta correspondante est définie par l'algorithme

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[ \begin{array}{l} t_{n,i} = t_n + c_i h_n \\ y_{n,i} = y_n + h_n \sum_{1 \leq j < i} a_{ij} p_{n,j} \\ p_{n,i} = f(t_{n,i}, y_{n,i}) \end{array} \right] \quad 1 \leq i \leq q \\ t_{n+1} = t_n + h_n \\ y_{n+1} = y_n + h_n \sum_{1 \leq j \leq q} b_j p_{n,j} \end{array} \right.$$

On la représente conventionnellement par le tableau

(M <sub>1</sub> )	c <sub>1</sub>	0	0	...	0	0
(M <sub>2</sub> )	c <sub>2</sub>	a <sub>21</sub>	0	...	0	0
	⋮	⋮	⋮	⋱	⋮	⋮
	⋮	⋮	⋮		0	0
(M <sub>q</sub> )	c <sub>q</sub>	a <sub>q1</sub>	a <sub>q2</sub>	...	a <sub>qq-1</sub>	0
(M)		b <sub>1</sub>	b <sub>2</sub>	...	b <sub>q-1</sub>	b <sub>q</sub>

où les méthodes d'intégration approchées correspondent aux lignes. On pose par convention  $a_{ij} = 0$  pour  $j \geq i$ .

**Hypothèse :**

On supposera toujours que les méthodes d'intégration (M<sub>i</sub>) et (M) sont d'ordre 0 au moins, c'est-à-dire

$$c_i = \sum_{1 \leq j < i} a_{ij}, \quad 1 = \sum_{1 \leq j \leq q} b_j.$$

En particulier, on aura toujours

$$c_1 = 0, \quad t_{n,1} = t_n, \quad y_{n,1} = y_n, \quad p_{n,1} = f(t_n, y_n).$$

### 2.3.1 Exemples[5]

#### Range-kutta d'ordre 1

Pour  $q = 1$ , le seul choix possible est  $\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline & 1 \end{array}$  On a ici  $c_1 = 0, a_{11} = 0, b_1 = 1$ . L'algorithme est donné par

$$\begin{cases} p_{n,1} = f(t_n, y_n) \\ t_{n+1} = t_n + h_n \\ y_{n+1} = y_n + h_n p_{n,1} \end{cases}$$

Il s'agit de la méthode d'Euler.

### Range-kutta d'ordre 2

Pour  $q = 2$ , on considère les tableaux de la forme

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \alpha & \alpha & 0 \\ \hline & 1 - \frac{1}{2\alpha} & \frac{1}{2\alpha} \end{array}, \quad \text{où } \alpha \in ]0, 1].$$

L'algorithme s'écrit ici

$$\begin{cases} p_{n,1} = f(t_n, y_n) \\ t_{n,2} = t_n + \alpha h_n \\ y_{n,2} = y_n + \alpha h_n p_{n,1} \\ p_{n,2} = f(t_{n,2}, y_{n,2}) \\ t_{n+1} = t_n + h_n \\ y_{n+1} = y_n + h_n \left( \left(1 - \frac{1}{2\alpha}\right) p_{n,1} + \frac{1}{2\alpha} p_{n,2} \right) \end{cases}$$

ou encore, sous forme condensée :

$$y_{n+1} = y_n + h_n \left( \left(1 - \frac{1}{2\alpha}\right) f(t_n, y_n) + \frac{1}{2\alpha} f(t_n + \alpha h_n, y_n + \alpha h_n f(t_n, y_n)) \right).$$

C'est néanmoins la première formulation qui est la plus efficace en pratique, puisqu'elle requiert seulement deux évaluations de la fonction  $f$  au lieu de 3 pour la forme condensée.

- Pour  $\alpha = \frac{1}{2}$ , on retrouve la méthode du point milieu

$$y_{n+1} = y_n + h_n f \left( t_n + \frac{h_n}{2}, y_n + \frac{h_n}{2} f(t_n, y_n) \right),$$

qui est basée sur la méthode d'intégration du point milieu :

$$(M) \quad \int_0^1 g(t) dt \simeq g \left( \frac{1}{2} \right)$$

- Pour  $\alpha = 1$ , on obtient la méthode de Heun :

$$y_{n+1} = y_n + h_n \left( \frac{1}{2} f(t_n, y_n) + \frac{1}{2} f(t_{n+1}, y_n + h_n f(t_n, y_n)) \right),$$

qui repose sur la méthode d'intégration des trapèzes

$$(M) \quad \int_0^1 g(t) dt \simeq \frac{1}{2} (g(0) + g(1)).$$

### Range-kutta d'ordre 4

*Méthode de Runge-Kutta* <<classique>> :

Il s'agit de la méthode définie par le tableau

$$q = 4, \quad \begin{array}{c|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{2}{6} & \frac{2}{6} & \frac{1}{6} \end{array}$$

L'algorithme correspondant s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{l} p_{n,1} = f(t_n, y_n) \\ t_{n,2} = t_n + \frac{1}{2}h_n \\ y_{n,2} = y_n + \frac{1}{2}h_n p_{n,1} \\ p_{n,2} = f(t_{n,2}, y_{n,2}) \\ y_{n,3} = y_n + \frac{1}{2}h_n p_{n,2} \\ p_{n,3} = f(t_{n,2}, y_{n,3}) \quad (\text{noter que } t_{n,3} = t_{n,2}) \\ t_{n+1} = t_n + h_n \quad (\text{noter que } t_{n,4} = t_{n+1}) \\ y_{n,4} = y_n + h_n p_{n,3} \\ p_{n,4} = f(t_{n+1}, y_{n,4}) \\ y_{n+1} = y_n + h_n \left( \frac{1}{6}p_{n,1} + \frac{2}{6}p_{n,2} + \frac{2}{6}p_{n,3} + \frac{1}{6}p_{n,4} \right) \end{array} \right.$$

On verra plus loin que cette méthode est d'ordre 4. Dans ce cas les méthodes d'intégration  $(M_i)$  et  $(M)$  utilisées sont respectivement :

$$(M_2) \quad \int_0^{\frac{1}{2}} g(t)dt \simeq \frac{1}{2}g(0) : \text{rectangles gauche,}$$

$$(M_3) \quad \int_0^{\frac{1}{2}} g(t)dt \simeq \frac{1}{2}g\left(\frac{1}{2}\right) : \text{rectangles droite,}$$

$$(M_4) \quad \int_0^1 g(t)dt \simeq g\left(\frac{1}{2}\right) : \text{point milieu,}$$

$$(M) \quad \int_0^1 g(t)dt \simeq \frac{1}{6}g(0) + \frac{2}{6}g\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{2}{6}g\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{6}g(1) : \text{Simpson.}$$

### 2.3.2 Stabilité Des Méthodes de Runge-Kuta

Les méthodes de Runge-Kutta sont des méthodes à un pas

$$y_{n+1} = y_n + h_n \Phi(t_n, y_n, h_n)$$

avec  $\Phi(t_n, y_n, h_n) = \sum_{1 \leq j \leq q} b_j p_{n,j}$ . La fonction  $\Phi$  est définie de manière explicite par

$$\begin{cases} \Phi(t, y, h) = \sum_{1 \leq j \leq q} b_j f(t + c_j h, y_j) & \text{avec} \\ y_i = y + h \sum_{1 \leq j < i} a_{ij} f(t + c_j h, y_j), & 1 \leq i \leq q. \end{cases} \quad (2.3)$$

Supposons que  $f$  soit  $k$ -lipschitzienne en  $y$ . On va montrer que  $\Phi$  est alors également lipschitzienne. Soit  $z \in \mathbb{R}$  et supposons  $\Phi(t, z, h)$  et  $z_i$  définis à partir de  $z$  comme dans la formule (2.3.2)

**Lemme :**

Soit  $\alpha = \max_i (\sum_{1 \leq j \leq i} |a_{ij}|)$ . Alors

$$|y_i - z_i| \leq (1 + (\alpha k h) + (\alpha k h)^2 + \dots + (\alpha k h)^{i-1}) |y - z|.$$

On démontre le lemme par récurrence sur  $i$ . Pour  $i = 1$ , on a  $y_1 = y, z_1 = z$  et le résultat est évident. Supposons l'inégalité vraie pour tout  $j < i$ . Alors

$$\begin{aligned} |y_i - z_i| &\leq |y - z| + h \sum_{j < i} |a_{ij}| \cdot k \cdot \max_{j < i} |y_j - z_j|, \\ |y_i - z_i| &\leq |y - z| + \alpha k h \max_j |y_j - z_j|. \end{aligned}$$

Par hypothèse de récurrence il vient

$$\max_{j < i} |y_j - z_j| \leq (1 + \alpha k h + \dots + (\alpha k h)^{i-2}) |y - z|,$$

et l'inégalité s'ensuit à l'ordre  $i$ .

La formule (2.3.2) entraîne maintenant

$$|\Phi(t, y, h) - \Phi(t, z, h)| \leq \sum_{1 \leq j \leq q} |b_j| k |y_j - z_j| \leq \Lambda |y - z| \text{ avec}$$

$$\Lambda = k \sum_{1 \leq j \leq q} |b_j| (1 + (\alpha k h_{max}) + \dots + (\alpha k h_{max})^{j-1}).$$

**Corollaire**

Les méthodes de Runge-Kutta sont stables, avec constante de stabilité  $S = e^{\Lambda T}$ .

**Remarque**

Dans le cas fréquent où les coefficients  $b_j$  sont  $\geq 0$ , on a la relation

$$\Lambda \leq k(1 + (\alpha k h_{max}) + \dots + (\alpha k h_{max})^{q-1}).$$

Si les coefficients  $a_{i,j}$  sont eux-mêmes  $\geq 0$ , on a  $\alpha = \max_{c_i}$ .

Lorsque  $h_{max}$  est assez petit devant  $1/\alpha k$ , la constante de stabilité est donc de l'ordre de grandeur de  $e^{kT}$ . Ces observations montrent que les méthodes de Runge-Kutta décrites dans les exemples 1, 2, 3 possèdent une excellente stabilité (il est facile de voir que  $e^{kT}$  est la borne inférieure possible pour  $S$ , quelle que soit la méthode utilisée : considérer pour cela l'équation  $y' = ky$ ).

### 2.3.3 Ordre Des Méthodes De Runge-Kutta

Pour déterminer l'ordre, on peut appliquer le critère consistant à évaluer les dérivées  $\frac{\partial^l \Phi}{\partial h^l}(t, y, 0)$  : l'ordre est au moins égal à  $p$  si et seulement si cette dérivée est égale à  $\frac{1}{l+1} f^{[l]}(t, y)$  pour  $l \leq p-1$ . Grâce à la formule (2.3.2), on obtient facilement les dérivées successives de  $\Phi$  :

- $\Phi(t, y, 0) = \sum_{1 \leq j \leq q} b_j f(t, y) = f(t, y)$ .

Les méthodes de Runge-Kutta sont donc toujours d'ordre  $\geq 1$  (c'est-à-dire consistantes).

- $\frac{\partial \Phi}{\partial h}(t, y, h) = \sum_j b_j \left( c_j f'_t(t + c_j h, y_j) + f'_y(t + c_j h, y_j) \frac{\partial y_j}{\partial h} \right),$   
 $\frac{\partial y_i}{\partial h} = \sum_{j < i} a_{ij} f(t + c_j h, y_j) + h \sum_{j < i} a_{ij} \left( c_j f'_t + f'_y \frac{\partial y_j}{\partial h} \right).$

Pour  $h = 0$ , on obtient donc

$$\frac{\partial y_i}{\partial h} \Big|_{h=0} = \left( \sum_{j < i} a_{ij} \right) f(t, y) = c_i f(t, y)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial h}(t, y, 0) = \sum_j b_j c_j (f'_t + f'_y f)(t, y) = \left( \sum_j b_j c_j \right) f^{[1]}(t, y).$$

D'après, la méthode est d'ordre  $\geq 2$  si et seulement si  $\sum b_j c_j = \frac{1}{2}$ .

- $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial h^2}(t, y, h) = \sum_j b_j \left( c_j^2 f''_{tt} + 2c_j f''_{ty} \frac{\partial y_j}{\partial h} + f''_{yy} \left( \frac{\partial y_j}{\partial h} \right)^2 + f'_y \frac{\partial y_j^2}{\partial h^2} \right),$   
 $\frac{\partial y_i^2}{\partial h^2} = 2 \sum_{j < i} a_{ij} \left( c_j f'_t + f'_y \frac{\partial y_j}{\partial h} \right) + h \sum_{j < i} a_{ij} (c_j^2 f''_{tt} + \dots).$

Pour  $h = 0$ , il vient

$$\frac{\partial y_i^2}{\partial h^2} \Big|_{h=0} = 2 \sum a_{ij} c_j (f'_t + f'_y f)(t, y),$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial h^2}(t, y, 0) = \sum_j b_j c_j^2 (f''_{tt} + 2f''_{ty} f + f''_{yy} f^2)(t, y) + 2 \sum_{i,j} b_i a_{ij} c_j f'_y (f'_t + f'_y f)(t, y).$$

Or  $f^{[2]}$  est donné par

$$\begin{aligned} f^{[2]}(t, y) &= (f^{[1]})'_t + (f^{[1]})'_y f \\ &= (f'_t + f'_y f)'_t + (f'_t + f'_y f)'_y f \\ &= (f''_{tt} + 2f''_{ty} f + f''_{yy} f^2) + f'_y (f'_t + f'_y f). \\ &= (f''_{tt} + 2f''_{ty} f + f''_{yy} f^2) + f'_y (f'_t + f'_y f). \end{aligned}$$

La condition  $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial h^2}(t, y, 0) = \frac{1}{3} f^{[2]}(t, y)$  se traduit en général par les conditions

$$\sum_j b_j c_j^2 = \frac{1}{3}, \quad \sum_{i,j} b_i a_{ij} c_j = \frac{1}{6}$$

**Théorème**

La méthode de Runge-Kutta définie par le tableau des coefficients  $c_i, a_{ij}, b_j$  est

- d'ordre  $\geq 2$  ssi  $\sum_j b_j c_j = \frac{1}{2}$ .
- d'ordre  $\geq 3$  ssi  $\sum_j b_j c_j = \frac{1}{2}; \quad \sum_j b_j c_j^2 = \frac{1}{3}; \quad \sum_{i,j} b_i a_{ij} c_j = \frac{1}{6}$ .
- d'ordre  $\geq 4$  ssi
 
$$\sum_j b_j c_j = \frac{1}{2}; \quad \sum_j b_j c_j^2 = \frac{1}{3}; \quad \sum_j b_j c_j^3 = \frac{1}{4}$$

$$\sum_{i,j} b_i a_{ij} c_j = \frac{1}{6}; \quad \sum_{i,j} b_i a_{ij} c_j^2 = \frac{1}{12}; \quad \sum_{i,j} b_i c_i a_{ij} c_j = \frac{1}{8};$$

$$\sum_{i,j,k} b_i a_{ij} a_{jk} c_k = \frac{1}{12}.$$

Pour la vérification pratique, on notera que certaines des expressions précédentes sont des pro-

duits des matrices  $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_q \end{pmatrix}, \quad A = (a_{ij}), \quad B = (b_1 b_2 \cdots b_q)$ . Ainsi

$$\sum_{i,j} b_i a_{ij} c_j = BAC, \quad \sum_{i,j,k} b_i a_{ij} a_{jk} c_k = BA^2C.$$

Pour les exemples, on voit ainsi que la méthode d'Euler est d'ordre 1, et que les méthodes de l'exemple 2 sont d'ordre 2. De plus, dans une méthode avec  $q = 2$ , il y a a priori un seul coefficient  $a_{ij}$  non nul, à savoir  $\alpha = a_{21}$ . On a alors  $c_2 = \sum_{j<2} a_j^2 = \alpha$  et la méthode est d'ordre 2 au moins ssi  $\sum b_j c_j = b_2 \alpha = \frac{1}{2}$ , soit  $b_2 = \frac{1}{2\alpha}$  et  $b_1 = 1 - b_2 = 1 - \frac{1}{2\alpha}$ . On voit donc qu'il n'y avait pas d'autres choix possibles pour une méthode d'ordre 2 avec  $q = 2$ . Enfin, la méthode Runge-Kutta "classique" présentée dans l'exemple 3 est d'ordre 4 (l'ordre n'est pas  $\geq 5$  car  $\sum b_j c_j^4 = \frac{1}{5}$ ). C'est si l'on peut dire la "méthode reine" des méthodes à un pas : ordre élevé, grande stabilité (grâce à la positivité des coefficients, voir remarque finale). Il existe des méthodes d'ordre encore plus élevé, mais leur plus grande complexité les rend peut-être un peu moins praticables.

## 2.4 Méthode Simpson [1]

L'intégration numérique est basée principalement sur la relation :

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = \int_{x_0}^{x_n} p_n(x)dx + \int_{x_0}^{x_n} E_n(x)dx \tag{2.4}$$

où  $p_n(x)$  est un polynôme d'interpolation et  $E_n(x)$  est l'erreur qui  $y$  est associée. En faisant varier la valeur de  $n$ , on obtient les formules de Newton-Cotes. En principe, plus  $n$  est élevé, plus grande est la précision liée à la valeur de l'intégrale recherchée. En pratique cependant, on emploie rarement des valeurs de  $n$  supérieures à 4.

Par ailleurs, l'extrapolation de Richardson, alliée judicieusement à l'une des formules de Newton-Cotes, conduit à la méthode de Romberg, l'une des techniques d'intégration numérique les plus précises. Enfin, nous traitons des quadratures de Gauss-Legendre, très fréquemment utilisées dans les méthodes numériques plus avancées comme celle des éléments finis.

### 2.4.1 Formules de Newton-Cotes simples et composées

#### Formule de Simpson 1/3

Reprenons le raisonnement utilisé avec la méthode des trapèzes, mais cette fois en utilisant un polynôme de degré 2 dont la courbe passe par les points  $(x_0, f(x_0))$ ,  $(x_1, f(x_1))$  et  $(x_2, f(x_2))$ . Ce polynôme est donné par la formule de Newton :

$$p_2(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1)$$

On se sert ensuite de l'approximation :

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx &\simeq \int_{x_0}^{x_2} p_2(x)dx \\ &= \int_{x_0}^{x_2} \{f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1)\} dx \end{aligned}$$

On se place de nouveau dans le cas où les abscisses sont également distancées. On pose encore  $\frac{(x-x_0)}{h} = s$ , ce qui entraîne que  $(x - x_i) = (s - i)h$ . La dernière expression devient :

$$\begin{aligned} \int_0^2 (f(x_0) + f[x_0, x_1]hs + f[x_0, x_1, x_2]h^2s(s - 1)) hds \\ = \frac{h}{3} (f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)) \end{aligned}$$

où l'on a remplacé les différences divisées par leur valeur respective :

$$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{h} \quad \text{et} \quad f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f(x_2) - 2f(x_1) + f(x_0)}{2h^2}$$

En résumé, on a :

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx \simeq \frac{h}{3} (f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2))$$

qui est la formule de Simpson 1/3 simple. Cette terminologie est due au facteur de  $\frac{1}{3}$  qui multiplie  $h$ .

L'analyse de l'erreur est plus délicate dans ce cas. On s'est vite rendu compte que la méthode de Simpson 1/3 était plus précise que ce que l'on escomptait. Une analyse plus fine est donc nécessaire. Cette méthode est basée sur l'utilisation d'un polynôme de degré 2 et l'on devrait s'attendre à ce que l'erreur soit donnée par :

$$\int_{x_0}^{x_2} E_2(x)dx$$

On peut pousser plus loin l'analyse de l'erreur en introduisant un quatrième point  $(x_3, f(x_3))$  quelconque et le polynôme de degré 3 correspondant :

$$p_3(x) = p_2(x) + \frac{(f(x_3) - p_2(x_3))}{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \quad (2.5)$$

qui n'est rien d'autre que le polynôme de degré 2 déjà utilisé auquel on ajoute une correction de degré 3 permettant au polynôme de passer également par le point  $(x_3, f(x_3))$ . Or :

$$\int_{x_0}^{x_2} (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)dx = \int_0^2 s(s-1)(s-2)h^4 ds = 0$$

comme on peut le vérifier facilement. Il s'ensuit que :

$$\int_{x_0}^{x_2} p_2(x)dx = \int_{x_0}^{x_2} p_3(x)dx$$

En utilisant un polynôme de degré 2, on obtient en fait la même précision qu'avec un polynôme de degré 3. Le terme d'erreur est donc de ce fait :

$$\int_{x_0}^{x_2} E_3(x)dx = \int_{x_0}^{x_2} \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)dx$$

Il n'est pas possible à ce stade-ci d'appliquer le théorème de la moyenne, comme nous l'avons fait pour la méthode du trapèze. En effet, la fonction  $(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$  peut changer de signe dans l'intervalle  $[x_0, x_2]$ , à moins de choisir judicieusement  $x_3$ . Comme le choix de  $x_3$  est arbitraire, on peut poser  $x_3 = x_1$ . Le terme d'erreur devient alors :

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_2} E_3(x)dx &= \int_{x_0}^{x_2} \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_1)dx \\ &= \int_0^2 \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}s(s-1)^2(s-2)h^5 ds \end{aligned}$$

On remarque que la fonction  $s(s-1)^2(s-2)$  ne change pas de signe dans l'intervalle  $[0, 2]$ . La figure 6.6 illustre cette fonction.

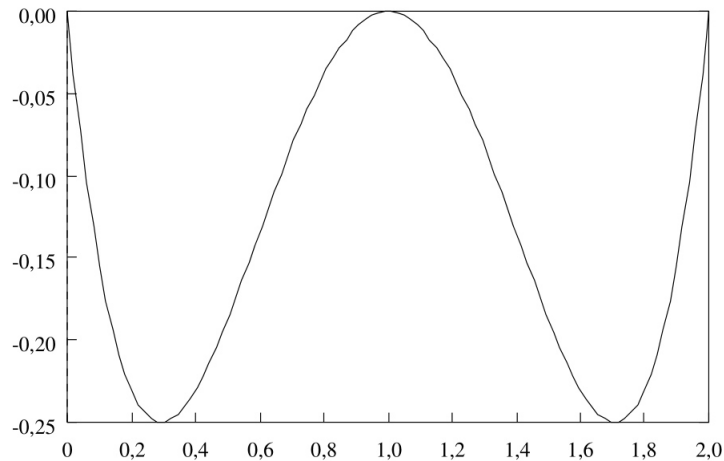
On peut maintenant se servir du théorème de la moyenne pour obtenir :

$$\int_{x_0}^{x_2} E_3(x)dx = \int_{x_0}^{x_2} \frac{f^{(4)}(\eta)}{4!}h^5 \int_0^2 s(s-1)^2(s-2)ds = -\frac{f^{(4)}(\eta)}{90}h^5$$

La méthode de Simpson 1/3 simple se résume donc à :

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx = \frac{h}{3}(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)) - \frac{f^{(4)}(\eta)}{90}h^5 \quad (2.6)$$

où  $\eta \in [x_0, x_2]$ .



**Figure 6.6**-Fonction  $s(s-1)^2(s-2)$

### Remarques

1. Choisir comme nous l'avons fait  $x_3 = x_1$  dans l'équation (3.18) n'est pas tout à fait immédiat. En effet, on constate facilement que le dernier terme de la relation (3.18) devient singulier. En fait, il faut faire un passage à la limite comme suit :

$$\begin{aligned}
 \lim_{x_3 \rightarrow x_1} p_3(x) &= \lim_{x_3 \rightarrow x_1} p_2(x) + \\
 &\lim_{x_3 \rightarrow x_1} \frac{(f(x_3) - p_2(x_3))(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} \\
 &= p_2(x) + \\
 &\lim_{x_3 \rightarrow x_1} \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_0)(x_3 - x_2)} \lim_{x_3 \rightarrow x_1} \frac{(f(x_3) - p_2(x_3))}{(x_3 - x_1)} \\
 &= p_2(x) + \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} \lim_{x_3 \rightarrow x_1} \frac{(f(x_3) - p_2(x_3))}{(x_3 - x_1)}
 \end{aligned}$$

Étudions donc maintenant la seule limite qui reste que nous noterons  $L$ . On peut utiliser un développement de Taylor autour de  $x_1$  en posant :

$$x_3 = x_1 + (x_3 - x_1) = x_1 + h'$$

de sorte que :

$$\begin{aligned}
 L &= \lim_{x_3 \rightarrow x_1} \frac{(f(x_1 + (x_3 - x_1)) - p_2(x_1 + (x_3 - x_1)))}{(x_3 - x_1)} \\
 &= \lim_{h' \rightarrow 0} \frac{(f(x_1 + h') - p_2(x_1 + h'))}{h'} \\
 &= \lim_{h' \rightarrow 0} \frac{(f(x_1) + f'(x_1)h' + O(h'^2)) - (p_2(x_1) + p_2'(x_1)h' + O(h'^2))}{h'}
 \end{aligned}$$

Puisque  $f(x_1) = p_2(x_1)$ , on obtient finalement que  $L = f'(x_1) - p_2'(x_1)$ , ce qui entraîne que :

$$\lim_{x_3 \rightarrow x_1} p_3(x) = p_2(x) + (f'(x_1) - p_2'(x_1)) \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}$$

ce qui montre que  $p_3(x)$  est bien défini.

2. La valeur de  $h$  exprime toujours la distance entre les points  $x_i$ , c'est-à-dire qu'elle équivaut dans ce cas à la longueur de l'intervalle divisée par 2.

La méthode de Simpson 1/3 simple est peu précise, tout comme la méthode du trapèze, comme en témoigne l'exemple suivant.

### Exemples

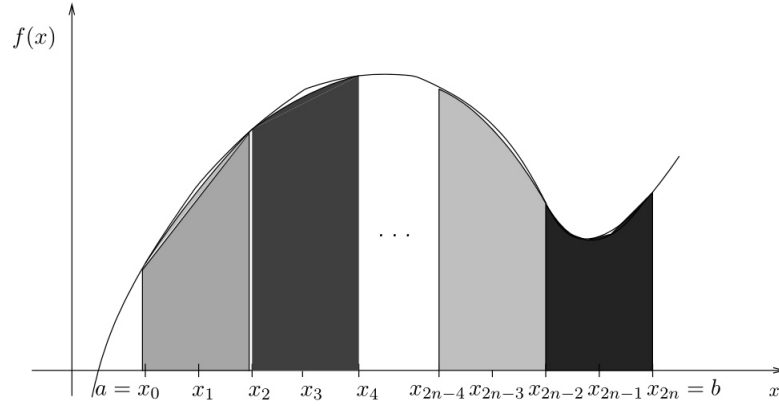
1. On reprend une fois de plus le calcul des exemples précédents. Pour la fonction  $f(x) = \sin x$  dans l'intervalle  $[0, \frac{\pi}{2}]$ , on a :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx \simeq \frac{\pi}{3} \left( \sin 0 + 4 \sin \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{2} \right) = 1,0022799$$

Ce résultat est plus précis que l'approximation obtenue par la méthode du trapèze simple, mais il demeure peu satisfaisant.

On peut encore une fois améliorer la précision de la formule de Simpson 1/3 en la composant. Puisque la méthode simple requiert deux intervalles, il semble souhaitable de diviser l'intervalle d'intégration  $[a, b]$  en  $2n$  sous-intervalles et d'utiliser la méthode de Simpson 1/3 simple dans chaque paire de sous-intervalle. La figure 6.7 illustre cette approche. On a alors :

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} f(x) dx \simeq \sum_{i=0}^{n-1} \frac{h}{3} (f(x_{2i}) + 4f(x_{2i+1}) + f(x_{2i+2})) \\ &= \frac{h}{3} ((f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)) + (f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)) + \dots \\ &\quad + (f(x_{2n-4}) + 4f(x_{2n-3}) + f(x_{2n-2})) \\ &\quad + (f(x_{2n-2}) + 4f(x_{2n-1}) + f(x_{2n}))) \\ &= \frac{h}{3} (f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + \dots \\ &\quad + 4f(x_{2n-3}) + 2f(x_{2n-2}) + 4f(x_{2n-1}) + f(x_{2n})) \end{aligned}$$



**Figure 6.7**-Méthode de simpson 1/3 composée

Tous les termes de rang impair sont multipliés par 4 tandis que ceux de rang pair sont multipliés par 2, sauf le premier ( $f(x_0)$ ) et le dernier ( $f(x_{2n})$ ).

L'analyse de l'erreur liée à la méthode de Simpson 1/3 composée est similaire à celle qui s'applique à la méthode des trapèzes composée. En divisant  $[a, b]$  en  $2n$  intervalles, on utilise  $n$  fois la méthode de Simpson 1/3 simple et l'on commet donc  $n$  fois l'erreur liée à cette méthode. On a alors :

$$h = \frac{b-a}{2n} \text{ et donc } n = \frac{b-a}{2h}$$

et l'erreur totale est :

$$n \left( \frac{f^{(4)}(\eta)h^5}{90} \right) = -\frac{(b-a)}{2h} \left( \frac{f^{(4)}(\eta)h^5}{90} \right) = -\frac{(b-a)}{180} f^{(4)}(\eta)h^4$$

**Remarque :** Le terme d'erreur de la méthode de Simpson 1/3 composée est :

$$-\frac{(b-a)}{180} f^{(4)}(\eta)h^4 \text{ pour un certain } \eta \in [a, b] \tag{2.7}$$

ce qui en fait une méthode d'ordre 4. De plus, en raison de la présence de la dérivée quatrième de  $f(x)$ , cette méthode est exacte dans le cas des polynômes de degré 3. Le degré d'exactitude de cette méthode est donc 3.

2. On divise l'intervalle  $[0, \frac{\pi}{2}]$  en 4 sous-intervalles de longueur  $h = \frac{\pi}{8}$ . On a alors :

$$\begin{aligned} \int_0^2 \sin x dx &\simeq \frac{\frac{\pi}{8}}{3} \left( \sin 0 + 4 \sin \frac{\pi}{8} + 2 \sin \frac{\pi}{4} + 4 \sin \frac{3\pi}{8} + \sin \frac{\pi}{2} \right) \\ &= 1,0001346 \end{aligned}$$

Pour une quantité de travail similaire, on obtient une précision supérieure à celle de la méthode des trapèzes. Avec 8 sous-intervalles de longueur  $\frac{\pi}{16}$ , on a :

$$\begin{aligned} \int_0^2 \sin x dx &\simeq \frac{\frac{\pi}{16}}{3} \left( \sin 0 + 4 \sin \frac{\pi}{16} + 2 \sin \frac{\pi}{8} + 4 \sin \frac{3\pi}{16} \right. \\ &\quad \left. + 2 \sin \frac{\pi}{4} + 4 \sin \frac{5\pi}{16} + 2 \sin \frac{3\pi}{8} + 4 \sin \frac{7\pi}{16} + \sin \frac{\pi}{2} \right) \\ &= 1,000008296 \end{aligned}$$

Cette plus grande précision vient du fait que cette méthode est d'ordre 4. On constate qu'en passant de 4 à 8 intervalles (c'est-à-dire en divisant  $h$  par 2) on divise l'erreur par un facteur d'environ 16,22, ce qui confirme l'ordre 4 de la méthode. On obtient ainsi l'approximation :

$$\frac{2^4(1,000008296) - 1,0001346}{2^4 - 1} = 0,999999876$$

qui est d'ordre au moins 5. On verra plus loin qu'elle est en fait d'ordre 6.

3. On doit calculer :

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx$$

à l'aide de la méthode de Simpson 1/3 composée avec 8 intervalles de longueur :

$$\frac{1-0}{8} = \frac{1}{8}$$

Comme la fonction  $e^{-x^2}$  n'a pas de primitive, il faut absolument utiliser une méthode numérique. Dans ce cas :

$$\begin{aligned} \int_0^1 e^{-x^2} dx &\simeq \frac{1}{3}(e^0 + 4e^{-0,125^2} + 2e^{-0,25^2} + 4e^{-0,375^2} + 2e^{-0,5^2} \\ &\quad + 4e^{-0,625^2} + 2e^{-0,75^2} + 4e^{-0,875^2} + e^{-1,0}) \\ &= 0,7468261205 \end{aligned}$$

Il est intéressant de poursuivre les calculs un peu plus loin et de comparer une fois de plus les méthodes des trapèzes et de Simpson 1/3 composées. En prenant 64 intervalles et en travaillant en double précision, on obtient les valeurs suivantes.

Calcul de $\int_0^1 e^{-x^2} dx$	
Méthode des trapèzes composée	0,746 809 163
Méthode de Simpson 1/3 composée	0,746 824 133
Solution exacte à 9 chiffres	0,746 824 133

ce qui démontre la supériorité de la méthode de Simpson.

On peut poursuivre dans la même voie et développer des formules de Newton-Cotes basées sur des polynômes de degré de plus en plus élevé. Nous ne présentons ci-dessous que les formules de Simpson 3/8 et de Boole sans les démontrer.

### Formule de Simpson 3/8

Si l'on utilise un polynôme de degré 3 dans l'intervalle  $[x_0, x_3]$  et passant par les points  $((x_i, f(x_i)))$  pour  $i = 0, 1, 2, 3$ , on obtient la formule de Simpson 3/8 simple qui s'écrit :

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x)dx = \frac{3h}{8}(f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)) - \frac{3f^{(4)}(\eta)}{80}h^5 \quad (2.8)$$

pour un certain  $\eta \in [x_0, x_3]$ . On peut également composer cette méthode en divisant l'intervalle d'intégration  $[a, b]$  en  $3n$  sous-intervalles de longueur :

$$h = \frac{b - a}{3n}$$

et en utilisant la formule de Simpson 3/8 simple dans chaque triplet de sousintervalle. On obtient alors :

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_{3i}}^{x_{3i+3}} f(x)dx \\ &\simeq \sum_{i=0}^{n-1} \frac{3h}{8}(f(x_{3i}) + 3f(x_{3i+1}) + 3f(x_{3i+2}) + f(x_{3i+3})) \\ &= \frac{3h}{8}(f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + 2f(x_3) + 3f(x_4) + \dots \\ &\quad + 2f(x_{3n-3}) + 3f(x_{3n-2}) + 3f(x_{3n-1}) + f(x_{3n})) \end{aligned}$$

et le terme d'erreur :

$$n \left( -\frac{3f^{(4)}(\eta)}{80}h^5 \right) = -\frac{(b-a)}{3h} \frac{3f^{(4)}(\eta)}{80}h^5 = -\frac{(b-a)f^{(4)}(\eta)}{80}h^4$$

**Remarque** La méthode de Simpson 3/8 composée a le même ordre de convergence (4) et le même degré d'exactitude (3) que la méthode de Simpson 1/3 composée. Pour cette raison, on lui préfère souvent la méthode de Simpson 1/3.

# Chapitre 3

## Applications

### 3.1 Méthode de Simpson modifiée

*Tout au long de ce paragraphe on va se servir de référence [1]*

cette partie nous allons introduire la méthode de Simpson modifiée pour la résolution numérique des équations intégrales de Volterra de second type à noyau régulier, l'idée principale est basée sur l'adaptation de la règle de quadrature de Simpson. Ainsi pour tester l'efficacité de cette méthode, nous allons traiter quelques exemples numériques. On considère l'équation

$$\varphi(x) - \int_a^x k(x,t)\varphi(t)dt = f(x), a \leq x \leq b \quad (3.1)$$

Notre objectif est d'approcher la solution de cette équation sur un ensemble de points de  $[a; b]$  en utilisant la règle de quadrature de Simpson. pour nous c'est la formule (2.8) concernant l'estimation de l'erreur sur un sous-intervalle  $[\tau, \tau + 2h]$  on a

$$\begin{aligned} \int_{\tau}^{\tau+2h} k_x(t)\varphi(t)dt &= \frac{h}{3}[k_x(\tau)\varphi(\tau) + 4k_x(\tau+h)\varphi(\tau+h) \\ &\quad + k_x(\tau+2h)\varphi(\tau+2h)] - \frac{h^5}{90}(k_x(\xi)\varphi(\xi))^{(4)} \end{aligned}$$

Ceci est important, dans le sens où l'erreur d'intégration  $E(h)$  sur deux segments par la règle de Simpson est proportionnelle à  $h^5$ . En outre, on note que, si le segment  $h$  est réduit de moitié, alors  $E(\frac{h}{2}) \approx \frac{1}{16}E(h)$ .

Soit  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{2j-1} < x_{2j} < \dots < x_{2n}$  une subdivision de l'intervalle  $[a, b]$ . En exigeant que l'équation (3.1) soit vérifiée sur chaque noeud  $x_{2j}$ , et on écrit

$$\varphi(x_{2j}) - \int_a^{x_{2j}} k(x_{2j}, t)\varphi(t)dt = f(x_{2j}) \quad (3.2)$$

Ce qui s'écrit aussi

$$\varphi(x_{2j}) - \sum_{i=0}^{j-1} \int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} k(x_{2j}, t)\varphi(t)dt = f(x_{2j}) \quad (3.3)$$

Dans la suite, pour la simplicité on utilise les notations  $\varphi_{2j}, f_{2j}, k_{2j,2i}$  au lieu de  $\varphi(x_{2j}), f(x_{2j}), k(x_{2j}, t_{2i})$ , En utilisant la règle de quadrature de Simpson, l'équation discrète (3.1) devient

$$\varphi_{2j} = f_{2j} + \sum_{i=0}^{j-1} \frac{h}{3}(k_{2j,2i}\varphi_{2i} + 4k_{2j,2i+1}\varphi_{2i+1} + k_{2j,2i+2}\varphi_{2i+2}) \quad (3.4)$$

Pour  $h$  suffisamment petit, une approximation de  $\varphi_{2j}$  devient possible, en approchant la solution  $\varphi_{2i+1}$  au noeud  $x_{2i+1}$  par la moyenne  $\frac{\varphi_{2i} + \varphi_{2i+2}}{2}$ , donc on a

$$\begin{aligned}\varphi_{2j} &= f_{2j} + \sum_{i=0}^{j-1} \frac{h}{3} \left\{ k_{2j,2i} \varphi_{2i} + 4k_{2j,2i+1} \frac{\varphi_{2i} + \varphi_{2i+2}}{2} + k_{2j,2i+2} \varphi_{2i+2} \right\} \\ &= f_{2j} + \sum_{i=0}^{j-1} \frac{h}{3} \{ f(k_{2j,2i} + 2k_{2j,2i+1}) \varphi_{2i} + (2k_{2j,2i+1} + k_{2j,2i+2}) \varphi_{2i+2} \} \\ &= f_{2j} + \sum_{i=0}^{j-1} \frac{h}{3} f(k_{2j,2i} + 2k_{2j,2i+1}) \varphi_{2i} + \sum_{i=0}^{j-1} \frac{h}{3} (2k_{2j,2i+1} + k_{2j,2i+2}) \varphi_{2i+2} \\ &= f_{2j} + \sum_{i=0}^{j-1} \frac{h}{3} f(k_{2j,2i} + 2k_{2j,2i+1}) \varphi_{2i} + \sum_{i=1}^j \frac{h}{3} (2k_{2j,2i-1} + k_{2j,2i}) \varphi_{2i}\end{aligned}$$

Ainsi, on écrit

$$\begin{aligned}\varphi_{2j} &= f_{2j} + \frac{h}{3} (k_{2j,0} + 2k_{2j,1}) \varphi_0 + \frac{h}{3} (2k_{2j,2j-1} + k_{2j,2j}) \varphi_{2j} + \\ &\quad + \frac{2h}{3} \sum_{i=1}^{j-1} (k_{2j,2i-1} + k_{2j,2i} + k_{2j,2i+1}) \varphi_{2i}\end{aligned}$$

D'où, pour  $j = 1, \dots, n$

$$\begin{aligned}\varphi_{2j} \left\{ 1 - \frac{h}{3} (2k_{2j,2j-1} + k_{2j,2j}) \right\} &= f_{2j} + \frac{h}{3} (k_{2j,0} + 2k_{2j,1}) \varphi_0 + \\ &\quad + \frac{2h}{3} \sum_{i=1}^{j-1} (k_{2j,2i-1} + k_{2j,2i} + k_{2j,2i+1}) \varphi_{2i}\end{aligned} \tag{3.5}$$

A partir de l'équation (3.1), il est claire que  $\varphi(x_0) = f(x_0)$ , ie,  $\varphi_0 = f_0$ .

### 3.1.1 Exemple

1. On considère l'équation

$$\varphi(x) + \int_0^x (x-t)\varphi(t)dt = 1, \quad 0 \leq x \leq 1. \tag{3.6}$$

telle que la solution exacte est  $\varphi(x) = \cos(x)$ . Les résultats numériques sont présentés dans le tableau suivant

$t$	$h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.025$
0.0	0	0	0
0.2	6.58725E -05	1.65337E -05	4.13757E -06
0.4	2.58246E -04	6.48173E -05	1.62204E -05
0.6	5.61704E -04	1.40976E -04	3.52786E -05
0.8	9.51576E -04	2.38811E -04	5.97604E -05
1.0	1.39542E -03	3.50172E -04	8.76256E -05

Tableau1 : Résultats numériques de la méthode de Simpson

2. On considère l'équation

$$\varphi(x) - \int_0^x e^{-(x-t)}\varphi(t)dt = 1, \quad 0 \leq x \leq 1. \quad (3.7)$$

telle que la solution exacte est  $\varphi(x) = 1 + x$ . Les résultats numériques sont présentés dans le tableau ci-dessous

$t$	$h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.025$
0.0	0	0	0
0.2	5.66099E -07	3.54109E -08	2.21257E -09
0.4	1.15495E -06	7.22079E -08	4.51245E -09
0.6	1.76488E -06	1.10389E -07	6.90124E -09
0.8	2.39757E -06	1.49965E -07	9.37416E -09
1.0	3.05245E -06	1.90928E -07	1.19362E -08

Tableau2 : Résultats numériques de la méthode de Simpson

## 3.2 Méthodes naturelles Volterra Runge-Kutta

### 3.2.1 Introduction

Tout au long de ce paragraphe, on va servir de l'article[7]. Pour résoudre numériquement les équations intégrales de Volterra (VIE) de second espèce

$$y(x) = g(x) + \int_{x_0}^x k(x, t, y(t)) dt, \quad x \in [x_0, X] \quad (3.8)$$

telles que

$g : [x_0, X] \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $k : \Delta \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $\Delta = \{(x, t) : x_0 \leq t \leq x \leq X\}$  sont suffisamment régulières, on considère une classe très générale de méthodes dites de Volterra Runge-Kutta (VRK) définies par

$$Y_i^{[n]} = h \sum_{j=1}^{\mu} \alpha_{ij} k \left( x_n + d_{ij}h, x_n + e_{ij}h, \sum_{l=1}^{\nu} \beta_{ijl} Y_l^{[n]} \right) + \tilde{F}_n(x_n + c_i h), \quad (3.9)$$

$$y_{n+1} = \sum_{j=1}^{\nu} w_j Y_j^{[n]}$$

$i = 1, 2, \dots, \nu$ ;  $n = 0, 1, 2, \dots, N - 1$ . Ici  $\mu$ , est un entier fixe,  $x_n = x_0 + nh$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots, N$ ;  $Nh = X - x_0$  est le maillage (division) uniforme, et  $\tilde{F}_n(x_n + c_i h)$  est une approximation de  $F_n(x_n + c_i h)$  définie par

$$F_n(x) = g(x) + \int_{x_0}^x k(x, t, y(t)) dt$$

Avec cette notation, l'équation (3.8) peut être réécrite comme

$$y(x) = F_n(x) + \int_{x_0}^x k(x, t, y(t)) dt, \quad x \in [x_n, x_{n+1}], \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (3.10)$$

L'approximation dite de "la queue" consiste à approximer  $\tilde{F}_n(x_n + c_i h)$  par  $F_n(x_n + c_i h)$  doit être choisie de manière à ce qu'elle préserve l'ordre de convergence de la méthode VRK et elle est la plus efficace possible en terme de nombre d'évaluations du noyau  $k$  apparaissant dans (3.8), (3.9) et (3.10). On peut définir l'approximation de la queue de la forme

$$\tilde{F}_n(x) = g(x) + h \sum_{\kappa=1}^n \sum_{j=1}^{\nu} \gamma_j k(x, x_{\kappa-1} + c_j h, Y_j^{[k-1]}) \quad (3.11)$$

avec le vecteur des poids  $\gamma = [\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{\nu}]^T$ . La méthode résultante (3.9) avec les approximations  $\tilde{F}(x_n + c_i h)$  définies par (3.11) ont été référencées dans [6], comme une méthode VRK étendue. Une approche différente des approximations basée sur des extensions continues naturelles de la solution numérique de degré  $d \leq p$  (tel que  $p$  est l'ordre de la méthode qui sera discutée plus bas) a été proposée par Bellen et al. dans [3]. Ces extensions continues naturelles  $u(x_n + \theta h)$  sont définies par

$$u(x_n + \theta h) = \sum_{j=1}^{\nu} w_j(\theta) Y_j^{[n]} \quad (3.12)$$

$n = 0, 1, 2, \dots, N-1; \theta \in [0, 1]$  où  $w_j(\theta)$  est un polynôme d'ordre  $d$

$$[p/2] \leq d \leq \min\{\nu - 1, p\}$$

Ici,  $[p/2]$  représente la partie entière de  $p/2$ . Ces polynômes satisfont les systèmes linéaires des équations

$$\sum_{j=1}^{\nu} w_j(\theta) c_j^k = \theta^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, d \quad (3.13)$$

Voir [3] pour comparaison. On considère alors l'approximation suivante

$$\tilde{F}_n(x) = g(x) + h \sum_{\kappa=1}^n \sum_{j=1}^m v_j k(x, x_{\kappa-1} + \xi_j h, u(x_{\kappa-1} + \xi_j h)) \quad (3.14)$$

où le poids  $v_j$  et les abscisses  $\xi_j$  correspondent à une règle de quadrature d'ordre supérieur ou égal à  $p$ . Les formules résultantes avec approximation que définies par (3.14) seront appelées méthodes VRK naturelles. Les coefficients  $\alpha_{ij}$ ,  $\beta_{ijl}$  et  $w_i$ , et les abscisses  $c_i$ ,  $d_{ij}$  et  $e_{ij}$  seront choisis de sorte que la méthode VRK ait un ordre  $p$  et un ordre d'étape  $q = p$ , et certaines propriétés de stabilité souhaitables par rapport à la base et à l'équations de test de convolution. Puisque, en général,  $k(x, t, y)$  n'est défini que pour  $t \leq x$ , nous supposons toujours la condition dite du noyau  $e_{ij} \leq d_{ij}$ .

### 3.2.2 Ordre des étapes et conditions d'ordre

Pour discuter des conditions d'ordre pour les méthodes VRK (3.9), sans perte de généralité, nous considérerons une forme plus simple de VIE (3.8), où la fonction noyau  $k(x, t, y(t))$  est indépendant de  $t$ . Ceci peut être accompli si nous définissons, par exemple

$$\tilde{y}(x) = \begin{bmatrix} x \\ y(x) \end{bmatrix}, \quad \tilde{g}(x) = \begin{bmatrix} x_0 \\ g(x) \end{bmatrix}, \quad \tilde{k}(x, \tilde{y}(x)) = \begin{bmatrix} 1 \\ k(x, t, y(t)) \end{bmatrix}$$

Alors l'équation (3.8) peut être réduite à la forme

$$y(x) = g(x) + \int_{x_0}^x k(x, y(t)) dt, \quad x \in [x_0, X] \quad (3.15)$$

où par commodité nous avons écrit  $y$ ,  $g$  et  $k$  au lieu de  $\tilde{y}$ ,  $\tilde{g}$  et  $\tilde{k}$ . La méthode VRK pour (3.15) prend maintenant la forme

$$\begin{aligned} Y_i^{[n]} &= h \sum_{j=1}^m \alpha_{ij} k \left( x_n + d_{ij}h, \sum_{l=1}^{\nu} \beta_{ijl} Y_l^{[n]} \right) + \tilde{F}_n(x_n + c_i h) \\ y_{n+1} &= \sum_{j=1}^{\nu} w_j Y_j^{[n]} \end{aligned} \quad (3.16)$$

$i = 1, 2, \dots, \nu$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots, N-1$ , où  $\tilde{F}_n(x_n + c_i h)$  est une approximation de  $F_n(x_n + c_i h)$  d'ordre suffisamment élevé définie par

$$F_n(x) = g(x) + \int_{x_0}^{x_n} k(x, y(t)) dt, \quad x \in [x_n, x_{n+1}], \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

L'approximation de l'égalité (3.11) prend maintenant la forme

$$\tilde{F}_n(x) = g(x) + h \sum_{\kappa=1}^n \sum_{j=1}^{\nu} \gamma_j k \left( x, Y_j^{[\kappa-1]} \right)$$

et l'approximation de l'égalité (3.14) basée sur les extensions continues naturelles (3.12) prend pour

$$\tilde{F}_n(x) = g(x) + h \sum_{\kappa=1}^n \sum_{j=1}^m v_j k(x, u(x_{\kappa-1} + \xi_j h)) \quad (3.17)$$

Il résulte de la définition de  $\tilde{k}(x, \tilde{y}(t))$  qu'avec les abscisses  $e_{ij}$  définies par

$$e_{ij} = \sum_{l=1}^{\nu} \beta_{ijl} c_l, \quad i = 1, 2, \dots, \nu, \quad j = 1, 2, \dots, \mu. \quad (3.18)$$

les conditions d'ordre pour (3.16) appliquées à (3.15) sont les mêmes que les conditions d'ordre pour (3.9) appliquées à (3.8). Comme dans [4], nous supposons également que

$$\sum_{l=1}^{\nu} \beta_{ijl} = 1, \quad i = 1, 2, \dots, \nu, \quad j = 1, 2, \dots, \mu. \quad (3.19)$$

Dans ce paragraphe, nous déterminons les conditions qui garantissent que les méthodes VRK (3.16) ont l'ordre  $p$  et l'ordre des étapes  $q = p$ . Cela signifie que

$$hd_i = O(h^{p+1}), \quad i = 1, 2, \dots, \nu, \quad h \rightarrow 0, \quad (3.20)$$

et

$$h\hat{d} = O(h^{p+1}), \quad h \rightarrow 0 \quad (3.21)$$

où  $hd_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, \nu$ , sont les erreurs locales de discrétisation des valeurs d'étage  $Y_i^{[n]}$ , et  $h\hat{d}$  est l'erreur locale de discrétisation de  $y_{n+1}$ . Ces erreurs sont définies comme des résidus obtenus

en remplaçant  $Y_i^{[n]}$  par  $y(x_n + c_i h)$ , et  $\tilde{F}_n(x_n + c_i h)$  par  $F_n(x_n + c_i h)$ , et  $y_{n+1}$  par  $y(x_{n+1})$  dans (3.16), où  $y(x)$  est la solution de (3.15), c'est-à-dire

$$hd_i := y(x_n + c_i h) - h \sum_{j=1}^{\mu} \alpha_{ij} k \left( x_n + d_{ij} h, \sum_{l=1}^{\nu} \beta_{ijl} y(x_n + c_l h) \right) - F_n(x_n + c_i h) \quad (3.22)$$

$i = 1, 2, \dots, \nu$ , et

$$h\hat{d} := y(x_{n+1}) - \sum_{j=1}^{\nu} w_j y(x_n + c_j h). \quad (3.23)$$

Il découle de (3.20) et (3.21) que l'ordre des étapes et les conditions d'ordre peuvent être obtenus en développant  $hd_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, \nu$ , et  $h\hat{d}$  en séries de Taylor autour du point  $x_n$  et égalant à zéro les coefficients des différentielles élémentaires jusqu'à l'ordre d'étape  $q = p$  et l'ordre  $p$ . Ces différentielles élémentaires dépendent des  $y, k$ , des dérivées de  $y$ , des dérivées partielles de  $k$ , et de leurs combinaisons. Dans ce qui suit, nous allons illustrer ce processus pour déterminer l'ordre des étapes et les conditions d'ordre jusqu'à l'ordre  $p = 4$  et l'ordre des étapes  $q = 4$ . Les expressions  $hd_i$  et  $h\hat{d}$  ont les développements de Taylor suivants jusqu'à l'ordre quatre

$$\begin{aligned} hd_i &= y(x_n) - F_n(x_n) + (y'(x_n) - F'_n(x_n)) c_i h + (y''(x_n) - F''_n(x_n)) \frac{c_i^2 h^2}{2} \\ &\quad + (y'''(x_n) - F'''_n(x_n)) \frac{c_i^3 h^3}{6} + (y^{(4)}(x_n) - F_n^{(4)}(x_n)) \frac{c_i^4 h^4}{24} \\ &\quad - h \sum_{j=1}^{\mu} \alpha_{ij} k(x_n + d_{ij} h, y(x_n)) + \sum_{l=1}^{\nu} \beta_{ijl} c_l y'(x_n) h \\ &\quad + \sum_{l=1}^{\nu} \beta_{ijl} \frac{c_l^2}{2} y''(x_n) h^2 + \sum_{l=1}^{\nu} \beta_{ijl} \frac{c_l^3}{6} y'''(x_n) h^3 + O(h^5). \end{aligned}$$

$i = 1, 2, \dots, \nu$ , où nous avons utilisé (3.19), et

$$\begin{aligned} h\hat{d} &= \left( 1 - \sum_{j=1}^{\nu} w_j \right) y(x_n) + \left( 1 - \sum_{j=1}^{\nu} w_j c_j \right) h y'(x_n) + \left( 1 - \sum_{j=1}^{\nu} w_j c_j^2 \right) y''(x_n) \frac{h^2}{2} \\ &\quad + \left( 1 - \sum_{j=1}^{\nu} w_j c_j^3 \right) y'''(x_n) \frac{h^3}{6} + \left( 1 - \sum_{j=1}^{\nu} w_j c_j^4 \right) y^{(4)}(x_n) \frac{h^4}{24} + O(h^5). \end{aligned}$$

$p=q$	différentielles	conditions d'ordre $p$ et ordre d'étapes $q$
$p = 0$	$y$	$\sum_{j=1}^{\nu} w_j = 1$
$p = 1$	$y'$	$\sum_{j=1}^{\nu} w_j c_j = 1$
$q = 1$	$k$	$\sum_{j=1}^{\mu} \alpha_{ij} = c_i$
$p = 2$	$y''$	$\sum_{j=1}^{\nu} w_j c_j^2 = 1$
$q = 2$	$\frac{\partial k}{\partial x}$	$\sum_{j=1}^{\mu} \alpha_{ij} d_{ij} = c_i^2$
$q = 2$	$\frac{\partial k}{\partial y} y'$	$\sum_{j=1}^{\mu} \alpha_{ij} \sum_{l=1}^{\nu} \beta_{ijl} c_l = \frac{c_i^2}{2}$

Tableau1 : Conditions d'ordre et d'ordre d'étape pour  $p = 0$ ,  $p = q = 1$  et  $p = q = 2$

Nous évaluons ensuite  $y(x) - F_n(x)$ ,  $y'(x) - F'_n(x)$ ,  $y''(x) - F''_n(x)$ ,  $y'''(x) - F'''_n(x)$ , et  $y^{(4)}(x) - F_n^{(4)}(x)$  pour  $x = x_n$ . Après quelques calculs, il résulte de (3.10) que

$$\begin{aligned}
 y - F_n &= 0, & y' - F'_n &= k, & y'' - F''_n &= 2\frac{\partial k}{\partial x} + \frac{\partial k}{\partial y}y', \\
 y''' - F'''_n &= 3\frac{\partial^2 k}{\partial x^2} + 3\frac{\partial^2 k}{\partial x \partial y}y' + \frac{\partial^2 k}{\partial y^2}y'^2 + \frac{\partial k}{\partial y}y'', \\
 y^{(4)} - F_n^{(4)} &= 4\frac{\partial^3 k}{\partial x^3} + 6\frac{\partial^3 k}{\partial x^2 \partial y}y' + 4\frac{\partial^3 k}{\partial x \partial y^2}y'^2 + 4\frac{\partial^2 k}{\partial x \partial y}y'' \\
 &\quad + \frac{\partial^3 k}{\partial y^3}y'^3 + 3\frac{\partial^2 k}{\partial y^2}y'y'' + \frac{\partial k}{\partial y}y'''.
 \end{aligned}$$

où nous avons ignoré variables de  $y$ ,  $F_n$  et  $k$  et de leurs dérivées. En remplaçant les expressions ci-dessus par  $hd_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, \nu$  et en développant la fonction  $k$  apparaissant dans  $hd_i$  en série de Taylor autour du point  $(x_n, y(x_n))$ , puis en égalisant à zéro les coefficients des différentielles élémentaires résultants, on obtient des conditions d'ordre d'étape jusqu'à l'ordre d'étape  $q = 4$ . De même, en égalant à zéro les puissances de  $h$  dans  $h\hat{d}$  jusqu'à l'ordre quatre on obtient les conditions d'ordre de la forme  $\sum_{j=1}^{\nu} w_j e_j^k = 1$ ,  $k = 0, 1, 2, 3, 4$ . Nous appellerons ces conditions, les conditions d'ordre de quadrature. Ces conditions d'ordre et d'ordre d'étape sont répertoriées dans le tableau 1 pour  $p = 0$ ,  $p = q = 1$  et  $p = q = 2$ , dans le tableau 2 pour  $p = q = 3$  et dans le tableau 3 pour  $p = q = 4$ . On observe qu'en multipliant les conditions d'ordre d'étape par  $w_i$  puis en additionnant les expressions résultantes de  $i = 1$  à  $i = \nu$  et en tenant compte des conditions d'ordre de quadrature, nous obtenons des conditions d'ordre d'étape déterminer dans [3]. Nous concluons cette section en énumérant dans le tableau 4 le nombre de conditions (qui incluent les conditions d'ordre et d'ordre d'étape et les relations (3.19)) et le nombre de paramètres libres  $c_j, w_j, \alpha_{ij}, d_{ij}$  et  $\beta_{ijl}$  pour les méthodes VRK naturelles avec  $p = q = \mu = \nu$  pour  $\nu = 1, 2, 3$  et 4. En construisant de telles méthodes, nous supposons généralement que la dernière composante  $c_\nu$  du vecteur d'abscisse  $c$  est égale à un.

$p = q$	différentiels	conditions d'ordre $p$ et ordred'étape $q$
$p = 3$	$y'''$	$\sum_{j=1}^{\nu} w_j c_j^3 = 1$
$q = 3$	$\frac{\partial^2 k}{\partial x^2}$	$\sum_{j=1}^{\mu} \alpha_{ij} d_{ij}^2 = c_i^3$
$q = 3$	$\frac{\partial^2 k}{\partial x \partial y} y'$	$\sum_{j=1}^{\mu} \alpha_{ij} d_{ij} \sum_{l=1}^{\nu} \beta_{ijl} c_l = \frac{c_i^3}{2}$
$q = 3$	$\frac{\partial^2 k}{\partial y^2} y'^2$	$\sum_{j=1}^{\mu} \alpha_{ij} (\sum_{l=1}^{\nu} \beta_{ijl} c_l)^2 = \frac{c_i^3}{3}$
$q = 3$	$\frac{\partial k}{\partial y} y''$	$\sum_{j=1}^{\mu} \alpha_{ij} \sum_{l=1}^{\nu} \beta_{ijl} c_l^2 = \frac{c_i^3}{3}$

Tableau2 : Conditions d'ordre et d'ordre d'étape pour  $p = q = 3$

$p = q$	différentielles	conditions d'ordre $p$ et ordre d'étape $q$
$p = 4$	$y^{(4)}$	$\sum_{j=1}^{\nu} w_j c_j^4 = 1$
$q = 4$	$\frac{\partial^3 k}{\partial x^3}$	$\sum_{j=1}^{\mu} \alpha_{ij} d_{ij}^3 = c_i^4$
$q = 4$	$\frac{\partial^3 k}{\partial x \partial y^2} y'^2$	$\sum_{j=1}^{\mu} \alpha_{ij} d_{ij} (\sum_{l=1}^{\nu} \beta_{ijl} c_l)^2 = \frac{c_i^4}{3}$
$q = 4$	$\frac{\partial^3 k}{\partial x^2 \partial y} y'$	$\sum_{j=1}^{\mu} \alpha_{ij} d_{ij}^2 \sum_{l=1}^{\nu} \beta_{ijl} c_l = \frac{c_i^4}{2}$
$q = 4$	$\frac{\partial^2 k}{\partial x \partial y} y''$	$\sum_{j=1}^{\mu} \alpha_{ij} d_{ij} \sum_{l=1}^{\nu} \beta_{ijl} c_l^2 = \frac{c_i^4}{3}$
$q = 4$	$\frac{\partial^2 k}{\partial y^2} y' y''$	$\sum_{j=1}^{\mu} \alpha_{ij} \sum_{l=1}^{\nu} \beta_{ijl} c_l \sum_{l=1}^{\nu} \beta_{ijl} c_l^2 = \frac{c_i^4}{4}$
$q = 4$	$\frac{\partial^3 k}{\partial y^3} y'^3$	$\sum_{j=1}^{\mu} \alpha_{ij} (\sum_{l=1}^{\nu} \beta_{ijl} c_l)^3 = \frac{c_i^4}{4}$
$q = 4$	$\frac{\partial k}{\partial y} y'''$	$\sum_{j=1}^{\mu} \alpha_{ij} \sum_{l=1}^{\nu} \beta_{ijl} c_l^3 = \frac{c_i^4}{4}$

Tableau3 : Conditions d'ordre et d'ordre d'étape pour  $p = q = 4$

$p = q = \mu = \nu$	$\neq$ de condition : $p = q$	$\neq$ de paramètre
1	4	5
2	13	20
3	34	51
4	77	104

Tableau4 : Nombre de conditions et nombre de paramètres libres pour les méthodes VRK naturelles avec  $p = q = \mu = \nu$ , pour  $\nu = 1, 2, 3$  et 4.

### 3.2.3 Analyse de stabilité par rapport à l'équation du test de convolution

Dans cette paragraphe, nous étudions les propriétés de stabilité des méthodes VRK (3.16) avec l'approximation définie par (3.17) par rapport à l'équation test de convolution

$$y(x) = 1 + \int_0^x (\lambda + \xi(x-t)) y(t) dt, \quad x \geq 0 \quad (3.24)$$

où,  $\lambda, \xi \in \mathbb{R}$ . La solution  $y(x)$  de cette équation tend vers zéro lorsque  $x$  tend vers l'infini si et seulement si  $\lambda < 0$  et  $\xi \leq 0$ . Nous allons rechercher si cette propriété est héritée de la solution numérique  $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$  obtenue par l'application de la méthode VRK (3.16) avec l'approximation de la queue donnée par (3.17) à l'équation test (3.24). On peut vérifier que cette solution numérique dépend des paramètres  $\lambda h$  et  $\xi h^2$ , où  $h$  est le pas utilisé. La méthode VRK est dite stable pour  $(\lambda h, \xi h^2)$  donné si  $y_n = y_n(\lambda h; \xi h^2) \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow \infty$ . La région de stabilité  $S$  d'une méthode VRK par rapport à (3.24) est l'ensemble de tous  $(\lambda h, \xi h^2)$  pour lesquels la méthode est stable, c'est-à-dire

$$S := \{(\lambda h, \xi h^2) \in \mathbb{R}^2 : y_n(\lambda h; \xi h^2) \rightarrow 0, \text{ quand } n \rightarrow \infty\} \quad (3.25)$$

La méthode VRK est dite  $V_0$ -stable si sa région de stabilité comprend l'ensemble  $\lambda h < 0$  et  $\xi h^2 < 0$ , c'est-à-dire  $\{(\lambda h, \xi h^2) \in \mathbb{R}^2 : \lambda h < 0, \xi h^2 < 0\} \subset S$ . Dans ce mémoire nous présenterons la méthodes de VRK naturelles  $V_0$ -stables d'ordre  $p$  et d'ordre d'étape  $q = p$  jusqu'à l'ordre quatre.

En appliquant la méthode VRK (3.16) à (3.24) on obtient

$$\begin{aligned}
 Y_i^{[n]} &= h\lambda \sum_{l=1}^{\nu} \sum_{j=1}^{\mu} \alpha_{ij} \beta_{ijl} Y_l^{[n]} + h^2 \xi \sum_{l=1}^{\nu} \sum_{j=1}^{\mu} \alpha_{ij} d_{ij} \beta_{ijl} Y_l^{[n]} \\
 &\quad - h^2 \xi \sum_{l=1}^{\nu} \sum_{j=1}^{\mu} \alpha_{ij} e_{ij} \beta_{ijl} Y_l^{[n]} + \tilde{F}_n(x_n + c_i h)
 \end{aligned} \tag{3.26}$$

$$y_{n+1} = \sum_{j=1}^{\nu} w_j Y_j^{[n]}$$

$i = 1, 2, \dots, \nu$ , où l'approximation de la queue (3.17) prend maintenant la forme

$$\begin{aligned}
 \tilde{F}_n(x_n + c_i h) &= 1 + h\lambda \sum_{\kappa=1}^n \sum_{l=1}^m v_l u(x_{\kappa-1} + \xi_l h) \\
 &\quad + h^2 \xi \sum_{\kappa=1}^n \sum_{l=1}^m v_l (n - \kappa + 1) u(x_{\kappa-1} + \xi_l h) \\
 &\quad + h^2 \xi \sum_{\kappa=1}^n \sum_{l=1}^m v_l (c_i - \xi_l) u(x_{\kappa-1} + \xi_l h).
 \end{aligned} \tag{3.27}$$

En mettant

$$b_j = \sum_{l=1}^m v_l w_j(\xi_l), \quad r_j = \sum_{l=1}^m v_l \xi_l w_j(\xi_l) \tag{3.28}$$

il résulte de (3.12) que (3.27) peut être réécrit sous la forme

$$\begin{aligned}
 \tilde{F}_n(x_n + c_i h) &= 1 + h\lambda \sum_{\kappa=1}^n \sum_{j=1}^{\nu} b_j Y_j^{[\kappa-1]} \\
 &\quad + h^2 \xi \sum_{\kappa=1}^n \sum_{j=1}^{\nu} b_j (n - \kappa + 1) Y_j^{[\kappa-1]} + h^2 \xi \sum_{\kappa=1}^n \sum_{j=1}^{\nu} (b_j c_i - r_j) Y_j^{[\kappa-1]}.
 \end{aligned} \tag{3.29}$$

En mettant

$$\begin{aligned}
 x &= h\lambda, \quad y = h^2 \xi, \quad r = [r_1, \dots, r_{\nu}]^T, \quad e = [1, \dots, 1]^T \in \mathbb{R}^{\nu}, \\
 A &= [a_{il}]_{i,l=1}^{\nu}, \quad a_{il} = \sum_{j=1}^{\mu} \alpha_{ij} \beta_{ijl}, \quad B = [b_{il}]_{i,l=1}^{\nu}, \quad b_{il} = \sum_{j=1}^{\mu} \alpha_{ij} d_{ij} \beta_{ijl}, \\
 C &= [c_{il}]_{i,l=1}^{\nu}, \quad c_{il} = \sum_{j=1}^{\mu} \alpha_{ij} e_{ij} \beta_{ijl}, \quad b = [b_1, \dots, b_{\nu}]^T, \quad c = [c_1, \dots, c_{\nu}]^T, \\
 Y^{[\kappa]} &= [Y_1^{[\kappa]}, \dots, Y_{\nu}^{[\kappa]}]^T, \quad F^{[\kappa]} = [\tilde{F}_{\kappa}(x_{\kappa} + c_1 h), \dots, \tilde{F}_{\kappa}(x_{\kappa} + c_{\nu} h)]^T
 \end{aligned}$$

la relation (3.26) peut s'écrire sous forme vectorielle

$$Y^{[n]} = (xA + y(B - C)) Y^{[n]} + F^{[n]} \tag{3.30}$$

et l'approximation de (3.29) prend la forme

$$F^{[n]} = e + \sum_{\kappa=1}^n (x e b^T + y(n - \kappa + 1) e b^T + y(c b^T - e r^T)) Y^{[\kappa-1]} \tag{3.31}$$

où  $r = b.c := [c_1 b_1, \dots, c_\nu b_\nu]^T$ . Comme dans [4] on peut réduire (3.30) et (3.31) à un équation de différence vectorielle d'ordre deux. En mettant

$$Q = Q(x, y) = I - xA - y(B - C) \quad (3.32)$$

la relation (3.30) prend la forme  $QY^{[n]} = F^{[n]}$ . On peut donner (3.31) comme suite

$$\begin{aligned} F^{[n+2]} - 2F^{[n+1]} + F^{[n]} &= ((x+y)eb^T + y(cb^T - er^T))Y^{[n+1]} \\ &\quad - (xeb^T + y(cb^T - er^T))Y^{[n]}, \end{aligned}$$

et en substituant ceci dans la relation

$$Q(Y^{[n+2]} - 2Y^{[n+1]} + Y^{[n]}) = F^{[n+2]} - 2F^{[n+1]} + F^{[n]}$$

nous obtenons

$$\begin{aligned} Q(Y^{[n+2]}) &= (2Q + (x+y)eb^T + y(cb^T - er^T))Y^{[n+1]} \\ &\quad - (Q + xeb^T + y(cb^T - er^T))Y^{[n]}, \end{aligned} \quad (3.33)$$

$n = 0, 1, \dots$ , Il s'agit de la relation de récurrence vectorielle souhaitée d'ordre deux. Dans ce qui suit nous supposons que la matrice  $Q$  définie par (3.32) est non singulière et nous définissons les vecteurs  $\tilde{e} = Q^{-1}e$ ,  $\tilde{c} = Q^{-1}c$ . Nous chercherons les solutions de (3.33) sous la forme

$$Y^{[n]} = \alpha_n \tilde{e} + \beta_n \tilde{c} \quad (3.34)$$

où  $\alpha_n$  et  $\beta_n$  sont des scalaires à déterminer. En remplaçant (3.34) dans (3.33) et en comparant les coefficients de  $e$  et  $c$  dans les expressions résultantes, et en tenant compte du fait que les vecteurs  $e$  et  $c$  sont linéairement indépendants, on obtient

$$\begin{aligned} \alpha_{n+2} &= (2 + (x+y)b^T \tilde{e} - yr^T \tilde{e})\alpha_{n+1} + ((x+y)b^T \tilde{c} - yr^T \tilde{c})\beta_{n+1} \\ &\quad - (1 + xb^T \tilde{e} - yb^T \tilde{e})\alpha_n - (xb^T \tilde{c} - yr^T \tilde{c})\beta_n \end{aligned}$$

$$\beta_{n+2} = yb^T \tilde{e} \alpha_{n+1} + (2 + yb^T \tilde{c})\beta_{n+1} - yb^T \tilde{e} \alpha_n - (1 + yb^T \tilde{c})\beta_n$$

$n = 0, 1, \dots$ , Ensuite, nous réduirons les relations de récurrence ci-dessus pour  $\alpha_n$  et  $\beta_n$  à une équation de différence vectorielle du premier ordre. Laisser

$$\begin{aligned} M &= M(x, y) = \begin{bmatrix} 2 + (x+y)b^T \tilde{e} - yr^T \tilde{e} & (x+y)b^T \tilde{c} - yr^T \tilde{c} \\ yb^T \tilde{e} & 2 + yb^T \tilde{c} \end{bmatrix} \\ N &= N(x, y) = \begin{bmatrix} -1 - xb^T \tilde{e} + yr^T \tilde{e} & -xb^T \tilde{c} + yr^T \tilde{c} \\ -yb^T \tilde{e} & -1 - yb^T \tilde{c} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Alors le système pour  $\alpha_{n+2}$  et  $\beta_{n+2}$  peut être écrit sous une forme compacte

$$v_{n+1} = Sv_n \quad (3.35)$$

$n = 0, 1, \dots$ , où

$$S = S(x, y) = \left[ \begin{array}{c|c} M & N \\ \hline I & \theta \end{array} \right] \in \mathbb{R}^{4 \times 4}, \quad v = [\alpha_{n+1} \beta_{n+1} \alpha_n \beta_n]^T \in \mathbb{R}^4$$

Il résulte de (3.30) et (3.31) que  $Y^{[0]} = Q^{-1}F^{[0]} = \tilde{e}$ ,

$$Y^{[1]} = Q^{-1}F^{[1]} = (1 + xb^T \tilde{e} - yb^T \tilde{e})\tilde{e} + yb^T \tilde{c},$$

ce qui implique que  $\alpha_0 = 1$ ,  $\beta_0 = 0$ ,  $\alpha_1 = 1 + (x + y)b^T\tilde{e} - yr^T\tilde{e}$ ,  $\beta_1 = yb^T\tilde{e}$ . Ainsi, le vecteur initial  $v_0$  de l'équation de récurrence (3.35) prend la forme

$$v_0 = [\alpha_1 \ \beta_1 \ \alpha_0 \ \beta_0]^T = [1 + (x + y)b^T\tilde{e} - yr^T\tilde{e} \quad yb^T\tilde{e} \quad 1 \quad 0]^T.$$

Les propriétés de stabilité de la méthode VRK (3.16) avec l'approximation de (3.17) par rapport à l'équation du test de convolution (3.24) sont déterminées par le polynôme caractéristique  $\phi(\theta)$  de la matrice d'amplification  $S = S(x, y)$  apparaissant dans (3.35). Ce polynôme prend la forme

$$\phi(\theta) = \det[\theta I - S] = \det[\theta^2 I - \theta M - N]$$

Ainsi que  $\phi(\theta) = (\theta - 1)^2 \psi(\theta)$  avec

$$\begin{aligned} \psi(\theta) &= \theta^2 - (2 + (x + y)b^T\tilde{e} + y(b^T\tilde{c} - r^T\tilde{e}))\theta \\ &\quad + 1 + xb^T\tilde{e} + y(b^T\tilde{c} - r^T\tilde{e}) + y^2(b^T\tilde{e}r^T\tilde{c} - b^T\tilde{c}r^T\tilde{e}). \end{aligned} \quad (3.36)$$

où  $\theta = 1$  est une valeur propre de  $S$  de multiplicité algébrique deux et de multiplicité géométrique un. En conséquence, la région de stabilité de la méthode VRK (3.16) par rapport à l'équation de test (3.24) peut être caractérisée comme

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |\theta_1(x, y)| < 1, \text{ et } |\theta_2(x, y)| < 1\}$$

où  $\theta_1 = \theta_1(x, y)$  et  $\theta_2 = \theta_2(x, y)$  sont les racines du polynôme  $\psi(\theta)$  défini par (3.36). En mettant  $y = 0$  dans (3.36) ce polynôme  $\psi(\theta)$  se réduit à

$$\psi(\theta) = \theta^2 - (2 + xb^T\tilde{e})\theta + 1 + xb^T\tilde{e},$$

avec les racines  $\theta = 1$  et  $\theta = 1 + xb^T\tilde{e} = 1 + xb^T(I - xA)e$ .

Nous utiliserons le critère de Schur l'article [7] pour trouver les conditions sous lesquelles les racines  $\theta_1 = \theta_1(x, y)$  et  $\theta_2 = \theta_2(x, y)$  de  $\psi(\theta)$  sont à l'intérieur de l'unité cercle. Ce critère implique que tel est le cas si et seulement si

$$|1 + xb^T\tilde{e} + y(b^T\tilde{c} - r^T\tilde{e}) + y^2(b^T\tilde{e}r^T\tilde{c} - b^T\tilde{c}r^T\tilde{e})| < 1 \quad (3.37)$$

$$\begin{aligned} &|2 + (x + y)b^T\tilde{e} + y(b^T\tilde{c} - r^T\tilde{e})| \\ &< |2 + xb^T\tilde{e} + y(b^T\tilde{c} - r^T\tilde{e}) + y^2(b^T\tilde{e}r^T\tilde{c} - b^T\tilde{c}r^T\tilde{e})| \end{aligned} \quad (3.38)$$

Pour rechercher des méthodes  $V_0$ -stables, il est plus pratique de reformuler (3.37) et (3.38) sous la forme

$$\varphi(x, y) > 0, \quad x, y \leq 0 \quad (3.39)$$

$$\psi(x, y) > 0, \quad x, y \leq 0 \quad (3.40)$$

où les fonctions rationnelles  $\varphi(x, y)$  et  $\psi(x, y)$  sont définies par

$$\varphi(x, y) := 1 - (1 + xb^T\tilde{e} + y(b^T\tilde{c} - r^T\tilde{e}) + y^2(b^T\tilde{e}r^T\tilde{c} - b^T\tilde{c}r^T\tilde{e}))^2 \quad (3.41)$$

$$\begin{aligned} \psi(x, y) &:= (2 + xb^T\tilde{e} + y(b^T\tilde{c} - r^T\tilde{e}) + y^2(b^T\tilde{e}r^T\tilde{c} - b^T\tilde{c}r^T\tilde{e}))^2 \\ &\quad - (2 + (x + y)b^T\tilde{e} + y(b^T\tilde{c} - r^T\tilde{e}))^2. \end{aligned}$$

Pour les méthodes VRK avec  $\mu = \nu$  ces fonctions prennent la forme

$$\varphi(x, y) = \frac{\sum_{0 \leq i+j \leq 2\nu} (-1)^{i+j} \xi_{ij}^{(1)} x^i y^j}{\left(\sum_{0 \leq i+j \leq \nu} \eta_{ij}^{(1)} x^i y^j\right)^2}, \quad \psi(x, y) = \frac{\sum_{0 \leq i+j \leq 2\nu} (-1)^{i+j} \xi_{ij}^{(2)} x^i y^j}{\left(\sum_{0 \leq i+j \leq \nu} \eta_{ij}^{(2)} x^i y^j\right)^2}$$

$\xi_{00}^{(1)} = \xi_{00}^{(2)} = 0$ ,  $\eta_{00}^{(1)} = \eta_{00}^{(2)} = 1$ , où les coefficients  $\xi_{ij}^{(1)}, \eta_{ij}^{(1)}, \xi_{ij}^{(2)}, \eta_{ij}^{(2)}$  dépendent des paramètres libres restants des méthodes. Alors les conditions suffisantes pour la stabilité  $V_0$  prennent la forme

$$\xi_{ij}^{(k)} \geq 0, \quad i, j = 0, 1, \dots, \nu, \quad 1 \leq i + j \leq 2\nu, \quad k = 1, 2. \quad (3.42)$$

Pour faire respecter les conditions (3.39) et (3.40) on peut aussi considérer les polynômes

$$\gamma(x, y) = \sum_{k=0}^{2\nu} \left( \sum_{l=0}^k \eta_l^{(1)} t^l \right) (-x)^k, \quad \delta(x, y) = \sum_{k=0}^{2\nu} \left( \sum_{l=0}^k \eta_l^{(2)} t^l \right) (-x)^k,$$

obtenu en remplaçant  $y = tx$  dans les numérateurs de  $\varphi(x, y)$  et  $\psi(x, y)$ . Alors les conditions suffisantes pour la  $V_0$ -stabilité des méthodes VRK, qui sont moins restrictives que les conditions (3.42), prennent la forme

$$\eta_k^{(1)} > 0, \quad \eta_k^{(2)} > 0, \quad k = 0, 1, \dots, 2\nu, \quad (3.43)$$

$$t_i^{(1)} \leq 0, \quad t_i^{(2)} \leq 0, \quad (3.44)$$

où  $t_i^{(1)}$  et  $t_i^{(2)}$  sont les racines réelles des polynômes  $\sum_{l=1}^k \eta_l^{(1)} t^l$ , et  $\sum_{l=1}^k \eta_l^{(2)} t^l$ ,  $k = 0, 1, \dots, 2\nu$  apparaissant en  $\gamma(x, y)$  et  $\delta(x, y)$ . Cela conduira à méthodes qui sont à la fois  $A$ - et  $V_0$ -stables.

### 3.2.4 Exemples de méthodes VRK naturelles stables $A$ et $V_0$

**Méthodes VRK naturelles avec  $p = q = \mu = \nu = 1$**

Il découle des conditions d'ordre et d'ordre d'étape et des relations (3.18) et (3.19) que  $w_1 = 1$ ,  $c_1 = 1$ ,  $\alpha_{11} = 1$ ,  $\beta_{111} = 1$  et  $e_{11} = 1$ . De plus,  $d_{11}$  doit satisfaire la condition du noyau  $e_{11} \leq d_{11}$ . Posons  $d = d_{11}$ , il découle de (3.13) que  $w_1(\theta) = 1$ ,  $\theta \in (0; 1]$ , et

$$Y_1^{[n]} = hk \left( x_n + dh, Y_1^{[n]} \right) + \tilde{F}_n(x_{n+1}) \quad (3.45)$$

$$y_{n+1} = Y_1^{[n]}, \quad u(x_n + \theta h) = Y_1^{[n]}, \quad \theta \in (0; 1] \quad (3.46)$$

$n = 0, 1, \dots, N - 1$ . Observons que  $u$  est discontinue aux points du maillage. En choisissant  $m = 1$ ,  $v_1 = 1$ ,  $\xi_1 = 1$ , l'approximation de la queue (3.17) prend la forme

$$\tilde{F}_n(x) = g(x) + h \sum_{\kappa=1}^n k(x, u(x_\kappa)) = g(x) + h \sum_{\kappa=1}^n k(x, Y_1^{[\kappa-1]}) \quad (3.47)$$

Nous avons  $b_1 = v_1 w_1 = 1$ ,  $a_{11} = \alpha_{11} \beta_{111} = 1$ , et la méthode RK sous-jacente est la méthode d'Euler rétrograde qui est  $A$ - et  $L$ -stable [7]. Nous étudions ensuite la stabilité  $V_0$ . On peut vérifier que dans la méthode (3.46) avec l'approximation de la queue (3.47), le polynôme de stabilité  $\psi(\theta)$  équivalent à (3.36) prend la forme

$$\psi(\theta) = (1 - x + (1 - d)y)\theta^2 + (2 - x + (3 - 2d)y)\theta + 1 + (1 - d)y.$$

Il découle maintenant du critère de Schur que la région de  $V_0$ -stabilité est l'ensemble de tous les points  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  tels que

$$x(2 - x - 2(1 - d)y) \geq 0, \quad \text{et} \quad y(-2(2 - x) - (5 - 4d)y) \geq 0.$$

Ainsi, la méthode (3.46)-(3.47) est  $V_0$ -stable si et seulement si  $d \geq 5/4$ . Ceci est cohérent avec les résultats [4].

Méthodes VRK naturelles avec  $p = q = \mu = \nu = 2$

$$\begin{aligned}
 Y_1^{[n]} &= h\alpha_{11}k\left(x_n + d_{11}h, \beta_{111}Y_1^{[n]} + \beta_{112}Y_2^{[n]}\right) \\
 &\quad + h\alpha_{12}k\left(x_n + d_{12}h, \beta_{121}Y_1^{[n]} + \beta_{122}Y_2^{[n]}\right) + \tilde{F}_n(x_n + c_1h) \\
 Y_2^{[n]} &= h\alpha_{21}k\left(x_n + d_{21}h, \beta_{211}Y_1^{[n]} + \beta_{212}Y_2^{[n]}\right) \\
 &\quad + h\alpha_{22}k\left(x_n + d_{22}h, \beta_{221}Y_1^{[n]} + \beta_{222}Y_2^{[n]}\right) + \tilde{F}_n(x_n + c_2h) \\
 y_{n+1} &= w_1Y_1^{[n]} + w_2Y_2^{[n]}
 \end{aligned} \tag{3.48}$$

où

$$\tilde{F}_n(x) = \sum_{\kappa=1}^n (v_1k(x, u(x_{\kappa-1} + \xi_1h)) + v_2k(x, u(x_{\kappa-1} + \xi_2h))) \tag{3.49}$$

et  $u$  est l'extension continue naturelle définie par

$$u(x_{\kappa-1} + \theta h) = w_1(\theta)Y_1^{[\kappa-1]} + w_2(\theta)Y_2^{[\kappa-1]} \tag{3.50}$$

$k = 1, 2, \dots, n$ ,  $\theta \in [0, 1]$ . Pour satisfaire les conditions du noyau,  $e_{ij} \leq d_{ij}$ , nous supposons que  $d_{ij} = e_{ij} + p_{ij}$ , où  $p_{ij} \geq 0$ ,  $i, j = 1, 2$ . Les conditions d'ordre sont

$$w_1 + w_2 = 1, \quad w_1c_1 + w_2c_2 = 1, \quad w_1c_1^2 + w_2c_2^2 = 1 \tag{3.51}$$

et les conditions d'ordre d'étape exprimées en termes de  $p_{ij}$  et  $e_{ij}$  prennent la forme

$$\alpha_{11} + \alpha_{12} = c_1, \quad \alpha_{11}p_{11} + \alpha_{12}p_{12} = \frac{c_1^2}{2}, \quad \alpha_{11}e_{11} + \alpha_{12}e_{12} = \frac{c_1^2}{2} \tag{3.52}$$

$$\alpha_{21} + \alpha_{22} = c_2, \quad \alpha_{21}p_{21} + \alpha_{22}p_{22} = \frac{c_2^2}{2}, \quad \alpha_{21}e_{21} + \alpha_{22}e_{22} = \frac{c_2^2}{2} \tag{3.53}$$

De plus, les conditions sur les poids  $v_i$  et les abscisses  $\xi_i$  de la règle de quadrature (3.49) sont

$$v_1 + v_2 = 1, \quad v_1\xi_1 + v_2\xi_2 = \frac{1}{2}, \quad v_1\xi_1^2 + v_2\xi_2^2 = \frac{1}{3} \tag{3.54}$$

et les conditions sur les poids continus  $w_i(\theta)$  d'extension continue naturelle (3.50) sont

$$w_1(\theta) + w_2(\theta) = 1, \quad w_1(\theta)c_1 + w_2(\theta)c_2 = \theta, \quad \theta \in [0, 1] \tag{3.55}$$

De plus, les coefficients  $\beta_{ijl}$  satisfont aux conditions

$$\sum_{l=1}^2 \beta_{ijl} = 1, \quad \sum_{l=1}^2 \beta_{ijl}c_l = e_{ij}, \quad i, j = 1, 2.$$

On peut exprimer  $\beta_{ijl}$  en fonction de  $e_{ij}$  en résolvant le système d'équations linéaires ci-dessus par rapport à  $\beta_{ijl}$ . Pour satisfaire les conditions d'ordre (3.51), nous choisissons  $w_1 = 0, w_2 = 1$  et  $c_2 = 1$ . Nous fixons également  $c_1 = 1/6$ . Ensuite, nous résolvons (3.53) par rapport à  $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{21}, \alpha_{22}, e_{11}$  et  $e_{21}$ , le système (3.54) par rapport à  $v_1, v_2$  et  $\xi_1$ , en supposant que  $\xi_2 = 1$ , et le système (3.55) par rapport à  $w_1(\theta)$  et  $w_2(\theta)$ . Cela conduit à une famille de méthodes à six paramètres (3.48) dépendant de  $p_{11}, p_{12}, p_{21}, p_{22}, e_{12}$  et  $e_{22}$

$$v_1 = \frac{3}{4}, \quad v_2 = \frac{1}{4}, \quad \xi_1 = \frac{1}{3}, \quad w_1(\theta) = \frac{6}{5}(1 - \theta), \quad w_2(\theta) = \frac{1}{5}(6\theta - 1).$$

On peut vérifier que la formule RK sous-jacente d'ordre 2 pour les ODE de cette famille de méthodes VRK est

$$\begin{array}{c|c} c & A \\ \hline & b^T \end{array} = \begin{array}{c|cc} \frac{1}{6} & \frac{11}{60} & \frac{-1}{60} \\ 1 & \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ \hline & \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{array}$$

Le polynôme Nørsett de cette méthode est  $E(y) = y^4/36$  et il s'ensuit que la famille ci-dessus de méthodes VRK est A-stable pour tous les choix des paramètres libres  $p_{ij}$  et  $e_{ij}$ ,  $i, j = 1, 2$ .

Nous décrivons ensuite la recherche de méthodes  $V_0$ -stables. Le polynôme équivalent à (3.36), noté par le même symbole  $\psi(\theta)$ , prend maintenant la forme

$$\psi(\theta) = p_2(x, y)\theta^2 + p_1(x, y)\theta + p_0(x, y)$$

où  $p_2(x, y)$ ,  $p_1(x, y)$  et  $p_0(x, y)$  dépendent également des paramètres libres de la méthode. Choisissons

$$e_{21} = \frac{8 + p_{11}}{12p_{11} - 1}, \quad e_{22} = \frac{3p_{21} - 1}{3(2p_{21} - 1)}$$

on obtient une famille de méthodes VRK  $V_0$ -stables dépendant de quatre paramètres  $p_{11}$ ,  $p_{12}$ ,  $p_{21}$  et  $p_{22}$ . Les coefficients des méthodes résultantes sont

$$\begin{aligned} c &= \left[\frac{1}{6} \quad 1\right]^T, \quad w = [0 \quad 1]^T, \quad v = \left[\frac{3}{4} \quad \frac{1}{4}\right]^T, \quad \xi = \left[\frac{1}{3} \quad 1\right]^T \\ \alpha &= \begin{bmatrix} \frac{1-12p_{12}}{72(p_{12}-p_{11})} & \frac{12p_{11}-1}{72(p_{12}-p_{11})} \\ \frac{1-2p_{22}}{2(p_{12}-p_{11})} & \frac{2p_{21}-1}{2(p_{12}-p_{11})} \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} \frac{8+p_{12}}{12p_{12}-1} & \frac{8+p_{11}}{12p_{11}-1} \\ \frac{1-3p_{22}}{3(1-2p_{22})} & \frac{1-3p_{21}}{3(1-2p_{21})} \end{bmatrix}, \\ D &= \begin{bmatrix} \frac{8-p_{11}+p_{12}+12p_{11}p_{12}}{12p_{12}-1} & \frac{8+p_{11}-p_{12}+12p_{11}p_{12}}{12p_{11}-1} \\ \frac{1+3p_{21}-3p_{22}-6p_{21}3p_{22}}{3(1-2p_{22})} & \frac{1-3p_{21}+3p_{22}-6p_{21}3p_{22}}{3(1-2p_{21})} \end{bmatrix}, \\ \beta_1 &= \begin{bmatrix} \beta_{111} & \beta_{121} \\ \beta_{211} & \beta_{221} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{6(9-11p_{12})}{5(1-12p_{12})} & \frac{6(9-11p_{11})}{5(1-12p_{11})} \\ \frac{2(2-3p_{22})}{5(1-2p_{22})} & \frac{2(2-3p_{21})}{5(1-2p_{21})} \end{bmatrix} \\ \beta_2 &= \begin{bmatrix} \beta_{112} & \beta_{122} \\ \beta_{212} & \beta_{222} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{49-6p_{12}}{5(12p_{12}-1)} & \frac{49-6p_{11}}{5(12p_{11}-1)} \\ \frac{4p_{22}-1}{5(2p_{22}-1)} & \frac{4p_{21}-1}{5(2p_{21}-1)} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

### Méthodes VRK naturelles avec $p = q = \mu = \nu = 3$

De même que dans la sous-section précédente, nous supposons que  $d_{ij} = e_{ij} + p_{ij}$ , où  $p_{ij} \geq 0$ ,  $i, j = 1, 2, 3$ . Les conditions d'ordre sont

$$\sum_{i=1}^3 w_i c_i^k = 1, \quad k = 0, 1, 2, 3. \quad (3.56)$$

et les conditions d'ordre d'étape correspondant à  $q = 1, q = 2$  et  $q = 3$  sont

$$\sum_{j=1}^3 \alpha_{ij} = c_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad (3.57)$$

$$\sum_{j=1}^3 \alpha_{ij} p_{ij} = \frac{c_i^2}{2}, \quad \sum_{j=1}^3 \alpha_{ij} e_{ij} = \frac{c_i^2}{2} \quad i = 1, 2, 3, \quad (3.58)$$

$$\sum_{j=1}^3 \alpha_{ij} p_{ij}^2 = \frac{c_i^3}{3}, \quad \sum_{j=1}^3 \alpha_{ij} e_{ij} p_{ij} = \frac{c_i^3}{6}, \quad \sum_{j=1}^3 \alpha_{ij} e_{ij}^2 = \frac{c_i^3}{3}, \quad \sum_{j=1}^3 \alpha_{ij} f_{ij} = \frac{c_i^3}{3} \quad (3.59)$$

$i = 1, 2, 3$ , où  $e_{ij} = \sum_{l=1}^3 \beta_{ijl} c_l$ ,  $f_{ij} = \sum_{l=1}^3 \beta_{ijl} c_l^2$ ,  $i, j = 1, 2, 3$ , conditions sur les poids  $v_i$  et abscisse  $\xi_i$  de la règle de quadrature (3.17) correspondant à  $m = 3$  sont  $\sum_{i=1}^3 v_i \xi_i = 1/(k+1)$ ,  $k = 0, 1, 2$ , et les poids continus de l'extension continue naturelle (3.12) correspondant à  $\nu = 3$  sont des polynômes de degré  $d$ ,  $1 = [p/2] \leq d \leq \min\{\nu - 1, p\} = 2$ . Nous supposons  $d = 2$  le système d'équations de  $w_j(\theta)$  est  $\sum_{j=1}^3 w_j(\theta) c_j = \theta^k$ ,  $k = 0, 1, 2$ , Pour satisfaire les conditions d'ordre (3.56), nous supposons toujours que  $w_1 = w_2 = 0, w_3 = 1$  et  $c_3 = 1$ . Nous pouvons également exprimer les coefficients  $\beta_{ijk}$  en fonction de  $e_{ij}$  et  $f_{ij}$  en résolvant le système d'équations linéaire

$$\sum_{l=1}^3 \beta_{ijl} = 1, \quad \sum_{l=1}^3 \beta_{ijl} c_l = e_{ij}, \quad \sum_{l=1}^3 \beta_{ijl} c_l^2 = f_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Nous calculons ensuite les coefficients  $\alpha_{ij}$  à partir des conditions d'ordre d'étape (3.57) et (3.58) correspondant à  $q = 1$  et  $q = 2$ , et  $e_{ij}$ ,  $f_{11}$ ,  $f_{21}$  et  $f_{31}$  à partir des conditions d'ordre d'étape (3.59) correspondant à  $q = 3$ . Cela conduit à une famille de dix-sept paramètres de méthodes VRK naturelles d'ordre  $p = 3$  et d'ordre d'étape  $q = 3$  en fonction de  $c_1, c_2, f_{12}, f_{13}, f_{22}, f_{23}, f_{32}, f_{33}$  et  $p_{ij}$ ,  $i, j = 1, 2, 3$ . On peut vérifier que le polynôme Nørsett  $E(y)$  pour cette famille de méthodes ne dépend que de  $c_1$  et  $c_2$  et prend la forme

$$E(y) = \frac{-1 + 2(c_1 + c_2) - 6c_1 c_2}{36} y^4 + \frac{c_1^2 c_2^2}{36} y^6$$

Par conséquent, il s'ensuit que les méthodes sont  $A$ -stables si  $1 - 2(c_1 + c_2) + 6c_1 c_2 \leq 0$ , et pour garantir la  $A$ -stabilité on calcule  $c_2$  à partir de  $1 - 2(c_1 + c_2) + 6c_1 c_2 = 0$ , c'est-à-dire,  $c_2 = (2c_1 - 1)/(2(3c_1 - 1))$ .

### Méthodes VRK naturelles avec $p = q = \mu = \nu = 4$

Nous supposons à nouveau que  $d_{ij} = e_{ij} + p_{ij}$  où  $p_{ij} \geq 0$ ,  $i, j = 1, 2, 3, 4$ . Les conditions d'ordre prennent la forme

$$\sum_{i=1}^4 w_i c_i^k = 1, \quad k = 0, 1, 2, 3, 4. \quad (3.60)$$

et les conditions d'ordre d'étape jusqu'à l'ordre d'étape  $q = 4$  exprimées en termes de  $p_{ij}$ ,  $e_{ij}$ ,  $f_{ij}$  et  $g_{ij}$  sont

$$\sum_{j=1}^4 \alpha_{ij} = c_i, \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (3.61)$$

$$\sum_{j=1}^4 \alpha_{ij} p_{ij} = \frac{c_i^2}{2}, \quad \sum_{j=1}^4 \alpha_{ij} e_{ij} = \frac{c_i^2}{2}, \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (3.62)$$

$$\sum_{j=1}^4 \alpha_{ij} p_{ij}^2 = \frac{c_i^3}{3}, \quad \sum_{j=1}^4 \alpha_{ij} e_{ij} p_{ij} = \frac{c_i^3}{6}, \quad \sum_{j=1}^4 \alpha_{ij} e_{ij}^2 = \frac{c_i^3}{3}, \quad \sum_{j=1}^4 \alpha_{ij} f_{ij} = \frac{c_i^3}{3}, \quad (3.63)$$

$$\sum_{j=1}^4 \alpha_{ij} p_{ij}^3 = \frac{c_i^4}{4}, \quad \sum_{j=1}^4 \alpha_{ij} e_{ij}^2 p_{ij} = \frac{c_i^4}{12}, \quad \sum_{j=1}^4 \alpha_{ij} e_{ij} p_{ij}^2 = \frac{c_i^4}{12} \quad (3.64)$$

$$\sum_{j=1}^4 \alpha_{ij} p_{ij} f_{ij} = \frac{c_i^4}{12}, \quad \sum_{j=1}^4 \alpha_{ij} e_{ij} f_{ij} = \frac{c_i^4}{4}, \quad \sum_{j=1}^4 \alpha_{ij} e_{ij}^3 = \frac{c_i^4}{4}, \quad \sum_{j=1}^4 \alpha_{ij} g_{ij} = \frac{c_i^4}{4} \quad (3.65)$$

$i = 1, 2, 3, 4$ , où

$$e_{ij} = \sum_{l=1}^4 \beta_{ij} c_l, \quad f_{ij} = \sum_{l=1}^4 \beta_{ij} c_l^2, \quad g_{ij} = \sum_{l=1}^4 \beta_{ij} c_l^3, \quad i, j = 1, 2, 3, 4$$

Les conditions sur les coefficients  $v_i$  et abscisse  $\xi_i$  de la règle de quadrature (3.17) correspondant à  $m = 4$  sont  $\sum_{i=1}^4 v_i \xi_i^k = 1/(k+1)$ ,  $k = 0, 1, 2, 3$  et les poids continus de l'extension continue naturelle (3.12) correspondant à  $\nu = 4$  sont des polynômes de degré  $d$ ,  $2 = \lfloor p/2 \rfloor \leq d \leq \min\{\nu - 1, p\} = 3$ . Nous supposons  $d = 3$ . Le système d'équations pour  $w_j(\theta)$  est  $\sum_{j=1}^4 w_j(\theta) c_i^k = \theta^k$ ,  $k = 0, 1, 2, 3$ . Pour satisfaire les conditions d'ordre (3.60) on suppose toujours que les coefficients  $w_i$  sont donnés par  $w_1 = w_2 = w_3 = 0, w_4 = 1$ , et que  $c_4 = 1$ . On peut aussi exprimer les coefficients  $\beta_{ijk}$  en termes de  $e_{ij}, f_{ij}$  et  $g_{ij}$  en résolvant le système d'équations linéaires

$$\sum_{l=1}^4 \beta_{ij} = 1, \quad \sum_{l=1}^4 \beta_{ij} c_l = e_{ij}, \quad \sum_{l=1}^4 \beta_{ij} c_l^2 = f_{ij}, \quad \sum_{l=1}^4 \beta_{ij} c_l^3 = g_{ij}$$

$i, j = 1, 2, 3, 4$ . Nous calculons ensuite les coefficients  $\alpha_{ij}$  à partir des premières équations des conditions d'ordre d'étape correspondant à  $q = 1, q = 2, q = 3$  et  $q = 4$ , c'est-à-dire à partir du système d'équations linéaires

$$\sum_{j=1}^4 \alpha_{ij} p_{ij}^k = \frac{c_i^{k+1}}{k+1}, \quad i = 1, 2, 3, 4, \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

On calcule aussi  $f_{ij}$ ,  $i = 1, 2, 3, 4, j = 1, 2$ , à partir des quatrièmes équations des conditions d'ordre des étapes correspondant à  $q = 3$  et  $q = 4$ , et  $g_{i,1}$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , à partir de la dernière condition d'étape correspondant à  $q = 4$ . Puis on essaie de calculer les paramètres  $e_{ij}$ ,  $i, j = 1, 2, 3, 4$ , à partir des conditions d'ordre d'étape restantes, qui est le système d'équations non linéaires de dimension 24.

### 3.2.5 Expériences numériques :

Nous avons implémenté les méthodes rapportées dans un code à pas fixe et effectué des tests numériques sur deux équations linéaires. Nous rapportons ici les résultats obtenus sur les problèmes de tests linéaires suivants :

$$\varphi(t) + \int_0^t (t-s)\varphi(s)ds = 1, \quad 0 \leq t \leq 1 \dots \dots \dots (1).$$

Tableau de résolution numérique de l'équation (1) par la méthode de Simpson( solution exacte  $\varphi(t) = \cos t$  )

$t$	$h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.025$
0.0	0	0	0
0.2	6.58725E -05	1.65337E -05	4.13757E -06
0.4	2.58246E -04	6.48173E -05	1.62204E -05
0.6	5.61704E -04	1.40976E -04	3.52786E -05
0.8	9.51576E -04	2.38811E -04	5.97604E -05
1.0	1.39542E -03	3.50172E -04	8.76256E -05

Tableau de résolution numérique de l'équation (1) par la méthode de Runge-Kutta( solution exacte  $\varphi(t) = \cos t$  )

$t$	$h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.025$
0	0.00	0.00	0.00
0.2	1.38864E-09	1.64238E-09	1.16021E-10
0.4	1.03789E-07	7.30635E-09	4.81958E-10
0.6	2.46967E-07	1.65550E-08	1.06899E-09
0.8	4.37872E-07	2.86539E-08	1.82990E-09
1	6.61248E-07	2.86539E-08	2.70191E-09

d'après les deux tableaux en remarque l'efficacité de méthode de Runge-Kutta

$$\varphi(x) - \int_0^x e^{-(x-t)}\varphi(t)dt = 1, \quad 0 \leq x \leq 1 \dots\dots\dots(2)$$

Tableau de résolution numérique de l'équation (2) par la méthode de Simpson( solution exacte  $\varphi(t) = t + 1$  )

$t$	$h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.025$
0.0	0	0	0
0.2	5.66099E -07	3.54109E -08	2.21257E -09
0.4	1.15495E -06	7.22079E -08	4.51245E -09
0.6	1.76488E -06	1.10389E -07	6.90124E -09
0.8	2.39757E -06	1.49965E -07	9.37416E -09
1.0	3.05245E -06	1.90928E -07	1.19362E -08

Tableau de résolution numérique de l'équation (2) par la méthode de Runge-Kutta ( solution exacte  $\varphi(t) = t + 1$  )

$t$	$h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.025$
0	0.00	0.00	0.00
0.2	2.22044E-16	2.22044E-16	6.66133E-16
0.4	4.44089E-16	4.44089E-16	1.33226E-15
0.6	4.44089E-16	4.44089E-16	2.22044E-15
0.8	6.66133E-16	6.66133E-16	2.22044E-15
1	8.88178E-16	8.88178E-16	3.55271E-15

d'après les deux tableaux en remarque l'efficacité de méthode de Runge-Kutta.

Nous avons traité dans ce travail la théorie relative à deux méthodes de résolution numérique de problèmes en mathématiques appliquées. Nous avons adapté, dans ce travail, ces deux méthodes à la résolution d'équations intégrales de Volterra à convolution linéaire. Pour valider cette adaptation, nous avons testé deux équations intégrales. Ce test a été sur les deux équation intégrale avec Simpson et Runge-Kutta et nous avons constaté que la deuxième méthode (R-K) est plus efficace. On s'attend à que cette méthode soit aussi efficace pour les équations intégrales non linéaires.

# Conclusion générale

*Nous avons traité dans ce travail la théorie relative à deux méthodes de résolution numérique de problèmes en mathématiques appliquées. Nous avons adapté, dans ce travail, ces deux méthodes à la résolution d'équations intégrales de Volterra à convolution linéaire. Pour valider cette adaptation, nous avons testé deux équations intégrales. Ce test a été réalisé sur les deux équation intégrale avec Simpson et Runge-Kutta et nous avons constaté que la deuxième méthode ( R-K) est plus efficace. On s'attend à que cette méthode soit aussi efficace pour les équations intégrales non linéaires.*

# Bibliographie

- [1] R. Azeddin, *Sur la Résolution Numérique des Équations Intégrales en utilisant des Fonctions Spéciales*, THÈSE Docteur en Sciences, Université de Batna, 30/05/2011
- [2] M. A. Aziz Alaoui, C. Bertelle, *Methodes Numériques Application*, France, (2002).
- [3] A. Bellen, Z. Jackiewicz, R. Vermiglio, and M. Zennaro, *Natural continuous extensions of Runge-Kutta methods for Volterra integral equations of the second kind and their applications*, *Math. Comput.* 52(1989), 49,63.
- [4] A. Bellen, Z. Jackiewicz, R. Vermiglio, and M.Zennaro, *Stability analysis of Runge- Kutta methods for Volterra integral equations of the second kind*, *IMA J. Numer. Anal.*10(1990), 103,118.
- [5] H. Brunner, E. Hairer and S. P. Norsett, "Runge-Kutta theory for Volterra integral equations of the second kind," *Math. Comp.*, v. 39, 1982, pp.147-163.
- [6] H. Brunner and P.J. van der Houwen, *The Numerical Solution of Volterra Equations*, CWI Monographs 3, North-Holland, Amsterdam 1986.
- [7] D. Conte. R. D'Ambrosio. G. Izzo. Z. Jackiewicz, *Natural Volterra Runge-Kutta methods*, v65 n :3. *Numerical Algorithms* March 2014 pp 421–445.
- [8] C. Corduneanu, *Integral Equations and Applications*. University Press, Cambridge 1991.
- [9] L. Debnath and P. Mikusninski, *Introduction to Hilbert spaces with application*, Academic press, New York, 1990.
- [10] C. E. Froberg, *Introduction to Numerical Analysis*, Addison-Wesley, Reading 1965
- [11] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle*. Dunod, 1983.
- [12] R. P. Kanwal, *Linear Integral Equations theory and applications*. Academic Press 1971.
- [13] J. Pierre, A. Roux, *Équations aux dérivées partielles cours et exercices corrigés*, Paris, 2015
- [14] R. Kress, *Linear integral equations*. Springer Verlag, 1999.

## Résumé

Dans ce travail , nous avons étudié par deux méthodes numériques la résolution des équations intégrales de Volterra.

Le but de ce travail est de montrer l'efficacité des deux méthodes présentées et leurs avantages.

Ensuite, nous avons fait une comparaison entre les résultats de ces deux méthodes et la solution exacte de l'équation.

Les résultats de la méthode Rung Kutta sont plus proches de la solution exacte que la méthode Simpson.

### Mots clés :

Équations intégrales de Volterra, méthode Runge-Kutta, méthode Simpson.

## Abstract

In this work, we studied by two numerical methods the resolution of the integral equations of Volterra.

The purpose of this work is to show the effectiveness of the two methods presented and their advantages.

Then, we made a comparison between the results of these two methods, and the exact solution of the equation.

The results of the Rung Kutta method are closer to the exact solution than the Simpsons method.

### key words:

Volterra integral equations, Runge-Kutta method, method Simpson.

## ملخص

في هذا العمل ، درسنا بطريقتين عدديتين حل المعادلات التكاملية لـ فولتيرا. الغرض من هذا العمل هو إظهار فعالية الطريقتين المقدمتين و الخاصة بهما مزايا. ثم قمنا بإجراء مقارنة بين نتائج هاتين الطريقتين، والحل الدقيق للمعادلة. نتائج طريقة رونج كوتا أقرب إلى الحل الدقيق من طريقة سمبسون.

### الكلمات المفتاحية:

معادلات فولتيرا المتكاملة ، طريقة رونج - كوتا سمبسون.