

Université Echahid Hamma Lakhdar EL-OUED

Faculté de Sciences Exactes

Département de Mathématiques



N° d'ordre :

N° de série :

THÈSE EN VUE DE L'OBTENTION DU DIPLÔME DE DOCTORAT DE
SCIENCES EN MATHÉMATIQUES

Spécialité : MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

Titre de la thèse :

THÉORIE DU POINT FIXE MULTIVOQUE ET APPLICATIONS AUX
INCLUSIONS DIFFÉRENTIELLES

Présenté Par : AHMED ALI

Soutenu le : MARDI 14 DÉCEMBRE 2021

Devant le jury composé de :

LAMINE NISSE	Professeur	Univ. El-Oued	Président
SAID BELOUL	M.C.A	Univ. El-Oued	Encadreur
YAHIA DJEBRANE	Professeur	Univ. Biskra	Examineur
TIDJANI MENACER	Professeur	Univ. Biskra	Examineur
ABDELKADER AMARA	M.C.A	Univ. Ouargla	Examineur
LAMINE GUEDDA	M.C.A	Univ. El-Oued	Examineur

Année universitaire : 2021/2022

Table des matières

Dédicace	i
Remerciements	ii
Résumé en Arabe	iii
Abstract	iv
Résumé	v
Notations	vi
Introduction	viii
1 Notions et Préliminaires	1
1.1 Principe de contractions de Banach	1
1.2 La distance de Pompeiu-Hausdorff	2
1.3 Quelques éléments d'Analyse multivoque	6
1.3.1 Applications multivoques	6
1.3.2 Quelques propriétés des applications multivoques	7
1.3.3 Continuité des applications multivoques	9
1.4 Fonctions de contrôle	11
1.4.1 Fonctions de comparaison et de c -comparaison	12
1.4.2 Applications α -continues	13

TABLE DES MATIÈRES

1.4.3	Applications α -admissibles	14
2	Contractions multivoques	17
2.1	Contraction de Nadler et ses généralisations	17
2.2	Contraction de Berinde et ses généralisations	19
2.3	Contraction multivoque de Wardowski	23
2.4	Contraction multivoque de type theta	29
3	Théorème du point fixe multivoque pour des $(\alpha_*, \eta_*, \theta)$-contractions multivoques de type Geraghty	35
3.1	Introduction	35
3.2	Fonctions de Geraghty	37
3.3	Théorème du point fixe pour des $(\alpha_*, \eta_*, \theta)$ -contractions multivoques de type Geraghty	38
3.4	Théorème du point fixe dans un espace métrique partiellement ordonné . . .	45
3.5	Théorème du point fixe dans un espace métrique muni d'un graphe	46
4	Théorème du point fixe commun pour des θ_δ-contractions multivoques via la continuité sous-séquentielle	48
4.1	Introduction	48
4.2	Les applications compatibles, réciproquement continues	48
4.3	Théorème du point fixe commun sous des conditions contractives multivoques généralisées	52
5	Applications	58
5.1	Introduction	58
5.2	Existence de solution pour une inclusion intégrale de Volterra	59
5.3	Existence de la solution pour une inclusion différentielle fractionnaire	61
	Conclusion générale et perspectives	66
	Bibliographie	67

Dédicace

À la mémoire de ma mère

À mon père

À ma femme et mes filles Safae et Illef

À mes sœurs et mes frères

À toute ma famille et tous mes amis.

Remerciements

Tout d'abord, je tiens à remercier Monsieur le docteur SAID BELOUL qui a supervisé cette thèse. Ses conseils multiformes et la richesse de ses connaissances m'ont permis de mener à bien ce travail. Je le remercie pour son aide précieuse, et pour le temps qu'il m'a consacré. Je le remercie aussi de m'avoir proposé un sujet de recherche passionnant.

Je suis flattée de l'honneur que Monsieur le Professeur LAMINE NISSE me fait en acceptant de présider le Jury de cette thèse. Je lui exprime ma profonde reconnaissance.

Mes sincères remerciements vont à Messieurs les Professeurs YAHIA DJEBRANE et TIDJANI MENACER ainsi qu'à Messieurs les Docteurs ABDELKADER AMARA et LAMINE GUEDDA qui ont bien accepté, avec beaucoup de sympathie, de faire partie du Jury.

J'adresse un grand merci à toute ma famille qui a toujours été présente lorsque j'en ai eu besoin.

Enfin, je remercie toutes les personnes qui ont participé de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

ملخص

في هذه الأطروحة قننا بإنشاء نظرية النقطة الثابتة المشتركة لزوجين هجينين من التطبيقات أحادية القيم و متعددة القيم وذلك باستعمال الاستمرارية بالتتابع الجزئي والتوافق- δ ، كما أثبتنا وجود نقطة ثابتة لتطبيق متعدد القيم، من خلال الجمع بين بعض الأنواع الجديدة من التقلصات، مثل تقلصات جيراي (Geraghty)، مع تقلصات θ ومفاهيم η, α -مقبولية. يتم إعطاء نتائج معينة في مسافات مترية مرتبة جزئيا أو مزودة ببيان.

في الختام، قننا بتطبيق النتائج التي تم الحصول عليها لدراسة مشكلة وجود حل لمسألة احتواءات تفاضلية كسرية ولنظام احتواء تكاملي من نوع فولتيرا (Volterra).

الكلمات المفتاحية :

فضاءات مترية، نظرية النقطة الثابتة، تطبيقات متعددة القيم، تقلصات θ, α, η -مقبولية، توافق- δ ، الاستمرار بالتتابع الجزئي، احتواءات تفاضلية كسرية، احتواءات تكاملية.

Abstract

In this thesis we established a common fixed point theorem for two hybrid pairs of single valued and multivalued mappings via subsequential continuity and δ -compatibility, and we also prove the existence of a multivalued fixed point, by combining some new types of contractions, like the Geraghty type contractions with θ -contraction and the notions of α, η -admissible, certain consequences are given in metric spaces endowed with partial order or with graph.

Finally, we apply the results obtained to study the problem of the existence of the solution of fractional differential inclusions, and of a system of integral inclusions of the Volterra type.

Keywords :

Metrics spaces, theory of fixed point, multivalued mappings, θ -contraction, α, η -admissible, δ -compatible, subsequentially continuous, fractional differential inclusions, integral inclusions.

Résumé

Dans cette thèse nous établissons un théorème de point fixe commun pour deux couples hybrides d'applications univoque et multivoque via la continuité sous-séquentielle et la δ -compatibilité, et nous prouvons aussi l'existence d'un point fixe multivoque, en combinant certains nouveaux types de contractions, comme les contractions de type Geraghty avec θ -contraction et les notions de α, η -admissible, certaines conséquences sont données dans les espaces métriques partiellement ordonnés ou muni d'un graphe.

Enfin, nous appliquons les résultats obtenus pour étudier le problème d'existence de la solution des inclusions différentielles fractionnaires et d'un système d'inclusions intégrales de type Volterra.

Mots clés :

Espaces métriques, théorie du point fixe, applications multivoques, θ -contraction, α, η -admissible, δ -compatible, continuité sous-séquentielle, inclusions différentielles fractionnaires, inclusions intégrales.

Notations

Les notations, symboles et abréviations les plus fréquemment utilisés sont répertoriés ci-dessous.

$\mathbb{N}$	: L'ensemble des entiers naturels.
$\mathbb{R}$	: L'ensemble des nombres réels.
$\mathbb{R}_+$	: L'ensemble des nombres réels positifs.
X, Y	: Sont des espaces métriques si aucune autre indication n'est donnée.
$d(a, B)$	: $:= \inf\{d(a, y), y \in B\}$ est la distance entre a et l'ensemble B .
$e(A, B)$	: l'excès d'un ensemble A sur un ensemble B .
$\delta(A, B)$	: $:= \sup\{d(a, b); a \in A, b \in B\}$.
$diam(A)$	: $:= \delta(A, A) = \sup\{d(a, b); a, b \in A\}$.
$D(A, B)$	: $:= \inf\{d(a, b); a \in A, b \in B\}$.
$H(A, B)$	: $:= \max \left\{ \sup_{a \in A} d(a, B), \sup_{b \in B} d(b, A) \right\}$. (La distance de Hausdorff entre A et B).
$\mathcal{P}(X)$	: Famille des sous-ensembles non vides de X .
$CL(X)$	: Famille des sous-ensembles fermés non vides de X .
$CB(X)$	: Famille des sous-ensembles fermés bornés non vides de X .
$K(X)$	: Famille des sous-ensembles compacts non vides de X .
$T: X \rightarrow Y$	: T est une application univoque de X dans Y .
$T: X \rightarrow \mathcal{P}(Y)$	: T est une application multivoque de X dans $\mathcal{P}(Y)$.
$Dom(T)$	: $:= \{x \in X : Tx \neq \emptyset\}$ désigne le domaine de T .
$Graph(T)$	: $:= \{(x, y) \in X \times Y : y \in Tx\}$ désigne le graphe de T .
$Im(T)$	: $:= \{y \in Y, \exists x \in X : y \in Tx\}$ désigne l'image de T .

$V(G)$	:	L'ensemble de sommets d'un graphe G .
$E(G)$	:	L'ensemble d'arêtes (d'arcs) d'un graphe G .
${}^cD^\alpha$	:	La dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'ordre α .
s.c.s	:	Semi-continue supérieurement.
s.c.i	:	Semi-continue inférieurement.
$\preceq$	:	Relation d'ordre partielle.
$\ x\ _\infty$	:	$:= \sup\{ x(t) , t \in I = [0, 1]\}$.

Introduction

La théorie des applications multivoques joue un rôle important dans diverses branches des mathématiques pures et appliquées parce qu'il a de plusieurs applications, par exemple, dans les domaines d'analyse réels et complexes ainsi que dans les problèmes de contrôle optimal. Au fil des ans, cette théorie a augmenté sa signification et donc dans la littérature il y a beaucoup de documents se concentrant sur la discussion des problèmes abstraits et pratiques impliquant des applications multivoques. En fait, parmi les différentes méthodes utilisées pour développer cette théorie, l'une des plus intéressants est basée sur des méthodes de théorie des points fixes, souvent vu le caractère constructif des théorèmes de point fixe, en particulier dans sa branche métrique.

In 1969, Nadler [68] a été le premier auteur à combiner la notion de contraction avec une application multivoque en établissant le théorème du point fixe en utilisant la distance de Pompeiu-Hausdorff qui est définie sur $CB(X)$. Par suite, plusieurs résultats ont été donnés de cette manière par exemple, voir [30, 42, 56, 84, 81]. Plus tard, plusieurs auteurs ont discuté de ce résultat et ont donné leurs généralisations, extensions et applications, en particulier par Reich [73], Berinde-Berinde [25], Mizoguchi et Takahashi [66] et bien d'autres.

Geraghty [37] a changé la constante de la contraction de Banach par une fonction qui prend ses valeurs dans l'intervalle $[0, 1[$.

Wardowski [87] a généralisé le principe de contraction de Banach d'une manière différente d'autres résultats bien connus de la littérature. Ce résultat de Wardowski a été étendu dans de plusieurs directions des applications univoques et multivoques.

En 2012, Samet et al. [77] ont introduit une nouvelle notion appelée α -admissibilité, ils ont obtenu des résultats pour les applications $\alpha - \psi$ -contractives. Plus tard, plusieurs auteurs

ont étudié de tels concepts pour établir des résultats, par exemple voir [9, 42, 67].

Récemment, un nouveau type de contractions est proposé par Jleli et al. [49], appelé θ -contraction pour montrer l'existence de points fixes en utilisant un tel concept. Il convient de mentionner ici, qu'une contraction au sens de Banach est θ -contraction, tandis que l'inverse probablement n'est pas vrai. Après cela, plusieurs auteurs ont étudié différentes variantes de la θ -contraction pour les applications univoques et multivoques, par exemple, voir [4, 22, 44, 85].

D'autre part, un théorème de point fixe commun implique généralement des conditions de commutativité, de continuité et de condition de contraction des applications données, avec la complétude ou la fermeture de l'espace principale ou des sous-espaces, selon des conditions de confinement approprié parmi les domaines des applications concernés. Sessa [79] a affaibli la notion de commutativité en commutativité faible, plus tard Jungck [51] a introduit le concept de compatibilité entre deux applications d'un espace métrique dans lui-même, qui a été étendu aux couples hybrides par Kaneko et Sessa [56].

Ensuite, Jungck et al. [53] ont fourni une extension à la notion de compatibilité, appelée compatibilité faible dans le cadre de applications univoques et multivoques. Récemment, Bouhadjera et Godet Tobie [27] ont introduit la continuité sous-séquentielle qui est plus faible que la continuité réciproque introduite par Pant [71]. En fait, chaque couple non vide d'applications réciproquement continues est naturellement sous-séquentiellement continue. Cependant, les applications sous-séquentiellement continue ne sont ni séquentiellement continus ni réciproquement continus. Tout récemment, Beloul et al. [20] ont étendu la notion de continuité sous-séquentielle au contexte des applications multivoques dans un espace ordonnés pour établir un point fixe commun en utilisant la distance de Pompeiu-Hausdorff, alors qu'il existe une fonction appelée δ -distance qui défini par Fisher [35], bien que la δ -distance ne soit pas une distance comme la distance de Pompeiu-Hausdorff, Mais elle partage la plupart des propriétés de la distance, certains résultats sur δ -distance peuvent être trouvés dans [2, 19, 21].

Le théorème de point fixe commun nécessite d'une relation de commutativité, continuité et complétude d'espace liés par une condition sur l'inclusion de rangs entre les applications étudiées sous une condition de contractivité appropriée. Ainsi, la recherche dans ce domaine vise à affaiblir une ou plusieurs de ces conditions.

Dans cette thèse nous établissons un théorème de point fixe commun pour deux couples hybrides d'applications univoque et multivoque via la continuité sous-séquentielle et la compatibilité. Nous prouvons aussi l'existence d'un point fixe multivoque, en combinant certains nouveaux types de contractions, comme les contractions de type Geraghty avec θ -contraction et les notions de α, η -admissible.

Certaines conséquences sont données dans des espaces métriques partiellement ordonnés ou muni d'un graphe.

Enfin, nous appliquons les résultats obtenus pour étudier le problème d'existence de la solution des inclusions différentielles fractionnaires et d'un système d'inclusions intégrales de type Volterra.

Cette thèse se compose d'une introduction et cinq chapitres

Chapitre I : Le premier chapitre a été consacré à quelques définitions et des éléments basiques qui sont indispensables pour le reste de notre travail. Plus particulièrement, nous présentons dans ce chapitre :

- Quelques définitions sur les contractions univoques,
- La distance de Pompeiu-Hausdorff,
- Quelques définitions d'Analyse multivoque,
- Les fonctions de contrôle.

Chapitre II : Dans le deuxième chapitre, nous présentons quelques classes d'applications multivoques contractantes, et leurs généralisations dans des espaces métriques.

Chapitre III : Dans le troisième chapitre, nous détaillons notre résultat dans [6]. Nous utiliserons une θ -contraction introduite par Jleli et Samet [49] et δ -distance pour établir une coïncidence stricte et un point fixe commun strict d'un couple de applications δ -compatible et par sous-séquentiellement hybride, sans continuité, continuité réciproque, continuité réciproque faible, complétude et l'inclusion de rangs.

Chapitre IV : Dans le quatrième chapitre, nous détaillons notre résultat obtenu dans [5]. Nous combinons le concept de (α, η) -admissibilité avec la θ -contraction et le type de contraction de Geraghty dans le contexte des applications multivoques, quelques résultats d'existence d'un point fixe dans des espaces métriques complets ont été fournis. Nous présentons quelques résultats dans des espaces métriques avec une relation d'ordre partiel et dans des espaces métriques muni d'un graphe en utilisant les résultats principaux obtenus.

Chapitre V : Dans le dernier chapitre nous appliquons les résultats obtenus pour affirmer l'existence de solution pour un système d'inclusions intégrales de type Volterra, et des problèmes aux limites d'inclusion différentielle d'ordre fractionnaire avec des conditions d'intégrales.

Notions et Préliminaires

Dans ce chapitre, on présente les notations et définitions et quelques propriétés préliminaires qui sont utilisées dans ce travail. Les principales références sur lesquelles nous nous sommes basés sont [8], [13], [39], [40], [68], [86].

1.1 Principe de contractions de Banach

Le principe de contraction de Banach, également connu sous le nom de principe de Banach, est un outil important dans la théorie des espaces métriques. Il garantit l'existence et l'unicité des points fixes de certaines auto-applications d'espaces métriques et fournit une méthode constructive pour trouver ces points fixes. Le principe est apparu pour la première fois sous une forme explicite dans la thèse de doctorat de Banach [14], où il a été utilisé pour établir l'existence d'une solution à une équation intégrale.

Pour présenter le principe de contraction de Banach, nous devons introduire le concept de l'applications Lipschitzienne.

Définition 1.1. Soit (X, d) un espace métrique. L'application $T : X \rightarrow X$ est dite Lipschitzienne s'il existe un nombre réel $k \geq 0$ tel que pour tout $x, y \in X$ on a

$$d(Tx, Ty) \leq kd(x, y) \tag{1.1}$$

- Si $k = 1$, T est appelée non expansive.
- Si $k < 1$, T est dite contraction ou application contractante.
- Si $d(T(x), T(y)) < d(x, y)$ pour tout $x \neq y$, T est dite contractive.

Le nombre k est appelé constante de Lipschitz.

On remarque qu'une application contractante peut admettre au plus un point fixe. Nous remarquons aussi que

$$\text{Contraction} \Rightarrow \text{Contractive} \Rightarrow \text{Non expansive} \Rightarrow \text{Lipschitzienne}$$

Mais les implications inverses ne sont pas vraies en général. De plus, toutes ces applications sont continues.

Définition 1.2. Soit (X, d) un espace métrique. On dit que T admet un point fixe x s'il existe $x \in X$ tel que $Tx = x$.

Le principe de contraction de Banach peut être énoncé comme suit.

Théorème 1.1 (Principe de contraction de Banach). [14] Soient (X, d) un espace métrique complet et $T : X \rightarrow X$ une contraction. Alors

- (i) T admet un point fixe unique $x^* \in X$,
- (ii) Pour tout $x \in X$, la suite de Picard $\{T^n x\}$ converge vers x^* ,
- (iii) On a l'estimation suivante : Pour tout $x \in X$,

$$d(T^n x, x^*) \leq \frac{k^n}{1 - k} d(x, Tx), n \in \mathbb{N}.$$

1.2 La distance de Pompeiu-Hausdorff

Pour l'étude du point fixe des applications multivoques, nous avons besoin la notion de distance entre deux ensembles. Une de ces notions est la notion de la distance de Pompeiu-Hausdorff qui a été introduite par Pompeiu et Hausdorff et certaines de ses propriétés explorées il y a environ de 100 ans.

Soit (X, d) un espace métrique. nous rappelons que $\mathcal{P}(X)$ désigne la famille de tous les sous-ensembles non vides de X , $CL(X)$ la famille de tous les sous-ensembles fermés non vides de X , $CB(X)$ la famille de tous les sous-ensembles fermés bornés non vides de X et $K(X)$ la famille de tous les sous-ensembles compacts non vides de X .

Il est clair que, $K(X) \subset CB(X) \subset CL(X) \subset \mathcal{P}(X)$.

Définition 1.3. Soit (X, d) un espace métrique. La distance d'un point $x \in X$ à un sous-ensemble A de X est donnée par

$$d(x, A) = \inf\{d(x, y), y \in A\}$$

Définition 1.4. Soient (X, d) un espace métrique et $A, B \in CB(X)$. On appelle excès de A sur B , la quantité

$$e(A, B) = \sup\{d(a, B), a \in A\}.$$

Avec les conventions $e(\emptyset, B) = 0$ si $B \neq \emptyset$, et $e(A, \emptyset) = +\infty$ pour tout A .

Il est à noter qu'en général $e(A, B) \neq e(B, A)$ (e n'est pas symétrique). Cependant, e a les propriétés suivantes :

Proposition 1.2. [3] Soient (X, d) un espace métrique et $A, B, C \in CB(X)$. alors on a

1. $e(A, B) = 0 \Leftrightarrow A \subset B$.
2. $B \subset C \Rightarrow e(A, C) \leq e(A, B)$.
3. $e(A \cup B, C) = \max\{e(A, C), e(B, C)\}$.
4. $e(A, B) \leq e(A, C) + e(C, B)$.

En 1914, Felix Hausdorff, l'un des fondateurs de la topologie, définit de nouveaux axiomes de séparation appelés espace de Pompeiu-Hausdorff ou espace séparé.

Définition 1.5. [39] Soit (X, d) un espace métrique. Pour tout $A, B \in CB(X)$, $H(A, B)$ définit par :

$$\begin{aligned} H(A, B) &= \max\{e(A, B), e(B, A)\} \\ &= \max\left\{\sup_{a \in A} d(a, B), \sup_{b \in B} d(b, A)\right\} \end{aligned}$$

où $d(x, A) = \inf\{d(x, y), y \in A\}$, est une distance sur $CB(X)$ et s'appelle la distance de Pompeiu-Hausdorff induite par la distance d . La distance H dépend fortement du choix de la distance d définie sur X .

Définition 1.6. [68] Soit (X, d) un espace métrique. Pour tout $A, B \in CL(X)$ la fonction définie par :

$$H(A, B) = \begin{cases} \max\left\{\sup_{a \in A} d(a, B), \sup_{b \in B} d(b, A)\right\} & \text{si le maximum existe} \\ \infty & \text{sinon} \end{cases},$$

où $d(x, A) = \inf\{d(x, y), y \in A\}$, est appelée la distance de Pompeiu-Hausdorff généralisée induite par la distance d .

Remarque 1.2.1. Si $A = \{a\}$ et $B = \{b\}$, alors $H(A, B) = e(A, B) = d(a, b)$.

Exemple 1.2.1. Soient $X = \mathbb{R}$, $A = [0, 1]$, $B = [2, 4]$.

Alors $e(A, B) = \sup_{a \in A} d(a, B) = 2$, $e(B, A) = \sup_{b \in B} d(b, A) = 3$.

Ainsi, $H(A, B) = \max\{e(A, B), e(B, A)\} = 3$.

Directement à partir des définitions, nous pouvons vérifier les propriétés suivantes

Proposition 1.3. [3]

1. $H(A, A) = 0$, pour tout $A \in \mathcal{P}(X)$.
2. $H(A, B) = H(B, A)$, pour tout $A, B \in \mathcal{P}(X)$.
3. $H(A, B) \leq H(A, C) + H(C, B)$, pour tout $A, B, C \in \mathcal{P}(X)$.
4. $H(A, B) = 0 \iff \overline{A} = \overline{B}$.

Proposition 1.4. [3] Si (X, d) est un espace métrique, alors H est une métrique sur $CB(X)$.

Théorème 1.5. [40] Soit (X, d) un espace métrique complet, alors $(CB(X), H)$ est aussi.

L'espace $(CB(X), H)$ est appelé l'espace de Hausdorff généralisé.

Proposition 1.6. [40] Si (X, d) est un espace métrique complet, alors $K(X)$ est un ensemble fermé dans l'espace métrique $(CB(X), H)$.

Lemme 1.7. Soient (X, d) un espace métrique et $B \in K(X)$. Alors pour tout $x \in X$, il existe $a \in B$ tel que

$$d(x, a) = d(x, B).$$

En utilisant les propriétés des ensembles fermés, on déduit le lemme suivant.

Lemme 1.8. [32] Soit (X, d) un espace métrique. Pour tout $B \in CL(X)$ et $x \in X$, on a

$$d(x, B) = 0 \iff x \in B.$$

Démonstration. Par définition de $d(a, B)$, pour tout $n_0 \in \mathbb{N}$, il existe une suite $\{b_n\} \in B$ tel que $d(a, b_{n_0}) < \frac{1}{n_0}$. Maintenant, on a une suite b_n dans B telle que $d(a, b_n) < \frac{1}{n}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. En suite, on montre que $\lim_{n \rightarrow \infty} d(a, b_n) = 0$. Soit $\varepsilon > 0$, par la propriété d'Archimède il existe $N \in \mathbb{N}$, tel que $\frac{1}{N} < \varepsilon$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \in \mathbb{N}$ on trouve $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{N}$. D'où $d(a, b_n) < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon$. Donc $\lim_{n \rightarrow \infty} d(a, b_n) = 0$. Comme B est fermé nous avons $a \in B$. $\square$

Définition 1.7. [40] Soit (X, d) un espace métrique, soit la suite $\{A_n\} \in CB(X)$. La suite $\{A_n\}$ est dite

(1) *convergente* s'il existe $A \in CB(X)$ tel que

$$H(A_n, A) \longrightarrow 0, \text{ lorsque } n \longrightarrow \infty,$$

(2) *de Cauchy* si pour tout $m, n > 0$,

$$H(A_m, A_n) \longrightarrow 0, \text{ lorsque } m, n \longrightarrow \infty.$$

Lemme 1.9. [68] Soient (X, d) un espace métrique, $A, B \in CB(X)$ et $a \in A$.

Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $b \in B$, tel que

$$d(a, b) \leq H(A, B) + \varepsilon.$$

Démonstration. Soient $\varepsilon > 0$ et $b \in B$. Supposons que pour tout $a \in A$ on a

$$d(a, b) > H(A, B) + \varepsilon.$$

Par définition de H et l'inégalité ci-dessus, nous avons

$$H(A, B) \geq d(a, b) > H(A, B) + \varepsilon,$$

ce qui est une contradiction. $\square$

Lemme 1.10. [25] Soient (X, d) un espace métrique et $A, B \subset X$ et $q > 1$.

Alors pour tout $a \in A$, il existe $b \in B$, tel que

$$d(a, b) \leq qH(A, B).$$

Démonstration. Soit $H(A, B) = 0$ alors $a \in B$ et l'inéquation au-dessus est valable pour $b = a$. Maintenant, supposons que $H(A, B) > 0$ et on choisit

$$\varepsilon = (q^{-1} - 1)H(A, B) > 0.$$

Ensuite, en utilisant la définition de $d(a, B)$ et $H(A, B)$ il s'ensuit que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $b \in B$ tel que

$$d(a, b) \leq D(a, B) + \varepsilon \leq H(A, B) + \varepsilon.$$

Finalement, en remplaçant ε dans la dernière inégalité, on obtient l'inégalité demandé. $\square$

1.3 Quelques éléments d'Analyse multivoque

Nous rassemblons dans cette section quelques propriétés des applications multivoques (appelées aussi multi-applications, fonctions multivaluées ou multifonctions) qui sont nécessaires pour l'étude de la théorie du point fixe des applications à l'analyse non linéaire (systèmes dynamiques, théorie du contrôle).

1.3.1 Applications multivoques

Dans cette partie on donne une définition de l'application multivoque et quelques exemples différents.

Définition 1.8. Soient X, Y deux ensembles non vides. une application multivoque T définit de X dans Y est une application qui à chaque $x \in X$ associe un sous ensemble non vide Tx de Y , qui appelée image ou la valeur de T en x . On le note par $T : X \rightarrow \mathcal{P}(Y)$ ou $T : X \rightarrow 2^Y$ où $\mathcal{P}(Y) = 2^Y$ désigne l'ensemble des sous-ensembles non vides de Y .

Remarque 1.3.1. L'application univoque est aussi une application multivoque puisque pour tout $x \in X$ le singleton $T(x) = \{y\}$ est un sous-ensemble de Y .

Exemple 1.3.1. Pour rendre la notion d'application multivoque plus simple, nous présenterons un certain nombre d'exemples.

1. Soit $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R})$ définit par

$$Tx = \begin{cases} \{1\} & \text{si } x < 0 \\ [0,1] & \text{si } x = 0 \\ \{0\} & \text{si } x > 0 \end{cases}.$$

Alors T est une application multivoque.

2. L'application $T : [0, 1] \rightarrow \mathcal{P}([0, 1])$ définie par

$$Tx = [x, 1], \text{ pour tout } x \in [0, 1],$$

est une application multivoque.

3. Soit $T : [0, 1] \rightarrow \mathcal{P}([0, 1])$ définie par :

$$Tx = \begin{cases} \{0, 1\} & \text{si } x \neq \frac{1}{2} \\ [0, 1] & \text{si } x = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Donc T est une applications multivoques.

4. L'application $T : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R})$ définie par

$$Tx = [0, e^x], \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}_+,$$

est une application multivoque.

5. Si $f : X \rightarrow Y$ une application univoque, alors l'inverse f^{-1} peut être considérée comme une application multivoque $T : Y \rightarrow \mathcal{P}(X)$ définie par

$$Tx = f^{-1}(y), \text{ pour tout } y \in Y,$$

telle que

$$f^{-1}(y) = \{x \in X : f(x) = y\}.$$

Cette application est univoque si f est injective.

1.3.2 Quelques propriétés des applications multivoques

Définition 1.9. Soient X et Y deux ensembles, $T : X \rightarrow \mathcal{P}(Y)$ est une application multivoque.

1. On appelle domaine de T l'ensemble

$$\text{Dom}(T) = \{x \in X : Tx \neq \emptyset\}.$$

Lorsque $\text{Dom}(T) = X$, on dit que l'application T est stricte.

Pour éviter l'application triviale $x \rightarrow \emptyset$, on dit qu'une application T est propre si $\text{Dom}(T) \neq \emptyset$.

2. On appelle image de T l'ensemble

$$Im(T) = \{y \in Y, \exists x \in X : y \in Tx\}.$$

3. Le graphe de T est le sous-ensemble de $X \times Y$ défini par

$$Graph(T) = \{(x, y) \in X \times Y : y \in Tx\}.$$

4. On appelle image d'une partie A de X par T l'ensemble

$$T(A) = \bigcup_{x \in A} Tx.$$

Définition 1.10. Soient X et Y deux ensembles, $T : X \rightarrow \mathcal{P}(Y)$ est une application multivoque.

1. L'inverse de l'application T est l'application $T^{-1} : Y \rightarrow \mathcal{P}(X)$ telle que

$$x \in T^{-1}y \iff y \in Tx \iff (x, y) \in Gr(T).$$

Ainsi $Dom(T^{-1}) = Im(T)$ et $Im(T^{-1}) = Dom(T)$.

2. On appelle image inverse supérieure d'une partie non vide B de Y par T l'ensemble

$$T^{-1}(B) = \{x \in X : Tx \cap B \neq \emptyset\}.$$

3. L'image inverse inférieure de B par T notée par $T^+(B)$ est définie par :

$$T^+(B) = \{x \in X : Tx \subset B\}.$$

Définition 1.11. [68] Soit X un ensemble non vide et soit $T : X \rightarrow \mathcal{P}(X)$. Alors un point $x \in X$ est un point fixe de T si $x \in Tx$.

On dit que T possède un point fixe x . On suppose

$$Fix(T) = \{x \in X : x \in Tx\}.$$

Exemple 1.3.2. Soit $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R})$ définie par $T(x) = [x, +\infty)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Alors tout nombre réel est un point fixe de T , donc $Fix(T) = \mathbb{R}$.

Exemple 1.3.3. Soit $X = [0, 2]$. On définit l'application $T : X \rightarrow \mathcal{P}(X)$ par

$$Tx = \begin{cases} \{0\} & \text{si } 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ [0, 1-x] & \text{si } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \\ [0, 4-2x] & \text{si } 1 < x \leq 2 \end{cases}.$$

On a

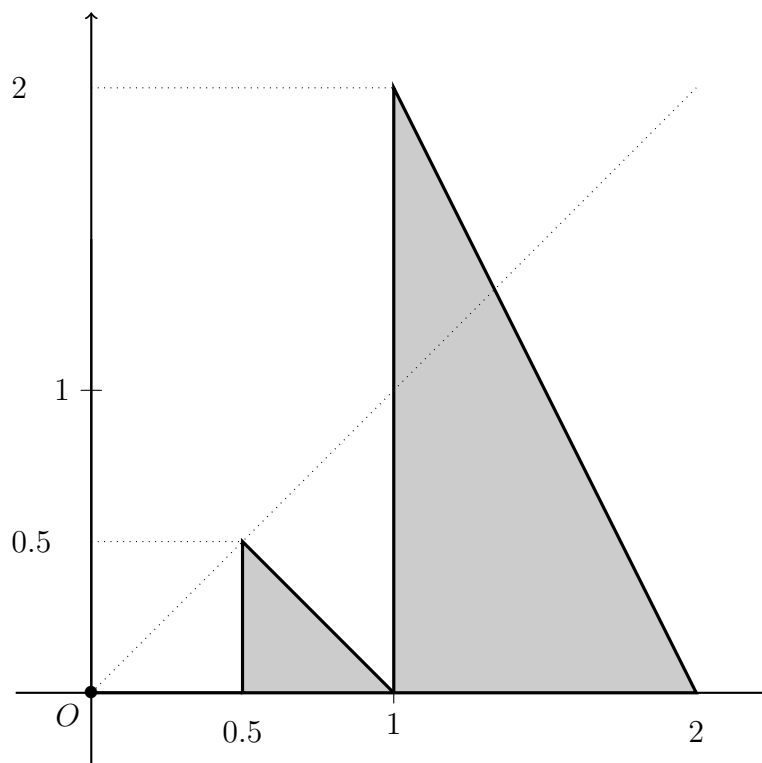
$$T(0) = \{0\} \quad , \quad T\left(\frac{1}{2}\right) = \left[0, \frac{1}{2}\right] \quad , \quad T\left(\frac{3}{2}\right) = [0, 1]$$

$$T\left(\left[1, \frac{4}{3}\right]\right) = [0, 2] \quad , \quad T\left(\left(0, \frac{1}{4}\right)\right) = \{0\} \quad , \quad T\left(\left[\frac{1}{2}, \frac{4}{3}\right]\right) = [0, 2]$$

On remarque que $T(0) = \{0\}$, $\left[1, \frac{4}{3}\right] \subset T\left(\left[1, \frac{4}{3}\right]\right) = [0, 2]$ et $\frac{1}{2} \in T\left(\frac{1}{2}\right) = \left[0, \frac{1}{2}\right]$.

Donc

$$Fix(T) = \{0\} \cup \left\{\frac{1}{2}\right\} \cup \left[1, \frac{4}{3}\right].$$



1.3.3 Continuité des applications multivoques

Dans ce paragraphe, nous traitons la notion de continuité au sens de Hausdorff. Particulièrement, la semi-continuité inférieure et supérieure. Notons que nous avons trouvé di-

verse notions de continuité des application multivoques dans la littérature, l'intéressé pourra consulter [13] pour les détails.

Définition 1.12. Soient X un espace topologique, M est un sous-ensemble non vide de X et $T: M \rightarrow X$ une application multivoque.

- (a) On dit que T est semi-continue supérieurement (s.c.s en abrégé) en un point $x_0 \in M$ si pour tout sous-ensemble ouvert $V \subset Y$ tel que $V \supseteq Tx_0$ il existe $U \in \mathcal{V}(x_0)$ tel que $\forall x \in U : Tx \subset V$.
- (b) T est dite s.c.s sur M si elle l'est en tout point de M .

Définition 1.13. Soient X un espace topologique, M est un sous-ensemble non vide de X et $T: M \rightarrow X$ une application multivoque.

- (a) On dit que T est semi-continue inférieurement (s.c.i en abrégé) en un point $x_0 \in M$ si pour tout sous-ensemble ouvert $V \in Y$ tel que $V \cap Tx_0 \neq \emptyset$ il existe $U \in \mathcal{V}(x_0)$ tel que $\forall x \in U : Tx \cap V \neq \emptyset$.
- (b) T est s.c.i sur M si elle l'est en tout point de M .

Lemme 1.11. Une application multivoque $T: X \rightarrow \mathcal{P}(Y)$ est dite semi-continue inférieurement (semi-continue supérieurement) si pour tout fermé (ouvert) $V \subset Y$, l'ensemble $T^{-1}(V)$ est fermé (ouvert) dans X .

Lorsque les espaces X, Y sont des espaces métriques, la semi-continuité supérieur et inférieur d'une application multivoque peut être caractérisée comme suit.

Définition 1.14. [33] Une application multivoque $T: X \rightarrow \mathcal{P}(Y)$ est dite

- (1) Semi-continue supérieurement en x_0 si

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} e(T(x_n), T(x_0)) = 0,$$

pour toute suite $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ convergente vers x_0 .

- (2) Semi-continue inférieurement en x_0 si

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} e(T(x_0), T(x_n)) = 0,$$

pour toute suite $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ convergente vers x_0 .

- (3) Continue en x_0 si elle est à la fois s.c.s et s.c.i en ce point.

Exemple 1.3.4. Soit l'application multivoque $T: [0, 1] \rightarrow \mathcal{P}([0, 1])$ définie par

$$Tx = \begin{cases} \frac{1}{2}x & \text{si } 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right] & \text{si } x = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}(x+1) & \text{si } \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}.$$

T est s.c.s sur $[0, 1]$, mais n'est pas s.c.i.

Exemple 1.3.5. Soit l'application multivoque $T: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R})$ définie par

$$Tx = \begin{cases} \{-1, 1\} & \text{si } x \neq 0 \\ [-1, 1] & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

T est s.c.i en tout $x_0 \neq 0$, et s.c.s sur $\mathbb{R}$.

Exemple 1.3.6. Soit l'application multivoque $T: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R})$ définie par

$$Tx = \begin{cases} [x, -x] & \text{si } x < 0 \\ [-x, x] & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

Alors T est à la fois s.c.s et s.c.i.

Maintenant on va définir la continuité au sens de Hausdorff :

Définition 1.15. Une application multivoque $T: X \rightarrow \mathcal{P}(Y)$ est dite continue en x_0 au sens de Hausdorff ou H -continue si elle est semi-continue inférieurement et supérieurement, ou par autre façon

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} H(T(x_n), T(x_0)) = 0,$$

pour toute suite $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ convergente vers x_0 .

1.4 Fonctions de contrôle

Le dévoilement du principe de contraction de Banach a suscité de nombreuses généralisations et améliorations dans plusieurs variantes de paramètres. Il est très remarquable

que, dans certains cas, les résultats déduits prennent en compte certaines conditions de contraction basées sur des fonctions auxiliaires, telles que des fonctions de comparaison, des fonctions de Geraghty, des fonctions de distance de modification, et bien d'autres. Ces types de fonctions auxiliaires sont appelés fonctions de commande dans leur ensemble.

1.4.1 Fonctions de comparaison et de c -comparaison

Au cours des dernières années, les avancées de la théorie des points fixes reposent souvent sur d'autres fonctions de contrôle fréquemment utilisées, appelées fonctions de comparaison. La notion de telles fonctions a été présentée pour la première fois par Berinde dans [23].

Définition 1.16. Une fonction $\varphi: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ est appelée une fonction de comparaison si elle satisfait les conditions suivantes :

- (1) φ est strictement croissante,
- (2) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi^n(t) = 0$, pour tout $t > 0$.

Exemple 1.4.1. Les exemples suivants illustrent la définition précédente.

- (i) $\varphi_1(t) = kt$ où $0 < k < 1$ et $t > 0$.
- (ii) $\varphi_2(t) = \frac{t}{1+t}$, tel que $t > 0$.

Définition 1.17. Une fonction $\psi: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ est appelée une fonction de (c) -comparaison si elle satisfait les conditions suivantes :

- (1) ψ est croissante,
- (2) $\sum_{n=1}^{\infty} \psi^n(t) < \infty$, pour tout $t > 0$.

Ces fonctions sont connues dans la littérature sous le nom de fonctions de jauge de Bianchini-Grandolfi dans certaines sources.

Remarque 1.4.1. toute fonction de comparaison est une fonction de (c) -comparaison mais l'inverse n'est toujours vrai comme le montre l'exemple suivant :

Exemple 1.4.2. Soit $\varphi: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ définie par $\varphi(t) = \frac{t}{t+1}$. Alors φ est une fonction de comparaison mais pas de (c) -comparaison car $\varphi^n(t) = \frac{t}{nt+1} \sim \frac{1}{n}$ pour $t \geq 0$.

On note Ψ la classe de fonctions $\varphi: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ satisfaisant les conditions (1), (2) dans la définition 1.17.

Lemme 1.12. *Pour tout $\psi \in \Psi$, les assertions suivantes sont vérifiées*

- (1) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \psi^n(t) = 0$, pour tout $t > 0$,
- (2) $\psi(t) < t$, pour tout $t > 0$,
- (3) $\psi(0) = 0$,
- (4) ψ est continue en 0.

1.4.2 Applications α -continues

Récemment, Kutbi et Sintunavarat [59] ont introduit le concept de la α -continuité pour les applications multivoques dans les espaces métriques comme suit.

Définition 1.18. [59] *Soit (X, d) un espace métrique, $\alpha: X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+$ et $T: X \rightarrow CL(X)$ sont deux applications donnés. L'application T est appelée une application multivoque α -continue si, pour toute suite $\{x_n\}$ avec $x_n \rightarrow x \in X$ quand $n \rightarrow \infty$ et $\alpha(x_n, x_{n+1}) \geq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $Tx_n \rightarrow Tx$ quand $n \rightarrow \infty$, i.e., pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$\left[\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) = 0 \text{ et } \alpha(x_n, x_{n+1}) \geq 1 \right] \implies \lim_{n \rightarrow \infty} H(Tx_n, Tx) = 0.$$

La continuité de T implique la α -continuité de T , pour toutes les applications α . En général, l'inverse n'est pas vrai (voir l'exemple suivant).

Exemple 1.4.3. [59] Soient $X = [0, \infty)$, $\lambda \in [10, 20]$ et d la distance usuelle associé à X .

On définit $T: X \rightarrow CL(X)$ et $\alpha: X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+$ par

$$Tx = \begin{cases} \{\lambda x^2\} & \text{si } x \in [0, 1] \\ \{x\} & \text{si } x > 1 \end{cases},$$

et

$$\alpha(x, y) = \begin{cases} \cosh(x^2 + y^2) & \text{si } x, y \in [0, 1] \\ \tanh(x + y) & \text{si non} \end{cases}.$$

Il est clair que T n'est continue sur $(CL(X), H)$. En effet, pour la suite $\{x_n\}$ définie par $x_n = 1 + \frac{1}{n}$ dans X , on a $x_n \rightarrow 1$, mais $Tx_n = \{1 + \frac{1}{n}\} \rightarrow \{1\} \neq \{\lambda\} = T(1)$. Ensuite, nous

montrons que T est une application multivoque α -continue sur $(CL(X), H)$. Soit $\{x_n\}$ une suite dans X telle que $x_n \rightarrow x \in X$ quand $n \rightarrow \infty$ et $\alpha(x_n, x_{n+1}) \geq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a alors $x, x_n \in [0, 1]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc, $Tx_n = \{\lambda x_n^2\} \rightarrow \{\lambda x^2\} = Tx$. Ceci montre que T est une application multivoque α -continue sur $(CL(X), H)$.

1.4.3 Applications α -admissibles

En 2012, Samet et al. [77] ont introduit le concept d'application α -admissible et ont établi divers théorèmes du point fixe pour de telles applications définies sur des espaces métriques complets.

Définition 1.19. Soient X un ensemble non vide, $T: X \rightarrow X$ et $\alpha: X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+$ deux applications. On dit que T est α -admissible si :

$$\text{pour tout } x, y \in X, \quad \alpha(x, y) \geq 1 \implies \alpha(Tx, Ty) \geq 1.$$

Exemple 1.4.4. Soit $X = \mathbb{R}$. On définit $T: X \rightarrow X$ et $\alpha: X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+$ par

$$Tx = \begin{cases} \ln |x| & \text{si } x \neq 0 \\ 3 & \text{si } x = 0 \end{cases},$$

et

$$\alpha(x, y) = \begin{cases} 3 & \text{si } x \geq y \\ 0 & \text{si } x < y \end{cases}.$$

Alors T est α -admissible.

Exemple 1.4.5. Soit $X = [0, +\infty)$. On définit $T: X \rightarrow X$ et $\alpha: X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+$ par $Tx = \sqrt{x}$ pour tout $x \in X$ et

$$\alpha(x, y) = \begin{cases} e^{x-y} & \text{si } x \geq y \\ 0 & \text{si } x < y \end{cases}.$$

Alors T est α -admissible.

Remarque 1.4.2. Il est clair que toute application croissante définie de X dans lui-même est α -admissible.

Définition 1.20. Soient X un ensemble non vide, $T: X \rightarrow \mathcal{P}(X)$ et $\alpha: X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+$ deux applications. On dit que T est α_* -admissible si :

$$\text{pour tout } x, y \in X, \quad \alpha(x, y) \geq 1 \Rightarrow \alpha_*(Tx, Ty) \geq 1,$$

où

$$\alpha_*(Tx, Ty) = \{\inf \alpha(a, b) : a \in Tx, b \in Ty\}.$$

Exemple 1.4.6. Soit $X = [0, +\infty)$ muni par la distance $d(x, y) = |x - y|$ et $\delta \in (0, 1)$ un nombre fixe. On définit $T: X \rightarrow X$ par $Tx = [0, \lambda x]$ pour tout $x \in X$ et $\alpha: X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+$ tel que

$$\alpha(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x, y \in [0, 1] \\ 0 & \text{si } x \notin [0, 1] \text{ ou } y \notin [0, 1] \end{cases}.$$

Maintenant, on montre que T est α_* -admissible.

Si $\alpha(x, y) \geq 1$, alors $x, y \in [0, 1]$ et donc Tx et Ty sont des sous-ensembles de $[0, 1]$. Ainsi, $a, b \in [0, 1]$ pour tout $a \in Tx$ et $b \in Ty$. Par conséquent, $\alpha(a, b) = 1$ pour tout $a \in Tx$ et $b \in Ty$. Cela implique que

$$\alpha_*(Tx, Ty) = \{\inf \alpha(a, b) : a \in Tx, b \in Ty\} = 1$$

Donc T est α_* -admissible.

En 2013 Mohammadi et al [67] ont généralisé l'application multivoque α_* -admissible.

Définition 1.21. [67] Soient (X, d) un espace métrique, $T: X \rightarrow CB(X)$ est une application multivoque et $\alpha: X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+$ une application donnée. On dit que T est α -admissible si pour tout $x \in X$ et $y \in Tx$ avec $\alpha(x, y) \geq 1$, on a $\alpha(y, z) \geq 1$, pour tout $z \in Ty$.

Remarque 1.4.3. On remarque que toute application α_* -admissible est aussi α -admissible, mais la réciproque est fautive en général. Comme il montre l'exemple suivant :

Exemple 1.4.7. Soit $X = [-1, 1]$ et $\alpha: X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+$ définie par $\alpha(x, x) = 0$ et $\alpha(x, y) = 1$ pour $x \neq y$. On définit $T: X \rightarrow CB(X)$ par :

$$Tx = \begin{cases} \{x\} & \text{si } x \notin \{-1, 0\} \\ \{0, 1\} & \text{si } x = -1 \\ \{1\} & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

Soit $x = -1$ et $y = 0 \in Tx = \{0, 1\}$, alors $\alpha(x, y) \geq 1$, mais $\alpha_*(Tx, Ty) = \alpha_*(\{0, 1\}, \{1\}) = 0$. Cela affirme que T n'est pas α_* -admissible.

Montrons maintenant que T est α -admissible, pour cela considérons les cas suivants :

Cas 1. Si $x = 0$, alors $y = 1$ et $\alpha(x, y) \geq 1$, $\alpha(y, z) \geq 1$ puisque $z = -1 \in Ty = \{-1\}$.

Cas 2. Si $x = -1$, alors $y \in \{0, 1\}$ et $\alpha(x, y) \geq 1$, $\alpha(y, z) \geq 1$ pour tout $z \in Ty$.

Cas 3. Si $x \notin \{-1, 0\}$, alors $y = -x$ et $\alpha(x, y) \geq 1$, $\alpha(y, z) \geq 1$ puisque $z = x \in Ty = \{x\}$.

Contractions multivoques

Dans ce chapitre, nous présentons quelques théorèmes du point fixe pour des contractions multivoques dans un espace métrique complet, en utilisant la notion de la distance de Pompeiu-Hausdorff. Certains théorèmes d'existence sont présentés pour le point fixe distincts de contraction de Nadler, le contraction de Berinde-Berinde, le contraction de Wardowski (appelé aussi F -contractante) et le contraction de type θ .

2.1 Contraction de Nadler et ses généralisations

L'étude des théorèmes du point fixe pour les applications multivoques a été initiée par Nadler [68] en combinant les concepts d'applications multivoques et de contraction pour obtenir un résultat d'existence du point fixe. Le résultat suivant, généralement appelé théorème du point fixe de Nadler, est étend le principe de contraction univoque de Banach bien connue, qui annoncé que toute contraction à valeurs bornée fermée sur un espace métrique complet a un point fixe aux applications contractantes multivoques. Depuis lors, divers résultats en point fixe concernant par les contractions multivoques sont apparus.

Définition 2.1. Soient X, Y deux espaces métriques. On dit que $T: X \rightarrow CB(Y)$ est Lipschitzienne, s'il existe un nombre réel $k \geq 0$ tel que pour tout $x, y \in X$ on a

$$H(Tx, Ty) \leq kd(x, y) \tag{2.1}$$

- Si $k = 1$, T est appelée non-expansive.
- Si $k < 1$, T est dite contraction ou application contractante.

Lemme 2.1. [68] *Soient (X, d) un espace métrique et $A, B \in CL(X)$ tel que $H(A, B) > 0$. Alors pour $h > 1$ et pour tout $a \in A$, il existe $b \in B$ tel que*

$$d(a, b) < hH(A, B).$$

Théorème 2.2 ([68] **Nadler**). *Soit (X, d) un espace métrique complet. Si $T: X \rightarrow CB(X)$ une application multivoque contractante, alors T a au moins un point fixe, c'est-à-dire qu'il existe $x \in X$ tel que $x \in Tx$.*

Plusieurs modifications et généralisations du théorème de Nadler ont été développées au cours des années successives. Dans la plupart des cas, la disance de Pompeiu-Hausdorff n'est pas utilisée et la partie existence des résultats peut être prouvée sans utiliser le concept de distance de Pompeiu-Hausdorff. Par exemple, en 2006, Feng et Liu [36] ont obtenu des résultats du point fixe intéressants pour les applications multivoques et ont étendu le résultat de Nadler.

Pour une constante positive $b \in (0, 1)$, on définit l'ensemble $I_b^x \subset X$ par

$$I_b^x = \{y \in Tx : bd(x, y) \leq d(x, Tx)\}.$$

Théorème 2.3. [36] *Soit (X, d) un espace métrique complet et soit $T: X \rightarrow CL(X)$ une application multivoque. S'il existe une constante $c \in (0, 1)$ telle que pour tout $x \in X$ il existe $y \in I_b^x$ satisfaisant*

$$d(y, Ty) \leq cd(x, y).$$

alors T a un point fixe dans X à condition que $c < b$ et la fonction $x \mapsto d(x, Tx)$ est semi-continue inférieurement.

Puisque $I_b^x \subset Tx$, on a le corollaire suivant qu'est également une extension du principe de contraction de Nadler.

Corollaire 2.4. [36] *Soit (X, d) un espace métrique complet et soit $T: X \rightarrow CL(X)$ une application multivoque. S'il existe une constante $c \in (0, 1)$ telle que pour tout $x \in X$, $y \in Tx$*

$$d(y, Ty) \leq cd(x, y).$$

alors T a un point fixe dans X à condition que la fonction $x \mapsto d(x, Tx)$ est semi-continue inférieurement.

En 2007, un autre résultat intéressant a été obtenu par Klim et Wardowski [57]. Ils ont prouvé le théorème suivant.

Théorème 2.5. [57] *Soit (X, d) un espace métrique complet et soit $T: X \rightarrow CL(X)$ une application multivoque. S'il existe une constante $b \in (0, 1)$ et une fonction $\varphi: [0; 1) \rightarrow [0, b)$ satisfaisant*

$$\limsup_{t \rightarrow s^+} \varphi(t) < b \text{ pour tout } s \geq 0,$$

et si pour tout $x \in X$, il existe $y \in I_b^x$ satisfaisant

$$d(y, Ty) \leq \varphi(d(x, y))d(x, y).$$

Alors T a un point fixe dans X à condition que $x \mapsto d(x, Tx)$ est semi-continue inférieurement.

En 2008, Kikkawa et Suzuki [58] ont généralisé le théorème du point fixe de Nadler.

Définition 2.2. [58] *Soit $\eta: [0, 1) \rightarrow (\frac{1}{2}, 1]$ une fonction définie par $\eta(a) = \frac{1}{1+a}$. Soient (X, d) un espace métrique et $Y \subset X$. Alors, $T: Y \rightarrow CB(X)$ est appelée une application multivoque de Kikkawa-Suzuki si $a \in [0, 1)$ et pour tout $x, y \in Y$*

$$\eta(a)d(x, Tx) \leq d(x, y) \implies H(Tx, Ty) \leq ad(x, y).$$

Le résultat suivant est une amélioration du théorème de Nadler.

Théorème 2.6. [58] *Soit $\eta: [0, 1) \rightarrow (\frac{1}{2}, 1]$ une fonction définie par $\eta(a) = \frac{1}{1+a}$. Soient (X, d) un espace métrique, $Y \subset X$ et $T: Y \rightarrow CB(X)$ une application multivoque de Kikkawa-Suzuki. Alors T admet au moins un point fixe dans X .*

2.2 Contraction de Berinde et ses généralisations

Dans [24], Berinde a introduit le concept de contractions faibles (ou (δ, L) -contraction faible) et a étudié l'existence de points fixes pour cette classe d'applications. De plus, il a prouvé que plusieurs applications de type contraction (contraction de Kannan, contraction de Chatterjee, la contraction de Zamfirescu, la contraction de Hardy-Rogers et bien d'autres) sont des contractions faibles.

Définition 2.3. [24] Soient (X, d) un espace métrique complet et $T: X \rightarrow X$ une application univoque. Alors T est appelée une application de Berinde s'il existe $\delta \in [0, 1)$ et $L \geq 0$ tels que

$$d(Tx, Ty) \leq \delta d(x, y) + Ld(y, Tx) \quad (2.2)$$

pour tout $x, y \in X$.

Remarque 2.2.1. En raison de la symétrie de la distance, la condition 2.2 inclut implicitement la condition duale suivante

$$d(Tx, Ty) \leq \delta d(x, y) + Ld(x, Ty)$$

Définition 2.4. [24] Soient (X, d) un espace métrique complet et $T: X \rightarrow X$ une application univoque. Alors T est appelée une application de Berinde généralisé s'il existe $\delta \in [0, 1)$ et une fonction $\varphi: X \rightarrow \mathbb{R}_+$ tels que

$$d(Tx, Ty) \leq \delta d(x, y) + \varphi(y)d(y, Tx),$$

pour tout $x, y \in X$.

Berinde [24] en 2004 a défini un nouveau type de contraction non linéaire en utilisant une fonction de comparaison comme suit.

Définition 2.5. Soient (X, d) un espace métrique complet et $T: X \rightarrow X$ une application et $\varphi: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ est une fonction de c -comparaison. Alors T est appelée quasi-contraction s'il existe $\delta \in [0, 1)$ tel que

$$d(Tx, Ty) \leq \varphi(d(x, y)) + Ld(x, Ty),$$

pour tout $x, y \in X$.

Théorème 2.7. Soient (X, d) un espace métrique complet et $T: X \rightarrow X$ une application et $\varphi: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ est une fonction de c -comparaison tel que pour tout $x, y \in X$,

$$d(Tx, Ty) \leq \varphi(d(x, y)) + Ld(x, Ty).$$

Alors T a un point fixe.

Définition 2.6. Une fonction $\varphi: (0, \infty) \rightarrow [0, 1)$ est dite $\mathcal{MT}$ -fonction s'il satisfait la condition de Mizoguchi-Takahashi, C'est à dire

$$\limsup_{t \rightarrow s^+} \varphi(t) < 1 \text{ pour tout } s \in [0, +\infty)$$

Remarque 2.2.2.

- (1) Si la fonction $\varphi: (0, \infty) \rightarrow [0, 1)$ est non monotone, alors elle est $\mathcal{MT}$ -fonction.
- (2) La fonction constante $\varphi: (0, \infty) \rightarrow [0, 1)$ tel que $\varphi(t) = c \in [0, 1)$ est une $\mathcal{MT}$ -fonction.

Exemple 2.2.1. La fonction $\varphi: (0, \infty) \rightarrow [0, 1)$ telle que

$$\varphi(t) = \begin{cases} \frac{\sin t}{t} & \text{si } t \in (0, \frac{\pi}{2}] \\ 0 & \text{si } t \notin (0, \frac{\pi}{2}] \end{cases},$$

est une $\mathcal{MT}$ -fonction.

Exemple 2.2.2. La fonction $\varphi: (0, \infty) \rightarrow [0, 1)$ telle que

$$\varphi(t) = \begin{cases} 2t & \text{si } 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{si } t \geq \frac{1}{2} \end{cases},$$

est une $\mathcal{MT}$ -fonction.

En 2007, M. Berinde et V. Berinde [25] ont prouvé le théorème du point fixe suivant.

Théorème 2.8 (Berinde et Berinde). [25] Soient (X, d) un espace métrique complet et $T: X \rightarrow CB(X)$ une application multivoque. S'il existe $L \geq 0$ et une fonction $\varphi: [0, \infty) \rightarrow [0, 1)$ satisfaisant

$$\limsup_{t \rightarrow s^+} \varphi(t) < b \text{ pour tout } s \geq 0,$$

et pour tout $x, y \in X$

$$H(Tx, Ty) \leq \varphi(d(x, y))d(x, y) + Ld(y, Tx).$$

Alors T a au moins un point fixe.

On remarque que si nous prenons $L = 0$ dans le théorème de Berinde et Berinde, alors nous pouvons obtenir le théorème du point fixe de Mizoguchi-Takahashi [66] qui est une réponse partielle du problème 9 de Reich dans [73]. En effet, S. Reich a établi ce qui suit.

Théorème 2.9 (Reich). [73] *Soient (X, d) un espace métrique complet et $T: X \rightarrow K(X)$ une application multivoque. S'il existe $L \geq 0$ et une fonction $\varphi: [0, \infty) \rightarrow [0, 1)$ satisfaisant*

$$\limsup_{t \rightarrow s^+} \varphi(t) < b \text{ pour tout } s \geq 0,$$

et pour tout $x, y \in X$, $x \neq y$

$$H(Tx, Ty) \leq \varphi(d(x, y))d(x, y).$$

Alors T a au moins un point fixe.

Reich dans [74] a posé le problème ouvert suivant, la théorème ci-dessus est-elle valable pour l'application $T: (X, d) \rightarrow CB(X)$. En 1989, Mizoguchi et Takahashi [66] ont obtenu ce fameux résultat et ont résolu ce problème. Après ce résultat, la fonction φ est nommée $\mathcal{MT}$ -fonction.

Théorème 2.10 (Mizoguchi and Takahashi). [66] *Soient (X, d) un espace métrique complet et $T: X \rightarrow CB(X)$ une application multivoque. S'il existe $L \geq 0$ et une fonction $\varphi: [0, \infty) \rightarrow [0, 1)$ satisfaisant*

$$\limsup_{t \rightarrow s^+} \varphi(t) < b \text{ pour tout } s \geq 0,$$

et pour tout $x, y \in X$, $x \neq y$

$$H(Tx, Ty) \leq \varphi(d(x, y))d(x, y).$$

Alors T a au moins un point fixe.

Théorème 2.11. [55] *Soient (X, d) un espace métrique complet et $T: X \rightarrow CB(X)$ une application multivoque. Si α une fonction croissante telle que $0 \leq \alpha(t) < 1$ pour tout $t \in (0, \infty)$ et si*

$$H(Tx, Ty) \leq \varphi(d(x, y))d(x, y),$$

pour tout $x, y \in X$. Alors T a un point fixe dans X .

Définition 2.7. *Soient (X, d) un espace métrique et $T: X \rightarrow \mathcal{P}(X)$ une application multivoque. T est dite une contraction multivoque faible ou (θ, L) -contraction multivoque si et seulement s'il existe deux constantes $\theta \in (0, 1)$ et $L \geq 0$ telles que*

$$H(Tx, Ty) \leq \theta d(x, y) + Ld(y, Tx),$$

pour tout $x, y \in X$.

Théorème 2.12. Soient (X, d) un espace métrique et $T: X \rightarrow P(X)$ une application (θ, L) -contraction multivoque. Alors

1. $\text{Fix}(T) \neq \emptyset$
2. pour tout $x_0 \in X$, il existe une suite $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ converge vers un point fixe u de T et vérifier les estimations suivantes :

$$d(x_n, u) \leq \frac{h^n}{1-h} d(x_1, x_0), \quad n \in \mathbb{N},$$

$$d(x_n, u) \leq \frac{h}{1-h} d(x_n, x_{n-1}), \quad n \in \mathbb{N}^*,$$

pour une certaine constante $h < 1$.

Théorème 2.13. Soient (X, d) un espace métrique et $T: X \rightarrow \mathcal{P}(X)$ une application (θ, L) -contraction multivoque généralisé. i.e., il existe $L \geq 0$ et une fonction $\varphi: [0, \infty) \rightarrow [0, 1)$ satisfaisant

$$\limsup_{t \rightarrow s^+} \varphi(t) < b \quad \text{pour tout } s \geq 0,$$

et pour tout $x, y \in X$, $x \neq y$

$$H(Tx, Ty) \leq \varphi(d(x, y))d(x, y) + Ld(y, Tx).$$

Alors T a au moins un point fixe.

2.3 Contraction multivoque de Wardowski

En 2012, Wardowski [87] a introduit un nouveau type de contractions appelées F -contractions et a prouvé un nouveau théorème du point fixe concernant les F -contractions. De cette façon, Wardowski [87] a généralisé le principe de contraction de Banach d'une manière différente des résultats bien connus. Wardowski a défini la F -contraction comme suit. On note $\mathcal{F}$ l'ensemble de toutes les fonctions $F: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaisant les conditions suivantes :

(F_1) F est strictement croissante,

(F_2) Pour toute suite $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ de nombres positifs, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = 0$ si et seulement si

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} F(\alpha_n) = -\infty,$$

(F_3) Il existe $k \in (0, 1)$ tel que $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \alpha^k F(\alpha) = 0$.

Si F est satisfait aussi le condition suivant, on note de cette ensemble par $\mathcal{F}_*$:

(F_4) $F(\inf A) = \inf F(A)$ pour tout $A \subset (0, \infty)$ avec $\inf A > 0$.

Exemple 2.3.1. [62] Il est clair que $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}_*$, les fonctions suivantes définies pour $t > 0$ sont des éléments de $\mathcal{F}$: $F_1(t) = \ln t$, $F_2(t) = t + \ln t$, $F_3(t) = -\frac{1}{\sqrt{t}}$, et $F_4(t) = \ln(t^2 + t)$. Si nous avons défini $F_5(t) = \ln t$ pour $t \leq 1$ et $F_5(t) = 2t$ pour $t > 1$, alors $F_5 \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{F}_*$.

Définition 2.8. [87] Soient (X, d) un espace métrique et $T: X \rightarrow X$ est une application. Alors T est dite F -contraction s'il existe $F \in \mathcal{F}$ et $\tau > 0$ tels que pour tout $x, y \in X$

$$d(Tx, Ty) > 0 \implies \tau + F(d(Tx, Ty)) \leq F(d(x, y)). \quad (2.3)$$

Lorsque l'on considère en (2.3) les différents exemples des fonctions F alors on obtient diverses types des contractions. Voir les exemples suivants :

Exemple 2.3.2. [87] Soit $F_1: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ donné par la formule $F_1(t) = \ln t$. Il est clair que $F_1 \in \mathcal{F}$ ((F_3) est vérifiée pour tout $k \in (0, 1)$). toute application $T: X \rightarrow X$ satisfaisant (2.3) est une F_1 -contraction telle que

$$d(Tx, Ty) \leq e^{-\tau} d(x, y), \text{ pour tout } x, y \in X, Tx \neq Ty.$$

Il est clair que pour $x, y \in X$ tel que $Tx = Ty$ l'inégalité $d(Tx, Ty) \leq e^{-\tau} d(x, y)$ est aussi vérifiée, i.e., que T est une contraction de Banach [14].

Maintenant, si T est contraction de Banach avec une constante contractive k , alors T est une application F -contractante pour $F_1(t) = \ln t$ et $\tau = -\ln k$. Mais, n'est pas toute application F -contractante est une contraction de Banach.

Exemple 2.3.3. [87] Soit $F_2(t) = \ln t + t$, $t > 0$ alors $F_2 \in \mathcal{F}$ et T est une F_2 -contraction. la condition (2.3) est s'écrit sous la forme

$$\frac{d(Tx, Ty)}{d(x, y)} e^{d(Tx, Ty) - d(x, y)} \leq e^{-\tau}, \text{ pour tout } x, y \in X, Tx \neq Ty.$$

Remarque 2.3.1. A partir de (F_1) et (2.3), on conclut que toute F -contraction est une application contractive, i.e.,

$$d(Tx, Ty) \leq d(x, y) \text{ pour tout } x, y \in X, Tx \neq Ty.$$

Ainsi, toute F -contraction est continue.

Remarque 2.3.2. Soit $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$. Si pour tout $t > 0$, $F_1(t) \leq F_2(t)$ et $G = F_1 - F_2$ une application strictement croissante. Alors toute F_1 -contraction est une F_2 -contraction. En effet d'après la remarque 2.3.1 pour tout $x, y \in X$, satisfaisant la condition $d(Tx, Ty) > 0$ tel que $Tx \neq Ty$ on trouve

$$G(d(Tx, Ty)) \leq G(d(x, y))$$

Donc

$$\begin{aligned} \tau + F_2(d(Tx, Ty)) &= \tau + F_1(d(Tx, Ty)) + G(d(Tx, Ty)) \\ &\leq F_1(d(x, y)) + G(d(x, y)) \\ &\leq F_2(d(x, y)). \end{aligned}$$

Wardowski [87] a énoncé une version modifiée du principe de contraction de Banach comme suit.

Théorème 2.14. [87] Soit (X, d) un espace métrique complet et soit $T: X \rightarrow X$ une F -contraction. Alors T a un point fixe unique $z \in X$ et pour tout $x_0 \in X$ la suite $\{T^n x_0\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers z .

On verra que la condition (F_2) peut être remplacée par une condition équivalente mais plus simple. Tout d'abord, nous devons présenter les deux lemmes élémentaires suivants.

Lemme 2.15. [78] Si $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ est une suite bornée de nombres réels telle que toutes ses sous-suites convergentes ont la même limite ℓ , alors $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ est convergente et $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = \ell$.

Lemme 2.16. [78] Soit $F: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ une application croissante et $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ une suite de nombres réels positifs. Alors les affirmations suivantes sont vraies :

- (a) Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} F(t_n) = -\infty$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = 0$.
- (b) Si $\inf F = -\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = 0$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} F(t_n) = -\infty$.

Remarque 2.3.3. D'après le lemme 2.16, la condition (F_2) de la définition 2.8 peut être remplacée par

$$(F_{2'}) \quad \inf F = -\infty$$

ou aussi, par

$$(F_{2''}) \quad \text{il existe une suite } \{t_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ de nombres réels positifs telle que } \lim_{n \rightarrow +\infty} F(t_n) = -\infty.$$

Grâce à la remarque précédente, on peut obtenir de nouveaux exemples de fonctions de $\mathcal{F}$, pour $\alpha \in (0, 1)$, on peut considérer

- (1) $F_1(t) = -t^{-\alpha}$
- (2) $F_2(t) = \frac{t^\alpha}{1 + e^t}$
- (3) $F_3 = \frac{-1}{\arctan t^\alpha}$, pour vérifier la condition (F_3) on prend $\lambda \in (\alpha, 1)$.

Définition 2.9. [31] Soit (X, d) un espace métrique. Une application $T: X \rightarrow X$ est dite F -contraction de type Hardy-Rogers s'il existe $F \in \mathcal{F}$ et $\tau > 0$ tels que pour tout $x, y \in X$

$$\begin{aligned} \tau + F(d(Tx, Ty)) \leq & F(\alpha d(x, y) + \beta d(x, Tx) + \gamma d(y, Ty) \\ & + \delta d(x, Ty) + Ld(y, Tx)), \end{aligned} \quad (2.4)$$

avec $d(Tx, Ty) > 0$ où $\alpha + \beta + 2\gamma + \delta = 1, \gamma \neq 1$ et $L \geq 0$.

Théorème 2.17. Soient (X, d) un espace métrique et $T: X \rightarrow X$ une application. Supposons que T est une F -contraction de type Hardy-Rogers, où $\gamma \neq 1$. Alors T a un point fixe. De plus, si $\alpha + \gamma + L \leq 1$, alors le point fixe de T est unique.

Après de Wardowski, Minak et al. [61] ont introduit le concept de F -contraction généralisée de type Ćirić.

Définition 2.10. Soient (X, d) un espace métrique et $T: X \rightarrow X$ est une application. Alors T est dite F -contraction généralisé de type Ćirić s'il existe $F \in \mathcal{F}$ et $\tau > 0$ tels que pour tout $x, y \in X$

$$d(Tx, Ty) > 0 \implies \tau + F(d(Tx, Ty)) \leq F(M(x, y)),$$

où

$$M(x, y) = \max \left\{ d(x, y), d(x, Tx), d(y, Ty), \frac{d(x, Ty) + d(y, Tx)}{2} \right\}.$$

Théorème 2.18. [61] Soit (X, d) un espace métrique complet et soit $T: X \rightarrow X$ est une F -contraction généralisée de type Ćirić. Si T ou F est continue, alors T a un point fixe unique dans X .

En combinant les idées de Wardowski et Nadler, Altun et al. [7] ont introduit le concept de F -contractions dans le cas multivoque et ont obtenu des résultats du point fixe pour ce type d'applications sur un espace métrique complet.

Définition 2.11. [7] Soit (X, d) un espace métrique. On dit que $T : X \rightarrow CB(X)$ est une F -contraction multivoque si $F \in \mathcal{F}$ et il existe $\tau > 0$ tel que pour tout $x, y \in X$

$$H(Tx, Ty) > 0 \implies \tau + F(d(Tx, Ty)) \leq F(d(x, y)). \quad (2.5)$$

En considérant $F(t) = \ln t$, $t > 0$, toute contraction multivoque au sens de Nadler est aussi une F -contraction multivoque.

Théorème 2.19. [7] Soient (X, d) un espace métrique complet et $T : X \rightarrow K(X)$ une F -contraction multivoque, alors T a un point fixe dans X .

Dernièrement, Acar et al. [1] ont introduit le concept d'applications F -contraction multivoques généralisées et ont établi un résultat du point fixe, qui était une généralisation appropriée de certains théorèmes du point fixe multivoques, y compris celui de Nadler.

Définition 2.12. [1] Soient (X, d) un espace métrique et $T : X \rightarrow CB(X)$ une application. Alors T est une F -contraction multivoque généralisée si $F \in \mathcal{F}$ et il existe $\tau > 0$ tels que

$$H(Tx, Ty) > 0 \implies \tau + F(d(Tx, Ty)) \leq F(M(x, y)),$$

où

$$M(x, y) = \max \left\{ d(x, y), d(x, Tx), d(y, Ty), \frac{1}{2}[d(x, Ty) + d(y, Tx)] \right\}.$$

Théorème 2.20. [1] Soient (X, d) un espace métrique complet et $T : X \rightarrow K(X)$ une F -contraction multivoque généralisée. Si T ou F est continue, alors T a un point fixe dans X .

Ici, la question suivante peut venir à l'esprit : peut-on prendre $CB(X)$ au lieu de $K(X)$ dans le théorème 2.20 ? Cette question a été résolue en ajoutant la condition (F_4) sur F .

Théorème 2.21. [1] Soient (X, d) soit un espace métrique complet et $T : X \rightarrow CB(X)$ une F -contraction multivoque. Supposons que $F \in F_*$, alors T a un point fixe dans X .

D'autre part, Olgun et al. [70] ont prouvé les théorèmes suivants. Le théorème 2.23 est une généralisation du célèbre théorème du point fixe de Mizoguchi-Takahashi pour une contraction multivoque. Ces résultats sont des cas non linéaires des théorèmes 2.20 et 2.21, respectivement.

Théorème 2.22. [70] Soient (X, d) un espace métrique complet et $T: X \rightarrow K(X)$. S'il existe $F \in \mathcal{F}$ et $\tau: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ tels que

$$\liminf_{t \rightarrow s^+} \tau(t) > 0 \text{ pour tout } s > 0,$$

et pour tout $x, y \in X$,

$$H(Tx, Ty) > 0 \implies \tau(d(x, y)) + F(H(Tx, Ty)) \leq F(d(x, y)),$$

alors T a un point fixe dans X .

Théorème 2.23. [70] Soient (X, d) un espace métrique complet et $T: X \rightarrow CB(X)$. S'il existe $F \in \mathcal{F}_*$ et $\tau: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ tels que

$$\liminf_{t \rightarrow s^+} \tau(t) > 0 \text{ pour tout } s > 0,$$

et pour tout $x, y \in X$,

$$H(Tx, Ty) > 0 \implies \tau(d(x, y)) + F(H(Tx, Ty)) \leq F(d(x, y)),$$

alors T a un point fixe dans X .

Pour $x \in X$ avec $d(x, Tx) > 0$, on définit l'ensemble $F_\sigma^x \subset X$ par

$$F_\sigma^x = \{y \in Tx : F(d(x, y)) \leq F(d(x, Tx)) + \sigma\}.$$

Théorème 2.24. [70] Soient (X, d) un espace métrique complet, $T: X \rightarrow K(X)$ une application multivoque et $F \in \mathcal{F}$. S'il existe $\tau > 0$ tel que pour tout $x \in X$ avec $d(x, Tx) > 0$, il existe $y \in F_\sigma^x$ satisfaisant

$$\tau + F(d(y, Ty)) \leq F(d(x, y)),$$

alors T a un point fixe dans X à condition que $\sigma < \tau$ et $x \mapsto d(x, Tx)$ est semi-continue inférieurement.

Dans le théorème suivant on peut remplacer $CL(X)$ par $K(X)$, mais il faut prendre $F \in \mathcal{F}_*$:

Théorème 2.25. [70] Soient (X, d) un espace métrique complet, $T: X \rightarrow CL(X)$ une application multivoque et $F \in \mathcal{F}_*$. S'il existe $\tau > 0$ tel que pour tout $x \in X$ avec $d(x, Tx) > 0$, il existe $y \in F_\sigma^x$ satisfaisant

$$\tau + F(d(y, Ty)) \leq F(d(x, y)),$$

alors T a un point fixe dans X à condition que $\sigma < \tau$ et $x \mapsto d(x, Tx)$ est semi-continue inférieurement.

2.4 Contraction multivoque de type theta

En 2014, Jleli et Samet [49] ont introduit un nouveau type de contraction univoque qui s'appelle θ -contraction et ont établi de nouveaux théorèmes du point fixe pour une telle contraction dans le contexte des espaces métriques généralisés.

On note Θ l'ensemble des toutes fonctions $\theta: (0, +\infty) \rightarrow (1, +\infty)$ satisfaisant les conditions suivantes :

(θ_1) : θ est strictement croissante,

(θ_2) : Pour toute suite $\{t_n\}$ dans $(0, +\infty)$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \theta(t_n) = 1$ si et seulement si $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = 0$,

(θ_3) : Il existe $r \in (0, 1)$ et $\ell \in [0, \infty)$ tels que $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\theta(t) - 1}{t^r} = \ell$.

Exemple 2.4.1. Les fonctions suivantes sont des éléments de Θ ($t > 0$) :

$$\theta_1(t) = e^t, \quad \theta_2(t) = e^{te^t}, \quad \theta_3(t) = e^{\sqrt{t}}, \quad \theta_4(t) = e^{\sqrt{te^t}}.$$

Définition 2.13. [49] Soit (X, d) un espace métrique. une application $T: X \rightarrow X$ est dite θ -contraction s'il existe $\theta \in \Theta$ et $k \in (0, 1)$ tels que

$$\theta(d(Tx, Ty)) \leq [\theta(d(x, y))]^k. \quad (2.6)$$

pour tout $x, y \in X$, avec $d(Tx, Ty) > 0$.

Théorème 2.26. [49] Soient (X, d) un espace métrique complet et $T: X \rightarrow X$ est une θ -contraction. Alors T a un point fixe unique dans X .

Remarque 2.4.1. Le théorème 2.26 est une version modifiée du principe de contraction de Banach. En effet, si $T: X \rightarrow X$ est une application contractante de Banach avec une

constante $\lambda \in (0, 1)$, i.e.,

$$d(Tx, Ty) \leq \lambda d(x, y), \forall x, y \in X.$$

On a $\theta(t) = e^{\sqrt{t}} \in \Theta, t > 0$, en passant à l'inégalité ci-dessus, on trouve

$$e^{\sqrt{d(Tx, Ty)}} \leq e^{\sqrt{\lambda d(x, y)}} = \left[e^{\sqrt{d(x, y)}} \right]^{\sqrt{\lambda}} = \left[e^{\sqrt{d(x, y)}} \right]^k, \forall x, y \in X,$$

où $k = \sqrt{\lambda}$. On résulte du théorème 2.26 que T a un point fixe unique dans X .

En 2016, Minak et Altun [63] ont introduit la notion de θ -contraction multivoque non-linéaire de cette manière.

Définition 2.14. [63] Soient (X, d) un espace métrique, $T: X \rightarrow CB(X)$ et $\theta \in \Theta$. Alors T est dite θ -contraction multivoque non-linéaire s'il existe une fonction $k: (0, \infty) \rightarrow [0, 1)$ tel que

$$\theta(H(Tx, Ty)) \leq [\theta(d(x, y))]^{k(d(x, y))}, \quad (2.7)$$

pour tout $x, y \in X$, avec $H(Tx, Ty) > 0$.

Théorème 2.27. [63] Soient (X, d) un espace métrique complet, $T: X \rightarrow K(X)$ est une θ -contraction non-linéaire multivoque. S'il existe $k: (0, \infty) \rightarrow [0, 1)$ tel que

$$\limsup_{t \rightarrow s^+} k(t) < 1, \text{ pour tout } s \in [0, \infty).$$

Alors T a un point fixe.

Le concept de θ -contraction du cas des applications univoques étendu aux applications multivoques en 2017 par Hançer et al [38] et ils ont introduit le concept de θ -contraction multivoque

Définition 2.15. [38] Soient (X, d) un espace métrique, $T: X \rightarrow CB(X)$ est une application et soit $\theta \in \Theta$. On dit que T est une θ -contraction multivoque s'il existe $k \in (0, 1)$ tel que

$$\theta(H(Tx, Ty)) \leq [\theta(d(x, y))]^k. \quad (2.8)$$

pour tout $x, y \in X$, avec $H(Tx, Ty) > 0$.

Remarque 2.4.2. Nous pouvons facilement obtenir que toute contraction multivoque est aussi une θ -contraction multivoque avec $\theta(t) = e^{\sqrt{t}}$.

Théorème 2.28. [38] Soient (X, d) un espace métrique complet et $T: X \rightarrow K(X)$ est une θ -contraction multivoque. Alors T a un point fixe $z \in X$, et pour tout $x_0 \in X$ la suite $\{T^n x_0\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers z .

Dans le théorème 2.28 on remarque que, Tx est compact pour tout $x \in X$, Ainsi, ils ont présenté le problème suivant : Peut-on remplacer $CB(X)$ au lieu de $K(X)$. Malheureusement, la réponse est négatif avec les mêmes conditions que celles illustrées dans l'exemple suivant.

Exemple 2.4.2. [38] Soit $X = [0, 2]$. On définit la distance d sur X et l'application $T: X \rightarrow CB(X)$, par

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y \\ 1 + |x - y| & \text{si } x \neq y \end{cases}, \quad Tx = \begin{cases} \mathbb{Q}_X & \text{si } x \in X \setminus \mathbb{Q}_X \\ X \setminus \mathbb{Q}_X & \text{si } x \in \mathbb{Q}_X \end{cases},$$

où $\mathbb{Q}_X$ est l'ensemble de tous les nombres rationnels dans X . Alors (X, d) est un espace métrique complet et borné aussi, Par conséquent, tous les sous-ensembles de X sont fermés et bornés.

Soit $\theta \in \Theta$ qui est définit par

$$\theta(t) = \begin{cases} e^{\sqrt{t}} & , \quad t \leq 1 \\ 9 & , \quad t > 1 \end{cases}.$$

Maintenant nous montrons que T est une θ -contraction multivoque. On remarque que pour tout $x, y \in X$: $H(Tx, Ty) > 0 \implies \{x, y\} \cap \mathbb{Q}$ est singleton. Par conséquent, nous avons

$$\begin{aligned} H(Tx, Ty) > 0 &\implies H(Tx, Ty) = 1 \text{ et } d(x, y) = 1 + |x - y| > 1 \\ &\implies \theta(H(Tx, Ty)) = e \text{ et } [\theta(d(x, y))]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} = 3 \\ &\implies \theta(H(Tx, Ty)) \leq [\theta(d(x, y))]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Par conséquent, T est une θ -contraction multivoque, Mais T n'a pas du point fixe.

Pour affirmer que pour toute application qui satisfait la condition 2.8 du théorème 2.28 prenant $CB(X)$ au lieu de $K(X)$ pour avoir un point fixe, nous devons ajouter une condition faible sur $\theta : (0, \infty) \rightarrow (1, \infty)$

$(\theta_4) :$ $\theta(\inf A) = \inf(\theta(A))$ pour tout $A \subset (0, \infty)$ avec $\inf A > 0$.

Nous remarquons que, si θ satisfait (θ_1) , alors il satisfait (θ_4) si et seulement si il est continu à droite.

Soit Θ_* la famille de toutes les fonctions θ vérifiant $(\theta_1) - (\theta_4)$.

Exemple 2.4.3. La fonction $\theta : (0, +\infty) \rightarrow (1, +\infty)$ définie par $\theta(t) = e^{\sqrt{t}}$ pour $t \geq 1$, et $\theta(t) = 3$ pour $t < 1$, appartient à $\Theta \setminus \Theta_*$.

Par conséquent, en considérant l'ensemble Θ_* , nous pouvons fournir le théorème suivant, qui est une généralisation réelle du résultat de Nadler.

Théorème 2.29. [38] Soient (X, d) un espace métrique complet et $T : X \rightarrow CB(X)$ est une θ -contraction multivoque tel que $\theta \in \Theta_*$, alors T admet un point fixe $z \in X$, et pour tout $x_0 \in X$ la suite $\{T^n x_0\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers z .

Exemple 2.4.4. [38] Considérons l'espace métrique complet (X, d) , où $X = \mathbb{N}$ et $d : X \times X \rightarrow [0, 1)$ est donné par

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y \\ x + y & \text{si } x \neq y \end{cases}.$$

Soit $T : X \rightarrow X$ est défini par

$$Tx = \begin{cases} \{0, 1\} & \text{si } x \in \{0, 1, 2\} \\ \{0, x - 1\} & \text{si } x \geq 3 \end{cases}.$$

Soit $x \geq 3$ et $y = 0$, alors on obtient

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{H(Tx, Ty)}{d(x, y)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - 1}{x} = 1.$$

Ainsi, T n'est pas une contraction multivoque. Maintenant, nous pouvons affirmer que, T est multivoque θ -contraction avec $\theta(t) = e^{\sqrt{te^t}}$ avec $k = e^{-\frac{1}{2}}$.

Pour trouver 2.8, il faut montrer que

$$\frac{H(Tx, Ty)}{d(x, y)} e^{H(Tx, Ty) - d(x, y)} \leq e^{-1}.$$

Tout d'abord, on remarque que

$$H(Tx, Ty) > 0 \Leftrightarrow (x \neq y \text{ et } \{x, y\} \cap \{0, 1, 2\} \text{ est vide ou singleton}).$$

Maintenant, sans perte de généralité, nous pouvons supposer $x > y$ dans les cas suivants.

Case 1. Si $\{x, y\} \cap \{0, 1, 2\}$ est singleton, alors

$$H(Tx, Ty) = x - 1 \text{ et } d(x, y) \in \{x, x + 1, x + 2\}.$$

Ainsi, nous avons

$$\frac{H(Tx, Ty)}{d(x, y)} e^{H(Tx, Ty) - d(x, y)} \leq \frac{x - 1}{x} e^{-1} \leq e^{-1}.$$

Case 2. Si $\{x, y\} \cap \{0, 1, 2\}$ est vide, alors

$$H(Tx, Ty) = x - 1 \text{ et } d(x, y) = x + y.$$

Ainsi, nous avons

$$\frac{H(Tx, Ty)}{d(x, y)} e^{H(Tx, Ty) - d(x, y)} \leq \frac{x - 1}{x + y} e^{-1 - y} \leq e^{-1}.$$

Cela montre que toutes les conditions du théorème 2.28 (ou du théorème 2.29) sont satisfaites et donc T admet un point fixe.

Théorème 2.30. [63] *Soient (X, d) un espace métrique complet, $T: X \rightarrow CB(X)$ est une θ -contraction non-linéaire multivoque avec $\theta \in \Theta_*$. S'il existe $k: (0, \infty) \rightarrow [0, 1)$ tel que*

$$\limsup_{t \rightarrow s^+} k(t) < 1, \text{ pour tout } s \in [0, \infty).$$

Alors T a un point fixe.

En même année, Minak et Altun [64] ont introduit la notion de (α, θ) -contraction multivoque et ont donné quelques résultats du point fixe pour des applications de ce type sur un espace métrique complet.

Définition 2.16. [64] *Soient (X, d) un espace métrique, $T: X \rightarrow CB(X)$ une application multivoque et $\alpha: X \times X \rightarrow [0, \infty)$ une fonction. On dit alors que T une (α, θ) -contraction multivoque s'il existe $\theta \in \Theta$ et $k \in (0, 1)$ tels que*

$$\theta(H(Tx, Ty)) \leq [\theta(d(x, y))]^k,$$

pour tout $(x, y) \in S$, où $S = \{(x, y) : \alpha(x, y) \geq 1 \text{ et } H(Tx, Ty) > 0\}$.

Théorème 2.31. [64] *Soient (X, d) un espace métrique complet et $T: X \rightarrow K(X)$ une (α, θ) -contraction multivoque, avec $\theta \in \Theta$ et $\alpha: X \times X \rightarrow [0, \infty)$ une fonction. Supposons que les conditions suivantes sont satisfaites :*

1. T est α -admissible.
2. Il existe $x_0 \in X$ tel que $\alpha(x_0, Tx_0) \geq 1$.
3. T est semi-continue supérieurement ou X est α -régulier, i.e., pour toute suite $\{x_n\}$ dans X tel que $x_n \rightarrow x \in X$ et $\alpha(x_n, x_{n+1}) \geq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc $\alpha(x_n, x) \geq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Alors T a un point fixe.

On peut prendre $CB(X)$ au lieu de $K(X)$ en ajoutant la condition (Θ_4) sur θ et on obtient le théorème

Théorème 2.32. [64] Soient (X, d) un espace métrique complet et $T: X \rightarrow CB(X)$ une (α, θ) -contraction multivoque, avec $\theta \in \Theta_*$ et $\alpha: X \times X \rightarrow [0, \infty)$ une fonction. Supposons que les conditions suivantes sont satisfaites :

1. T est α -admissible.
2. Il existe $x_0 \in X$ tel que $\alpha(x_0, Tx_0) \geq 1$.
3. T est semi-continue supérieurement ou X est α -régulier, i.e., pour toute suite $\{x_n\}$ dans X tel que $x_n \rightarrow x \in X$ et $\alpha(x_n, x_{n+1}) \geq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\alpha(x_n, x) \geq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Alors T a un point fixe.

Théorème 2.33. [64] Soient (X, d) un espace métrique complet et $T: X \rightarrow CB(X)$ (resp. $K(X)$) une application multivoque et $\alpha: X \times X \rightarrow [0, \infty)$ une fonction. Supposons que les conditions suivantes sont satisfaites :

1. T est α_* -admissible.
2. Il existe $\theta \in \Theta_*$ (resp. $\theta \in \Theta$) et $k \in (0, 1)$ tels que

$$\theta(H(Tx, Ty)) \leq [\theta(d(x, y))]^k,$$

pour tout $(x, y) \in S_*$, où

$$S_* = \{(x, y) : \alpha_*(x, y) \geq 1 \text{ et } H(Tx, Ty) > 0\} \subset X \times X.$$

3. Il existe $x_0 \in X$ tel que $\alpha(x_0, Tx_0) \geq 1$.
4. T est semi-continue supérieurement ou X est α -régulier, i.e., pour toute suite $\{x_n\}$ dans X tel que $x_n \rightarrow x \in X$ et $\alpha(x_n, x_{n+1}) \geq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\alpha(x_n, x) \geq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Alors T a un point fixe.

Théorème du point fixe multivoque pour des $(\alpha_*, \eta_*, \theta)$ -contractions multivoques de type Geraghty

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous combinons le concept de (α, η) -admissibilité avec la θ -contraction et le type de contraction de Geraghty dans le contexte des applications multivoques, quelques résultats d'existence d'un point fixe dans des espaces métriques complets ont été fournis. Nous présentons quelques résultats dans des espaces métriques avec une relation d'ordre partiel et dans des espaces métriques muni d'un graphe en utilisant les résultats principaux obtenus.

Premièrement, Samet et al. [77] ont introduit le concept de l'application univoque α -admissible, après Asl et al. [9] ont étendu cette notion aux applications multivoques en introduisant la notion d'applications α_* -admissibles. Plus tard, Mohammadi et al. [67] ont introduit le concept de α -admissible pour les applications multivoques.

Soit (X, d) un espace métrique, $CB(X)$ est l'ensemble de tous les sous-ensembles non vides bornés de X . Pour tout $A, B \in CB(X)$ on définit les deux fonctions : $D, \delta : CB(X) \times CB(X) \rightarrow \mathbb{R}_+$ tel que

$$D(A, B) = \inf\{d(a, b); a \in A, b \in B\},$$

$$\delta(A, B) = \sup\{d(a, b); a \in A, b \in B\}.$$

Si A est constituée en un seul point a , on écrit $\delta(A, B) = \delta(a, B)$ et $D(A, B) = D(a, B)$, aussi si $B = \{b\}$ est un singleton nous écrivons

$$\delta(A, B) = D(A, B) = d(a, b).$$

Il est clair que δ satisfait les propriétés suivantes :

$$\delta(A, B) = \delta(B, A) \geq 0,$$

$$\delta(A, B) \leq \delta(A, C) + \delta(C, B),$$

$$\delta(A, A) = \text{diam}A,$$

$$\delta(A, B) = 0 \text{ implique } A = B = \{a\},$$

pour tout $A, B, C \in CB(X)$.

Notez que pour tout $a \in A$ et $b \in B$ nous avons

$$D(A, B) \leq d(a, b) \leq \delta(A, B),$$

où $A, B \in CB(X)$.

Définition 3.1. [41] Soient (X, d) un espace métrique et $\eta, \alpha: X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+$ deux fonctions données avec η bornée. Une application $T: X \rightarrow CL(X)$ est dite α_* -admissible par rapport à η , si pour tout $x, y \in X$

$$\alpha(x, y) \geq \eta(x, y) \implies \alpha_*(Tx, Ty) \geq \eta_*(Tx, Ty),$$

où

$$\alpha_*(Tx, Ty) = \inf \{ \alpha(a, b) : a \in Tx, b \in Ty \},$$

et

$$\eta_*(Tx, Ty) = \sup \{ \eta(a, b) : a \in Tx, b \in Ty \}.$$

Définition 3.2. [45] Soient (X, d) un espace métrique, $T: X \rightarrow CL(X)$ une application multivoque et $\alpha: X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction. T est appelée α, η -semi-continue inférieurement si pour $x \in X$ et pour toute suite $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dans X avec pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, Tx_n) = 0 \\ \text{et} \\ \alpha(x_n, x_{n+1}) \geq \eta(x_n, x_{n+1}) \end{array} \right. \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \inf d(x_n, Tx_n) \geq d(x, Tx).$$

Définition 3.3. [49] Soit Θ l'ensemble de toutes les fonctions $\theta : (0, +\infty) \rightarrow (1, +\infty)$ satisfaisant :

(θ_1) : θ est croissante,

(θ_2) : pour toute suite $\{t_n\}$ dans $(0, +\infty)$: $\lim_{n \rightarrow \infty} \theta(t_n) = 1 \iff \lim_{n \rightarrow \infty} t_n = 0$,

(θ_3) : il existe $\rho \in (0, 1)$ et $\ell \in [0, \infty)$ tel que $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\theta(t) - 1}{t^\rho} = \ell$.

3.2 Fonctions de Geraghty

Nous présentons maintenant les concepts de fonction de Geraghty et de contraction de Geraghty qui ont été introduit par Geraghty [37] dans son article de recherche. Il vaut la peine de préciser qu'une fonction de Geraghty est aussi une fonction de contrôle.

Définition 3.4. [37] Une fonction $\beta : [0, \infty) \rightarrow [0, 1)$ est appelée fonction de Geraghty si elle est vérifie

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \beta(t_n) = 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = 0,$$

où $\{t_n\}$ une suite dans $(0, +\infty)$.

Exemple 3.2.1. [37] On donne quelques exemples qui valident la définition précédent.

$$\beta_1(t) = \begin{cases} \frac{1}{1+t} & \text{si } t \in (0, +\infty) \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}, \quad \beta_2(t) = \begin{cases} \frac{e^{-t}}{1+t} & \text{si } t \in (0, +\infty) \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}.$$

Définition 3.5. [37] Une application $T : X \rightarrow X$ est appelée contraction de Geraghty s'il existe une fonction de Geraghty β telle que

$$d(Tx, Ty) \leq \beta(d(x, y))d(x, y),$$

pour tout $x, y \in X$.

Exemple 3.2.2. Soit $X = R_+$ muni de la distance usuelle. On définit $T : X \rightarrow X$ par $Tx = \frac{x}{1+x}$ pour tout $x \in X$ et $\beta : R_+ \rightarrow [0, 1)$ par

$$\beta(t) = \begin{cases} \frac{2}{2+t} & t \in (0, \infty) \\ 0 & t = 0 \end{cases}.$$

Alors β est une application de Geraghty et T est une contraction de Geraghty.

Nous énonçons maintenant le résultat du point fixe de Geraghty.

Théorème 3.1. [37] *Toute contraction de Geraghty T d'un espace métrique complet (X, d) en lui-même a un unique point fixe. De plus si $x_0 \in X$ et $x_{n+1} = Tx_n$, alors la suite $\{x_n\}$ converge vers ce point fixe.*

Soit Ω l'ensemble des fonctions $\beta: [0, \infty) \rightarrow [0, 1)$ satisfaisant

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \beta(t_n) = 1 \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = 0.$$

3.3 Théorème du point fixe pour des $(\alpha_*, \eta_*, \theta)$ -contractions multivoques de type Geraghty

Maintenant, on va introduire un nouveau type des contractions, s'appelle $(\alpha_*, \eta_*, \theta)$ -contraction multivoque de type de Geraghty.

Définition 3.6. *Soient (X, d) un espace métrique et $\alpha, \eta: X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+$ des application. L'application $T: X \rightarrow CL(X)$ est une $(\alpha_*, \eta_*, \theta)$ -contraction multivoque de type de Geraghty, s'il existe une fonction $\theta \in \Theta$, $\beta \in \Omega$ et $\kappa: (0, \infty) \rightarrow [0, 1)$ satisfaisant $\lim_{t \rightarrow s^+} \sup \kappa(t) < 1$ pour tout $s \in (0, \infty)$ tels que pour tout $x, y \in X$*

$$\theta(H(Tx, Ty)) \leq \left[\theta(\beta(d(x, y))d(x, y)) \right]^{\kappa(d(x, y))}, \quad (3.1)$$

avec $\alpha_*(x, y) \geq \eta_*(x, y)$ et $H(Tx, Ty) > 0$.

Grâce à la définition 3.6, on peut énoncer le théorème suivant :

Théorème 3.2. *Soient (X, d) un espace métrique complet et $T: X \rightarrow K(X)$ une $(\alpha_*, \eta_*, \theta)$ -contraction multivoque de type de Geraghty. Supposons que les conditions suivantes soient satisfaites :*

(H_1) : T is α_* -admissible par rapport à η .

(H_2) : il existe $x_0 \in X$ et $x_1 \in Tx_0$ tel que $\alpha(x_0, x_1) \geq \eta(x_0, x_1)$.

(H_3) : X est α - η -régulier, i.e., pour toute suite $\{x_n\}$ dans X telle que $x_n \rightarrow x$ et $\alpha(x_n, x_{n+1}) \geq \eta(x_n, x_{n+1})$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\alpha(x_n, x) \geq \eta(x_n, x)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Alors T admet un point fixe dans X .

Preuve. D'après (H_2) il y a $x_0 \in X$ et $x_1 \in Tx_0$ tels que $\alpha(x_0, x_1) \geq \eta(x_0, x_1)$, si $x_0 = x_1$, ou, $x_1 \in Tx_1$, donc x_1 est un point fixe. Supposons le contraire, alors $H(Tx_0, Tx_1) \geq d(x_1, Tx_1) > 0$ et par (H_1) on obtient $\alpha_*(x_0, x_1) \geq \eta_*(x_0, x_1)$, donc en utilisant (4.1) nous obtenons

$$\begin{aligned} \theta(d(x_1, Tx_1)) &\leq \theta(H(Tx_0, Tx_1)) \\ &\leq \left[\theta(\beta(d(x_0, x_1))d(x_0, x_1)) \right]^{\kappa(d(x_0, x_1))}. \end{aligned}$$

La compacité de Tx_1 , implique qu'il existe $x_2 \in Tx_1$, tel que

$$\begin{aligned} \theta(d(x_1, x_2)) &\leq \theta(H(Tx_0, Tx_1)) \\ &\leq \left[\theta(\beta(d(x_0, x_1))d(x_0, x_1)) \right]^{\kappa(d(x_0, x_1))} \\ &< [\theta(d(x_0, x_1))]^{\kappa(d(x_0, x_1))}. \end{aligned}$$

Supposons que $x_2 \neq x_1$ et $x_2 \notin Tx_2$, donc $H(Tx_1, Tx_2) \geq d(x_2, Tx_2) > 0$.

D'autre part puisque $x_2 \in Tx_1$ et à partir de la définition de α_* et η_* , on obtient

$$\begin{aligned} \alpha(x_1, x_2) &\geq \alpha_*(Tx_0, Tx_1) \\ &\geq \eta_*(Tx_0, Tx_1) \\ &\geq \eta(x_1, x_2), \end{aligned}$$

mais T est α_* -admissible, donc nous obtenons $\alpha_*(Tx_1, Tx_2) \geq \eta_*(Tx_1, Tx_2)$.

Maintenant, en utilisant (4.1), on obtient

$$\begin{aligned} 1 < \theta(d(x_2, Tx_2)) &\leq \theta(H(Tx_1, Tx_2)) \\ &\leq \left[\theta(\beta(d(x_1, x_2))d(x_1, x_2)) \right]^{\kappa(d(x_1, x_2))} \\ &< \left[\theta(d(x_1, x_2)) \right]^{\kappa(d(x_1, x_2))}. \end{aligned}$$

La compacité de l'ensemble Tx_2 implique l'existence de $x_3 \in Tx_2$. Supposons que $x_2 \neq x_3$ et $x_3 \notin Tx_3$, alors $\alpha_*(Tx_1, Tx_2) \geq \eta_*(Tx_1, Tx_2)$ et $H(Tx_2, Tx_3) > 0$, donc en utilisant (4.1)

nous obtenons :

$$\begin{aligned} \theta(d(x_2, x_3)) &\leq \theta(H(Tx_1, Tx_2)) \\ &\leq \left[\theta(\beta(d(x_1, x_2))d(x_1, x_2)) \right]^{\kappa(d(x_1, x_2))} \\ &< \left[\theta(d(x_1, x_2)) \right]^{\kappa(d(x_1, x_2))}. \end{aligned}$$

En continuant de la même manière, on peut construire une suite $\{x_n\}$ dans X telle que $x_{n+1} \in Tx_n$. S'il existe n_0 tel que $x_{n_0+1} = x_{n_0}$, ou $x_{n_0} \in Tx_{n_0}$ alors x_{n_0} est un point fixe. Supposons que $x_{n+1} \neq x_n$ et $x_n \notin Tx_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc $H(Tx_{n-1}, Tx_n) > 0$. D'après la définition de la suite $\{x_n\}$, nous avons $x_n \in Tx_{n-1}$ donc on obtient

$$\begin{aligned} \alpha(x_{n-1}, x_n) &\geq \alpha_*(Tx_{n-2}, Tx_{n-1}) \\ &\geq \eta_*(Tx_{n-2}, Tx_{n-1}) \\ &\geq \eta(x_{n-1}, x_n), \end{aligned}$$

alors la α_* -admissibilité de T implique $\alpha_*(Tx_{n-1}, Tx_n) \geq \eta_*(Tx_{n-1}, Tx_n)$.

En utilisant (4.1) on trouve :

$$\begin{aligned} 1 < \theta(d(x_n, x_{n+1})) &\leq \theta(H(Tx_{n-1}, Tx_n)) \\ &\leq \left[\theta(\beta(d(x_{n-1}, x_n))d(x_{n-1}, x_n)) \right]^{\kappa(d(x_{n-1}, x_n))}. \end{aligned}$$

Mais $d(x_{n+1}, x_n) \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow +\infty$ et $\limsup_{t \rightarrow s^+} \kappa(t) < 1$, il existe $\sigma \in (0, 1)$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que $\kappa(d(x_{n+1}, x_n)) < \sigma$, pour tout $n \geq n_0$. Ainsi nous avons

$$1 < \theta(d(x_n, x_{n+1})) < \left[\theta(d(x_0, x_1)) \right]^{\sigma^{n-n_0}}, \quad \text{pour tout } n \geq n_0. \quad (3.2)$$

Passant à la limite lorsque $n \rightarrow \infty$, nous obtenons

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \theta(d(x_n, x_{n+1})) = 1,$$

en utilisant (θ_2) on obtient

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_{n+1}, x_n) = 0.$$

D'après la propriété (θ_3) sur θ , il existe $\rho \in [0, 1)$ et $\ell \in (0, \infty]$ tel que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\theta(d(x_n, x_{n+1})) - 1}{(d(x_n, x_{n+1}))^\rho} = \ell.$$

Si $\ell < \infty$, soit $2\varepsilon = \ell$, donc la définition de la limite assure l'existence de $n \geq n_0$ tel que

$$\begin{aligned} \varepsilon = \ell - \varepsilon &\leq \frac{\theta(d(x_n, x_{n+1})) - 1}{(d(x_n, x_{n+1}))^\rho} = \ell \\ (d(x_n, x_{n+1}))^\rho &\leq \frac{\theta(d(x_n, x_{n+1})) - 1}{\varepsilon}. \end{aligned}$$

L'inégalité (3.2) donne :

$$n(d(x_n, x_{n+1}))^\rho \leq \frac{n(\theta(d(x_0, x_1))^{\sigma^{n-n_0}} - 1)}{\varepsilon}. \quad (3.3)$$

Si $\ell = \infty$, soit A un nombre réel positif arbitraire, donc d'après la définition de la limite il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_1$ on a

$$\frac{\theta(d(x_n, x_{n+1})) - 1}{(d(x_n, x_{n+1}))^\rho} > A,$$

ce qui implique que

$$n(d(x_n, x_{n+1}))^\rho \leq \frac{n(\theta(d(x_0, x_1))^{\sigma^{n-n_0}} - 1)}{A}. \quad (3.4)$$

Passant à la limite quand $n \rightarrow \infty$ dans (3.4)(ou dans (3.3)), on obtient

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(d(x_n, x_{n+1}))^\rho = 0,$$

il existe $n_2 \geq \max\{n_0, n_1\}$ tel que pour tout $n \geq n_2$, on a

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \frac{1}{n^{\frac{1}{\rho}}},$$

ce qui implique que

$$\sum_{n=1}^{\infty} d(x_n, x_{n+1}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{\rho}}} < \infty.$$

Alors la série $\sum_{n=1}^{\infty} d(x_n, x_{n+1})$ est convergente, donc son reste tend à 0.

Pour tout $n \geq m \geq n_1$, on a

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq \sum_{i=n}^{m-1} d(x_i, x_{i+1}) \\ &\leq \sum_{i=n}^{\infty} d(x_i, x_{i+1}) \rightarrow 0 \text{ lorsque } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Donc $\{x_n\}$ est une suite de Cauchy.

Puisque (X, d) est complet, donc $\{x_n\}$ converge vers quelque $x \in X$. Par (H_3) , on obtient

$\alpha(x_n, x) \geq \eta(x_n, x)$ et $H(Tx_n, Tx) > 0$, puis en utilisant (4.1) nous obtenons

$$\begin{aligned} 1 < \theta(d(x_{n+1}, Tx)) &\leq \theta(H(Tx_n, Tx)) \\ &< \left[\theta(d(x_n, x)) \right]^{\sigma^{n-n_0}}. \end{aligned}$$

Passant à la limite quand $n \rightarrow \infty$, on obtient

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \theta(d(x_{n+1}, Tx)) = 1,$$

alors par (θ_2) on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_{n+1}, Tx) = 0,$$

ce qui implique que $x \in Tx$. □

Remarque 3.3.1. On peut remplacer l'hypothèse (H_3) par la α, η -semi-continuité inférieure de T , i.e., si T est α, η -semi-continue inférieurement, alors pour certains $x \in X$ et une suite $\{x_n\} \subset X$ tels que $\lim_{n \rightarrow +\infty} d(x_n, x) = 0$ et $\alpha(x_n, x_{n+1}) \geq \eta(x_n, x_{n+1})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons

$$0 \leq d(x, Tx) \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \inf d(x_n, Tx_n) = 0.$$

D'où, $x \in Tx$.

Théorème 3.3. Soient (X, d) un espace métrique complet et $T: X \rightarrow CB(X)$ une $(\alpha_*, \eta_*, \theta)$ -Contraction multivoque de type Geraghty avec θ est continue à droite. Supposons que les conditions suivantes sont satisfaites.

(H_1) : T is α_* -admissible par rapport à η .

(H_2) : Il existe $x_0 \in X$ et $x_1 \in Tx_0$ tels que $\alpha(x_0, x_1) \geq \eta(x_0, x_1)$.

(H_3) : X est $\alpha - \eta$ -régulier, c'est à dire pour toute suite $\{x_n\}$ dans X tel que $x_n \rightarrow x$ et $\alpha(x_n, x_{n+1}) \geq \eta(x_n, x_{n+1})$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons $\alpha(x_n, x) \geq \eta(x_n, x)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Alors T admet un point fixe.

Preuve. D'après (H_2) il y a $x_0 \in X$ et $x_1 \in Tx_0$ tels que $\alpha(x_0, x_1) \geq \eta(x_0, x_1)$, si $x_0 = x_1$ ou $x_1 \in Tx_1$, donc x_1 est un point fixe. Supposons le contraire, alors $H(Tx_0, Tx_1) \geq$

$d(x_1, Tx_1) > 0$ et en utilisant (4.1) on obtient

$$\begin{aligned} \theta(d(x_1, Tx_1)) &\leq \theta(H(Tx_0, Tx_1)) \\ &\leq \left[\theta(\beta(d(x_0, x_1))d(x_0, x_1)) \right]^{\kappa(d(x_0, x_1))} \\ &< \left[\theta(d(x_0, x_1)) \right]^{\kappa(d(x_0, x_1))}. \end{aligned}$$

Par la continuité à droite de θ , il existe $h_1 > 1$ tel que

$$\theta(h_1 H(Tx_0, Tx_1)) \leq \left[\theta(d(x_0, x_1)) \right]^{\kappa}.$$

En utilisant le lemme 2.1, il existe $x_2 \in Tx_1$ tel que

$$\begin{aligned} \theta(d(x_1, x_2)) &\leq \theta(h_1 H(Tx_0, Tx_1)) \\ &\leq \left[\theta(d(x_0, x_1)) \right]^{\kappa(d(x_0, x_1))} \\ &< \left[\theta(d(x_0, x_1)) \right]^{\kappa(x_0, x_1)}. \end{aligned}$$

Mais T est α_* -admissible par rapport à η , alors $\alpha_*(x_1, x_2) \geq \eta_*(x_1, x_2)$. Supposons que $x_1 \neq x_2$ et $x_2 \in Tx_1$, donc $H(Tx_1, Tx_2) \geq d(x_2, Tx_2) > 0$ et en utilisant (4.1), on obtient

$$\begin{aligned} 1 < \theta(d(x_2, Tx_2)) &\leq \theta(H(Tx_1, Tx_2)) \\ &\leq \left[\theta(\beta(d(x_1, x_2))d(x_1, x_2)) \right]^{\kappa(d(x_1, x_2))} \\ &< \left[\theta(d(x_1, x_2)) \right]^{\kappa(d(x_1, x_2))}. \end{aligned}$$

Mais θ est continue à droite et d'après le lemme 2.1, il existe $h_2 > 1$ et $x_3 \in Tx_2$ tels que

$$\begin{aligned} \theta(d(x_2, x_3)) &\leq \theta(h_2 H(Tx_1, Tx_2)) \\ &\leq \left[\theta(\beta(d(x_1, x_2))d(x_1, x_2)) \right]^{\kappa(d(x_1, x_2))} \\ &< \left[\theta(d(x_1, x_2)) \right]^{\kappa(d(x_1, x_2))}. \end{aligned}$$

En continuant de cette manière, on peut construire deux suites $\{x_n\} \subset X$ et $\{h_n\} \subset (1, \infty)$ telles que $x_n \neq x_{n+1}$, $x_{n+1} \in Tx_n$, $\alpha(x_n, x_{n+1}) \geq \eta(x_n, x_{n+1})$ et

$$\begin{aligned} 1 < \theta(d(x_n, x_{n+1})) &\leq \theta(h_n H(Tx_{n-1}, Tx_n)) \\ &\leq \left[\theta(\beta(d(x_{n-1}, x_n))d(x_{n-1}, x_n)) \right]^{\kappa(d(x_{n-1}, x_n))}. \end{aligned}$$

Puisque $d(x_{n+1}, x_n) \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$ et $\lim_{t \rightarrow s^+} \sup \kappa(t) < 1$, il existe $\sigma \in (0, 1)$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que $\kappa(d(x_{n+1}, x_n)) < \sigma$, pour tout $n \geq n_0$.

Ainsi nous avons

$$1 < \theta(d(x_n, x_{n+1})) < \left[\theta(d(x_0, x_1)) \right]^{\sigma^{n-n_0}}, \quad \forall n \geq n_0. \quad (3.5)$$

Passant à la limite quand $n \rightarrow \infty$, nous obtenons

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \theta(d(x_n, x_{n+1})) = 0,$$

par (θ_2) on obtient

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x_{n+1}) = 0.$$

Le reste de la preuve est comme dans la preuve du théorème 4.1. □

Corollaire 3.4. *Soient (X, d) un espace métrique complet, $\alpha: X \times X \rightarrow [0, +\infty)$ une fonction et $T: X \rightarrow CB(X)$ une application multivoque. Supposons que les affirmations suivantes soient vérifiées :*

- (i) *T est un α_* -admissible.*
- (ii) *Il existe $x_0 \in X$ et $x_1 \in Tx_0$ tels que $\alpha(x_0, x_1) \geq 1$.*
- (iii) *X est α -régulier, i.e., pour toute suite $\{x_n\}$ dans X qui converge vers $x \in X$ et $\alpha(x_n, x_{n+1}) \geq 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons $\alpha(x_n, x) \geq 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.*
- (iv) *Il existe $\theta \in \Theta$ avec θ est continue à droite, $\beta \in \Omega$ et $\kappa: [0, \infty) \rightarrow [0, 1)$ avec $\sup_{t>0} \lim_{t \rightarrow s^+} \kappa(t) < 1$, tels que pour tout $x, y \in X$*

$$\theta(H(Tx, Ty)) \leq \left[\theta(\beta(d(x, y))d(x, y)) \right]^{\kappa(d(x, y))},$$

avec $\alpha_(Tx, Ty) \geq 1$ et $H(Tx, Ty) > 0$.*

Alors T a un point fixe.

Si $\alpha(x, y) = \eta(x, y) = 1$, on obtient le corollaire suivant.

Corollaire 3.5. *Soient (X, d) un espace métrique complet et $T: X \rightarrow CB(X)$ est une application multivoque satisfaisant pour tout $x, y \in X$*

$$H(Tx, Ty) > 0 \implies \theta(H(Tx, Ty)) \leq \left[\theta(\beta(d(x, y))d(x, y)) \right]^{\kappa(d(x, y))},$$

où $\theta \in \Theta_*$, $\beta \in \Omega$ et $\kappa: [0, \infty) \rightarrow [0, 1)$ tels que $\sup_{t>0} \lim_{t \rightarrow s^+} \kappa(t) < 1$.

Alors T admet au moins un point fixe.

Exemple 3.3.1. Soit l'ensemble $X = \{1, 2, 3\}$ muni de la distance usuelle $d(x, y) = |x - y|$. On définit l'application $T: X \rightarrow X$ et les deux fonctions $\alpha, \eta: X \times X \rightarrow [0, +\infty)$ par

$$Tx = \begin{cases} \{2\} & \text{si } x \in \{1, 2\} \\ \{1\} & \text{si } x = 3 \end{cases},$$

$$\alpha(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } (x, y) \in \{(2, 3), (3, 2)\} \\ 2 & \text{sinon} \end{cases},$$

et

$$\eta(x, y) = \begin{cases} 3 & \text{si } (x, y) \in \{(2, 3), (3, 2)\} \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}.$$

On prend $\theta(t) = e^t$, $k(t) = \frac{4}{5}$ et $\beta(t) = \frac{t}{1+t}$.

Soit $x, y \in X$ tel que $\alpha(x, y) \geq \eta(x, y)$, donc $(x, y) \notin \{(2, 3), (3, 2)\}$ et dans ce cas nous avons :

$$\alpha_*(Tx, Ty) = 2 \geq \eta_*(Tx, Ty).$$

Alors T est α_* -admissible par rapport à η .

Pour la condition de contractive, nous n'avons que le cas suivant :

pour $x = 1$, et $y = 3$ on a

$$e = e^{H(T1, T2)} \leq e^{\frac{16}{15}}.$$

Pour $x = 1$ nous avons $2 \in T1$ et $\alpha(1, 2) = 2 \geq \eta(1, 2)$. De plus, il est évident que T est $\alpha - \eta$ -semi continu inférieurement. Alors toutes les hypothèses du théorème 4.1 sont vérifiées, donc T a un point fixe qui est 2.

3.4 Théorème du point fixe dans un espace métrique partiellement ordonné

Tout d'abord, on donne un théorème d'existence du point fixe dans un espace métrique partiellement ordonné, en utilisant les résultats fournis dans section précédente. On définit

$\alpha: X \times X \rightarrow [0, +\infty)$, $\eta: X \times X \rightarrow [0, +\infty)$ comme suit.

$$\alpha(x, y) = \begin{cases} 2 & \text{si } x \preceq y \\ 0 & \text{sinon} \end{cases},$$

$$\eta(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \preceq y \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Théorème 3.6. Soient $(X, \preceq, d)$ un espace métrique ordonné complet et $T: X \rightarrow CB(X)$ une application multivoque. Supposons que les affirmations suivantes sont vérifiées :

1. Pour tout $x \in X$ et $y \in Tx$ avec $x \preceq y$, nous avons $y \preceq z$ pour tout $z \in Ty$,
2. Il existe $x_0 \in X$ et $x_1 \in Tx_0$ tels que $x_0 \preceq x_1$,
3. Pour toute suite croissante $\{x_n\} \subset X$ avec $x_n \rightarrow x \in X$, alors $x_n \preceq x$, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
4. Il existe $\theta \in \hat{\Theta}$ (θ est continue à droite), $\beta \in \Omega$ et $\kappa: (0, \infty) \rightarrow [0, 1)$ satisfaisant

$$\lim_{t \rightarrow s^+} \sup \kappa(t) < 1 \text{ pour tout } s \in (0, \infty)$$

et pour tout $x, y \in X$

$$\theta(H(Tx, Ty)) \leq [\theta(\beta(d(x, y))d(x, y))]^{\kappa(d(x, y))}, \quad (3.6)$$

avec $x \preceq y$ et $H(Tx, Ty) > 0$.

Alors T a un point fixe.

3.5 Théorème du point fixe dans un espace métrique muni d'un graphe

Maintenant, on donne un théorème d'existence d'un point fixe pour des applications multivoques d'un espace métrique X muni d'un graphe, dans l'espace des sous-ensembles fermés et bornés non vides d'un espace métrique.

Considérons un graphe G tel que l'ensemble $V(G)$ de ses sommets coïncide avec X et l'ensemble $E(G)$ de ses arêtes contient toutes les boucles, i.e., $E(G) \supseteq \Delta$, où $\Delta =$

$\{(x, x) : x \in X\}$. Supposons que G n'a pas d'arêtes parallèles, nous pouvons donc identifier G avec la paire $(V(G), E(G))$. On définit $\alpha, \eta: X \times X \rightarrow [0, +\infty)$ comme suit.

$$\alpha(x, y) = \begin{cases} 2 & \text{si } (x, y) \in E(G) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases},$$

$$\eta(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } (x, y) \in E(G) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Théorème 3.7. Soient (X, d) un espace métrique complet muni d'un graphe G et $T: X \rightarrow CB(X)$ un application multivoque. Supposons que les conditions suivantes soient satisfaites :

1. Pour tout $x \in X$ et $y \in Tx$ avec $(x, y) \in E(G)$, nous avons $(y, z) \in E(G)$ pour tout $z \in Ty$,
2. Il existe $x_0 \in X$ et $x_1 \in Tx_0$ tels que $(x_0, x_1) \in E(G)$,
3. Pour toute suite $\{x_n\}$ dans X tel que $x_n \rightarrow x \in X$ et $(x_n, x_{n+1}) \in E(G)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $(x_n, x) \in E(G)$.
4. Il existe $\theta \in \Theta$ (θ est continue à droite), $\beta \in \Omega$ et $\kappa: (0, \infty) \rightarrow [0, 1)$ tels que

$$\limsup_{t \rightarrow s^+} \kappa(t) < 1 \text{ pour tout } s \in (0, \infty),$$

et pour tout $x, y \in X$

$$\theta(H(Tx, Ty)) \leq \left[\theta(\beta(d(x, y))d(x, y)) \right]^{\kappa(d(x, y))}, \quad (3.7)$$

avec $(x, y) \in E(G)$ et $H(Tx, Ty) > 0$.

Alors il existe un point x satisfaisant $x \in Tx$.

Théorème du point fixe commun pour des θ_δ -contractions multivoques via la continuité sous-séquentielle

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous utiliserons la notion de θ -contraction introduite par Jleli et Samet [49] et la notion δ -distance pour établir une coïncidence stricte et un point fixe commun strict de deux couples hybrides d'applications δ -compatible et sous-séquentiellement continue, sans continuité, continuité réciproque, continuité réciproque faible, complétude et l'inclusion de rangs.

4.2 Les applications compatibles, réciproquement continues

Définition 4.1. [47] *Les deux applications $f: X \rightarrow X$ et $S: X \rightarrow CB(X)$ sont dites commutatives sur X si pour tout $x \in X$: $fSx \subset Sfx$.*

Dans [79], Sessa a introduit le concept de commutativité faible pour les applications univoques sur un espace métrique et Sessa et al. [80] ont étendu ce concept au couple des application univoque et multivoque sur un espace métrique.

Définition 4.2. [80] *Les deux applications $S: X \rightarrow CB(X)$ et $f: X \rightarrow X$ sont dites faiblement commutatives sur X si $fSx \in CB(X)$ et pour tout $x \in X$*

$$\delta(Sfx, fSx) \leq \max\{\delta(fx, Sx), \text{diam}(fSx)\}.$$

On remarque que si f est une application univoque, alors l'ensemble fSx est singleton. Par conséquent, $\text{diam}(fSx) = 0$ pour tout $x \in X$ et la condition présidant se réduit à la condition donnée par Sessa [79], i.e.,

$$d(Sfx, fSx) \leq d(fx, Sx),$$

Dans leur article [56], Kaneko et Sessa ont étendu la compatibilité au couple d'applications univoque et multivoque comme suit.

Définition 4.3. [56] *Soit (X, d) un espace métrique. Les applications $f: X \rightarrow X$ et $S: X \rightarrow CB(X)$ sont dites compatibles si et seulement si pour tout $x \in X$, $fSx \in CB(X)$ on a*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} H(fSx_n, Sfx_n) = 0,$$

pour toute suite $\{x_n\}$ dans X satisfaisant

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Sx_n = M \in CB(X) \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} fx_n = t \in M.$$

Exemple 4.2.1. [20] Soit $X = [0, 2]$ muni de la distance euclidienne, On définit f et S comme suit

$$fx = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1 \\ \frac{x+1}{2}, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases} \quad Sx = \begin{cases} \left\{ \frac{1}{2} \right\}, & 0 \leq x < 1 \\ [1, x], & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

Considérons la suite $\{x_n\}$ définie par

$$x_n = 1 + \frac{1}{n} \quad \text{pour tout } n \geq 1,$$

on a

$$fx_n = 1 + \frac{1}{2n} \longrightarrow 1 \quad \text{lorsque } n \longrightarrow \infty,$$

$$Sx_n = \left[1, 1 + \frac{1}{n} \right] \longrightarrow 1 \quad \text{lorsque } n \longrightarrow \infty,$$

et $\lim_{n \rightarrow \infty} H(fSx_n, Sfx_n) = 0$, donc le couple (f, S) est compatible.

Jungck et Rhoades [52] ont généralisé le concept de compatibilité faible avec un couple d'applications univoque et multivoque comme ca

Définition 4.4. [52] *Les deux applications $f: X \rightarrow X$ et $S: X \rightarrow CB(X)$ sont dits faiblement compatibles s'ils commutent à leur point de coïncidence, i.e., si $fu \in Su$ pour $u \in X$, alors $fSu = Sfu$.*

Exemple 4.2.2. [16] Soit $X = [0, 1)$ et d la distance euclidienne, on définit les deux applications f, S comme suit :

$$fx = \frac{x+2}{3}, \quad Sx = \begin{cases} \{1\}, & 0 \leq x \leq 2, \\ [2, 4], & x \geq 2. \end{cases}$$

Il est clair que le point $x = 1$ est le point de coïncidence de f et S , puisque $f(1) = 1 \in \{1\} = S(1)$ et on a $fS(1) = \{1\} = Sf(1)$, donc (f, S) est faiblement compatible.

Définition 4.5. [60] *Le couple hybride d'applications (f, S) d'un espace métrique (X, d) est δ -compatible si*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta(Sfx_n, fSx_n) = 0,$$

pour toute suite $\{x_n\}$ dans X satisfaisant $fSx_n \in CB(X)$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Sx_n = \{z\} \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} fx_n = z,$$

pour quelques $z \in X$.

Définition 4.6. [71] *Le couple d'applications (f, g) sur un espace métrique (X, d) dans lui même est dite réciproquement continue si*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} fgx_n = ft \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} gfx_n = gt,$$

où

$$\lim_{n \rightarrow \infty} fx_n = \lim_{n \rightarrow \infty} gx_n = t,$$

pour quelques t dans X .

Plus tard, Singh et Mishra [82] généralisé le concept de continuité réciproque des applications univoques et multivoques comme suit.

Définition 4.7. [82] *Les deux applications $f: X \rightarrow X$ et $S: X \rightarrow CB(X)$ sont réciproquement continue sur X (resp. à $t \in X$) si et seulement si $fSx \in CB(X)$ pour tout $x \in X$ (resp. $fSt \in CB(X)$) et*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} fSx_n = fM \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} Sfx_n = St,$$

pour toute suite $\{x_n\}$ dans X satisfaisant

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Sx_n = M \in CB(X) \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} fx_n = t \in M.$$

Définition 4.8. [27] *Les deux applications f et g sur un espace métrique (X, d) dans lui-même sont dits sous-compatible s'il existe une suite $\{x_n\}$ telle que :*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} fx_n = \lim_{n \rightarrow \infty} gx_n = t \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} d(fgx_n, gfx_n) = 0,$$

pour quelques $t \in X$.

Définition 4.9. [27] *Soient $f, g: X \rightarrow X$ deux applications univoques. Le couple (f, g) est dite sous-séquentiellement continue s'il existe une suite $\{x_n\}$ dans X satisfaisant*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} fx_n = \lim_{n \rightarrow \infty} gx_n = z,$$

pour certains $z \in X$ et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} fgx_n = fz \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} gfx_n = gz.$$

Définition 4.10. [20] *Soient $f: X \rightarrow X$ et $S: X \rightarrow CB(X)$ deux applications univoque et multivoque respectivement, le couple hybride (f, S) est dite sous-séquentiellement continue s'il existe une suite $\{x_n\}$ tel que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Sx_n = M \in CB(X) \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} fx_n = z \in M,$$

pour certains $z \in X$ et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} fSx_n = fM \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} Sfx_n = Sz.$$

On remarque que la continuité ou la continuité réciproque implique la continuité sous-séquentielle, mais l'inverse n'est pas vraie en général comme l'on montre l'exemple suivant

Exemple 4.2.3. [5] Soient $X = [0, 1]$ et d la distance euclidienne, on définit f, S par

$$fx = \begin{cases} 1 - x & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \text{si } \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}, \quad Sx = \begin{cases} [0, x] & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ \left[x - \frac{1}{2}, x\right] & \text{si } \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}.$$

On considère une suite $\{x_n\}$ telle que pour tout $n \geq 2$ on a

$$x_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{n},$$

on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} fx_n = \frac{1}{2} \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} Sx_n = \left[0, \frac{1}{2}\right] \in CB(X),$$

et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} fSx_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{n}, 1\right] = \left[\frac{1}{2}, 1\right] = f\left(\left[0, \frac{1}{2}\right]\right),$$

et aussi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Sfx_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{n}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right] = \left[0, \frac{1}{2}\right] = S\left(\frac{1}{2}\right),$$

alors (f, S) est sous-subséquentiellement continue.

D'autre part, considérons une suite $\{y_n\}$ qui définie pour tout $n \geq 1$ par : $y_n = 1 + \frac{1}{n}$.

On a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} fy_n = \frac{1}{2} \in [0, 1], \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} Sy_n = [0, 1] \in CB(X),$$

mais

$$\lim_{n \rightarrow \infty} fSy_n = \lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\left[\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right]\right) \neq f([0, 1]),$$

alors f et S ne sont jamais réciproquement continus.

4.3 Théorème du point fixe commun sous des conditions contractives multivoques généralisées

Dans cette section, nous introduisons une application θ_δ -contraction multivoque et prouvons un théorème du point fixe commun pour deux couples hybrides d'applications avec δ -distance.

Définition 4.11. Soient (X, d) un espace métrique et $T : X \rightarrow CB(X)$ une application multivoque. Pour $\theta \in \Theta$, nous disons que T est θ_δ -contraction, s'il existe $k \in [0, 1]$ tel que pour tout $x, y \in X$,

$$\delta(Tx, Ty) > 0 \implies \theta(\delta(Tx, Ty)) \leq [\theta(d(x, y))]^k.$$

Définition 4.12. Soit f une application de l'espace métrique (X, d) dans lui même et soit $T : X \rightarrow CB(X)$ une application multivoque. Alors T est appelée (f, θ_δ) -contraction multivoque généralisée si pour tout $x, y \in X$ il existe $k \in [0, 1]$ tel que,

$$\delta(Tx, Ty) > 0 \implies \theta(\delta(Tx, Ty)) \leq [\theta(R(x, y))]^k,$$

où $\theta \in \Theta$ et

$$R(x, y) = \max \left\{ d(fx, fy), D(fx, Tx), D(fy, Ty), \frac{1}{2} [D(fx, Ty) + D(fy, Tx)] \right\}.$$

Maintenant nous étendons la dernière définition pour deux couples hybrides, afin d'établir un point fixe commun pour une application multivoque et l'autre univoque dans un espace métrique, sans continuité ni complétude de l'espace, nous n'utilisons que la continuité sous-séquentielle avec δ -compatibilité.

Théorème 4.1. Soient $f, g : X \rightarrow X$ deux applications univoques et $S, T : X \rightarrow CB(X)$ une application multivoque d'un espace métrique (X, d) . Si les deux couples (f, S) et (g, T) sont sous-séquentielle continus et δ -compatibles. Alors le couple (f, S) aussi bien que (g, T) a un point de coïncidence strict. De plus, f, g, S et T ont un point fixe strict commun à condition qu'il existe $k \in (0, 1)$ tel que pour tout $x, y \in X$ on a :

$$\delta(Sx, Ty) > 0 \implies \theta(\delta(Tx, Ty)) \leq [\theta(R(x, y))]^k, \quad (4.1)$$

où $\theta \in \Theta$, et

$$R(x, y) = \max \left\{ d(fx, fy), D(fx, Tx), D(fy, Ty), \frac{1}{2} [D(fx, Ty) + D(fy, Tx)] \right\}.$$

Preuve. Puisque (f, S) est sous-séquentielle continue, il existe une suite $\{x_n\}$ dans X telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Sx_n = M \in CB(X), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} fx_n = z \in M.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} fSx_n = fM, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} Sfx_n = Sz,$$

De plus, le couple (f, S) est δ -compatible implique que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta(fSx_n, Sfx_n) = \delta(fM, Sz) = 0,$$

ce qui donne $fM = Sz = \{fz\}$, et donc z est un point de coïncidence de f et S .

De même, pour le couple (g, T) il existe une suite $\{y_n\}$ dans X tel que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Ty_n = N \in CB(X) \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} gy_n = t \in N$$

et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} gTy_n = gN, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} Tgy_n = Tt.$$

Le couple (g, T) est δ -compatible, implique que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta(gTy_n, Tgy_n) = \delta(gN, Tt) = 0.$$

Alors $gN = Tt$ et Tt est un singleton, i.e., $Tt = \{gt\}$ et t est un point de coïncidence strict de g et T .

Maintenant, supposons que $fz \neq gt$, sinon $\delta(Sz, Tt) > 0$, sinon

$$d(fz, gt) \leq \delta(Sz, Tt) = 0,$$

ce qui est une contradiction. Alors en utilisant (4.1), on obtient :

$$\theta(\delta(Sz, Tt)) \leq [\theta(R(z, t))]^k.$$

Puisque $Sz = \{fz\}$ et $Tt = \{gt\}$, on obtient

$$D(fz, Sz) = D(gt, Tt) = 0,$$

$$D(fz, Tt) = d(fz, gt) \quad \text{et} \quad D(gt, Sz) = d(gt, fz).$$

Donc

$$R(z, t) = \max \left\{ d(fz, gt), D(fz, Sz), D(gt, Tt), \frac{1}{2} [D(fz, Tt) + D(gt, Sz)] \right\}.$$

En remplaçant in (4.1) on trouve

$$\theta(d(fz, gt)) = \theta(\delta(Sz, Tt)) \leq [\theta(d(fz, gt))]^k < \theta(d(fz, gt)),$$

ce qui est à contredit avec $\theta(t) > 1$ pour tout $t \geq 0$. Alors $fz = gt$.

Maintenant supposons que $z \neq fz$, en prenant $x = x_n$ et $y = t$ dans (4.1), $\delta(Sx_n, Tt) > 0$, en passant à la limite quand $n \rightarrow \infty$, on trouve

$$d(z, fz) = d(z, gt) \leq \delta(M, Tt) = 0,$$

ce qui contradiction avec $z \neq fz$, et nous avons donc

$$\theta(\delta(Sx_n, Tt)) \leq [\theta(R(x_n, t))]^k.$$

Passant à la limite quand $n \rightarrow \infty$, nous obtenons $M(x_n, t) \rightarrow d(z, fz)$ et nous avons donc :

$$\theta(d(z, fz)) \leq \theta(\delta(M, Tt) \leq [\theta(d(z, fz))]^k < \theta(d(z, fz)),$$

ce qui est une contradiction. Donc z est un point fixe pour f et S .

On va montrer que $z = t$, en prenant $x = x_n$ et $y = y_n$ dans (4.1), $\delta(Sx_n, Ty_n) > 0$, en passant à la limite quand $n \rightarrow \infty$, on obtient :

$$d(z, t) \leq \delta(M, N) = 0,$$

ce qui est une contradiction, nous avons donc :

$$\theta(\delta(Sx_n, Ty_n)) \leq \theta(R(x_n, y_n))$$

En prenant $n \rightarrow \infty$, nous avoir :

$$\theta(d(z, t)) < \theta(\delta(M, N) \leq [\theta(d(z, t))]^k < \theta(d(z, t)),$$

ce qui est une contradiction. Donc $z = t$ et par conséquent z est un point fixe commun pour f, g, S et T . Pour l'unicité, soit w un autre point fixe, et en utilisant (4.1), $\delta(Sz, Tw) > 0$, sinon $d(z, t) \leq \delta(Sz, Tw) = 0$, ce qui est une contradiction. Ensuite nous avons

$$\theta(d(z, w)) < \theta(\delta(Sz, Tw)) \leq [\theta(d(z, w))]^k < \theta(d(z, w)),$$

ce qui est une contradiction. Alors z est unique. □

Si $f = g$ et $S = T$ on obtient le corollaire suivant.

Corollaire 4.2. Soient (X, d) un espace métrique, $f: X \rightarrow X$ une application univoque et $S: X \rightarrow CB(X)$ une application multivoque. Supposons que le couple (f, S) est sous-séquentielle continue, δ -compatible et qu'il existe $\theta \in \Theta$ et $k \in [0, 1)$ tels que pour tout $x, y \in X$ nous avons

$$\delta(Sx, Sy) > 0 \implies \theta(\delta(Sx, Sy)) \leq [\theta(M(x, y))]^k,$$

où

$$R(x, y) = \max \left\{ d(fx, fy), D(fx, Sx), D(fy, Sy), \frac{1}{2} [D(fx, Sy) + D(fy, Sx)] \right\}.$$

Alors f et S ont un point fixe commun strict.

Si S et T sont des applications univoques, nous obtenons le corollaire.

Corollaire 4.3. Soit (X, d) un espace métrique et soit $f, g, S, T: X \rightarrow X$ des applications dans X , si le couple (f, S) est sous-séquentielle continue et compatible aussi bien que (g, T) . Alors f et S ont un point de coïncidence aussi bien que g et T . De plus, f, g, S et T ont un point fixe commun à condition qu'il existe $\tau > 0$ et $F \in \mathcal{F}$ tels que pour tout $x, y \in X$ on a

$$d(Sx, Ty) > 0 \implies \theta(d(Tx, Ty)) \leq [\theta(R(x, y))]^k,$$

où

$$R(x, y) = \max \left\{ d(fx, gy), d(fx, Sx), d(gy, Ty), \frac{1}{2} [d(fx, Ty) + d(gy, Sx)] \right\}.$$

Exemple 4.3.1. Soient $X = [0, 2]$ et $d(x, y) = |x - y|$, on définit f, g, S et T par

$$fx = gx = \begin{cases} \frac{x+1}{2} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{si } 1 < x \leq 2 \end{cases}, \quad Sx = Tx = \begin{cases} \{1\} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ [\frac{5}{4}, 2] & \text{si } 1 < x \leq 2 \end{cases}.$$

Considérons la suite $\{x_n\}$ pour tout $n \geq 1$ telle que $x_n = 1 - \frac{1}{n}$, il est clair que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} fx_n = 1 \in \{1\}$$

et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Tx_n = \{1\},$$

ce qui implique que le couple (f, T) est sous-séquentielle continue. D'autre part, nous avons

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta(fTx_n, Tfx_n) = \delta(\{1\}, \{1\}) = 0.$$

donc (f, T) est δ -compatible.

Pour l'inégalité (4.1), en prenant $\theta(t) = e^t$ et $k = \frac{2}{3}$, nous discutons les cas suivants :

1. Pour tout $x, y \in [0, 1]$, on a $\delta(Tx, Ty) = 0$.
2. Pour tout $x \in [0, 1]$ et $y \in (1, 2]$, on a :

$$\delta(Tx, Ty) = 1 \leq \frac{5}{6} \leq \frac{2}{3}D(fy, Ty),$$

ce qui implique

$$e^{\delta(Tx, Ty)} \leq (e^{D(fy, Ty)})^{\frac{2}{3}} \leq (e^{R(x, y)})^{\frac{2}{3}}.$$

3. Pour $x \in (1, 2]$ et $y \in [0, 1]$, on a

$$\delta(Tx, Ty) = 1 \leq \frac{5}{6} \leq \frac{2}{3}D(fy, Ty),$$

cela donne

$$e^{\delta(Tx, Ty)} \leq (e^{D(fy, Ty)})^{\frac{2}{3}} \leq (e^{R(x, y)})^{\frac{2}{3}}.$$

4. Pour $x, y \in (1, 2]$ nous avons

$$\delta(Tx, Ty) = \frac{3}{4} \leq \frac{5}{6} = \frac{2}{3}D(fx, Tx),$$

alors

$$e^{\delta(Tx, Ty)} \leq (e^{D(fx, Tx)})^{\frac{2}{3}} \leq (e^{R(x, y)})^{\frac{2}{3}}.$$

Donc f et T satisfaisant (4.1), donc 1 est l'unique point fixe commun strict de f et T .

Applications

5.1 Introduction

Dans les domaines de l'ingénierie et des sciences, plusieurs applications peuvent être gérées via les intégrales et les inclusions intégrales de Fredholm ou de Volterra. Nombreux problèmes de valeurs initiales et de valeurs limites peuvent être transformés en équations intégrales de Fredholm ou de Volterra. Les applications peuvent être trouvées dans la modélisation mathématique de la physique et de la biologie. Ainsi, on peut observer l'application de ces équations dans les sciences biologiques tels que le transfert de chaleur ou le rayonnement thermique et les espèces biologiques vivant ensemble, le modèle de croissance de la population de Volterra, la diffusion en mécanique quantique, la théorie cinétique des gaz, les phénomènes héréditaires en biologie et physique, la propagation de poissonsensemencés dans un nouveau lac, l'électrostatique et la génétique des populations. En fait, les sciences biologiques font partie des nombreux domaines qui peuvent être décrits par des équations intégrales et, dans certaines circonstances, des problèmes tels que l'économie. De même, les équations intégrales singulières occupent une priorité comparable dans des domaines tels que la radiographie aux rayons X, la microscopie, la radioastronomie, la diffusion atomique, l'émission d'électrons, l'évaluation des fibres optiques, la télémétrie radar, la sismologie et le diagnostic plasma.

Plusieurs méthodes différentes sont présentes dans la littérature pour trouver la solution aux équations intégrales, intégrro-différentielles et inclusions intégrales de Volterra ou Fred-

holm. Dans plusieurs cas, un problème conduit à la détermination de la solution exacte. Cependant, dans la plupart des cas, il est très difficile de trouver la solution exacte et parfois c'est impossible.

Dans certains cas, les chercheurs tentent de mettre en évidence l'approximation quantitative et la nature de la solution d'un problème. L'une des techniques, parmi toutes les nombreuses stratégies, est la théorie du point fixe. Cette théorie peut être utilisée comme un outil essentiel pour discuter de l'existence et de l'unicité de la solution de plusieurs types intégrale, différentielle, intégro-différentielles, intégrales fractionnaires et inclusions intégrales ou des équations différentielles

Dans ce chapitre, on va appliquer les théorèmes 3.6 et 4.1 pour étudier un problème d'existence de la solution des inclusions différentielles fractionnelles, et d'un système d'inclusions intégrales de type Volterra.

5.2 Existence de solution pour une inclusion intégrale de Volterra

Dans cette section, nous appliquons les résultats obtenus pour affirmer l'existence de la solution pour un système d'inclusions intégrales.

Considérons le système d'inclusions intégrales suivants.

$$x_i(t) \in f(t) + \int_0^t K_i(t, s, x_i(s)) ds, i = 1, 2 \quad (5.1)$$

où f est une fonction continue sur $[0, 1]$, i.e., $f \in C([0, 1], \mathbb{R})$ et $K_i : [0, 1] \times [0, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow CB(\mathbb{R})$ sont des applications multivoques.

On sait que $X = C([0, 1])$ muni par la distance de convergence uniforme $d_\infty(x, y) = \sup_{t \in [0, 1]} |x(t) - y(t)|$ est une espace métrique complète.

Nous définissons deux applications multivoques :

$$\begin{aligned} Sx_1(t) &= \left\{ z \in X, z(t) \in f(t) + \int_0^t K_1(t, s, x_1(s)) ds \right\} \\ Tx_2(t) &= \left\{ z \in X, z(t) \in f(t) + \int_0^t K_2(t, s, x_2(s)) ds \right\}. \end{aligned}$$

Supposons que

A_1 : Les fonctions $K_i : (t, s) \mapsto K_i(t, s, x_i(s))$ sont continues sur $[0, 1] \times (0, 1]$ pour tout $x \in C((0, 1])$,

A_2 : Pour tout $x_i \in X$ et $k_i \in K_i$ ($i = 1, 2$), il existe une fonction $\varphi : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, +\infty)$ tels que

$$|k_1(t, s, x_1(s)) - k_2(t, s, x_2(s))| \leq \varphi(t, s)|x_1 - x_2|,$$

A_3 : Il existe $\tau > 0$ tel que

$$\sup_{t \in [0, 1]} \int_0^t \varphi(t, s) ds \leq e^{-\tau},$$

A_4 : Il existe deux suites $\{x_n\}, \{y_n\}$ et deux éléments x, y dans X tels que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Sx_n = M \in B(X),$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \in M,$$

et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Ty_n = N \in B(X),$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y \in N.$$

Théorème 5.1. *Sous les hypothèses $(A_1) - (A_4)$ le système d'inclusions intégrales (5.1) a une solution en $C((0, 1]) \times C([0, 1])$.*

Preuve. Le système (5.1) a une solution si et seulement si S et T ont un point fixe commun.

Notons I_X l'opérateur identité sur X .

D'après la condition (4), les deux couples (I_X, S) et (I_X, T) sont sous-séquentiellement continus aussi que δ -compatible.

Pour la condition de contraction (4.1), soit $x_1, x_2 \in C([0, 1])$ et $z_1 \in Sx_1$, alors il existe $k_1 \in K_1$ tel que

$$z_1(t) = f(t) + \int_0^t k_1(t, s, x_1(s)) ds.$$

Soit $z_2 \in f(t) + \int_0^t K_2(t, s, x_2(s)) ds$, i.e.,

$$z_2(t) = f(t) + \int_0^1 k_2(t, s, x_2(s)) ds,$$

pour certains $k_2 \in K_2$, nous avons donc

$$\begin{aligned} |z_1 - z_2| &\leq \int_0^t |k_1(t, s, x_1(s)) - k_2(t, s, x_2(s))| ds \\ &\leq \int_0^t |x_1 - x_2| \varphi(t, s) ds. \end{aligned}$$

Puisque $K_i, i = 1, 2$ sont bornés, on a donc

$$\sup_{z_i \in X} |z_1 - z_2| \leq \|x_1 - x_2\|_\infty \int_0^t \varphi(t, s) ds,$$

ce qui implique que

$$\begin{aligned} \delta(Sx_1, Tx_2) &\leq e^{-\tau} d(x_1, x_2) \\ &\leq e^{-\tau} \max \left\{ d(x_1, x_2), d(x_1, Sx_1), d(x_2, Tx_2), \frac{1}{2} (d(x_1, Tx_2) + d(x_2, Sx_1)) \right\}. \end{aligned}$$

Puisque θ est croissante, nous obtenons

$$e^{\sqrt{\delta(Sx_1, Tx_2)}} \leq \left(e^{\frac{\sqrt{L(x_1, x_2)}}{2}} \right)^{e^{-\tau}},$$

où

$$L(x_1, x_2) = \max \left\{ d(x_1, x_2), d(x_1, Sx_1), d(x_2, Tx_2), \frac{1}{2} (d(x_1, Tx_2) + d(x_2, Sx_1)) \right\}.$$

Donc toutes les hypothèses du théorème 4.1 sont satisfaites, avec $\theta(t) = e^{\sqrt{t}}$, $k = e^{-\tau}$ et $f = g = I_X$, donc le système (5.1) a une solution. $\square$

5.3 Existence de la solution pour une inclusion différentielle fractionnaire

Soit les problèmes aux limites d'inclusion différentielle d'ordre fractionnaire avec conditions intégrales :

$$\begin{cases} {}^c D^\alpha x(t) \in F(t, x(t)), \quad t \in I = [0, 1], \quad 1 < \alpha \leq 2 \\ x(0) - x'(0) = 0 \\ x(1) = \int_0^1 g(s, x(s)) ds \end{cases} \quad (5.2)$$

où ${}^c D^\alpha$ est la dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'ordre α , F et g sont des fonctions continues $F : I \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow K(\mathbb{R})$ et $g : [0, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Notons $X = C(I, \mathbb{R})$ l'espace de Banach des fonctions continues $x : I \longrightarrow \mathbb{R}$, avec la norme usuelle de sup

$$\|x\|_\infty = \sup\{|x(t)|, \quad t \in I\}.$$

X muni de la relation d'ordre partiel $\preceq$, i.e., pour tout $x, y \in X$ $x \preceq y$ si et seulement si $x(s) \leq y(s)$, donc $(X, d_\infty, \preceq)$ est un espace métrique ordonné complète.

Nous présentons maintenant un résultat très important en analyse multivoque : le théorème de sélection de Michael.

Définition 5.1 (Sélection). [12] *Soit $F : X \rightarrow \mathcal{P}(Y)$ une fonction multivoque. Une fonction $f : X \rightarrow Y$ est dite sélection de F si*

$$f(x) \in Fx, \quad \text{pour tout } x \in X.$$

Théorème 5.2 (Théorème de sélection de Michael). [65] *Soient X un espace métrique, Y un espace de Banach et F une application multivoque semi-continue inférieurement et à valeurs convexes fermées non vides. Alors, F admet une sélection continue. C'est-à-dire qu'il existe une fonction continue $f : X \rightarrow Y$ telle que $f(x) \in Fx$, pour tout $x \in X$.*

On commence par donner la définition d'une solution au problème 5.2

Définition 5.2. *Une fonction $x \in C(I, \mathbb{R})$ est une solution de problème (5.2) s'il existe $v \in F(t, x(t))$ tel que*

$$\begin{cases} {}^c D^\alpha x(t) = v(t), & 0 \leq t \leq 1, \quad 1 < \alpha \leq 2 \\ x(0) - x'(0) = 0 \\ x(1) = \int_0^1 g(s, x(s)) ds \end{cases} \quad (5.3)$$

Pour l'existence de la solution du problème 5.3, on a besoin du lemme suivant

Lemme 5.3. *Une fonction x est une solution de (5.3) si et seulement si c'est une solution de l'équation intégrale fractionnaire :*

$$x(t) = \int_0^1 G(t, s)v(s)ds + \frac{t+1}{2} \int_0^1 g(s, x(s))ds,$$

où G est la fonction de Green donnée par

$$G(t, s) = \begin{cases} \frac{(t+1)(1-s)^{\alpha-1}}{2\Gamma(\alpha)} - \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, & 0 \leq s \leq t \\ \frac{(t+1)(1-s)^{\alpha-1}}{2\Gamma(\alpha)}, & t \leq s \leq 1. \end{cases} \quad (5.4)$$

Démonstration. Le problème (5.3) peut être réduit à l'équation suivant.

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} v(s) ds + c_0 + c_1 s \\ x'(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-2} v(s) ds + c_1, \end{aligned}$$

pour certaines constantes $c_0, c_1 \in X$. Les conditions aux limites sur (5.3) donne

$$c_0 = c_1,$$

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} v(s) ds + c_0 + c_1 = \int_0^1 g(s, x(s)) ds.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} x(s) ds + \int_0^1 g(s, x(s)) ds \right] \\ c_1 &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} v(s) ds + \int_0^1 g(s, x(s)) ds \right]. \end{aligned}$$

Cela signifie que

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} v(s) ds + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} v(s) ds + \int_0^1 g(s, x(s)) ds \right] \\ &\quad + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} v(s) ds + \int_0^1 g(s, x(s)) ds \right] \\ &= \int_0^t \left[\frac{(t+1)(1-s)^{\alpha-1}}{2\Gamma(\alpha)} - \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \right] v(s) ds + \int_s^1 \frac{(t+1)(1-s)^{\alpha-1}}{(2)\Gamma(\alpha)} v(s) ds \\ &\quad + \frac{t+1}{2} \int_0^1 g(s, x(s)) ds \\ &= \int_0^1 G(t, s) v(s) ds + \frac{t+1}{2} \int_0^1 g(s, x(s)) ds. \end{aligned}$$

□

Comme G est continue sur I^2 on pose $G_0 = \sup_{0 \leq t, s \leq 1} \int_0^1 |G(t, s)| ds$.

On va transformer le problème 5.3 en un problème de point fixe.

Pour tout $x \in X$, on définit l'application multivoques :

$$Tx(t) = \left\{ z \in X, z(t) = \int_0^1 G(t, s) v(s) ds + \frac{t+1}{2} \int_0^1 g(s, x(s)) ds, v \in F(t, x(t)) \right\}.$$

Le problème (5.2) a une solution si et seulement si T a un point fixe.

Premièrement, nous montrons que T est bien définie, en fait puisque F est continue, alors à

partir du théorème de sélection de Michael, il existe une fonction continue dans $v \in F(t, x)$, alors Tx est non vide. De plus, puisque F a des valeurs compactes, alors pour tout $x \in X$ l'ensemble Tx est compact.

Supposons que :

(A₁) : Pour tout $x \in X$ et $y \in Tx$ avec $x \preceq y$, nous avons $y \preceq z$ pour tout $z \in Ty$.

(A₂) : Il existe $x_0 \in X$ et $x_1 \in Tx_0$ tels que $x_0 \preceq x_1$.

(A₃) : Il existe $\varphi \in C(I, \mathbb{R}_+)$ tel que pour tout $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, on a

$$H(F(t, x_1(t)), F(t, x_2(t))) \leq \varphi(t) \ln(1 + |x_1(t) - x_2(t)|),$$

avec $\varphi_0 = \sup_{t \in [0,1]} |\varphi(t)|$.

(A₄) : Il existe $\psi \in C(I, \mathbb{R}_+)$ tel que pour tout $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, nous avons

$$\|g(t, x_1(t)) - g(t, x_2(t))\| \leq \psi(t) \ln(1 + |x_1(t) - x_2(t)|),$$

avec $\psi_0 = \sup_{t \in [0,1]} |\psi(t)|$ et $\kappa_0 = G_0\varphi_0 + \psi_0 < 1$.

Théorème 5.4. *Sous les hypothèses (A₁) – (A₄) le problème (5.2) possède une solution.*

Démonstration. Comme F est continue, il a donc une sélection, i.e., il existe une fonction continue $v \in F(t, x_1(t))$ tel que Tx_1 est non vide et a des valeurs compactes. Alors $T : X \rightarrow K(X)$.

Soit $x_1, x_2 \in X$ et $y_1 \in Tx_1$, alors il existe $v_1 \in F(t, x_1(t))$ tel que

$$y_1(t) = \int_0^1 G(t, s)v_1(s)ds + \frac{t+1}{2} \int_0^1 g(s, x_1(s))ds.$$

Ensuite, en utilisant (A₂), nous obtenons

$$\begin{aligned} d(v_1, Fx_2) &= \inf_{u \in Fx_2} |v_1 - u| \leq H(F(t, x_1(t)) - F(t, x_2(t))) \\ &\leq \varphi(t)|x_1(t) - x_2(t)|, \end{aligned}$$

la compacité de $F(t, x_2(t))$ implique qu'il existe $u^* \in F(s, x_2(s))$ tel que

$$|v_1 - u^*| \leq \varphi(t)|x_1 - x_2|.$$

On définit un opérateur $P = \{u^* \in X, |v_1 - u^*| \leq \varphi(t)|x_1 - x_2|\}$. Il est clair que $P \cap F(t, x_2(t))$ est continue, donc il a une sélection v_2 telle que

$$\|v_1 - v_2\| \leq \varphi(t) \ln(1 + \|x_1 - x_2\|).$$

On définit

$$y_2(t) = \int_0^1 G(t, s)v_2(s)ds + \frac{t+1}{2} \int_0^1 g(s, x_2(s))ds.$$

Pour tout $t, s \in I$, on a

$$\begin{aligned} |y_1 - y_2| &\leq \int_0^1 G(t, s)\|v_1 - v_2\|ds + \frac{t+1}{2} \int_0^1 |g(s, x_1(s)) - g(s, x_2(s))|ds \\ &\leq \varphi(t) \ln(1 + \|x_1 - x_2\|) \int_0^1 |G(t, s)|ds + \frac{t+1}{2} \psi(t) \ln(1 + \|x_1(s) - x_2(s)\|) \\ &\leq (G_0\varphi_0 + \psi_0) \ln(1 + \|x_1 - x_2\|) \\ &= \kappa_0 \ln(1 + \|x_1 - x_2\|). \end{aligned}$$

Ensuite, nous avons

$$\sup_{z_1 \in Tx_1} \left[\inf_{z_2 \in Tx_2} |z_1 - z_2| \right] \leq \kappa_0 \ln(1 + \|x_1 - x_2\|).$$

Ainsi, en échangeant le rôle de x_1 et x_2 on obtient

$$H(Tx_1, Tx_2) \leq \kappa_0 \ln(1 + \|x_1 - x_2\|).$$

En prenant l'exponentielle de deux côtés, on obtient

$$e^{H(Tx_1, Tx_2)} \leq e^{\kappa_0 \frac{\ln(1 + \|x_1 - x_2\|)}{\|x_1 - x_2\|} \|x_1 - x_2\|}.$$

Si une suite $\{x_n\} \subset X$ est croissante et $x_n \rightarrow x$, alors pour tout $t \in I$ et $n \in \mathbb{N}$, x est une borne supérieure pour tous les termes x_n (voir [69]), puis $x_n \leq x$.

Par conséquent, toutes les hypothèses du théorème 3.6 sont vérifiées, avec $\theta(t) = e^t$, $\beta(t) = \frac{\ln(1+t)}{t}$ et $\kappa(t) = \kappa_0$.

Il existe donc $x \in Tx$, qui est une solution de le problème (5.2). □

Conclusion générale et perspectives

Conclusion générale

Cette thèse est consacré à établir un théorème de point fixe commun pour deux couples hybrides via la continuité sous-séquentielle et la compatibilité, puis le preuve de l'existence d'un point fixe multivoque, en combinant certains nouveaux types de contractions, comme les contractions de type Geraghty avec $(\alpha_*, \eta_*, \theta)$ -contraction et les notions de α -admissible par rapport à η , ainsi que certaines conséquences qui concernent l'existence d'un point fixe dans des espaces métriques partiellement ordonnés et dans des espaces métriques muni d'un graphe.

Comme des applications de notre résultats obtenus, nous avons étudié l'existence de la solution des inclusions différentielles fractionnaires, et d'un système d'inclusions intégrales de type Volterra.

Perspectives

À l'avenir, nous examinerons les problèmes suivants à titre d'exemples

- (1) On va essayer d'appliquer les résultats obtenus pour étudier le problème d'existence de la solution d'un système d'inclusion intégrales de type Fredholm.
- (2) On va chercher d'autres combinaisons des diverses contractions pour améliorer nos résultats et trouver nouveaux résultats.

Bibliographie

- [1] O. Acar, G. Durmaz and G. Minak, *Generalized multivalued F -contractions on complete metric spaces*, Bulletin of the Iranian Mathematical Society. 40 (2014), 1469-1478.
- [2] O. Acar, *A Fixed Point Theorem for multivalued almost F_δ -contraction*, Results Math. 72, 3 (2017), 1545-1553.
- [3] R. P. Agarwal, D. O'Regan, D. R. Sahu, *Fixed Point Theory for Lipschitzian-type Mappings with Applications*, Topological Fixed Point Theory and Its Applications, Springer, New York, 6(2009).
- [4] J. Ahmad, A. E. Al Mazrooei, Y.J. Cho and Y. O. Yang, *Fixed point results for generalized θ contractions*, J. Nonlinear Sci. Appl, 10 (2017), 2350-2358.
- [5] A. Ali, S. Mahideb and S. Beloul, *A common fixed point theorem for multi-valued θ_δ -contractions via subsequential continuity*, Communications. Vol 69(2), (2020), 1473-1483.
- [6] A. Ali, S. Mahideb and S. Beloul, *On multivalued fixed point for $(\alpha_*, \eta_*, \theta)$ -contractions with an application*, J. Appl. Pure Math. Vol. 3 (2021), No. 5-6, pp. 215-229.
- [7] I. Altun, G. Minak, H. Dag, *Multivalued F -contractions on complete metric spaces*, Demonstr. Math, 47 (2014).
- [8] Q, H, Ansari. *Metric spaces including fixed point theory and set-valued maps*, Alpha sciences international ltd, U.K. 2010.
- [9] J. H. Asl, S. Rezapour and N. Shahzad, *On fixed points of α - ψ contractive multifunctions*, Fixed Point Theory Appl. (2012), Art, No. 212.

- [10] M. S. Aslam, M. F. Bota, M. S. R. Chowdhury, L. Guram and N. Saleem, *Common Fixed Points Technique for Existence of a Solution of Urysohn Type Integral Equations System in Complex Valued b -metric Spaces*, Mathematics, 9 (2021), 1-18.
- [11] N.A. Assad, W.A. Kirk, *Fixed point theorems for set valued mappings of contractive type*, Pac. J. Math. 43 (1972), 553–562.
- [12] J. P. Aubin, A. Cellina, *Differential Inclusions Set-Valued Maps and Viability Theory*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1984.
- [13] J.P.Aubin and H.Frankowska, *Set-Valued Analysis*, Birkhauser, Boston, 1990.
- [14] S. Banach, *Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales*, Fund. Math, 3 (1922), 133-181.
- [15] S. Bashir, N. Saleem and S. M. Husnine, *Fixed point results of a generalized reversed F -contraction mapping and its application*, AIMS Mathematics 6(8) (2021), 8728-8741.
- [16] S. Beloul, *A common fixed point theorem for weakly compatible multi-valued mappings satisfying strongly tangential property*, Mathematica Moravica, 18(2), (2014), 63-72.
- [17] S. Beloul, *Common fixed point theorems for weakly subsequentially continuous generalized contractions with applications*, Appl. Maths. E-Notes, 15(2015), 173-186.
- [18] S. Beloul and S. Chauhan, *Gregus type fixed points for weakly subsequentially continuous mappings satisfying strict contractive condition of integral type*, Le Matematiche vol 71(2) (2017), 3-15.
- [19] S. Beloul, *Common Fixed Point Theorem for strongly tangential and weakly Compatible mappings satisfying implicit relations*, Thai. J. Math. 15 (2), (2017), 349-358.
- [20] S. Beloul and A. Tomar, *A coincidence and common fixed point theorem for subsequentially continuous hybrid pairs of maps satisfying an implicit relation*, Math. Moravica. 21 (2) (2017), 15-25.
- [21] S. Beloul and H. Kaddouri, *Fixed Point Theorems For Subsequentially Multi-Valued F_δ -Contractions in Metric Spaces*, Facta Univ Nis Ser. Math. Inform. Vol. 35, No 2 (2020), 379-392.

- [22] S. Bouchaane and S. Djebali, *Common fixed point for multivalued (ψ, θ, G) - contraction type maps in metric spaces with a graph structure*, Appl. Maths. E-Notes, 19(2019), 515-526.
- [23] V. Berinde. *Generalized Contractions and Applications (in Romanian)*, Editura Cub Press 22, Baia Mare, 1997.
- [24] V. Berinde, *Approximating fixed points of weak contractions using the Picard iteration*, Nonlinear Anal. Forum 9 (2004), 45–53.
- [25] M. Berinde, V. Berinde, *On a general class of multivalued weakly Picard mappings*, J. Math. Anal. Appl, 326(2007), 772-782.
- [26] V. Berinde and M. Pacurar, *The role of the Pompeiu-Hausdorff metric in fixed point theory*, Creative Mathematics and Informatics, 22 (2013), 35-42.
- [27] H. Bouhadjera and C. G. Thobie, *Common fixed point theorems for pairs of subcompatible maps*, 2009.
- [28] L. B. Ćirić, *Generalization of Banach's Contraction Principle*, Proc, Amer. Math. Soc, 45, (1974), 267-273.
- [29] L.B. Ćirić, *Fixed Point Theory. Contraction Mapping Principle*, FME Press, Beograd, 2003.
- [30] L. B. Ćirić, *Multivalued nonlinear contraction mappings*, Nonlinear Anal, (2009), 2716-2723.
- [31] M. Cosentino, P. Vetro, *Fixed Point Results for F-Contractive Mappings of Hardy-Rogers-Type*, Filomat 28 :4 (2014), 715-722.
- [32] M. Cosentino, M. Jleli, B. Samet, C. Vetro, *Solvability of integrodifferential problems via fixed point theory in b-metric spaces*, Fixed Point Theory and Appl, 70(2015).
- [33] K. Deimling, *Multivalued differential equations*, Walter de Gruyter, Berlin, New York, 1992.
- [34] G. Durmaz, *Some theorems for a new type of multi valued contractive maps on metric space*, Turkish J. Math., 41 (2017), 1092-1100.
- [35] B. Fisher, *Fixed points for set-valued mappings on metric spaces*, Bull. Malays. Math. Sci. Soc. 2 (4) (1981), 95-99.

- [36] Y. Feng and S. Liu, *Fixed point theorems for multivalued contractive mappings and multivalued Caristi type mappings*, J. Math. Anal. Appl. 317 (2006), 103–112.
- [37] M. Geraghty, *On contractive mappings*, Proc. Am. Math. Soc. 40(1973), 604-608.
- [38] H. A. Hanger, G. Minak and I. Altun, *On a broad category of multivalued weakly Picard operators*, Fixed Point Theory, 18(2017), No. 1, 229-236.
- [39] F. Hausdorff. *Beweis eines Satzes von Arzelà*, Math. Z, 26(1927), 135-137.
- [40] S. Hu and N. S. Papageorgiou, *Handbook of multivalued analysis*, Vol. I. Theory, Kluwer, Dordrecht, 1997.
- [41] N. Hussain, P. Salimi and A.Latif, *Fixed point results for single and set valued α, η, ψ contractive mappings*, Fixed Point Theory Appl.2013, Article ID 212(2013).
- [42] N. Hussain and P .Salimi, *Suzuki- Wardowski type fixed point theorems for α -GF contractions*, Taiwanese J. Maths, 18(6) (2014), 1879-1895.
- [43] I. Iqbal and N.Hussain, *Fixed point results for generalized multivalued nonlinear F -contractions*, J. Nonlinear Sci. Appl. 9 (2016), 5870-5893.
- [44] H. Isik and C. Ionescu, *New type of multi valued contractions with related results and applications*, U. P. B. Sci. Bull., Series A, Vol.80, No.2 (2018), 13-22.
- [45] I. Iqbal and N.Hussain, *Fixed point results for generalized multivalued nonlinear F -contractions*, J. Nonlinear Sci. Appl. 9 (2016), 5870-5893.
- [46] V. I. Istrăţescu, *Fixed Point Theory, an Introduction*, Dordrecht, D. Reidel Publishing Company, 1981.
- [47] S. Itoh and W. Takahashi. *Single-valued mappings, multi-valued mappings and fixed point theorems*, Math. Anal. Appl. 59 (1977), 261-263.
- [48] J. Jachymski, *The contraction principle for mappings on a metric space with a graph*, Proc.Amer. Math. Soc., 136 (2008), 1359-1373.
- [49] M. Jleli and B. Samet, *A new generalization of the Banach contraction principle*, J. Inequal. Appl, 38 (2014).
- [50] G. Jungck, *Commuting mappings and fixed points*, Amer. Math. Monthly, 83(4)(1976), 261-263.

- [51] G. Jungck, *Compatible mappings and common fixed points*, Int. J. Math. and Math. Sci, 9(4)(1986), 771-779.
- [52] G. Jungck, B.E. Rhoades, *Fixed points for set valued functions without continuity*, Indian J. Pure Appl. Math. 29 (1998), no. 3, 227-238.
- [53] G. Jungck and B.E. Rhoades, *Fixed point theorems for occasionally weakly compatible mappings*, Fixed Point Theory, 9 (2008), 383–384.
- [54] H. Kaddouri, H.Isik and S. Beloul, *On new extensions of F-contraction with an application to integral inclusion*, U.P.B. Sci. Bull., Series A, Vol.81(3), (2019), 31-42.
- [55] H. Kaneko, *Generalized contractive multi-valued mappings and their fixed points*, Math. Japon, 33 (1988), 57–64.
- [56] H. Kaneko and S. Sessa, *Fixed point theorems for compatible multi-valued and single-valued mappings*, Internat. J. Math. Math. Sci. Vol. 12 No 2(1989), 257-262.
- [57] D. Klim, D. Wardowski, *Fixed point theorems for set-valued contractions in complete metric spaces*, J. Math. Anal. Appl, 334(1) 2007, 132–139.
- [58] M. Kikkawaa and T. Suzuk, *Three fixed point theorems for generalized contractions with constants in complete metric spaces*, Nonlinear Anal. 69 (2008), 2942–2949.
- [59] M. A. Kutbi, W. Sintunavarat, *On new fixed point results for (α, Ψ, ξ) -contractive multi-valued mappings on α -complete metric spaces and their consequences*, Fixed Point Theory Appl. 2015, 2(2015).
- [60] C. Liu, L. Shan, *Common fixed points of a pair of single valued mappings and a pair of set valued mappings*, Qufu Shifan Daxue Xuebao Ziran Kexue Ban. 18 (1992), 6-10.
- [61] G. Minak, A. Helvacı and I. Altun, *Ćirić Type Generalized F-contractions on Complete Metric Spaces and Fixed Point Results*, Filomat, 28(6) (2014), 1143–1151.
- [62] G. Minak, M. Olgun and I. Altun, *A new approach to fixed point theorems for multivalued contractive maps*, Carpathian J. Math. 31 (2015), No. 2, 241-248.
- [63] G. Minak, I. Altun, *Overall approach to Mizoguchi-Takahashi type fixed point results*, Turk. J. Math, 40 (2016), 895-904.

- [64] G. Minak, I. Altun, *On the effect of α -admissibility and θ -contractivity to the existence of fixed points of multivalued mappings*, Nonlinear Analysis : Modelling and Control, Vol. 21, No. 5, 673–686.
- [65] E. Michael, *Continuous selections*, I. Ann. of Math, 63(1956), No. 2, 361-382.
- [66] N. Mizoguchi, W. Takahashi, *Fixed point theorems for multi-valued mappings on complete metric spaces*, J. Math. Anal. Appl. 141 (1989), 177–188.
- [67] B. Mohammadi, S. Rezapour and N. Shahzad, *Some results on fixed points of $\alpha-\psi$ -Ćirić generalized multi-functions*, Fixed Point Theory Appl. 2013, Art. No. 24 (2013).
- [68] S. B. Nadler, *Multivalued contraction mappings*, Pacific J. Maths, 30 (1969), 475-488.
- [69] J. Nieto, R. R. Lopez, *Contractive mapping theorems in partially ordered sets and applications to ordinary differential equations*, Order, 22(2005), 223-239.
- [70] M. Olgun, G. Minak and I. Altun, *A new approach to Mizoguchi-Takahashi type fixed point theorems*, J. Nonlinear Convex Anal. 17 (3) 2016, 579-587.
- [71] R. P. Pant, *A common fixed point theorem under a new condition*, Indian J. Pure Appl. Math. 30 (2) (1999), 147-152.
- [72] N. Priyobarta, B. Khomdram, Y. Rohen and N. Saleem, *On generalized rational geraghty contraction mappings in metric spaces*, J. Mathematics, Vol 21(2021), p.1-17.
- [73] S. Reich, *Fixed points of contractive functions*, Boll. Unione Mat. Ital. 5 (1972), 26–42.
- [74] S. Reich, *Some fixed point problems*, Atti Acad. Naz. Lincei 57 (1974), 194–198.
- [75] N. Saleem, J. Vujakovic, W. U. Baloch and S. Radenovic, *Coincidence point results for multivalued Suzuki type mappings using q -contraction in b -metric spaces*, Mathematics 7(2019), 10-17.
- [76] N. Saleem, I. Iqbal, B. Iqbal and S. Radenovic, *Coincidence and fixed points of multivalued F -contractions in generalized metric space with application*, J. Fixed Point Theory and Applications, vol. 22, no. 4,(2020), 1-24.
- [77] B. Samet, C. Vetro and P. Vetro, *Fixed point theorems for $(\alpha - \psi)$ -contractive type mappings*, Nonlinear Anal, Vol. 75, No. 4(2012), 2154-2165.
- [78] N. A. Secolean, *Iterated function systems consisting of F -contractions*, Fixed Point Theory Appl. 2013, 277(2013).

- [79] S. Sessa, *On a weak commutativity condition of mappings in fixed point considerations*, Publ. Inst. Math. Beograd. 32 (46) (1982), 149-153.
- [80] S. Sessa, M. S. Khan and M. Imada, *A common fixed point theorem with a weak commutativity condition*, Glas. Mat. Ser. HI 21(1986), 225-235.
- [81] M. Sgroi, C. Vetro, *Multivalued F -contractions and the solution of certain mappings and integral equations*, Filomat, 27 (2013), 1259-1268.
- [82] S. L. Singh, S. N. Mishra, *Coincidence and fixed points of reciprocally continuous and compatible hybrid maps*, Internat. J. Math. Math. Sci. 10 (2002), 627-635.
- [83] R. E. Smithson, *Fixed points for contractive multifunctions*, Proc. Am. Math. Soc. 27 (1971), 192-194.
- [84] M. U. Ali, T. Kamran, *Multi valued F -contractions and related fixed point theorems with an application*, Filomat, Vol.30, No 14, (2016), 3779-3793.
- [85] F. Vetro, *A generalization of Nadler fixed point theorem*, Carpathian. J. Math., Vol.31, No 3, (2015), 403-410.
- [86] E. Zeidler, *Nonlinear functional analysis and its applications*, Fixed-point theorems, Vol.1, Springer, 1986.
- [87] D. Wardowski, *Fixed points of a new type of contractive mappings in complete metric spaces*, Fixed Point Theory Appl 2012, 94(2012).
- [88] D. Wardowski, N. V. Dung, *Fixed points of F -weak contractions on complete metric spaces*, Demonstr. Math. 1 (2014), 146-155.