

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
Ministère De L'enseignement Supérieur  
Et De La Recherche Scientifique



UNIVERSITE ECHAHID HAMMA LAKHDAR  
D'EL OUED  
FACULTE DES SCIENCES EXACTES



# MEMOIRE DE FIN D'ETUDE

MASTER ACADEMIQUE

Domaine : Mathématiques et informatique

Filière : Mathématiques

Option : Mathématiques fondamentales

Thème

Etude variationnelle d'un problème de contact entre  
matériaux thermo-électro-viscoélastiques  
avec variable interne et endommagement

présenté par: Messaoudi Imane  
Maâmra Maroua

Devant le jury composé de :

Said Ameer Meziane	MCB	Président	Univ. El Oued
Hadj Ammar Tedjani	Pr	Encadreur	Univ. El Oued
Douib Bachir	MCB	Examineur	Univ. El Oued

Promotion : 2022/2023

# Dédicace

*Je dédie ce fruit de mes longues années d'études tout d'abord :  
À mes très chers parents, qui sont la lumière de ma vie, qui ont tant souffré et  
sacrifiés pour que je sois heureuse, pour leurs conseils, leur affection et leurs  
encouragements.*

*Je vous remercie pour tous vos efforts fournis pour moi, que dieu vous garde,  
vous protège, et vous bénisse la vie.*

*Et je le dédie :*

*Je tous les membres de famille Messaoudi et ouellabi,  
mes cinq sœurs,  
mes trois frères.*

*À tous mes amis et mes collègues avec qui  
j'ai partagé de très bons moments tout le long de ces années.*

*À Tous les professeurs honorables  
pour leurs efforts avec nous tout au long de notre carrière universitaire.*

Imane Messaoudi



# Dédicace

*Avec une énorme plaisir, un coeur ouvert et une immense joie.*

*Qui je dédie ce mémoire*

*A mes trésor chers, respectueux et magnifiques parents ma mère et mon père,*

*qui m'ont*

*soutenus tout au long de ma vie .*

*Par leur amour et leur encouragement .*

*A mes frères.*

*A mes sœurs .*

*A tous les membres de ma famille*

*A tous mes amis et mes collègues avec qui.*

*j'ai partagé de très bons moments tout le long de ces années.*

*A tous mes enseignants et les collègues, pour leur utiles conseils et leur*

*persévérance*

Maâmra Maroua





# Remerciements et Gratitude

*En premier lieu, nous tenons à exprimer notre reconnaissance à Allah tout-puissant, de nous avoir donné la volonté pour terminer ce travail.*

*Je tiens à exprimer ma reconnaissance et mes remerciements les plus profonds à mon encadreur Pro " **Tedjani Hadj ammar** " qui m'a proposé le sujet de ce travail son aide et ses conseils ont été pour moi un soutien très précieux. Je tiens plus à le remercier pour sa compétence, sa rigueur, ainsi que pour le caractère novateur de ses idées.*

*Comme Je tiens à remercier vivement, mes Dr " **Said Ameer Meziane** ", pour l'honneur qu'il me fait en présidant le jury à ce mémoire.*

*Mes remerciements s'adressent mes Dr " **Douib Bachir** ", accepté de participer au jury comme Examineur.*

*Je tiens aussi à manifester toute ma gratitude envers tous les membres du conseil scientifique. Mes remerciements aussi à toutes les personnes ayant contribué de près ou de loin à l'élaboration de ce travail. Mes derniers et profonds remerciements vont à mes chers parents à qui je dédie ce travail ainsi qu'à toute ma famille et mes amis pour leur grand soutien.*

# Contenu

<b>Notations générales</b>	<b>v</b>
<b>Introduction</b>	<b>viii</b>
<b>1 Modélisation et Outils Mathématiques</b>	<b>1</b>
1.1 Modélisation . . . . .	1
1.1.1 Cadre physique . . . . .	1
1.1.2 Modèle mathématique . . . . .	4
1.1.3 Loi de comportement piézoélectrique . . . . .	7
1.1.4 Conditions aux limites . . . . .	9
1.2 Outils Mathématiques . . . . .	11
1.2.1 Espaces de Hilbert . . . . .	11
1.2.2 Triplet de Gelfand . . . . .	12
1.2.3 Espaces de Lebesgue $L^p(\Omega^\kappa)$ . . . . .	12
1.2.4 Quelques outils dans l'espace $L^p(\Omega^\kappa)$ . . . . .	13
1.2.5 Espaces de Sobolev . . . . .	14
1.2.6 Espaces fonctionnels . . . . .	17
1.2.7 Espaces $L^p(0, T; X)$ et $W^{k,p}(0, T; X)$ . . . . .	20
1.2.8 Rappels d'analyse non linéaire dans les espaces de Hilbert . . . . .	22
1.2.9 Lemme de Gronwall . . . . .	25
1.2.10 Les inégalités de Hölder et de Young . . . . .	26
<b>2 Analyse d'un problème de contact avec endommagement en matériaux et la variable d'état interne thermo-électro-viscoélastiques</b>	<b>27</b>
2.1 Formulation du problème . . . . .	27
2.2 Formulation variationnelle . . . . .	33
2.3 Existence et unicité de la solution . . . . .	41
<b>Conclusion</b>	<b>62</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>63</b>

# Notations générales

- $\mathbb{N}$  Ensemble des entiers naturels,
- $\mathbb{R}$  L'ensemble des nombres réels,
- $\mathbb{S}^d$  L'espace des tenseurs symétriques du second ordre sur  $\mathbb{R}^d (d = 2, 3)$ ,
- $C$  Constante réelle strictement positive,
- i.e C'est à dire,
- $\partial_i \psi$  La dérivée partielle de  $\psi$  par rapport à la  $i^{\text{ème}}$  composante  
 $x : \partial_i \psi = \frac{\partial \psi}{\partial x_i}$ ,
- $\Delta v$  Laplacien de  $v$ .
- $\nabla \psi$  Gradient de l'application  $\psi : \nabla \psi = (\partial_1 \psi, \dots, \partial_d \psi)$ ,
- $\partial \psi$  Saus-différentiel de  $\psi$  par rapport à  $k$ ,
- Div divergence du tenseur ;  $\text{Div } \sigma = (\sigma_{ij,j})$ ,
- div divergence du vecteur ;  $\text{div } D = D_{i,i}$ ,
- $\cdot$  Produit scalaire sur  $\mathbb{R}^d$  ou  $\mathbb{S}^d$ ,
- $|\cdot|$  La norme euclidienne sur  $\mathbb{R}^d$  ou  $\mathbb{S}^d$ ,
- $(x, y)$  Paire d'un espace produit  $X \times Y$ ,
- $\langle \cdot, \cdot \rangle_X$  Le produit scalaire de X,
- $\|\cdot\|_X$  La norme de X,
- $\langle \cdot, \cdot \rangle_{X' \times X}$  Le produit dual entre  $X'$  et  $X$ ,
- p.p. Presque partout,
- $\Omega^\kappa$  Domaines bornés avec une surface frontière régulière  $\Gamma^\kappa$ ,
- $\overline{\Omega}^\kappa$  L'adhérence de  $\Omega^\kappa$
- $\Gamma_i^\kappa$  Les parties de frontière  $\Gamma^\kappa, (i = 1, 2, 3)$ ,
- $mes(\Gamma_i^\kappa)$  Mesure de Lebesgue  $(d - 1)$  dimensionnelle de  $\Gamma_i^\kappa$ ,
- $dx$  Mesure superficielle sur  $\Omega^\kappa$ ,
- $da$  Mesure superficielle sur  $\Gamma_i^\kappa$ ,
- $\nu^\kappa$  La normale unitaire sortante à  $\Gamma^\kappa$ ,
- $v_\nu^\kappa, v_\tau^\kappa$  Les composantes normale et tangentielle du champ vectoriel  $v^\kappa$  défini sur  $\overline{\Omega}^\kappa$ ,
- $C^1(\Omega^\kappa)$  L'espace des fonctions réelles continûment différentiables sur  $\Omega^\kappa$ ,

- $\mathcal{D}(\Omega^\kappa)$  L'espace des fonctions réelles indéfiniment différentiables et à support compact,
- $L^2(\Omega^\kappa)$  L'espace des fonctions  $u^\kappa$  mesurables sur  $\Omega^\kappa$  telles que  $\int_{\Omega^\kappa} |u^\kappa|^2 dx < +\infty$ ,
- $\|\cdot\|_{L^2(\Omega^\kappa)}$  La norme de  $L^2(\Omega^\kappa)$  définie par  $\|u^\kappa\|_{L^2(\Omega^\kappa)} = \left( \int_{\Omega^\kappa} |u^\kappa|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$ ,
- $L^\infty(\Omega^\kappa)$  L'espace des fonctions  $u^\kappa$  mesurables sur  $\Omega^\kappa$  telles que,  $\exists c > 0 : |u^\kappa| < c$ , p.p., sur  $\Omega^\kappa$ ,
- $H^1(\Omega^\kappa)$  L'espace de Sobolev d'ordre 1 sur  $\Omega^\kappa$ ,
- $H_{\Gamma^\kappa}$  L'espace  $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma^\kappa)^d$ ,
- $H'_{\Gamma^\kappa}$  L'espace dual de  $H_{\Gamma^\kappa}$ .
- $\gamma : \mathbb{H}_1^\kappa \rightarrow H_{\Gamma^\kappa}$  L'application trace pour les fonctions vectorielles,
- $\mathbb{H}^\kappa$  L'espace  $L^2(\Omega^\kappa)^d$ ,
- $\mathbb{H}_1^\kappa$  L'espace  $W^{1,2}(\Omega^\kappa)^d$ ,
- $\mathcal{H}^\kappa$  L'espace  $L^2(\Omega^\kappa)^{d \times d}$ ,
- $\mathcal{H}_1^\kappa$  L'espace  $W^{1,2}(\Omega^\kappa)^{d \times d}$ ,
- $\mathbb{W}^\kappa$  L'espace  $\{\psi^\kappa \in H^1(\Omega^\kappa) \mid \psi^\kappa = 0 \text{ sur } \Gamma_a^\kappa\}$ ,
- $\mathcal{W}^\kappa$  L'espace  $\{D^\kappa = (D_i^\kappa) \mid D_i^\kappa \in L^2(\Omega^\kappa), D_{i,i}^\kappa \in L^2(\Omega^\kappa)\}$ ,
- $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma^\kappa)$  L'espace de Sobolev d'ordre  $\frac{1}{2}$  sur  $\Gamma^\kappa$ ,
- $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma^\kappa)$  L'espace dual  $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma^\kappa)$ ,
- $\langle \cdot, \cdot \rangle_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \Gamma^\kappa}$  Le produit de dualité entre  $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma^\kappa)$  et  $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma^\kappa)$ ,
- $C(0, T; H)$  L'espace des fonctions continues de  $[0, T]$  dans  $H$ ,
- $C^1(0, T; H)$  L'espace des fonctions continûment dérivables sur  $[0, T]$  dans  $H$ ,
- $L^p(0, T; H)$  L'espace des fonctions  $u$  mesurables sur  $[0, T]$  telles que  $\int_0^T \|u(t)\|_H^p dt < +\infty$ ,
- $\|\cdot\|_{L^p(0, T; H)}$  La norme de  $L^p(0, T; H)$  définie par  $\|u\|_{L^p(0, T; H)} = \left( \int_0^T \|u(t)\|_H^p dt \right)^{\frac{1}{p}}$ ,
- $W^{k,p}(0, T; H)$  L'espace de Sobolev de paramètres  $k$  et  $p$  sur  $[0, T]$  dans  $H$ ,
- $\|\cdot\|_{W^{k,p}(0, T; H)}$  La norme de  $W^{k,p}(0, T; H)$  définie par
 
$$\|u\|_{W^{k,p}(0, T; H)} = \|u\|_{L^p(0, T; H)} + \sum_{\alpha=1}^{\alpha=k} \|u^{(\alpha)}\|_{L^p(0, T; H)},$$

## Notations

## élasticité

- $\Omega^1, \Omega^2$  Les domaines occupés deux corps déformables,
- $\Gamma^\kappa$  La frontière de  $\Omega^\kappa : \Gamma^\kappa = \partial\Omega^\kappa$ ,
- $\Gamma_1^\kappa, \Gamma_2^\kappa, \Gamma_3$  Les parties de  $\Gamma^l = \overline{\Gamma_1^\kappa \cup \Gamma_2^\kappa \cup \Gamma_3}$ ,
- $\Gamma_3^1 = \Gamma_3^2 = \Gamma_3$  L'interface de contact entre les corps  $\Omega^1, \Omega^2$ ,
- $u^\kappa$  Vecteurs des déplacements dans le domaine  $\Omega^\kappa$ , on écrit  $u_i^\kappa$   
les composantes du vecteur dans la base canonique,
- $u_\nu^\kappa$  La composante normale du déplacement  $u^\kappa$  sur la frontière du domaine  
définie par  $u_\nu^\kappa = u^\kappa \cdot \nu^\kappa$ ,
- $u_\tau^\kappa$  La composante tangentielle du déplacement  $u^\kappa$  sur la frontière du domaine  
définie par  $u_\tau^\kappa = u^\kappa - u_\nu^\kappa \nu^\kappa$ ,
- $\dot{u}^\kappa, \ddot{u}^\kappa$  Les dérivées première et seconde de  $u^\kappa$  par rapport au temps,
- $\varepsilon(u^\kappa)$  Tenseur linéarisé des déformations :  $\varepsilon(u^\kappa)_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_i u_j^\kappa + \partial_j u_i^\kappa)$ ,
- $\sigma^\kappa$  Tenseur des contraintes correspondant au déplacement  $u^\kappa$ , on écrit  $\sigma_{ij}^\kappa$   
les composantes du tenseur dans la base canonique,
- $\sigma_\nu^\kappa$  La composante normale du contrainte  $\sigma^\kappa$  sur la frontière du domaine  
définie par  $\sigma_\nu^\kappa = (\sigma^\kappa \nu^\kappa) \cdot \nu^\kappa$ ,
- $\sigma_\tau^\kappa$  La composante tangentielle du contrainte  $\sigma^\kappa$  sur la frontière du domaine  
définie par  $\sigma_\tau^\kappa = \sigma^\kappa \nu^\kappa - \sigma_\nu^\kappa \nu^\kappa$ ,
- $\sigma^\kappa \cdot u^\kappa$  Produit tensoriel (matriciel) de  $u^\kappa$  par  $\sigma^\kappa : (\sigma^\kappa \cdot u^\kappa)_i = \sigma_{ij}^\kappa u_j^\kappa$ ,
- $\psi^\kappa$  Valeurs des potentiels électriques dans le domaine  $\Omega^\kappa$ ,
- $D^\kappa$  Vecteurs des déplacements électriques dans le domaine  $\Omega^\kappa$ ,
- $\tau^\kappa$  La température absolue dans le domaine  $\Omega^\kappa$ ,
- $\alpha^\kappa$  L'endommagement dans le domaine  $\Omega^\kappa$ ,
- $\beta^\kappa$  Vecteurs de variable d'état interne dans le domaine  $\Omega^\kappa$ .

# Introduction

Le Piézoélectricité traduit la propriété que présentent certains cristallins à se polariser sous l'action d'une contrainte mécanique (effet direct) ou bien à se déformer lorsqu'il leur est appliqué un champ électrique (effet inverse). Le phénomène piézoélectrique représente le couplage entre le comportement mécanique et électrique d'une classe de matériaux, appelés matériaux piézoélectriques. Les matériaux piézoélectriques sont largement utilisés comme interrupteurs et en fait dans de nombreux systèmes d'ingénierie en radioélectronique, électro-acoustique et les équipements de mesure. La piézoélectricité a été découverte par les frères Curie en 1880 (Jacques et Pierre Curie). Le couplage entre les champs thermiques/piézoélectriques dans les matériaux piézoélectriques fournit un mécanisme pour détecter les perturbations thermomécaniques à partir de mesures de potentiels électriques induits et pour modifier les réponses structurelles via des champs électriques appliqués.

La théorie thermo-piézoélectrique a été proposée pour la première fois par Mindlin [15], plus tard il a dérivé les équations gouvernantes d'une plaque thermo-piézoélectrique [14]. Les lois physiques des matériaux thermo-piézoélectriques ont été discutées par [16]. Chandrasekariah [2] a présenté la théorie généralisée de la thermo-piézoélectricité en prenant en compte la vitesse finie de propagation des perturbations thermiques. Yang et Batra [23] ont étudié l'effet de la conduction thermique sur le décalage des fréquences d'un corps piézoélectrique linéaire vibrant librement à l'aide de méthodes de perturbation.

Sharma et Pal [18] ont discuté de la propagation des ondes de Lamb dans une plaque thermo-piézoélectrique transversalement isotrope. Sharma et al. [20] ont étudié l'analyse des vibrations libres d'un panneau cylindrique thermopiézoélectrique homogène, transversalement isotrope, basé sur un thermopiézoélectrique tridimensionnel. Sharma et Walia [19] ont présenté la propagation d'ondes à crête droites et circulaires dans des matériaux thermo-piézoélectriques généralisés.

Les endommagement sont un sujet extrêmement important en ingénierie, car ils affectent directement la durée de vie utile de la structure ou du composant conçu. Il existe une très grande littérature technique à ce sujet. Des modèles prenant en compte l'influence de l'endommagement interne du matériau sur le processus de contact ont été étudiés mathématiquement. Les modèles généraux de dommages ont été dérivés dans [4] du principe de puissance

virtuelle. L'analyse mathématique des problèmes unidimensionnels peut être trouvée dans [6]. Le cas tridimensionnel a été étudié dans [10]. Dans tous ces articles l'endommagement du matériau est décrit avec une fonction d'endommagement  $\alpha^\kappa$ , limité à des valeurs comprises entre zéro et un. Lorsque  $\alpha^\kappa = 1$ , il n'y a pas de dommage dans le matériau, lorsque  $\alpha^\kappa = 0$ , le matériau est complètement endommagé, lorsque  $0 < \alpha^\kappa < 1$  il y a un endommagement partiel et le système a une capacité de charge réduite.

L'endommagement peut être initié et évoluer dans les deux processus de déformation élastique. En particulier, les dommages dans l'état de déformation élastique sont appelés dommages élastiques. Dans cette mémoire, nous utilisons les dommages causés par les déformations élastiques pour des raisons mécaniques et mathématiques. Mécaniquement, nous utilisons des dommages élastiques car les matériaux fragiles sont plus sensibles aux dommages.

Les problèmes de contact dynamique font l'objet de nombreux sujets, par ex. [3, 7]. Les problèmes de contact avec dommages ont été étudiés dans [8, 22]. Un modèle d'endommagement couplé à la température étudié dans [13]. Cependant, le problème mathématique modélisant l'évolution dynamique de l'endommagement dans les matériaux thermo-viscoélastiques avec variable interne a été étudié dans [12].

Dans cette mémoire, nous considérons un problème mathématique de contact entre deux corps thermo-piézoélectriques. Le contact bilatéral avec frottement de Tresca dans des matériaux définies par une loi de comportement thermo-électro-viscoélastique avec endommagement et variable interne.

Le mémoire comporte deux chapitres et est structurés de la manière suivante :

- **Premier chapitre** : nous présentons le cadre physique et décrivons le problème mécanique, et nous introduisons quelques notations et résultats, quelques théorèmes qui seront d'une grande utilité pour les démonstrations.
- **Deuxième chapitre** : nous écrivons une formulation du problème à étudier, listons les hypothèses sur ses données, dérivez la formulation variationnelle du modèle et nous énonçons notre principal résultat d'existence et d'unicité d'une solution faible.

# Modélisation et Outils Mathématiques

Dans ce chapitre, on commence par définir le cadre physique, les lois de comportement des différents matériaux, les conditions aux limites ainsi que la formulation mécanique d'un problème étudié. Ensuite, nous passons en revue quelques résultats concernant les espaces fonctionnels, les équations et inéquations variationnelles, le lemme de Gronwall et quelques théorèmes qui seront d'une grande utilité pour les démonstrations.

## 1.1 Modélisation

Dans cette section, nous allons introduire le cadre physique et un modèle mathématique du problème utilisé dans ce mémoire. Ensuite, nous indiquerons la formulation mathématique d'un problème de contact bilatéral avec frottement de Tresca entre deux corps thermo-électro-viscoélastiques avec endommagement et variable interne.

### 1.1.1 Cadre physique

Les phénomènes de contact considérés dans ce mémoire sont décrits par deux cadres physiques suivants ;

**Cadre physique n<sup>o</sup>1** (Problème mécanique.) Nous considérons deux corps matériels qui occupent des domaines bornés  $\Omega^\kappa \subset \mathbb{R}^d$  ( $\kappa = 1, 2; d = 2, 3$ ), avec frontière régulière  $\Gamma^\kappa = \partial\Omega^\kappa$ , partitionnée en trois parties mesurables  $\Gamma_1^\kappa, \Gamma_2^\kappa, \Gamma_3^\kappa$ , tel que  $mes(\Gamma_1^\kappa) > 0$ . Nous notons que  $\nu^\kappa$  la normale unitaire sortante à  $\Gamma^\kappa$ . Chaque corps est encastré sur  $\Gamma_1^\kappa$ , dans une structure fixe. Sur  $\Gamma_2^\kappa$  agissent des tractions surfaciques de densité  $f_2^\kappa$ , et dans  $\Omega^\kappa$  agissent des forces volumiques de densité  $f_0^\kappa$ .

Nous supposons  $f_2^\kappa$ , et  $f_0^\kappa$ ,  $\kappa = 1, 2$ , varient très lentement par rapport au temps. Soient  $T > 0$  et  $[0, T]$  l'intervalle de temps en question. Les corps est en contact bilatéral avec frottement du Tresca sur la partie  $\Gamma_3^\kappa$ , on a  $\Gamma_3^1 = \Gamma_3^2$  noté par  $\Gamma_3$ . Nous prenons en considération les propriétés mécaniques du corps. Notre objectif sera d'étudier l'évolution de ces propriétés dans le temps  $T$  (voir Fig. 1.1.1).

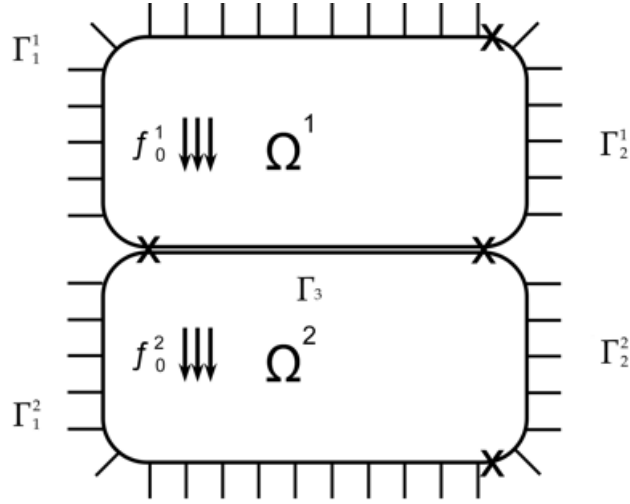


Figure1.1. Cadre Physique 1

**Cadre physique n<sup>o</sup>2** (Problème électro-mécanique.) Nous considérons deux corps matériels qui occupent des domaines bornés  $\Omega^\kappa \subset \mathbb{R}^d$  ( $\kappa = 1, 2; d = 2, 3$ ), avec frontière régulière  $\Gamma^\kappa = \partial\Omega^\kappa$ , partitionnée en trois parties mesurables  $\Gamma_1^\kappa, \Gamma_2^\kappa, \Gamma_3^\kappa$ , tel que  $mes(\Gamma_1^\kappa) > 0$ . Nous notons que  $\nu^\kappa$  la normale unitaire sortante à  $\Gamma^\kappa$ . Chaque corps est encastré sur  $\Gamma_1^\kappa$ ,  $\kappa = 1, 2$  dans une structure fixe. Sur  $\Gamma_2^\kappa$  où  $\kappa = 1, 2$ , agissent des tractions surfaciques de densité  $f_2^\kappa$ , et dans  $\Omega^\kappa$  agissent des forces volumiques de densités  $f_0^\kappa$ . Nous supposons  $f_2^\kappa$ , et  $f_0^\kappa$ , varient très lentement par rapport au temps. Soient  $T > 0$  et  $[0, T]$  l'intervalle de temps en question. En plus de l'action des forces des tractions, chaque corps est soumis à l'action des charge électriques de densité volumiques  $q_0^\kappa$ , et de charge électriques surfacique  $q_2^\kappa$ . Pour le décrire, nous considérons une partition de la frontière  $\Gamma^\kappa$  en deux parties mesurables,  $\Gamma_a^\kappa$  et  $\Gamma_b^\kappa$  telles que  $mes(\Gamma_a^\kappa) > 0$ . Les corps est en contact bilatéral avec frottement du Tresca sur la partie  $\Gamma_3^\kappa$ , on a  $\Gamma_3^1 = \Gamma_3^2$  noté par  $\Gamma_3$ . Nous supposons également que le potentiel électriques s'annule sur  $\Gamma_a^\kappa$ , et la charges électriques de surface de densité  $q_2^\kappa$ , est prescrite sur  $\Gamma_b^\kappa$ . La différence entre cadre physique mécanique et cadre physique électro-mécanique résulte du fait que en deuxième, nous prenons en considération les propriétés mécaniques et aussi les propriétés électriques dans les deux corps (voir Fig. 1.1.1).

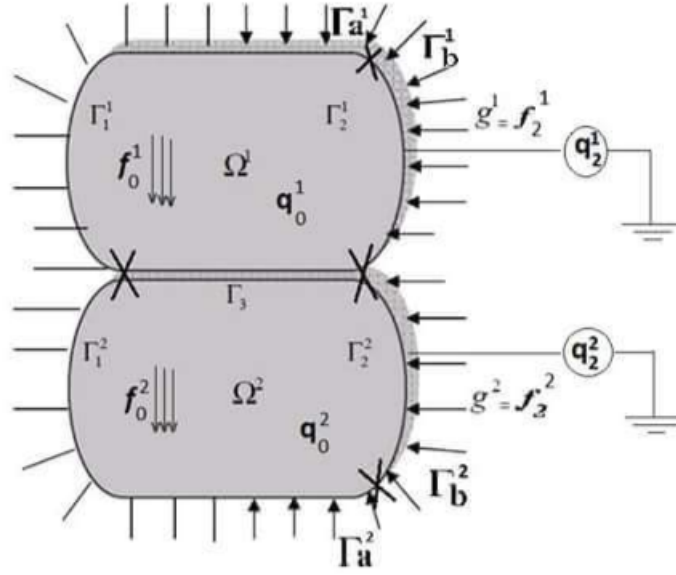


Figure1.2. Cadre Physique 2

Avant d'obtenir les modèles mathématiques qui correspondent au cadre physique présenté, voici quelques notations et conventions que nous utiliserons tout au long de cette mémoire.

Nous désignons par  $\mathbb{S}^d$  l'espace des tenseurs symétriques d'ordre deux sur  $\mathbb{R}^d$  ( $d = 2, 3$ ), "  $\cdot$  " et  $|\cdot|$  représentent respectivement le produit scalaire et la norme euclidienne sur  $\mathbb{R}^d$  et  $\mathbb{S}^d$ . Ainsi, nous avons

$$\begin{aligned} u^\kappa \cdot v^\kappa &= u_i^\kappa \cdot v_i^\kappa, & |v^\kappa| &= \sqrt{v^\kappa \cdot v^\kappa}, & \forall u^\kappa, v^\kappa \in \mathbb{R}^d, \\ \sigma^\kappa \cdot \tau^\kappa &= \sigma_{ij}^\kappa \cdot \tau_{ij}^\kappa, & |\tau^\kappa| &= \sqrt{\tau^\kappa \cdot \tau^\kappa}, & \forall \sigma^\kappa, \tau^\kappa \in \mathbb{S}^d. \end{aligned}$$

ici et ci-dessous, les indices  $i$  et  $j$  courent entre 1 et  $d$  et la convention de sommation sur les indices répétés est adoptée. Pour chaque élément  $v^\kappa \in \mathbb{H}_1^\kappa$ , nous notons par  $v_\nu^\kappa$  et  $v_\tau^\kappa$  les composantes normale et tangentielle à la frontière définies par

$$v_\nu^\kappa = v^\kappa \cdot \nu^\kappa, \quad v_\tau^\kappa = v^\kappa - v_\nu^\kappa \nu^\kappa, \quad (1.1)$$

où  $\nu^\kappa$  est la normale unitaire extérieure à  $\Omega^\kappa$ . Nous désignons par  $\sigma^\kappa = \sigma^\kappa(x, t)$  le champ des contraintes, par  $u^\kappa = u^\kappa(x, t)$  le champ des déplacements et par  $\varepsilon(u^\kappa)$  le champ des déformations infinitésimales. Pour simplifier les notations, nous n'indiquons pas explicitement la dépendance des fonctions par rapport à  $x \in \overline{\Omega^\kappa}$  et  $t \in [0, T]$ .

Pour un champ des contraintes  $\sigma^\kappa$  nous dénotons par  $\sigma_\nu^\kappa$  et  $\sigma_\tau^\kappa$  les composantes normale et tangentielle à la frontière données par

$$\sigma_\nu^\kappa = (\sigma^\kappa \nu^\kappa) \cdot \nu^\kappa, \quad \sigma_\tau^\kappa = \sigma^\kappa \nu^\kappa - \sigma_\nu^\kappa \cdot \nu^\kappa. \quad (1.2)$$

En utilisant (1.1) et (1.2), nous obtenons la relation

$$(\sigma^\kappa \nu^\kappa) \cdot v^\kappa = \sigma_\nu^\kappa v_\nu^\kappa + \sigma_\tau^\kappa \cdot v_\tau^\kappa, \quad (1.3)$$

qui va intervenir tout au long de ce mémoire, dans la formulation variationnelle de problème mécanique de contact.

### 1.1.2 Modèle mathématique

Notons que le point au-dessus d'une fonction représente la dérivation par rapport au temps, par exemple

$$\dot{u}^\kappa = \frac{du^\kappa}{dt} \quad \ddot{u}^\kappa = \frac{d^2u^\kappa}{dt^2},$$

où  $\dot{u}^\kappa$  désigne le champ des vitesses et  $\ddot{u}^\kappa$  désigne le champ des accélérations. Pour le champ des vitesses  $\dot{u}^\kappa$  les notations  $\dot{u}_\nu^\kappa$  et  $\dot{u}_\tau^\kappa$  représentent respectivement les vitesses normale et tangentielle à la frontière, c'est à dire

$$\dot{u}_\nu^\kappa = \dot{u}^\kappa \cdot \nu^\kappa, \quad \dot{u}_\tau^\kappa = \dot{u}^\kappa - \dot{u}_\nu^\kappa \cdot \nu^\kappa.$$

Rappelons maintenant la relation déformation-déplacement dans l'hypothèse des petites transformations

$$\varepsilon(u^\kappa) = (\varepsilon_{ij}(u^\kappa)), \quad \varepsilon_{ij}(u^\kappa) = \frac{1}{2} (\partial_j u_i^\kappa + \partial_i u_j^\kappa), \quad 1 \leq i, j \leq d.$$

Notons qu'ici et tout au long du mémoire, un indice qui suit une virgule indique une dérivation partielle par rapport à la composante correspondante à la variable spatiale.

Passons maintenant à la description des modèles mathématiques associées aux cadres physiques ci-dessus.

**Modèle mathématique n°1**. Le premier modèle mathématique étudié dans ce mémoire décrit l'évolution des corps dans le cadre physique n°1 (page 1). Les fonctions inconnues du problème sont le champ des déplacements  $u^\kappa : \Omega^\kappa \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$  et le champ des contraintes  $\sigma^\kappa : \Omega^\kappa \times [0, T] \rightarrow \mathbb{S}^d$ . Notons la densité de la masse par  $\rho^\kappa : \Omega^\kappa \rightarrow \mathbb{R}_+$  et la densité des

forces volumiques par  $f_0^\kappa : \Omega^\kappa \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ . L'évolution du corps est décrite par l'équation du mouvement de Cauchy suivante

$$\text{Div}\sigma^\kappa + f_0^\kappa = \rho^\kappa \ddot{u}^\kappa \quad \text{dans } \Omega^\kappa \times (0, T). \quad (1.4)$$

ici "Div" représente l'opérateur divergence pour les tenseurs,  $\text{Div } \sigma^\kappa = (\sigma_{ij,j}^\kappa)$ . Les processus d'évolution sont modélés par l'équation précédente s'appellent processus dynamique. Dans certaines situation, cette équation peut encore se simplifier : par exemple dans le cas où  $\dot{u}^\kappa = 0$ , il s'agit d'un problème d'équilibre (processus statiques), ou bien dans le cas où le champ des vitesse  $\dot{u}^\kappa$  varie très lentement par rapport au temps, c'est-à-dire que le terme  $\rho^\kappa \ddot{u}^\kappa$  peut être négligé. Dans ces deux cas l'équation du mouvement (1.4) devient

$$\text{Div}\sigma^\kappa + f_0^\kappa = 0 \quad \text{dans } \Omega^\kappa \times (0, T).$$

L'équation précédente s'appelle *l'équation d'équilibre*, et ce processus s'appelle processus quasistatique. Nous rappelons que dans le cadre physique n°1,  $f_2^\kappa$  et  $f_0^\kappa$  varient très lentement par rapport au temps.

Puisque le corps  $\Omega^\kappa$  est encastrés sur  $\Gamma_1^\kappa$ , le champ des déplacements s'annule

$$u^\kappa = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1^\kappa \times [0, T]. \quad (1.5)$$

La condition aux limites en tractions est

$$\sigma^\kappa \nu^\kappa = f_2^\kappa \quad \text{sur } \Gamma_2^\kappa \times (0, T). \quad (1.6)$$

Nous allons compléter ultérieurement le modèle mathématique (1.4)-(1.6) par les conditions de contact sur la partie  $\Gamma_3$ .

**Modèle mathématique n°2.** Ce modèle mathématique décrit l'évolution du corps dans le cadre physique n°2, c'est un modèle électro-mécanique. Les inconnues mécaniques du problème sont le champ des déplacements  $u^\kappa$  et le champ des contraintes  $\sigma^\kappa$  satisfaisant les égalités (1.4)-(1.6). A celles-ci se rajoutent les inconnues électriques du problème, à savoir le champ des déplacements électriques, le potentiel électrique  $\psi^\kappa : \Omega^\kappa \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  et le champ des déplacements électriques  $D^\kappa : \Omega^\kappa \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ . L'évolution du corps piézoélectrique est décrite par l'équation d'équilibre pour le champ de déplacements électriques

$$\text{div}D^\kappa = q_0^\kappa \quad \text{dans } \Omega^\kappa \times (0, T), \quad (1.7)$$

où "div" est l'opérateur de divergence pour les vecteurs,  $\text{div} D^\kappa = D_{i,i}^\kappa$  et  $q_0^\kappa$  représente la densité des charges électriques volumiques sur  $\Omega^\kappa$ . Rappelons que dans le cadre physique n°2, le potentiel électrique s'annule sur la partie  $\Gamma_a^\kappa$  de la frontière

$$\psi^\kappa = 0 \quad \text{sur } \Gamma_a^\kappa \times (0, T), \quad (1.8)$$

tandis que sur  $\Gamma_b^\kappa$ , une charge électrique de densité  $q_2^\kappa$  est prescrite,

$$D^\kappa \cdot \nu^\kappa = q_2^\kappa \quad \text{sur } \Gamma_b^\kappa \times (0, T). \quad (1.9)$$

De plus, ajouté les inconnues, le champ la température  $\tau^\kappa : \Omega^\kappa \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ , le champ d'endommagement  $\alpha^\kappa : \Omega^\kappa \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ , et un champ de variable d'état interne  $\beta^\kappa : \Omega^\kappa \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^m$ . La température  $\tau^\kappa$  est défini par une équation parabolique, qui représente la conservation de l'énergie comme suit

$$\dot{\tau}^\kappa - \mathcal{K}_0^\kappa \Delta \tau^\kappa = \Psi^\kappa(\varepsilon(u^\kappa), \alpha^\kappa, \beta^\kappa, \tau^\kappa) + \chi^\kappa \quad \Omega^\kappa \times (0, T), \quad (1.10)$$

où  $\Psi^\kappa$  est une fonction constitutive non linéaire qui représente la chaleur engendrée par les forces intérieures. Ici et ci-dessous  $\mathcal{K}_0^\kappa$  est une constante strictement positive et  $\chi^\kappa$  une donnée, qui représente la source de chaleur du volume.

L'endommagement  $\alpha^\kappa$  est une variable interne d'état définie sur  $\Omega^\kappa \times [0, T]$ , avec  $0 \leq \alpha^\kappa \leq 1$ , L'évolution du champ d'endommagement utilisée au deuxième chapitre est modélisée par l'inclusion du type parabolique donnée par la relation

$$\dot{\alpha}^\kappa - \mathcal{K}_1^\kappa \Delta \alpha^\kappa + \partial \mathbb{I}_{\mathcal{Z}^\kappa}(\alpha^\kappa) \ni S^\kappa(\varepsilon(u^\kappa), \alpha^\kappa) \quad \Omega^\kappa \times (0, T), \quad (1.11)$$

où  $\mathcal{K}_1^\kappa$  est une constante positive,  $S^\kappa$  est la fonction source de l'endommagement,  $\partial \mathbb{I}_{\mathcal{Z}^\kappa}$  est le sous-différentiel de la fonction indicatrice  $\mathbb{I}_{\mathcal{Z}^\kappa}$  et  $\mathcal{Z}^\kappa$  est l'ensemble des endommagements admissibles défini par

$$\mathcal{Z}^\kappa = \{ \alpha \in H^1(\Omega^\kappa); 0 \leq \alpha \leq 1, \quad p.p. \text{ dans } \Omega^\kappa \}.$$

L'évolution de variable interne d'état  $\beta^\kappa$  est décrite par une équation différentielle de la forme

$$\dot{\beta}^\kappa = \Theta^\kappa(\varepsilon(u^\kappa), \alpha^\kappa, \beta^\kappa, \tau^\kappa) \quad \Omega^\kappa \times (0, T). \quad (1.12)$$

Ce modèle thermo-piézoélectrique (1.4), (1.7), et (1.10)-(1.12) sera complété ultérieurement par les conditions aux limites (1.5), (1.6), (1.8), (1.9).

Les équations précédentes sont insuffisantes à elles seules pour décrire le mouvement du corps matériel considéré. Il est nécessaire de décrire ce qui est propre au matériau lui-même, c'est l'objet des lois de comportement que nous décrirons dans le deuxième paragraphe de ce chapitre.

### 1.1.3 Loi de comportement piézoélectrique

Les lois de comportement sont des relations entre le tenseur des contraintes et le tenseur des déformations et leurs dérivées. C'est toute une série d'essais qu'il faut imaginer et réaliser pour établir une loi de comportement. Les expériences physiques pour les matériaux unidimensionnels constituent le point de départ dans l'établissement des lois de comportement.

Dans la description des phénomènes purement électro-mécanique, par loi de comportement nous comprenons dans la suite une relation entre le tenseur des contraintes  $\sigma^\kappa$ , le tenseur des déformations infinitésimales  $\varepsilon^\kappa$  et leurs dérivées temporelles  $\dot{\sigma}^\kappa$  et  $\dot{\varepsilon}^\kappa$ . Cette définition se modifie légèrement dans la description des phénomènes électro-mécaniques, car ici nous devons aussi prendre en considération le champ de déplacement électrique  $D^\kappa = (D_i^\kappa)$  ainsi que le champ électrique  $E^\kappa(\psi^\kappa) = -\nabla\psi^\kappa$ .

Nous présentons par la suite lois de comportement pour les matériaux : électro-élastiques, électro-viscoélastiques et thermo-électro-viscoélastiques. Ces lois sont utilisées dans de nombreux ouvrages portant notamment sur l'étude mathématique des problèmes de contact.

#### I-Loi de comportement des matériaux électro-élastiques

Nous considérons ici une catégorie de matériaux où le tenseur des contraintes  $\sigma^\kappa$  et le vecteur des déplacements électriques  $D^\kappa$  sont reliés par la loi de comportement :

$$\begin{cases} \sigma^\kappa = \mathcal{A}^\kappa \varepsilon(u^\kappa) - (\mathcal{E}^\kappa)^* E(\psi^\kappa), \\ D^\kappa = \mathcal{E}^\kappa \varepsilon(u^\kappa) + \mathcal{G}^\kappa (E^\kappa(\psi^\kappa)), \end{cases} \quad (1.13)$$

où  $\mathcal{A}^\kappa : \Omega^\kappa \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{S}^d$  est l'opérateur de d'élasticité non linéaire,  $E(\psi^\kappa) = -\nabla\psi^\kappa$  où  $\nabla\psi^\kappa = (\psi_i^\kappa)$  représente le champ électrique,  $\mathcal{E}^\kappa = (e_{ijk}^\kappa)$  est le tenseur piézoélectrique qui traduit la proportionnalité entre la charge et la déformation à champ constant ou nul et  $\mathcal{G}^\kappa = (\mathcal{G}_{ij}^\kappa)$  est le tenseur diélectrique à déformation nulle qui constitue un tenseur symétrique défini positif. Par ailleurs  $(\mathcal{E}^\kappa)^* = (e_{ijk}^{\kappa,*})$  où  $e_{ijk}^{\kappa,*} = e_{kij}^\kappa$ , dénote le transposé du tenseur  $\mathcal{E}^\kappa$

tel que :

$$\mathcal{E}^\kappa \sigma^\kappa \cdot v^\kappa = \sigma^\kappa \cdot (\mathcal{E}^\kappa)^* v^\kappa, \quad \forall \sigma^\kappa \in \mathbb{S}^d, v^\kappa \in \mathbb{R}^d.$$

## II-Loi de comportement électro-élastiques avec mémoire longue

Dans ce cas la loi de comportement est donnée par :

$$\begin{cases} \sigma^\kappa = \mathcal{A}^\kappa \varepsilon(u^\kappa) + \int_0^t \mathcal{Q}^\kappa(t-s, \varepsilon(u^\kappa(s))) ds - (\mathcal{E}^\kappa)^* E(\psi^\kappa), \\ D^\kappa = \mathcal{E}^\kappa \varepsilon(u^\kappa) + \mathcal{G}^\kappa(E^\kappa(\psi^\kappa)), \end{cases} \quad (1.14)$$

où  $\mathcal{Q} = (\mathcal{Q}_{ij})$  est un tenseur de relaxation. Si  $\mathcal{Q} = 0$ , on retrouve la loi électro-élastiques donnée par (1.13).

## III-Loi de comportement des matériaux électro-viscoélastiques

Un matériau est dit électro-viscoélastique si sa loi de comportement est de la forme :

$$\begin{cases} \sigma^\kappa = \mathcal{A}^\kappa(\varepsilon(\dot{u}^\kappa)) + \mathcal{B}^\kappa(\varepsilon(u^\kappa)) - (\mathcal{E}^\kappa)^* E^\kappa(\psi^\kappa), \\ D^\kappa = \mathcal{E}^\kappa \varepsilon(u^\kappa) - \mathcal{R}^\kappa \nabla \psi^\kappa, \end{cases} \quad (1.15)$$

dans laquelle l'opérateur  $\mathcal{A}^\kappa$ , est l'opérateur viscosité pas forcément linéaire,  $\mathcal{B}^\kappa$  est l'opérateur d'élasticité non linéaire.

## IV-Loi de comportement thermo-électro-viscoélastiques avec endommagement et variable d'état interne

Dans ce cas la loi de comportement est donnée par :

$$\begin{cases} \sigma^\kappa = \mathcal{A}^\kappa(\varepsilon(\dot{u}^\kappa)) + \mathcal{B}^\kappa(\varepsilon(u^\kappa), \alpha^\kappa) - (\mathcal{E}^\kappa)^* E^\kappa(\psi^\kappa) + \mathcal{F}^\kappa(\beta^\kappa, \tau^\kappa), \\ D^\kappa = \mathcal{E}^\kappa \varepsilon(u^\kappa) - \mathcal{R}^\kappa \nabla \psi^\kappa + \mathcal{G}^\kappa(\beta^\kappa, \tau^\kappa), \end{cases} \quad (1.16)$$

où  $\mathcal{A}^\kappa$ ,  $\mathcal{B}^\kappa$ ,  $\mathcal{E}^\kappa$ ,  $\mathcal{R}^\kappa$ , sont l'opérateur de viscosité, l'opérateur d'élasticité, le tenseur piézoélectrique et le tenseur de permittivité électrique respectivement,  $\mathcal{F}^\kappa$  et  $\mathcal{G}^\kappa$  deux opérateurs non linéaires.

Nous utilisons la loi de comportement des matériaux thermo-électro-viscoélastiques avec endommagement et variable d'état interne dans le deuxième chapitre, nous passons maintenant aux conditions son limites utilisées dans celle-ci.

### 1.1.4 Conditions aux limites

Définissons maintenant les conditions aux limites sur chacune des trois parties de  $\Gamma^\kappa$ .

#### A-La condition aux limites de déplacement

Le corps est encastré dans une position fixe sur la partie  $\Gamma_1^\kappa$ , le champ des déplacements  $u^\kappa$  est par conséquent nul

$$u^\kappa = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1^\kappa \times [0, T].$$

#### B-La condition aux limites de traction

Une traction surfacique de densité  $f_2^\kappa$  agit sur  $\Gamma_2^\kappa$  et par conséquent le vecteur des contraintes de Cauchy  $\sigma^\kappa \nu^\kappa$  satisfait

$$\sigma^\kappa \nu^\kappa = f_2^\kappa \quad \text{sur } \Gamma_2^\kappa \times [0, T].$$

#### C-Les conditions aux limites électriques

Ces conditions sont déterminées à partir des deux équations

$$\psi^\kappa = 0 \quad \text{sur } \Gamma_a^\kappa \times [0, T],$$

$$D^\kappa \cdot \nu^\kappa = q_2^\kappa \quad \text{sur } \Gamma_b^\kappa \times [0, T].$$

#### D-Les conditions aux limites de contact

On définit le déplacement normal relatif d'un corps par rapport à l'autre sur  $\Gamma_3$  par

$$[u_\nu] = u_\nu^1 + u_\nu^2, \quad (1.17)$$

et le déplacement tangentiel relatif d'un corps par rapport à l'autre corps sur  $\Gamma_3$  définie par

$$[u_\tau] = u_\tau^1 - u_\tau^2. \quad (1.18)$$

La continuité des contraintes sur l'interfaces  $\Gamma_3$  se traduit par

$$\sigma_\nu^1 = \sigma_\nu^2 \equiv \sigma_\nu, \quad \sigma_\tau^1 = -\sigma_\tau^2 \equiv \sigma_\tau \quad \text{sur } \Gamma_3. \quad (1.19)$$

Nous signalons que si le contact entre les deux corps sur  $\Gamma_3$  est sans frottement, ce qui n'est pas notre sujet dans ce mémoire, alors  $\sigma_\tau = 0$ .

Les égalités et les inégalités qui suivent sont considérées vraies presque partout sur  $\Gamma_3 \times [0, T]$ .

### Contact bilatéral

Le contact se fait de façon bilatérale c'est-à-dire le contact est maintenu pendant le mouvement ; il n'y a pas de séparation entre les deux corps. Cette propriété se traduit mathématiquement par

$$[u_\nu] = 0, \quad (1.20)$$

où  $[u_\nu]$  est défini par (1.17). L'équation (1.20) sera utilisée dans la deuxième partie de ce mémoire.

### Contact bilatéral avec frottement de Tresca

La loi de Tresca présente un seuil de frottement fixe  $g$  lorsque les deux corps sont en contact, l'un des deux corps exerce sur l'autre un effort tangentiel  $\sigma_\tau$ , qui vérifie (1.19), et qui ne dépasse pas le seuil  $g$  c'est-à-dire

$$|\sigma_\tau| \leq g.$$

Tant que la contrainte tangentielle n'a pas atteint le seuil  $g$ , l'un des deux corps ne peut pas se déplacer par rapport à l'autre et il y a blocage, ce qui traduit par

$$|\sigma_\tau| < g \Rightarrow [\dot{u}_\tau] = 0.$$

Lorsque ce seuil est atteint, un corps peut se déplacer tangentiellement par rapport à l'autre et il y a alors un glissement. La contrainte tangentielle s'oppose à la vitesse et par conséquent

$$|\sigma_\tau| = g \Rightarrow \text{il existe } \lambda \geq 0 \text{ tel que } \sigma_\tau = -\lambda [\dot{u}_\tau]$$

En conclusion, les conditions de contact bilatéral avec frottement de Tresca s'écrivent alors comme suit

$$\left\{ \begin{array}{l} [u_\nu] = 0, \\ \sigma_\tau^1 = -\sigma_\tau^2 \equiv \sigma_\tau, |\sigma_\tau| \leq g, \\ |\sigma_\tau| < g \Rightarrow [\dot{u}_\tau] = 0, \\ |\sigma_\tau| = g \Rightarrow \text{il existe } \lambda \geq 0 \text{ tel que } \sigma_\tau = -\lambda [\dot{u}_\tau], \end{array} \right. \quad (1.21)$$

où le seuil de frottement  $g$  est une fonction réelle strictement positive définie sur  $\Gamma_3 \times (0, T)$ .

La loi de Tresca a été utilisée récemment dans [3, 7, 21].

## 1.2 Outils Mathématiques

Dans cette section consacrée à la description des espaces utilisés dans toute au long de ce mémoire. Nous supposons deux domaines bornée  $\Omega^1$  et  $\Omega^2$  dans  $\mathbb{R}^d (d = 2, 3)$ , on suppose que la frontière de chaque domaine  $\Omega^\kappa$  est constituée de trois parties mesurables disjointes  $\Gamma_1^\kappa, \Gamma_2^\kappa$  et  $\Gamma_3^\kappa$ , telles que  $mes(\Gamma_1^\kappa) > 0$  d'un côté, et une partition de  $\Gamma^\kappa$ , en deux parties mesurables disjointes  $\Gamma_a^\kappa$  et  $\Gamma_b^\kappa$  d'un autre côté, telles que  $mes(\Gamma_a^\kappa) > 0$ .

### 1.2.1 Espaces de Hilbert

Soit  $H$  un espace vectoriel réel et  $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$  un produit scalaire sur  $H$  c'est-à-dire  $\langle \cdot, \cdot \rangle_H : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$  est une application bilinéaire symétrique et définie positive.

On note par  $\| \cdot \|_H$  l'application de  $H \rightarrow \mathbb{R}_+$  définie par

$$\|u\|_H = \sqrt{\langle u, u \rangle_H}, \quad (1.22)$$

et on rappelle que  $\| \cdot \|_H$  est une norme sur  $H$  qui vérifie l'inégalité de Cauchy-Schwartz

$$|\langle u, v \rangle_H| \leq \|u\|_H \|v\|_H, \quad \forall u, v \in H,$$

on dit que  $H$  est un espace de Hilbert si  $H$  est complet pour la norme défini par (1.22).

Soit  $H'$  l'espace dual de  $H$  i.e l'espace des formes linéaires continues sur  $H$  muni de la norme

$$\|\eta\|_{H'} = \sup_{v \in H - \{0\}} \frac{|\langle \eta, v \rangle_{H' \times H}|}{\|v\|_H},$$

où  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H' \times H}$  représente le produit dual entre  $H'$  et  $H$ .

#### **Théorème 1.2.1. (Représentation de Riesz-Fréchet)**

Soit  $H$  un espace de Hilbert et soit  $H'$  son espace dual, alors pour tout  $\phi \in H'$  il existe  $f \in H$  unique tel que

$$\langle \phi, v \rangle_{H' \times H} = (f, v)_H \quad \forall v \in H,$$

de plus

$$\|\phi\|_{H'} = \|f\|_H.$$

L'importance de ce théorème est que tout forme linéaire continue sur  $H$  peut se représenter à l'aide du produit scalaire. L'application  $\phi \mapsto f$  est un isomorphisme isométrique qui permet d'identifier  $H$  et  $H'$ .

### 1.2.2 Triplet de Gelfand

Dans cet paragraphe nous rappelons la définition d'un triplet de Gelfand. Pour cela on va utiliser le Théorème 1.2.1 de représentation de Riesz-Fréchet. Soit maintenant  $V$  un espace de Hilbert réel tel que  $V$  dense dans  $H$  et l'injection  $V \subset H$  est continue, et on identifie  $H$  et  $H'$ . Soit  $V'$  le dual de  $V$ , on peut alors prolonger  $H$  dans  $V'$  grâce au procédé suivant : étant donné  $f \in H$ , l'application  $v \in V \mapsto \langle f, v \rangle_H$  est une forme linéaire continue sur  $H$  et a fortiori sur  $V$ , on la note  $Tf \in V'$  de sorte que

$$\langle Tf, v \rangle_{V' \times V} = \langle f, v \rangle_H, \quad \forall f \in H, \quad \forall v \in V.$$

On vérifie que  $T : H \rightarrow V'$  possède les propriétés suivantes

- 1)  $\|Tf\|_{V'} \leq C\|f\|_H, \quad \forall f \in H,$
- 2)  $T$  est injective,
- 3)  $T(H)$  est dense dans  $V'$ .

En général  $T$  n'est pas surjective de  $H$  sur  $V'$ . A l'aide de  $T$  on prolonge  $H$  dans  $V'$  et on a le schéma suivant

$$V \subset H \equiv H' \subset V'$$

où les injections canoniques sont continues et denses. Ce triplet est appelé Triplet de Gelfand, on dit que  $H$  est l'espace pivot.

### 1.2.3 Espaces de Lebesgue $L^p(\Omega^\kappa)$

D'abord on note par  $L^1(\Omega^\kappa)$  l'espace des fonctions intégrables sur  $\Omega^\kappa$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . On pose

$$\|v\|_{L^1(\Omega^\kappa)} = \int_{\Omega^\kappa} |v(x)| dx.$$

On va rappeler des résultats d'intégration très utiles sur tout pour la dernière partie de ce mémoire.

#### Lemme 1.2.1. (Lemme de Fatou)

Soit  $(v_n)$  une suite des fonctions de  $L^1(\Omega^\kappa)$  telle que

- 1) pour chaque  $n, v_n \geq 0$  p.p. sur  $\Omega^\kappa$ ,
- 2)  $\sup_n \int_{\Omega^\kappa} v_n(x) < \infty$ . Pour chaque  $x \in \Omega^\kappa$  on pose  $v(x) = \liminf_{n \rightarrow \infty} v_n(x)$ .

Alors  $v \in L^1(\Omega^\kappa)$  et  $\int_{\Omega^\kappa} v(x)dx \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega^\kappa} v_n(x)dx$ .

**Définition 1.2.1.** Soit  $p \in \mathbb{R}, 1 \leq p < \infty$ . On appelle l'espace de Lebesgue  $L^p(\Omega^\kappa)$  l'ensemble

$$L^p(\Omega^\kappa) = \{v : \Omega^\kappa \rightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable, et } |v|^p \in L^1(\Omega^\kappa)\},$$

muni de la norme définie par

$$\|v\|_{L^p(\Omega^\kappa)} = \left( \int_{\Omega^\kappa} |v(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

On appelle l'espace de Lebesgue  $L^\infty(\Omega^\kappa)$  l'ensemble

$$L^\infty(\Omega^\kappa) = \{v : \Omega^\kappa \rightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable ; } \exists C > 0, |v(x)| \leq C \text{ p.p. sur } \Omega^\kappa\},$$

muni de la norme définie par

$$\|v\|_{L^\infty(\Omega^\kappa)} = \inf \{C, \text{ telle que } |v(x)| \leq C \text{ p.p. sur } \Omega^\kappa\} = \text{supess}(v).$$

### 1.2.4 Quelques outils dans l'espace $L^p(\Omega^\kappa)$

**Théorème 1.2.2. (Convergence faible)**

Une suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset H$  converge faiblement vers  $x \in H$ , si

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \langle x_n, y \rangle = \langle x, y \rangle \quad \forall y \in H.$$

On écrit souvent  $x_n \rightharpoonup x$ .

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz, il résulte que si  $x_n \rightharpoonup x$  dans  $H$ , alors  $x_n \rightarrow x$ .

**Définition 1.2.2. (Convergence faible\*)**

Soit  $E$  un espace de Banach, et soit  $E'$  l'espace dual, une suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $E'$  converge faible\* vers  $f$  dans  $E'$ , et on note  $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ , si

$$\langle f_n, x \rangle_{E' \times E} \rightarrow \langle f, x \rangle_{E' \times E} \quad \text{pour tout } x \in E.$$

**Théorème 1.2.3.** Soit  $(x_n)$  une suite bornée de  $H$ . Alors il existe un élément  $x \in H$  et une sous-suite de  $(x_n)$  encore notée par  $(x_n)$  telle que  $x_n \rightarrow x$ .

**Théorème 1.2.4. (Convergence dominée de Lebesgue)**

Soit  $(v_n)$  une suite de fonctions de  $L^1(\Omega^\kappa)$ . On suppose que

- 1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n(x) = v(x)$ , p.p. sur  $\Omega^\kappa$ ,
- 2) il existe une fonction positive  $g \in L^1(\Omega^\kappa)$  telle que pour chaque  $n \in \mathbb{N}, |v_n(x)| \leq g(x)$  p.p. sur  $\Omega^\kappa$ .

Alors  $v \in L^1(\Omega^\kappa)$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|v_n - v\|_{L^1(\Omega^\kappa)} = 0$ .

### 1.2.5 Espaces de Sobolev

Les espaces de Sobolev ont été introduits au début du siècle et ont permis de résoudre bon nombre de problèmes concernant les équations aux dérivées partielles sans réponse jusque là. On commence par un bref rappel de quelques résultats sur l'espace de Sobolev  $H^1(\Omega^\kappa)$  défini par

$$H^1(\Omega^\kappa) = \left\{ u \in L^2(\Omega^\kappa); \partial_i u \in L^2(\Omega^\kappa) \ i = 1, \dots, d \right\},$$

on note par  $\nabla u$  le vecteur des composantes  $\partial_i u$ , on a  $\nabla u \in L^2(\Omega^\kappa)^d$  pour tout  $u \in H^1(\Omega^\kappa)$ . On sait que  $H^1(\Omega^\kappa)$  est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$\langle u, v \rangle_{H^1(\Omega^\kappa)} = \langle u, v \rangle_{L^2(\Omega^\kappa)} + \langle \partial_i u, \partial_i v \rangle_{L^2(\Omega^\kappa)},$$

et la norme associée  $\|u\|_{H^1(\Omega^\kappa)} = \sqrt{\langle u, u \rangle_{H^1(\Omega^\kappa)}}$ , et on écrit

$$\|u\|_{H^1(\Omega^\kappa)}^2 = \|u\|_{L^2(\Omega^\kappa)}^2 + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega^\kappa)^d}^2, \quad (1.23)$$

on a les résultats suivants

$$C^1(\overline{\Omega^\kappa}) \text{ est dense dans } H^1(\Omega^\kappa).$$

#### **Théorème 1.2.5. (Injection continue de Sobolev)**

Soient  $I$  un ouvert borné de classe  $C^1$  de  $\mathbb{R}^N$ , et  $r, s \in \mathbb{R}$ . Alors, les injections suivantes sont continues

1. si  $s \leq r$  : on a  $H^r(I) \hookrightarrow H^s(I)$  ;

c'est à dire qu'il existe un réel  $C > 0$  tel que :

$$\|u\|_{H^s(I)} \leq C \|u\|_{H^r(I)} \quad \forall u \in H^r(I). \quad (1.24)$$

2. si  $s > \frac{N}{2}$  ; on a  $H^{s+j}(I) \hookrightarrow C_b^j(\bar{I}) \quad \forall j \in \mathbb{N}$  ;

c'est à dire qu'il existe un réel  $C > 0$  tel que :

$$\|u\|_{C_b^j(\bar{I})} \leq C \|u\|_{H^{s+j}(I)} \quad \forall u \in H^{s+j}(I),$$

où  $C_b^j(\bar{I}) = \{\varphi \in C^j(\bar{I}) / \varphi \text{ bornée}\}$ .

#### **Théorème 1.2.6. (Injection compact de Rellich)**

Soient  $I$  un ouvert borné de classe  $C^1$  de  $\mathbb{R}^N$ , et  $r, s \in \mathbb{R}$ . Alors, les injections suivantes sont compactes

1. si  $s \leq r$ ; on a  $H^r(I) \subset\subset H^s(I)$ ;

*c'est à dire toute suite bornée de  $H^r(I)$  admet une sous-suite convergente dans  $H^s(I)$ .*

2. si  $s > \frac{N}{2}$ ; on a  $H^{s+j}(I) \subset\subset C_b^j(\bar{I}) \quad \forall j \in \mathbb{N}$ ;

*c'est à dire toute suite bornée de  $H^s(I)$  admet une sous-suite convergente dans  $C_b^j(\bar{I})$ .*

**Théorème 1.2.7. (trace de Sobolev)**

Soit  $\Omega^\kappa$  un domaine lipschitzien de  $\mathbb{R}^d$  de frontière  $\Gamma^\kappa$  et  $1 < p < \infty$ . Il existe une application linéaire et continue  $\gamma^\kappa$  définie sur l'espace  $W^{1,p}(\Omega^\kappa)$  à valeurs dans l'espace  $L^p(\Gamma^\kappa)$  telle que :

1)  $\gamma^\kappa v = v|_{\Gamma^\kappa}$  si  $v \in W^{1,p}(\Omega^\kappa) \cap C(\bar{\Omega}^\kappa)$ ,

2) l'application  $\gamma^\kappa$  est une application compact,

3) il existe une constante  $C > 0$ , provenant de la continuité de l'application  $\gamma^\kappa$ , tel que

$$\|\gamma^\kappa v\|_{L^p(\Gamma^\kappa)} \leq C \|v\|_{W^{1,p}(\Omega^\kappa)} \quad \forall v \in W^{1,p}(\Omega^\kappa).$$

Où

$$C(\bar{\Omega}^\kappa) = \{ \psi^\kappa|_{\Omega^\kappa} : \psi^\kappa \in C(\mathbb{R}^d) \}. \quad (1.25)$$

L'application  $\gamma^\kappa$  s'appelle application de trace sur  $W^{1,p}(\Omega^\kappa)$ , on a :

"  $\gamma^\kappa$  est définie comme le prolongement par densité de l'application  $v^\kappa \mapsto v^\kappa|_{\Gamma^\kappa}$  définie pour  $v^\kappa \in C(\bar{\Omega}^\kappa)$  ".

**Définition 1.2.3.** Pour tout  $k \in \mathbb{N}$  et pour tout  $p \in [1, +\infty]$ , nous définissons l'espace de Sobolev  $W^{k,p}(\Omega^\kappa)$  par

$$W^{k,p}(\Omega^\kappa) = \left\{ u \in L^p(\Omega^\kappa) \quad \forall \alpha, |\alpha| \leq k; \quad \exists v_\alpha \in L^p(\Omega^\kappa), \text{ tel que } v_\alpha = D^\alpha u \right\}.$$

où  $D^\alpha u$  est la  $\alpha^{ime}$  dérivée faible de  $u$ .

**Remarque 1.2.1.** Nous ferons très souvent l'abus d'écriture qui consiste à identifier  $D^\alpha u$  et  $v_\alpha$ .

La norme sur l'espace  $W^{k,p}(\Omega^\kappa)$  est donnée par

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega^\kappa)} = \begin{cases} \left( \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega^\kappa)} \right)^{\frac{1}{p}} & \text{si } 1 \leq p < \infty, \\ \max_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega^\kappa)} & \text{si } p = \infty, \end{cases}$$

pour  $p = 2$ , on note par  $H^k(\Omega^\kappa)$  l'espace  $W^{k,2}(\Omega^\kappa)$  et la norme précédente provient d'un produit scalaire.

**Théorème 1.2.8.** *Les espaces de Sobolev  $W^{k,p}(\Omega^\kappa)$ , pour  $k \in \mathbb{N}$  et  $p \in [1, +\infty]$ , munis de la norme  $\|\cdot\|$ , sont des espaces de Banach. De plus, les espaces  $H^k(\Omega^\kappa)$ , pour tout  $k$  entier, sont des espaces de Hilbert.*

Soit  $\mathbf{R}^\kappa$  le sous-ensemble de  $W^{1,2}(\Omega^\kappa)^d$  défini par :

$$\mathbf{R}^\kappa = \{u^\kappa \in W^{1,2}(\Omega^\kappa)^d / \exists a \in \mathbb{R}^d \text{ et } B \in \mathbb{S}^d / B^T = -B, \quad u^\kappa(x) = a + Bx\}. \quad (1.26)$$

**Théorème 1.2.9.** *Soit  $u^\kappa \in W^{1,2}(\Omega^\kappa)^d$ . Alors  $\varepsilon(u^\kappa) = 0$  si et seulement si  $u^\kappa \in \mathbf{R}^\kappa$ .*

**Théorème 1.2.10. (Inégalité de Korn)**

*Soit  $\mathbf{V}^\kappa$  un sous-espace fermé de  $W^{1,2}(\Omega^\kappa)^d$  tel que :*

$$\mathbf{V}^\kappa \cap \mathbf{R}^\kappa = \{0\}. \quad (1.27)$$

*Alors, il existe  $C > 0$  ne dépendant que  $\Omega^\kappa$  et  $\mathbf{V}^\kappa$  tel que*

$$\|\varepsilon(u^\kappa)\|_{\mathcal{H}^\kappa} \geq C \|u^\kappa\|_{W^{1,2}(\Omega^\kappa)^d} \quad \forall u^\kappa \in \mathbf{V}^\kappa. \quad (1.28)$$

L'inégalité (1.28) appelé *l'inégalité de Korn*.

**Exemple :** Tout au long du mémoire, dans les parties mécaniques, la frontière  $\Omega^\kappa$  est subdivisée en trois parties mesurables disjointes  $\Gamma_1^\kappa$ ,  $\Gamma_2^\kappa$ , et  $\Gamma_3^\kappa$ , tels que  $\text{mes}(\Gamma_1^\kappa) > 0$ . Nous aurons constamment besoin de l'espace des déplacements admissibles  $\mathcal{V}^\kappa$  défini par

$$\mathcal{V}^\kappa = \{u^\kappa \in W^{1,2}(\Omega^\kappa)^d \mid u^\kappa = 0 \text{ sur } \Gamma_1^\kappa\}. \quad (1.29)$$

Puisque  $\text{mes}(\Gamma_1^\kappa) > 0$ , il vient  $\mathcal{V}^\kappa \cap \mathbf{R}^\kappa = \{0\}$ , d'où l'inégalité de *Korn* s'applique sur  $\mathcal{V}^\kappa$ ; alors, il existe une constante  $c_k > 0$  dépendant uniquement de  $\Omega^\kappa$  et  $\Gamma_1^\kappa$  telle que

$$\|\varepsilon(v^\kappa)\|_{\mathcal{H}^\kappa} \geq c_k \|v^\kappa\|_{W^{1,2}(\Omega^\kappa)^d}, \quad \forall v^\kappa \in \mathcal{V}^\kappa. \quad (1.30)$$

Sur l'espace  $\mathcal{V}^\kappa$  nous considérons le produit scalaire donnée par

$$\langle u^\kappa, v^\kappa \rangle_{\mathcal{V}^\kappa} = \langle \varepsilon(u^\kappa), \varepsilon(v^\kappa) \rangle_{\mathcal{H}^\kappa}, \quad \forall u^\kappa, v^\kappa \in \mathcal{V}^\kappa, \quad (1.31)$$

et soit  $\|\cdot\|_{\mathcal{V}^\kappa}$  la norme associée

$$\|u^\kappa\|_{\mathcal{V}^\kappa} = \|\varepsilon(u^\kappa)\|_{\mathcal{H}^\kappa}, \quad \forall u^\kappa \in \mathcal{V}^\kappa. \quad (1.32)$$

Par l'inégalité de Korn (1.30), il vient que  $\|\cdot\|_{W^{1,2}(\Omega^\kappa)^d}$  et  $\|\cdot\|_{\mathcal{V}^\kappa}$  sont des normes équivalentes sur  $\mathcal{V}^\kappa$  et ainsi  $(\mathcal{V}^\kappa, \|\cdot\|_{\mathcal{V}^\kappa})$  est un espace de Hilbert réel.

En outre, par le Théorème de trace de Sobolev et (1.30), il existe une constante  $c_{tr} > 0$ , dépendant uniquement de  $\Omega^\kappa, \Gamma_1^\kappa$  et  $\Gamma_3$  telle que

$$\|u^\kappa\|_{L^2(\Gamma_3)^d} \leq c_{tr} \|u^\kappa\|_{\mathcal{V}^\kappa}, \quad \forall u^\kappa \in \mathcal{V}^\kappa. \quad (1.33)$$

## 1.2.6 Espaces fonctionnels

On introduit dans cette section les espaces du type Sobolev utilisés en mécanique et associés aux opérateurs divergence et déformation, on montre leurs principales propriétés, notamment le théorème de trace, aussi quelques espaces de fonctions définies sur un intervalle réel et à valeurs dans l'espace de Hilbert.

Maintenant, pour procéder à la formulation variationnelle, nous avons besoin des espaces de Hilbert suivants, associés aux inconnues mécaniques  $u^\kappa$ ,  $\sigma^\kappa$  et  $\beta^\kappa$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{H}^\kappa = \{u^\kappa = (u_i^\kappa); u_i^\kappa \in L^2(\Omega^\kappa)\} = L^2(\Omega^\kappa)^d, \\ \mathcal{H}^\kappa = \{\sigma^\kappa = (\sigma_{ij}^\kappa); \sigma_{ij}^\kappa = \sigma_{ji}^\kappa \in L^2(\Omega^\kappa)\} = L^2(\Omega^\kappa)_s^{d \times d}, \\ \mathbb{H}_1^\kappa = \{u^\kappa = (u_i^\kappa); u_i^\kappa \in W^{1,2}(\Omega^\kappa)\} = W^{1,2}(\Omega^\kappa)^d, \\ \mathcal{H}_1^\kappa = \{\sigma^\kappa = (\sigma_{ij}^\kappa) \in \mathcal{H}^\kappa; \text{Div } \sigma^\kappa \in \mathbb{H}^\kappa\} = W^{1,2}(\Omega^\kappa)_s^{d \times d}, \\ \mathbb{Y}^\kappa = \{\beta^\kappa = (\beta_i^\kappa); \beta_i^\kappa \in L^2(\Omega^\kappa)\} = L^2(\Omega^\kappa)^m. \end{array} \right.$$

Les espaces  $\mathbb{H}^\kappa, \mathcal{H}^\kappa, \mathbb{H}_1^\kappa, \mathcal{H}_1^\kappa$  et  $\mathbb{Y}^\kappa$  sont des espaces réels de Hilbert munis des produits scalaires respectivement, donnés par

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle u^\kappa, v^\kappa \rangle_{\mathbb{H}^\kappa} = \int_{\Omega^\kappa} u_i^\kappa \cdot v_i^\kappa dx, \\ \langle \sigma^\kappa, \theta^\kappa \rangle_{\mathcal{H}^\kappa} = \int_{\Omega^\kappa} \sigma_{ij}^\kappa \cdot \theta_{ij}^\kappa dx, \\ \langle u^\kappa, v^\kappa \rangle_{\mathbb{H}_1^\kappa} = \int_{\Omega^\kappa} u_i^\kappa \cdot v_i^\kappa dx + \int_{\Omega^\kappa} \nabla u_i^\kappa \cdot \nabla v_i^\kappa dx, \\ \langle \sigma^\kappa, \theta^\kappa \rangle_{\mathcal{H}_1^\kappa} = \int_{\Omega^\kappa} \sigma_{ij}^\kappa \cdot \theta_{ij}^\kappa dx + \int_{\Omega^\kappa} \text{Div } \sigma^\kappa \cdot \text{Div } \theta^\kappa dx, \\ \langle \beta^\kappa, \delta^\kappa \rangle_{\mathbb{Y}^\kappa} = \int_{\Omega^\kappa} \beta_i^\kappa \cdot \delta_i^\kappa dx, \end{array} \right.$$

où  $\nabla : \mathbb{H}_1^\kappa \rightarrow \mathbb{H}^\kappa$ ,  $\varepsilon : \mathbb{H}_1^\kappa \rightarrow \mathcal{H}^\kappa$  et  $\text{Div} : \mathcal{H}_1^\kappa \rightarrow \mathbb{H}^\kappa$  sont respectivement les opérateurs de

gradient, de déformation et de divergence, définis par

$$\nabla u^\kappa = (u_{i,j}^\kappa), \quad \varepsilon(u^\kappa) = (\varepsilon_{i,j}(u^\kappa)), \quad \varepsilon_{i,j}(u^\kappa) = \frac{1}{2}(u_{i,j}^\kappa + u_{j,i}^\kappa); \quad \forall u^\kappa \in \mathbb{H}_1^\kappa.$$

$$\text{Div } \sigma^\kappa = (\sigma_{ij,j}^\kappa), \quad \forall \sigma^\kappa \in \mathcal{H}_1^\kappa.$$

Les normes sur les espaces  $\mathbb{H}^\kappa$ ,  $\mathcal{H}^\kappa$ ,  $\mathbb{H}_1^\kappa$ ,  $\mathcal{H}_1^\kappa$  et  $\mathbb{Y}^\kappa$  sont notées par  $\|\cdot\|_{\mathbb{H}^\kappa}$ ,  $\|\cdot\|_{\mathcal{H}^\kappa}$ ,  $\|\cdot\|_{\mathbb{H}_1^\kappa}$ ,  $\|\cdot\|_{\mathcal{H}_1^\kappa}$ ,  $\|\cdot\|_{\mathbb{Y}^\kappa}$  respectivement.

Puisque la frontière  $\Gamma^\kappa$  est lipschitzienne, le vecteur normal extérieur  $\nu^\kappa$  à la frontière est défini p.p. Pour tout champ de vecteur  $v^\kappa \in \mathbb{H}_1^\kappa$  nous utilisons la notation  $v^\kappa$  pour désigner la trace de  $v^\kappa$  sur  $\Gamma^\kappa$ . Désignons par  $\mathbb{H}'_{\Gamma^\kappa}$  le dual de  $\mathbb{H}_{\Gamma^\kappa} = H^{\frac{1}{2}}(\Gamma^\kappa)^d$  et  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \Gamma^\kappa}$  le produit de dualité entre  $\mathbb{H}'_{\Gamma^\kappa}$  et  $\mathbb{H}_{\Gamma^\kappa}$ .

Pour  $\tau^\kappa$  assez régulier nous avons la formule de Green suivante

$$\langle \Delta \tau^\kappa, \delta^\kappa \rangle_{\mathcal{H}^\kappa} + \langle \nabla \tau^\kappa, \nabla \delta^\kappa \rangle_{L^2(\Omega^\kappa)} = \int_{\Gamma^\kappa} \frac{\partial \tau^\kappa}{\partial \nu^\kappa} \delta^\kappa da, \quad \forall \delta^\kappa \in H^1(\Omega^\kappa). \quad (1.34)$$

Pour  $D^\kappa$  assez régulier nous avons la formule de Green suivante

$$\langle D^\kappa, \nabla \phi^\kappa \rangle_{\mathbb{H}^\kappa} + \langle \text{div } D^\kappa, \phi^\kappa \rangle_{L^2(\Omega^\kappa)} = \int_{\Gamma^\kappa} D^\kappa \nu^\kappa \phi^\kappa da, \quad \forall \phi^\kappa \in \mathbb{W}^\kappa. \quad (1.35)$$

Pour tout  $\sigma^\kappa \in \mathcal{H}_1^\kappa$ , il existe un élément  $\sigma^\kappa \nu^\kappa \in \mathbb{H}'_{\Gamma^\kappa}$  tel que

$$\langle \sigma^\kappa \nu^\kappa, v^\kappa \rangle_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \Gamma^\kappa} = \langle \sigma^\kappa, \varepsilon(v^\kappa) \rangle_{\mathcal{H}^\kappa} + \langle \text{Div } \sigma^\kappa, v^\kappa \rangle_{\mathbb{H}^\kappa} \quad \forall v^\kappa \in \mathbb{H}_1^\kappa,$$

en outre, si  $\sigma^\kappa$  est continûment différentiable sur  $\Omega^\kappa \cup \Gamma^\kappa$ , tel que

$$\langle \sigma^\kappa \nu^\kappa, v^\kappa \rangle_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \Gamma^\kappa} = \int_{\Gamma^\kappa} \sigma^\kappa \nu^\kappa \cdot v^\kappa da, \quad \forall v^\kappa \in \mathbb{H}_1^\kappa,$$

donc, pour  $\sigma^\kappa$  assez régulier nous avons la formule de Green suivante

$$\langle \sigma^\kappa, \varepsilon(v^\kappa) \rangle_{\mathcal{H}^\kappa} + \langle \text{Div } \sigma^\kappa, v^\kappa \rangle_{\mathbb{H}^\kappa} = \int_{\Gamma^\kappa} \sigma^\kappa \nu^\kappa \cdot v^\kappa da, \quad \forall v^\kappa \in \mathbb{H}_1^\kappa, \quad (1.36)$$

où  $da$  est un élément de mesure de surface.

Par ailleurs, soient  $\alpha^\kappa$  et  $\xi^\kappa$  deux fonctions assez régulières ( par exemple  $\alpha^\kappa \in C^2(\overline{\Omega}^\kappa)$  et  $\xi^\kappa \in C^1(\overline{\Omega}^\kappa)$ ), elles vérifient la formule de Green suivante

$$\int_{\Omega^\kappa} \Delta \alpha^\kappa \xi^\kappa dx = - \int_{\Omega^\kappa} \nabla \alpha^\kappa \cdot \nabla \xi^\kappa dx + \int_{\Gamma^\kappa} \frac{\partial \alpha^\kappa}{\partial \nu} \xi^\kappa da. \quad (1.37)$$

Dans ce qui suit, nous définissons les espaces de Sobolev de nos problèmes associés aux inconnues électriques :

$$\begin{aligned} E_0^\kappa &= L^2(\Omega^\kappa), & E_1^\kappa &= H^1(\Omega^\kappa), \\ \mathbb{W}^\kappa &= \{ \Psi^\kappa \in E_1^\kappa; \Psi^\kappa = 0 \text{ sur } \Gamma_a^\kappa \}, \\ \mathcal{W}^\kappa &= \{ D^\kappa = (D_i^\kappa); D_i^\kappa \in L^2(\Omega^\kappa); \text{div } D^\kappa \in L^2(\Omega^\kappa) \}, \end{aligned} \quad (1.38)$$

où  $\operatorname{div} D^\kappa = D_{i,i}^\kappa$ . Les espaces  $\mathbb{W}^\kappa$  et  $\mathcal{W}^\kappa$  définis par (1.38) sont des espaces de Hilbert réels munis des produits scalaires donnés par

$$\begin{aligned} \langle \varphi^\kappa, \psi^\kappa \rangle_{\mathbb{W}^\kappa} &= \langle \nabla \varphi^\kappa, \nabla \psi^\kappa \rangle_{\mathbb{H}^\kappa}, \\ \langle D^\kappa, E^\kappa \rangle_{\mathcal{W}^\kappa} &= \int_{\Omega^\kappa} D^\kappa \cdot E^\kappa dx + \int_{\Omega^\kappa} \operatorname{div} D^\kappa \cdot \operatorname{div} E^\kappa dx. \end{aligned} \quad (1.39)$$

Soient  $\|\cdot\|_{\mathbb{W}^\kappa}$  et  $\|\cdot\|_{\mathcal{W}^\kappa}$  les normes associées, c'est-à-dire

$$\|\psi^\kappa\|_{\mathbb{W}^\kappa} = \|\nabla \psi^\kappa\|_{\mathbb{H}^\kappa}, \quad (1.40)$$

$$\|D^\kappa\|_{\mathcal{W}^\kappa}^2 = \|D^\kappa\|_{\mathbb{H}^\kappa}^2 + \|\operatorname{div} D^\kappa\|_{L^2(\Omega^\kappa)}^2. \quad (1.41)$$

Puisque  $\operatorname{mes}(\Gamma_a^\kappa) > 0$ , l'inégalité de Friedrich-Poincaré est vérifiée, ainsi il existe une constante  $c_F > 0$  dépendant uniquement de  $\Omega^\kappa$  et  $\Gamma_a^\kappa$  telle que

$$\|\nabla \psi^\kappa\|_{\mathbb{H}^\kappa} \geq c_F \|\psi^\kappa\|_{H^1(\Omega^\kappa)}, \quad \forall \psi^\kappa \in \mathbb{W}^\kappa. \quad (1.42)$$

Une démonstration de l'inégalité de Friedrichs-Poincaré peut être trouvée, par exemple, dans [1, 5]. Il s'ensuit, d'après (1.23) et (1.42), que  $\|\cdot\|_{H^1(\Omega^\kappa)}$  et  $\|\cdot\|_{\mathbb{W}^\kappa}$  sont des normes équivalentes sur  $\mathbb{W}^\kappa$  et donc  $(\mathbb{W}^\kappa, \|\cdot\|_{\mathbb{W}^\kappa})$  est un espace réel de Hilbert.

De plus, par le Théorème de trace de Sobolev 1.2.7, il existe une constante  $c_0^\kappa$  dépendant uniquement de  $\Omega^\kappa, \Gamma_a^\kappa$  et  $\Gamma_3$ , telle que

$$\|\psi^\kappa\|_{L^2(\Gamma_3)} \leq c_0^\kappa \|\psi^\kappa\|_{\mathbb{W}^\kappa}, \quad \forall \psi^\kappa \in \mathbb{W}^\kappa.$$

Afin de simplifier les notations, nous définissons les espaces produits pour les inconnues mécaniques

$$\begin{aligned} E_0 &= E_0^1 \times E_0^2, & E_1 &= E_1^1 \times E_1^2, & \mathbb{H} &= \mathbb{H}^1 \times \mathbb{H}^2, \\ \mathbb{H}_1 &= \mathbb{H}_1^1 \times \mathbb{H}_1^2, & \mathcal{H} &= \mathcal{H}^1 \times \mathcal{H}^2, & \mathcal{H}_1 &= \mathcal{H}_1^1 \times \mathcal{H}_1^2, & \mathbb{Y} &= \mathbb{Y}^1 \times \mathbb{Y}^2, \end{aligned}$$

et pour les inconnues électriques, nous présentons les espaces produits suivants

$$\mathbb{W} = \mathbb{W}^1 \times \mathbb{W}^2, \quad \mathcal{W} = \mathcal{W}^1 \times \mathcal{W}^2.$$

Enfin, nous définissons un espace  $\mathcal{V}$  défini par

$$\mathcal{V} = \{u = (u^1, u^2) \in \mathcal{V}^1 \times \mathcal{V}^2; \quad [u_\nu] = 0 \text{ sur } \Gamma_3\}.$$

Les espaces  $\mathcal{V}, \mathbb{H}, \mathcal{H}, \mathbb{Y}, E_0, E_1, \mathbb{W}$  et  $\mathcal{W}$  sont des espaces de Hilbert réel dotés des produits scalaires canoniques notée  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{V}}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{H}}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{Y}}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{E_0}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{E_1}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{W}}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{W}}$  les normes

associés seront désignés par  $\|\cdot\|_{\mathcal{V}}, \|\cdot\|_{\mathbb{H}}, \|\cdot\|_{\mathcal{H}}, \|\cdot\|_{\mathbb{Y}}, \|\cdot\|_{E_0}, \|\cdot\|_{E_1}, \|\cdot\|_{\mathcal{W}}$  et  $\|\cdot\|_{\mathcal{W}}$ , respectivement.

Soit  $0 < T < \infty$  et soit  $(X, \|\cdot\|_X)$  un espace de Banach réel, nous notons par  $C(0, T; X)$  et  $C^1(0, T; X)$  les espaces des fonctions continues et continûment différentiables sur  $[0, T]$  à valeurs sur  $X$ , respectivement, avec les normes

$$\|\pi\|_{C(0, T; X)} = \max_{t \in [0, T]} \|\pi(t)\|_X,$$

$$\|\pi\|_{C^1(0, T; X)} = \max_{t \in [0, T]} \|\pi(t)\|_X + \max_{t \in [0, T]} \|\dot{\pi}(t)\|_X.$$

De plus, nous utilisons le point ci-dessus pour indiquer la dérivée par rapport à la variable de temps.

### 1.2.7 Espaces $L^p(0, T; X)$ et $W^{k, p}(0, T; X)$

**Définition 1.2.4.** Soit  $1 \leq p \leq \infty$ , l'espace de Lebesgue  $L^p(0, T; X)$  est l'ensemble des classes de fonctions  $u : (0, T) \rightarrow X$  mesurables telle que l'application  $t \rightarrow \|u(t)\|_X$  appartient à  $L^p(0, T)$ . On sait que  $L^p(0, T; X)$  est un espace vectoriel normé avec la norme

$$\begin{cases} \|u\|_{L^p(0, T; X)} = \left( \int_0^T \|u(t)\|_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}} & \text{si } 1 \leq p < \infty, \\ \|u\|_{L^\infty(0, T; X)} = \inf \{ C > 0 : \|u(t)\|_X \leq C, \text{ p.p. } t \in (0, T) \} & \text{si } p = \infty. \end{cases}$$

Par ailleurs, on a les résultats suivants.

#### Propriété 1.2.1.

- (1)  $L^p(0, T; X)$  ( $1 \leq p \leq \infty$ ) est un espace de Banach.
- (2) Si  $X$  est un espace de Hilbert avec le produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle_X$  alors  $L^2(0, T; X)$  est aussi un espace de Hilbert avec le produit scalaire

$$\langle u, v \rangle_{L^2(0, T; X)} = \int_0^T \langle u(t), v(t) \rangle_X dt.$$

- (3)  $L^r(0, T; X) \subset L^q(0, T; X)$  avec injection continue  $1 \leq q \leq r \leq \infty$ .
- (4) Si  $X$  est un espace de Hilbert, alors

$$L^p(0, T; X)' = L^q(0, T; X) \quad \text{si } 1 < p, q < \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

$$L^1(0, T; X)' = L^\infty(0, T; X),$$

où  $L^p(0, T; X)'$  représente le dual de l'espace  $L^p(0, T; X)$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ .

**Définition 1.2.5.** Soit  $u, v \in L^1(0, T; X)$ . La fonction  $v$  s'appelle la dérivée généralisée d'ordre  $n$  de  $u$  sur  $(0, T)$  si

$$\int_0^T \varphi^{(n)}(t)u(t)dt = (-1)^n \int_0^T \varphi(t)v(t)dt, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(0, T).$$

$C_c^\infty(0, T)$  étant l'espace des fonctions réelles indéfiniment dérivables, à support compact dans  $(0, T)$ . Nous écrivons  $v = \dot{u}$  pour  $n = 1$  et  $v = u^{(n)}$  pour  $n \geq 2$ .

**Définition 1.2.6.** Soit  $1 \leq p \leq \infty$ . L'espace de Sobolev  $W^{1,p}(0, T; X)$  est l'espace des fonctions  $u : [0, T] \rightarrow X$  telles que  $u \in L^p(0, T; X)$  et  $\dot{u} \in L^p(0, T; X)$ . Notons que  $W^{1,p}(0, T; X)$  est un espace de Banach muni de la norme

$$\|u\|_{W^{1,p}(0,T;X)} = \|u\|_{L^p(0,T;X)} + \|\dot{u}\|_{L^p(0,T;X)}.$$

En particulier,  $W^{1,2}(0, T; X)$  muni de la norme précédente est un espace de Hilbert.

**Définition 1.2.7.** Étant donné un entier  $k \geq 2$  et un réel  $1 \leq p \leq \infty$ , on définit par récurrence l'espace

$$W^{k,p}(0, T; X) = \{u \in W^{k-1,p}(0, T; X) \mid \dot{u} \in W^{k-1,p}(0, T; X)\}.$$

On vérifie aisément que  $u \in W^{k,p}(0, T; X)$  si et seulement s'il existe  $k$  fonctions  $g_1, \dots, g_k \in L^p(0, T; X)$  telle que

$$\int_0^T u(t)\varphi^{(j)}(t)dt = (-1)^j \int_0^T g_j(t)\varphi(t)dt \quad \forall \varphi \in C_c^\infty([0, T]), \forall j = 1, 2, \dots, k,$$

où  $\varphi^{(j)}$  désigne la dérivée d'ordre  $j$  de  $\varphi$ . On peut donc considérer les dérivées successives  $\dot{u} = g_1, u^{(2)} = g_2, \dots, u^{(k)} = g_k$ . L'espace  $W^{k,p}(0, T; X)$  est un espace de Banach muni de la norme

$$\|u\|_{W^{k,p}(0,T;X)} = \|u\|_{L^p(0,T;X)} + \sum_{\alpha=1}^k \|u^{(\alpha)}\|_{L^p(0,T;X)}.$$

**Théorème 1.2.11.** Si la fonction  $u$  appartient à l'espace  $W^{1,p}(0, T; X)$ ,  $p \in [1, \infty]$ . Nous avons alors :

1.  $\|u(t) - u(s)\|_X \leq \int_s^t \|\dot{u}(r)\|_X dr \quad 0 \leq s \leq t \leq T,$
2. si de plus  $p < \infty$ , on a

$$\|u(t) - u(s)\|_X^p \leq (t - s)^p \int_s^t \|\dot{u}(r)\|_X^p dr \quad 0 \leq s \leq t \leq T,$$

3. si  $p = \infty$ , on a

$$\|u(t) - u(s)\|_X \leq \|\dot{u}\|_{L^\infty(0,T;X)} \quad 0 \leq s \leq t \leq T$$

**Théorème 1.2.12.** Dans le cas où l'espace  $(X, (\cdot, \cdot)_X)$  est un espace de Hilbert et si la fonction  $u$  appartient à l'espace  $W^{1,2}(0, T; X)$ , alors

1. la fonction  $t \mapsto \frac{1}{2}\|u(t)\|_X^2$  est une fonction absolument continue sur l'intervalle  $]0, T[$
2.  $\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u(t)\|_X^2 = (\dot{u}(t), u(t))_X$ , p.p.  $t \in ]0, T[$ ,
3.  $\frac{1}{2} \|u(t)\|_X^2 = \frac{1}{2} \|u(0)\|_X^2 + \int_0^t (\dot{u}(s), u(s))_X ds$ ,  $\forall t \in [0, T]$ .

Ces quelques propriétés achèvent cette section. Pour plus de détails sur les résultats dans ce paragraphe nous renvoyons le lecteur par exemple aux référence [1].

## 1.2.8 Rappels d'analyse non linéaire dans les espaces de Hilbert

Dans ce paragraphe, nous rappelons quelques éléments d'analyse non linéaire dans les espaces de Hilbert et quelques résultats concernant les équations et les inéquations variationnelles d'évolution qui interviennent dans l'étude des problèmes mécaniques.

### I-Opérateur fortement monotone

Nous commençons ici par un bref rappel sur les opérateurs frottements monotones et de Lipschitz. Pour cela, on considère un espace de Hilbert  $H$  munit du produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$  et de la norme associé  $\|\cdot\|_H$ .

**Définition 1.2.8.** Soient  $A : H \rightarrow H$  un opérateur non linéaire, l'opérateur  $A$  est dit

1. monotone si

$$\langle Au - Av, u - v \rangle_H \geq 0, \quad \forall u, v \in H,$$

2. fortement monotone s'il existe  $m > 0$  tel que

$$\langle Au - Av, u - v \rangle_H \geq m \|u - v\|_H^2, \quad \forall u, v \in H,$$

3. Lipschitz s'il existe  $L > 0$  tel que

$$\|Au - Av\|_H \leq L \|u - v\|_H, \quad \forall u, v \in H,$$

4. hemicontinu si pour toute suite numérique  $(t_n)$  tel que  $t_n \rightarrow t$  lorsque  $n \rightarrow \infty$  on a :

$$\langle A(u + t_n v), w \rangle_H \rightarrow \langle A(u + t v), w \rangle_H \quad n \rightarrow \infty, \quad \forall u, v, w \in H.$$

**Théorème 1.2.13. (Théorème de point fixe de Banach)**

Soit  $K$  un sous ensemble fermé et non vide de l'espace de Banach  $(X, \|\cdot\|_X)$ . Supposons que  $\Lambda : K \rightarrow K$  est une contraction, c'est à dire il existe  $c \in ]0, 1[$  telle que

$$\|\Lambda(u) - \Lambda(v)\|_X \leq c \|u - v\|_X \quad \forall u, v \in K.$$

Alors, il existe un unique élément  $u \in K$  tel que  $\Lambda(u) = u$ , i.e, possède un point fixe unique dans  $K$ .

Pour l'opérateur  $\Lambda^n : K \rightarrow K$  défini par la relation

$$\Lambda^n = \Lambda(\Lambda^{n-1}) \quad n \geq 2,$$

nous avons la version suivante du théorème de point fixe.

**Théorème 1.2.14.** Sous les mêmes conditions du Théorème 1.2.13. Supposons que  $\Lambda^n : K \rightarrow K$  est une contraction pour  $n$  un entier positif. Alors  $\Lambda$  admet un point fixe unique dans  $K$ .

**Définition 1.2.9.** Une forme bilinéaire  $a : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  est continue s'il existe un réel  $M > 0$  tel que

$$|a(u, v)| \leq M \|u\|_X \|v\|_X, \quad \forall u, v \in X.$$

**Définition 1.2.10.** Une forme bilinéaire  $a : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  est dite coercive s'il existe une constante  $m > 0$  telle que

$$a(u, u) \geq m \|u\|_X^2, \quad \forall u \in X.$$

**Théorème 1.2.15. (Théorème du Lax-Milgram)**

Soient  $H$  un espace de Hilbert,  $a : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$  une forme bilinéaire continue coercive, et  $l : H \rightarrow \mathbb{R}$  une forme linéaire continue. Alors, il existe une solution unique  $u \in H$  qui satisfait

$$a(u, v) = l(v), \quad \forall v \in H.$$

De plus, si  $a(\cdot, \cdot)$  est symétrique, alors  $u$  est caractérisé par la propriété

$$\frac{1}{2}a(u, u) - \langle u, u \rangle_X \leq \frac{1}{2}a(v, v) - \langle v, v \rangle_X, \quad \forall v \in X.$$

## II- Sous différentiabilité

Nous considérons dans tout ce paragraphe que  $X$  est un espace de Hilbert et  $\mathcal{K}$  un sous ensemble de l'espace  $X$ .

**Définition 1.2.11.** On appelle fonction indicatrice de  $\mathcal{Z}^\kappa$ , la fonction  $\mathbb{I}_{\mathcal{Z}^\kappa}$  définie par

$$\mathbb{I}_{\mathcal{Z}^\kappa}(u) = \begin{cases} 0 & \text{si } u \in \mathcal{Z}^\kappa, \\ +\infty & \text{si } u \notin \mathcal{Z}^\kappa. \end{cases}$$

**Définition 1.2.12.** Soit une fonction  $j : X \rightarrow \mathbb{R}$  et  $u$  un élément de l'espace  $X$  tel que  $j(u) \neq \pm\infty$ . Le sous-différentiel de la fonction  $j$  en  $u$ , noté  $\partial j(u)$  est l'ensemble défini par

$$\partial j(u) = \{u' \in X' \mid j(v) \geq j(u) + \langle u', v - u \rangle_{X' \times X}, \forall v \in X\}.$$

Le crochet  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{X' \times X}$  désignant la dualité entre  $X'$  et  $X$ .

Tout élément  $u'$  de l'ensemble  $\partial j(u)$  est appelé sous-gradient de la fonction  $j$  en  $u$ . La fonction  $j$  est dite sous-différentiable en  $u$  si  $\partial j(u) \neq \emptyset$ . Elle est dite sous-différentiable si elle l'est en tout point  $u$  de l'espace  $X$ .

Nous pouvons caractériser le sous-différentiel  $\partial \mathbb{I}_{\mathcal{Z}^\kappa}$  d'une fonction indicatrice  $\mathbb{I}_{\mathcal{Z}^\kappa}$  d'un ensemble convexe non vide

$$\partial \mathbb{I}_{\mathcal{Z}^\kappa}(u) = \{u' \in X' \mid \langle u', v - u \rangle_{X' \times X} \leq 0, \forall v \in \mathcal{Z}^\kappa\}. \quad (1.43)$$

## III- Équation différentielle ordinaire

**Théorème 1.2.16. (Cauchy-Lipschitz)**

Soit  $(X, \|\cdot\|_X)$  un espace de Banach réel et soit  $F(t, \cdot) : X \rightarrow X$  un opérateur défini p.p. sur  $[0, T]$ , qui satisfait les propriétés suivantes

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \text{ Il existe } L_F > 0 \text{ tel que} \\ \|F(t, x) - F(t, y)\|_X \leq L_F \|x - y\|_X \quad \forall x, y \in X, p.p. t \in [0, T], \\ (b) \text{ Il existe } 1 \leq p \leq \infty \text{ tel que } F(\cdot, x) \in L^p(0, T; X) \quad \forall x \in X. \end{array} \right.$$

Alors, pour tout  $x_0 \in X$ , il existe une fonction unique  $x \in W^{1,p}(0, T; X)$  tel que

$$\dot{x}(t) = F(t, x(t)), \quad p.p. \quad t \in [0, T],$$

$$x(0) = x_0.$$

#### IV- Équation différentielle ordinaire d'évolution

**Théorème 1.2.17.** *Soit  $\mathcal{V} \subset \mathbb{H} \subset \mathcal{V}'$  un triplet de Gelfand. Soit  $A : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}'$  un opérateur hemicontinu et monotone qui satisfait*

$$\langle Av, v \rangle_{\mathcal{V}' \times \mathcal{V}} \geq w \|v\|_{\mathcal{V}}^2 + \lambda, \quad \forall v \in \mathcal{V}, \quad (1.44)$$

$$\|Av\|_{\mathcal{V}'} \leq C_1(\|v\|_{\mathcal{V}} + 1), \quad \forall v \in \mathcal{V}. \quad (1.45)$$

*Pour des constantes  $w > 0$ ,  $C_1 > 0$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ , étant donnée  $u_0 \in \mathbb{H}$  et  $F \in L^2(0, T; \mathcal{V}')$ , alors il existe une fonction unique  $u$  satisfait*

$$u \in L^2(0, T; \mathcal{V}) \cap C^1(0, T; \mathbb{H}), \quad \dot{u} \in L^2(0, T; \mathcal{V}'),$$

$$\dot{u}(t) + Au(t) = F(t) \quad p.p. \quad t \in [0, T],$$

$$u(0) = u_0.$$

#### V- Inégalités variationnelles paraboliques

**Théorème 1.2.18.** *Soit  $\mathcal{V} \subset \mathbb{H} \subset \mathcal{V}'$  un triplet de Gelfand,  $K$  est un sous-ensemble non vide fermé et convexe de  $\mathcal{V}$ , et supposons que  $a(\cdot, \cdot) : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$  est une forme bilinéaire, continue et symétrique telle que*

$$\exists \alpha > 0 \text{ et } c_0 \quad a(v, v) + c_0 \|v\|_{\mathbb{H}}^2 \geq \alpha \|v\|_{\mathcal{V}}^2 \quad \forall v \in \mathcal{V}.$$

*Alors, pour tout  $u_0 \in K$  et  $F \in L^2(0, T; \mathbb{H})$ , il existe une unique fonction  $u$  qui satisfait*

$$u \in H^1(0, T; \mathbb{H}) \cap L^2(0, T; \mathcal{V}), \quad u(t) \in K, \quad \forall t \in [0, T],$$

$$\langle \dot{u}(t), v - u(t) \rangle_{\mathcal{V}' \times \mathcal{V}} + a(u(t), v - u(t)) \geq \langle F(t), v - u(t) \rangle_{\mathbb{H}} \quad \forall v \in K, \quad p.p. \quad t \in [0, T],$$

$$u(0) = u_0.$$

### 1.2.9 Lemme de Gronwall

Nous rappelons ici les lemmes classiques du type Gronwall qui interviennent dans de nombreux problèmes de contact, en particulier pour établir l'unicité de la solution.

**Lemme 1.2.2.** *Soient  $m, n \in C(0, T; \mathbb{R})$  telles que  $m(t) \geq 0$  et  $n(t) \geq 0$  pour tout  $t \in [0, T]$ ,  $a \geq 0$  une constante et  $\psi \in C(0, T; \mathbb{R})$*

(1) Si

$$\psi(t) \leq a + \int_0^t m(s)ds + \int_0^t n(s)\psi(s)ds \quad \forall t \in [0, T],$$

alors

$$\psi(t) \leq \left( a + \int_0^t m(s)ds \right) \exp \left( \int_0^t n(s)ds \right) \quad \forall t \in [0, T].$$

(2) Si

$$\psi(t) \leq m(t) + a \int_0^t \psi(s)ds \quad \forall t \in [0, T],$$

alors

$$\int_0^t \psi(s)ds \leq e^{aT} \int_0^t m(s)ds \quad \forall t \in [0, T].$$

Pour le cas particulier  $m = 0$ , la partie (1) de ce lemme devient.

**Corollaire 1.2.1.** Soit  $n \in C([0, T]; \mathbb{R})$  telles que  $n(t) \geq 0$  pour tout  $t \in [0, T]$  et soit  $a \geq 0$ , si  $\psi \in C([0, T]; \mathbb{R})$  est une fonction telle que

$$\psi(t) \leq a + \int_0^t n(s)\psi(s)ds \quad \forall t \in [0, T],$$

alors

$$\psi(t) \leq a \exp \left( \int_0^t n(s)ds \right) \quad \forall t \in [0, T].$$

### 1.2.10 Les inégalités de Hölder et de Young

**Lemme 1.2.3. (Inégalité de Young)**

Soit  $1 < p < \infty$  alors pour tous  $a, b \geq 0$ , on a

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q},$$

où  $q \in ]1, +\infty[$  est l'exposant conjugué à  $p$  définie par  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ .

**Lemme 1.2.4. (Inégalité de Hölder)**

Soient  $p$  et  $q$  deux exposants conjugués ( $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ),  $1 \leq p \leq \infty$ . Soient  $f \in L^p(\Omega^\kappa)$ ,  $g \in L^q(\Omega^\kappa)$ . Alors,  $f.g \in L^1(\Omega^\kappa)$ , et

$$\|fg\|_{L^1(\Omega^\kappa)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega^\kappa)} \|g\|_{L^q(\Omega^\kappa)}.$$

De plus l'inégalité de Cauchy-Schwarz correspondant à l'inégalité de Hölder pour  $p = q = 2$  est vérifiée, i.e.

$$\int_{\Omega^\kappa} |f(x)g(x)|dx \leq \|f\|_{L^2(\Omega^\kappa)} \|g\|_{L^2(\Omega^\kappa)}.$$

# Analyse d'un problème de contact avec endommagement en matériaux et la variable d'état interne thermo-électro-viscoélastiques

Dans ce chapitre, nous étudions d'un problème du contact entre deux corps thermo-électro-viscoélastique avec endommagement et variable d'état interne, le contact est bilatéral et modélisé avec la loi de frottement du Tresca. Notre intérêt est de décrire un processus dynamique, et démontrer que le modèle résultant se ramène à un problème mathématique bien posé.

Ce chapitre est organisé de la manière suivante : dans la première section, nous posons et décrire la problème mécanique puis nous indiquons les hypothèses sur les données, dans la deuxième section, en utilisant les formules de Green, on propose une formulation variationnelle du problème, et dans la troisième section, on démontre l'existence et l'unicité d'une solution faible.

Enfin, nous énonçons notre résultat principal d'existence et d'unicité qui est basé sur les résultats classiques des inégalités d'évolution, inégalités paraboliques, théorème de Lax-Milgram, théorème de Cauchy-Lipschitz et des arguments de point fixe de Banach.

## 2.1 Formulation du problème

Le modèle mécanique que l'on étudie peut se formuler de la manière suivante :

**Problème  $\mathcal{P}$ .** Pour  $\kappa = 1, 2$ , trouver le champ des déplacements  $u^\kappa : \Omega^\kappa \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ ,

les champs des contraintes  $\sigma^\kappa : \Omega^\kappa \times [0, T] \rightarrow \mathbb{S}^d$ , le champ le potentiel électrique  $\psi^\kappa : \Omega^\kappa \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ , le champ des déplacements électriques  $D^\kappa : \Omega^\kappa \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ , le champs de température  $\tau^\kappa : \Omega^\kappa \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ , le champ d'endommagement  $\alpha^\kappa : \Omega^\kappa \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ , un champ de variable d'état interne  $\beta^\kappa : \Omega^\kappa \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^m$ , telle que pour tout  $t \in (0, T)$ , On a :

$$\begin{aligned} \sigma^\kappa(t) &= \mathcal{A}^\kappa \varepsilon(\dot{u}^\kappa(t)) + \mathcal{B}^\kappa(\varepsilon(u^\kappa(t)), \alpha^\kappa(t)) - (\mathcal{E}^\kappa)^* E(\psi^\kappa(t)) \\ &+ \mathcal{F}^\kappa(\beta^\kappa(t), \tau^\kappa(t)) \end{aligned} \quad \text{dans } \Omega^\kappa \times (0, T), \quad (2.1)$$

$$D^\kappa(t) = \mathcal{E}^\kappa \varepsilon(u^\kappa(t)) + \mathcal{R}^\kappa E(\psi^\kappa(t)) + \mathcal{G}^\kappa(\beta^\kappa(t), \tau^\kappa(t)) \quad \text{dans } \Omega^\kappa \times (0, T), \quad (2.2)$$

$$\dot{\beta}^\kappa(t) = \Theta^\kappa(\varepsilon(u^\kappa(t)), \alpha^\kappa(t), \beta^\kappa(t), \tau^\kappa(t)) \quad \text{dans } \Omega^\kappa \times (0, T), \quad (2.3)$$

$$\dot{\tau}^\kappa(t) - \mathcal{K}_0^\kappa \Delta \tau^\kappa(t) = \Psi^\kappa(\varepsilon(u^\kappa(t)), \alpha^\kappa(t), \beta^\kappa(t), \tau^\kappa(t)) + \chi^\kappa(t) \quad \text{dans } \Omega^\kappa \times (0, T), \quad (2.4)$$

$$\dot{\alpha}^\kappa(t) - \mathcal{K}_1^\kappa \Delta \alpha^\kappa(t) + \partial \mathbb{I}_{\mathcal{Z}^\kappa}(\alpha^\kappa(t)) \ni S^\kappa(\varepsilon(u^\kappa(t)), \alpha^\kappa(t)) \quad \text{dans } \Omega^\kappa \times (0, T), \quad (2.5)$$

$$\text{Div } \sigma^\kappa(t) + f_0^\kappa(t) = \rho^\kappa \ddot{u}^\kappa(t) \quad \text{dans } \Omega^\kappa \times (0, T), \quad (2.6)$$

$$\text{div } D^\kappa(t) = q_0^\kappa(t) \quad \text{dans } \Omega^\kappa \times (0, T), \quad (2.7)$$

$$u^\kappa(t) = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1^\kappa \times (0, T), \quad (2.8)$$

$$\sigma^\kappa(t) \nu^\kappa = f_2^\kappa(t) \quad \text{sur } \Gamma_2^\kappa \times (0, T), \quad (2.9)$$

$$\begin{cases} \sigma_\nu^1(t) = \sigma_\nu^2(t) \equiv \sigma_\nu(t) \\ u_\nu^1(t) + u_\nu^2(t) = 0, \quad \sigma_\tau^1(t) = -\sigma_\tau^2(t) \equiv \sigma_\tau(t), \quad |\sigma_\tau(t)| \leq g, \\ |\sigma_\tau(t)| < g \Rightarrow \dot{u}_\tau^1(t) - \dot{u}_\tau^2(t) = 0, \\ |\sigma_\tau(t)| = g \Rightarrow \exists \lambda \geq 0 : \sigma_\tau(t) = -\lambda(\dot{u}_\tau^1(t) - \dot{u}_\tau^2(t)) \end{cases} \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial \alpha^\kappa(t)}{\partial \nu^\kappa} = 0 \quad \text{sur } \Gamma^\kappa \times (0, T), \quad (2.11)$$

$$\mathcal{K}_0^\kappa \frac{\partial \tau^\kappa(t)}{\partial \nu^\kappa} + \lambda_0^\kappa \tau^\kappa(t) = 0 \quad \text{sur } \Gamma^\kappa \times (0, T), \quad (2.12)$$

$$\psi^\kappa(t) = 0 \quad \text{sur } \Gamma_a^\kappa \times (0, T), \quad (2.13)$$

$$D^\kappa(t) \cdot \nu^\kappa = q_2^\kappa(t) \quad \text{sur } \Gamma_b^\kappa \times (0, T), \quad (2.14)$$

$$u^\kappa(0) = u_0^\kappa, \quad \dot{u}^\kappa(0) = v_0^\kappa, \quad \alpha^\kappa(0) = \alpha_0^\kappa, \quad \beta^\kappa(0) = \beta_0^\kappa, \quad \tau^\kappa(0) = \tau_0^\kappa \quad \Omega^\kappa. \quad (2.15)$$

Premièrement, les équations (2.1)-(2.3) représentent la loi de constitutive thermo-électro-viscoélastique avec endommagement et une variable d'état interne du matériau dans laquelle  $\varepsilon(u^\kappa(t))$  représente le tenseur linéarisé de contrainte,  $\mathcal{A}^\kappa$  et  $\mathcal{B}^\kappa$  sont des opérateurs non linéaires décrivant respectivement les propriétés purement viscosité et élasticité avec endommagement, où  $E(\psi^\kappa(t)) = -\nabla\psi^\kappa(t)$  est le champ électrique,  $\mathcal{E}^\kappa = (e_{ijk})$  représente le tenseur piézoélectrique du troisième ordre,  $(\mathcal{E}^\kappa)^*$  est sa transposée et  $\mathcal{F}^\kappa$ ,  $\mathcal{G}^\kappa$  sont des opérateurs non linéaires décrivant respectivement les propriétés température avec variable d'état interne et  $\mathcal{R}^\kappa$  désigne le tenseur de permittivité électrique et  $\Theta^\kappa$  est une fonction constitutive non linéaire. L'équation (2.4) représente la conservation de l'énergie où  $\Psi^\kappa$  est une fonction constitutive non linéaire qui représente la chaleur générée par le travail des forces internes et  $\chi^\kappa$  est une source de chaleur volumique donnée. L'évolution du champ d'endommagement est régie par l'inclusion de type parabolique donnée par la relation (2.5) où  $S^\kappa$  est la source mécanique de la croissance d'endommagement, supposée être fonction assez générale des déformations un endommagement proprement dit  $\partial\mathbb{I}_{\mathcal{Z}^\kappa}$  est la sous-différentiel de la fonction indicatrice de l'ensemble des fonctions d'endommagement admissibles  $\mathcal{Z}^\kappa$ . Les équations (2.6) et (2.7) sont les équations d'équilibre pour les champs de contrainte et de déplacement électrique, respectivement dans laquelle "Div" et "div" désignent les opérateurs de divergence pour le tenseur et le vecteur évalués, i.e.,

$$\text{Div } \sigma^\kappa = (\sigma_{ij,j}^\kappa), \quad \text{div } D^\kappa = D_{i,i}^\kappa.$$

Nous utilisons ces équations car le processus est supposé être mécaniquement dynamique et électriquement quasi-statique. Ensuite, les équations (2.8) et (2.9) représentent respectivement la condition aux limites de déplacement et de traction. La condition (2.10) représente les conditions de contact bilatéral avec la frottement de Tresca, où  $[u_\nu] = u_\nu^1 + u_\nu^2$  et  $[u_\tau] = u_\tau^1 - u_\tau^2$ . La condition aux limites (2.11) et (2.12) représentent respectivement sur  $\Gamma^\alpha$  une condition aux limites de Neumann homogène pour le champ d'endommagement  $\alpha^\kappa$  et une condition aux limites de Fourier pour la température  $\tau^\kappa$ , (2.13) et (2.14) représentent les conditions aux limites électriques. Enfin, (2.15) représente les conditions initiales.

Pour l'étude du problème  $\mathcal{P}$ , nous considérons les hypothèses suivantes :

H(1) : L'opérateur de viscosité  $\mathcal{A}^\kappa : \Omega^\kappa \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{S}^d$  satisfait :

(a) Il existe  $L_{\mathcal{A}^\kappa} > 0$  telle que

$$|\mathcal{A}^\kappa(x, \varepsilon_1) - \mathcal{A}^\kappa(x, \varepsilon_2)| \leq L_{\mathcal{A}^\kappa} |\varepsilon_1 - \varepsilon_2|, \quad \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{S}^d, \text{ p.p. } x \in \Omega^\kappa.$$

(b) Il existe  $m_{\mathcal{A}^\kappa} > 0$  telle que

$$(\mathcal{A}^\kappa(x, \varepsilon_1) - \mathcal{A}^\kappa(x, \varepsilon_2)) \cdot (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \geq m_{\mathcal{A}^\kappa} |\varepsilon_1 - \varepsilon_2|^2, \quad \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{S}^d \text{ p.p. } x \in \Omega^\kappa.$$

(c) L'application  $x \mapsto \mathcal{A}^\kappa(x, \varepsilon)$  est Lebesgue mesurable sur  $\Omega^\kappa$ , pour toute  $\varepsilon \in \mathbb{S}^d$ .

(d) L'application  $x \mapsto \mathcal{A}^\kappa(x, 0)$  appartient à  $\mathcal{H}^\kappa$ .

H(2) : L'opérateur d'élasticité  $\mathcal{B}^\kappa : \Omega^\kappa \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^d$  satisfait :

(a) Il existe  $L_{\mathcal{B}^\kappa} > 0$  telle que

$$|\mathcal{B}^\kappa(x, \varepsilon_1, r_1) - \mathcal{B}^\kappa(x, \varepsilon_2, r_2)| \leq L_{\mathcal{B}^\kappa} (|\varepsilon_1 - \varepsilon_2| + |r_1 - r_2|),$$

$$\forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{S}^d, r_1, r_2 \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } x \in \Omega^\kappa.$$

(b) L'application  $x \mapsto \mathcal{B}^\kappa(x, \varepsilon, r)$  est Lebesgue mesurable sur  $\Omega^\kappa$ , pour tout  $\varepsilon \in \mathbb{S}^d, r \in \mathbb{R}$ .

(c) L'application  $x \mapsto \mathcal{B}^\kappa(x, 0, 0)$  appartient à  $\mathcal{H}^\kappa$ .

H(3) : La fonction  $\mathcal{F}^\kappa : \Omega^\kappa \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^d$  satisfait :

(a) Il existe  $L_{\mathcal{F}^\kappa} > 0$  telle que

$$|\mathcal{F}^\kappa(x, k_1, r_1) - \mathcal{F}^\kappa(x, k_2, r_2)| \leq L_{\mathcal{F}^\kappa} (|k_1 - k_2| + |r_1 - r_2|),$$

$$\forall k_1, k_2 \in \mathbb{R}^m, r_1, r_2 \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } x \in \Omega^\kappa.$$

(b) L'application  $x \mapsto \mathcal{F}^\kappa(x, k, r)$  est Lebesgue mesurable sur  $\Omega^\kappa$ , pour toute  $k \in \mathbb{R}^m, r \in \mathbb{R}$ .

(c) L'application  $x \mapsto \mathcal{F}^\kappa(x, 0, 0)$  appartient à  $\mathcal{H}^\kappa$ .

H(4) : La fonction  $\mathcal{G}^\kappa : \Omega^\kappa \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$  satisfait :

(a) Il existe  $L_{\mathcal{G}^\kappa} > 0$  telle que

$$|\mathcal{G}^\kappa(x, k_1, r_1) - \mathcal{G}^\kappa(x, k_2, r_2)| \leq L_{\mathcal{G}^\kappa} (|k_1 - k_2| + |r_1 - r_2|),$$

$$\forall k_1, k_2 \in \mathbb{R}^m, r_1, r_2 \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } x \in \Omega^\kappa.$$

(b) L'application  $x \mapsto \mathcal{G}^\kappa(x, k, r)$  est Lebesgue mesurable sur  $\Omega^\kappa$ , pour toute  $k \in \mathbb{R}^m, r \in \mathbb{R}$ .

(c) L'application  $x \mapsto \mathcal{G}^\kappa(x, 0, 0)$  appartient à  $\mathcal{H}^\kappa$ .

H(5) : L'opérateur de permittivité électrique  $\mathcal{R}^\kappa : \Omega^\kappa \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  satisfait :

(a)  $\mathcal{R}^\kappa = (r_{ij}^\kappa), r_{ij}^\kappa = r_{ji}^\kappa \in L^\infty(\Omega^\kappa), \quad 1 \leq i, j \leq d.$

(b) Il existe  $m_{\mathcal{R}^\kappa} > 0$  telle que  $\mathcal{R}^\kappa v \cdot v \geq m_{\mathcal{R}^\kappa} |v|^2, \quad \forall v \in \mathbb{R}^d, \text{ p.p. } x \in \Omega^\kappa.$

H(6) : La fonction  $\Theta^\kappa : \Omega^\kappa \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m.$

(a) Il existe  $L_{\Theta^\kappa} > 0$  telle que

$$|\Theta^\kappa(x, \varepsilon_1, r_1, k_1, d_1) - \Theta^\kappa(x, \varepsilon_2, r_2, k_2, d_2)| \leq L_{\Theta^\kappa} (|\varepsilon_1 - \varepsilon_2| + |r_1 - r_2| + |k_1 - k_2| + |d_1 - d_2|),$$

$$\forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{S}^d, k_1, k_2 \in \mathbb{R}^m, r_1, r_2, d_1, d_2 \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } x \in \Omega^\kappa.$$

(b) L'application  $x \mapsto \Theta^\kappa(x, \varepsilon, r, k, d)$  est Lebesgue mesurable sur  $\Omega^\kappa,$

pour toute  $\varepsilon \in \mathbb{S}^d, k \in \mathbb{R}^m, r, d \in \mathbb{R}.$

(c) L'application  $x \mapsto \Theta^\kappa(x, 0, 0, 0, 0)$  appartient à  $L^2(\Omega^\kappa).$

H(7) La fonction énergétique  $\Psi^\kappa : \Omega^\kappa \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  satisfait :

(a) Il existe  $L_{\Psi^\kappa} > 0$  telle que

$$|\Psi^\kappa(x, \varepsilon_1, r_1, k_1, d_1) - \Psi^\kappa(x, \varepsilon_2, r_2, k_2, d_2)| \leq L_{\Psi^\kappa} (|\varepsilon_1 - \varepsilon_2| + |r_1 - r_2| + |k_1 - k_2| + |d_1 - d_2|),$$

$$\forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{S}^d, k_1, k_2 \in \mathbb{R}^m, r_1, r_2, d_1, d_2 \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } x \in \Omega^\kappa.$$

(b) L'application  $x \mapsto \Psi^\kappa(x, \varepsilon, r, k, d)$  est Lebesgue mesurable sur  $\Omega^\kappa,$

pour toute  $\varepsilon \in \mathbb{S}^d, k \in \mathbb{R}^m, r, d \in \mathbb{R}.$

(c) L'application  $x \mapsto \Psi^\kappa(x, 0, 0, 0, 0)$  appartient à  $L^2(\Omega^\kappa).$

H(8) : La fonction source de dommage  $S^\kappa : \Omega^\kappa \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  satisfait :

(a) Il existe  $L_{S^\kappa} > 0$  telle que

$$|S^\kappa(x, \varepsilon_1, r_1) - S^\kappa(x, \varepsilon_2, r_2)| \leq L_{S^\kappa} (|\varepsilon_1 - \varepsilon_2| + |r_1 - r_2|),$$

$$\forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{S}^d, \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R} \text{ p.p. } x \in \Omega^\kappa;$$

(c) L'application  $x \mapsto S^\kappa(x, \varepsilon, r)$  est Lebesgue mesurable sur  $\Omega^\kappa,$

pour toute  $\varepsilon \in \mathbb{S}^d, r \in \mathbb{R};$

(d) L'application  $x \mapsto S^\kappa(x, 0, 0)$  appartient à  $L^2(\Omega^\kappa).$

H(9) : Le tenseur piézoélectrique  $\mathcal{E}^\kappa : \Omega^\kappa \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  satisfait :

(a)  $\mathcal{E}^\kappa = (e_{ijk}^\kappa), e_{ijk}^\kappa = e_{ikj}^\kappa \in L^\infty(\Omega^\kappa), 1 \leq i, j, k \leq d.$

(b)  $\mathcal{E}^\kappa \varepsilon \cdot v = \varepsilon \cdot (\mathcal{E}^\kappa)^* v, \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{S}^d, v \in \mathbb{R}^d.$

Dans ce paragraphe, nous supposons que la masse volumique,  $\rho^\kappa,$  satisfait :

H(10) :  $\rho^\kappa \in L^\infty(\Omega^\kappa),$  il exist  $\rho_0 > 0,$  telle que  $\rho^\kappa(x) \geq \rho_0 \text{ p.p. } x \in \Omega^\kappa.$

On suppose que les forces volumiques  $f_0^\kappa$  et les tractions surfaciques  $f_2^\kappa$ , et les charges électriques volumique  $q_0^\kappa$  et surfaciques  $q_2^\kappa$  et les sources des chaleurs volumiques  $\chi^\kappa$  ont les régularités

$$\begin{aligned} \text{H(11)} : \quad & \text{(a) } f_0^\kappa \in C\left(0, T; L^2(\Omega^\kappa)^d\right), \quad f_2^\kappa \in C\left(0, T; L^2(\Gamma_2^\kappa)^d\right), \\ & \text{(b) } q_0^\kappa \in C(0, T; L^2(\Omega^\kappa)), \quad q_2^\kappa \in C(0, T; L^2(\Gamma_b^\kappa)), \\ & \text{(c) } \chi^\kappa \in C(0, T; L^2(\Omega^\kappa)). \end{aligned}$$

Le coefficient d'adhésion,  $g$  satisfait :

$$\text{H(12)} : \quad g \in L^\infty(\Gamma_3), \quad g \geq 0, \text{ p.p. sur } \Gamma_3.$$

Le coefficient d'énergie  $\mathcal{K}_0^\kappa$  et le coefficient de diffusion de microfissures  $\mathcal{K}_1^\kappa$ , satisfait :

$$\text{H(13)} : \quad \mathcal{K}_0^\kappa > 0, \quad \mathcal{K}_1^\kappa > 0.$$

Finalement, nous supposons que les valeurs initiales satisfont la régularité

$$\text{H(14)} : \quad \beta_0^\kappa \in \mathbb{Y}^\kappa, \quad u_0^\kappa \in \mathcal{V}^\kappa, \quad v_0^\kappa \in \mathbb{H}^\kappa, \quad \alpha_0^\kappa \in \mathcal{Z}^\kappa, \quad \tau_0^\kappa \in E_1^\kappa.$$

Nous allons utiliser un produit scalaire modifié sur l'espace de Hilbert  $\mathbb{H}$ , défini par

$$\langle\langle u, v \rangle\rangle_{\mathbb{H}} = \sum_{\kappa=1}^2 \langle \rho^\kappa u^\kappa, v^\kappa \rangle_{\mathbb{H}^\kappa}, \quad \forall u, v \in \mathbb{H}. \quad (2.16)$$

Soit  $\|\cdot\|_{\mathbb{H}}$  la norme associée donnée par

$$\|v\|_{\mathbb{H}} = \langle\langle v, v \rangle\rangle_{\mathbb{H}}^{\frac{1}{2}}, \quad \forall v \in \mathbb{H}. \quad (2.17)$$

Il découle de l'hypothèse H(10) (a) que  $\|\cdot\|_{\mathbb{H}}$  et  $\|\cdot\|_{\mathcal{V}}$  sont des normes équivalentes sur  $\mathbb{H}$ , et aussi l'application d'inclusion de  $(\mathcal{V}, \|\cdot\|_{\mathcal{V}})$  dans  $(\mathbb{H}, \|\cdot\|_{\mathbb{H}})$  est continue et dense. On note  $\mathcal{V}'$  l'espace dual de  $\mathcal{V}$ . En identifiant  $\mathbb{H}$  avec son propre dual, on peut écrire le triplet de Gelfand

$$\mathcal{V} \subset \mathbb{H} \subset \mathcal{V}'.$$

Nous utilisons la notation  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{V}' \times \mathcal{V}}$  pour représenter l'appariement de dualité entre  $\mathcal{V}'$  et  $\mathcal{V}$ , rappeler que

$$\langle u, v \rangle_{\mathcal{V}' \times \mathcal{V}} = \langle\langle u, v \rangle\rangle_{\mathbb{H}}, \quad \forall u \in \mathbb{H}, v \in \mathcal{V}. \quad (2.18)$$

Nous mentionnons maintenant certaines des fonctions que vous utiliserez dans ce chapitre.

Le théorème de représentation de Riesz nous permet de définir les fonctions comme suit :

$F = (F^1, F^2) : [0, T] \rightarrow \mathcal{V}'$  par

$$\langle F(t), v \rangle_{\mathcal{V}' \times \mathcal{V}} = \sum_{\kappa=1}^2 \int_{\Omega^\kappa} f_0^\kappa(t) \cdot v^\kappa dx + \sum_{\kappa=1}^2 \int_{\Gamma_2^\kappa} f_2^\kappa(t) \cdot v^\kappa da \quad \forall v \in \mathcal{V}, \quad (2.19)$$

et la fonction  $Q = (Q^1, Q^2) : [0, T] \rightarrow \mathbb{W}$  par

$$\langle Q(t), \zeta \rangle_{\mathbb{W}} = \sum_{\kappa=1}^2 \int_{\Omega^\kappa} q_0^\kappa(t) \zeta^\kappa dx - \sum_{\kappa=1}^2 \int_{\Gamma_b^\kappa} q_2^\kappa(t) \zeta^\kappa da \quad \forall \zeta \in \mathbb{W}. \quad (2.20)$$

Nous introduisons les formes bilinéaire suivantes :  $a_0 : E_1 \times E_1 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a_1 : E_1 \times E_1 \rightarrow \mathbb{R}$  par

$$a_0(\xi, \zeta) = \sum_{\kappa=1}^2 \mathcal{K}_0^\kappa \int_{\Omega^\kappa} \nabla \xi^\kappa \cdot \nabla \zeta^\kappa dx + \sum_{\kappa=1}^2 \lambda_0^\kappa \int_{\Gamma^\kappa} \xi^\kappa \zeta^\kappa da, \quad (2.21)$$

$$a_1(\xi, \zeta) = \sum_{\kappa=1}^2 \mathcal{K}_1^\kappa \int_{\Omega^\kappa} \nabla \xi^\kappa \cdot \nabla \zeta^\kappa dx, \quad (2.22)$$

et, la fonction  $J : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$  par

$$J(u) = \int_{\Gamma_3} g |u_\tau^1 - u_\tau^2| da. \quad (2.23)$$

Les conditions H(11)(a, b) entraîne que les intégrales dans (2.22)-(2.24) sont bien définies.

Les conditions H(10) impliquent

$$F \in C(0, T; \mathcal{V}'), \quad Q \in C(0, T; \mathbb{W}). \quad (2.24)$$

## 2.2 Formulation variationnelle

A l'aide des formules de Green (1.36) on voit directement que si  $u, \sigma$  et  $\beta$  sont des fonctions suffisamment régulières qui satisfont (2.6), (2.8) et (2.9) avec (2.16)-(2.19), pour tout  $w = (w^1, w^2) \in \mathcal{V}$ , et  $t \in [0, T]$  on déduit que :

$$\langle \sigma^\kappa(t), \varepsilon(w^\kappa) - \varepsilon(\dot{u}^\kappa(t)) \rangle_{\mathcal{H}^\kappa} + \langle \text{Div} \sigma^\kappa(t), w^\kappa - \dot{u}^\kappa(t) \rangle_{\mathbb{H}^\kappa} = \int_{\Gamma^\kappa} \sigma^\kappa(t) \nu^\kappa \cdot (w^\kappa - \dot{u}^\kappa(t)) da.$$

On a

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^\kappa} \sigma^\kappa(t) (\varepsilon(w^\kappa) - \varepsilon(\dot{u}^\kappa(t))) dx + \int_{\Omega^\kappa} \text{Div} \sigma^\kappa(t) \cdot (w^\kappa - \dot{u}^\kappa(t)) dx &= \int_{\Gamma_1^\kappa} \sigma^\kappa(t) \nu^\kappa \cdot (w^\kappa - \dot{u}^\kappa(t)) da \\ &+ \int_{\Gamma_2^\kappa} \sigma^\kappa(t) \nu^\kappa \cdot (w^\kappa - \dot{u}^\kappa(t)) da + \int_{\Gamma_3} \sigma^\kappa(t) \nu^\kappa \cdot (w^\kappa - \dot{u}^\kappa(t)) da. \end{aligned}$$

D'après (2.6), (2.8) et (2.9) on a

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^\kappa} \sigma^\kappa(t) (\varepsilon(w^\kappa) - \varepsilon(\dot{u}^\kappa(t))) dx + \int_{\Omega^\kappa} \rho^\kappa \dot{u}^\kappa(t) \cdot (w^\kappa - \dot{u}^\kappa(t)) dx - \int_{\Omega^\kappa} f_0^\kappa(t) \cdot (w^\kappa - \dot{u}^\kappa(t)) dx \\ = \int_{\Gamma_2^\kappa} f_2^\kappa(t) \cdot (w^\kappa - \dot{u}^\kappa(t)) da + \int_{\Gamma_3} \sigma^\kappa(t) \nu^\kappa \cdot (w^\kappa - \dot{u}^\kappa(t)) da. \end{aligned}$$

La formule de Green pour  $\kappa=1$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^1} \sigma^1(t)(\varepsilon(w^1) - \varepsilon(\dot{u}^1(t)))dx + \int_{\Omega^1} \rho^1 \ddot{u}^1(t) \cdot (w^1 - \dot{u}^1(t))dx - \int_{\Omega^1} f_0^1(t) \cdot (w^1 - \dot{u}^1(t))dx \\ = \int_{\Gamma_2^1} f_2^1(t) \cdot (w^1 - \dot{u}^1(t))da + \int_{\Gamma_3} \sigma^1(t)\nu^1 \cdot (w^1 - \dot{u}^1(t))d\alpha \end{aligned} \quad (2.25)$$

La formule de Green pour  $\kappa=2$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^2} \sigma^2(t)(\varepsilon(w^2) - \varepsilon(\dot{u}^2(t)))dx + \int_{\Omega^2} \rho^2 \ddot{u}^2(t) \cdot (w^2 - \dot{u}^2(t))dx - \int_{\Omega^2} f_0^2(t) \cdot (w^2 - \dot{u}^2(t))dx \\ = \int_{\Gamma_2^2} f_2^2(t) \cdot (w^2 - \dot{u}^2(t))da + \int_{\Gamma_3} \sigma^2(t)\nu^2 \cdot (w^2 - \dot{u}^2(t))d\alpha \end{aligned} \quad (2.26)$$

En additionnant (2.25) et (2.26)

$$\begin{aligned} \sum_{\kappa=1}^2 \int_{\Omega^\kappa} \sigma^\kappa(t)(\varepsilon(w^\kappa) - \varepsilon(\dot{u}^\kappa(t)))dx + \sum_{\kappa=1}^2 \int_{\Omega^\kappa} \rho^\kappa \ddot{u}^\kappa(t) \cdot (w^\kappa - \dot{u}^\kappa(t))dx - \sum_{\kappa=1}^2 \int_{\Omega^\kappa} f_0^\kappa(t) \cdot (w^\kappa - \dot{u}^\kappa(t))dx \\ = \sum_{\kappa=1}^2 \int_{\Gamma_2^\kappa} f_2^\kappa(t) \cdot (w^\kappa - \dot{u}^\kappa(t))da + \sum_{\kappa=1}^2 \int_{\Gamma_3} \sigma^\kappa(t)\nu^\kappa \cdot (w^\kappa - \dot{u}^\kappa(t))da. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} \sum_{\kappa=1}^2 \langle \sigma^\kappa(t), \varepsilon(w^\kappa) - \varepsilon(\dot{u}^\kappa(t)) \rangle_{\mathcal{H}^\kappa} + \sum_{\kappa=1}^2 \langle \rho^\kappa \ddot{u}^\kappa(t), w^\kappa - \dot{u}^\kappa(t) \rangle_{\mathbb{H}^\kappa} = \sum_{\kappa=1}^2 \int_{\Omega^\kappa} f_0^\kappa(t) \cdot (w^\kappa - \dot{u}^\kappa(t))dx \\ + \sum_{\kappa=1}^2 \int_{\Gamma_2^\kappa} f_2^\kappa(t) \cdot (w^\kappa - \dot{u}^\kappa(t))da + \sum_{\kappa=1}^2 \int_{\Gamma_3} \sigma^\kappa(t)\nu^\kappa \cdot (w^\kappa - \dot{u}^\kappa(t))da. \end{aligned}$$

D'après (2.16), (2.18) et (2.19) on obtient

$$\begin{aligned} \langle \ddot{u}(t), w - \dot{u}(t) \rangle_{\mathcal{V}' \times \mathcal{V}} + \sum_{\kappa=1}^2 \langle \sigma^\kappa(t), \varepsilon(w^\kappa - \dot{u}^\kappa(t)) \rangle_{\mathcal{H}^\kappa} = \langle F(t), w - \dot{u}(t) \rangle_{\mathcal{V}' \times \mathcal{V}} \\ + \sum_{\kappa=1}^2 \int_{\Gamma_3} \sigma^\kappa(t)\nu^\kappa \cdot (w^\kappa - \dot{u}^\kappa(t)) da. \end{aligned} \quad (2.27)$$

On calcule  $\sum_{\kappa=1}^2 \int_{\Gamma_3} \sigma^\kappa(t)\nu^\kappa \cdot (w^\kappa - \dot{u}^\kappa(t)) da :$

$$\begin{aligned} \sum_{\kappa=1}^2 \sigma^\kappa(t)\nu^\kappa \cdot (w^\kappa - \dot{u}^\kappa(t)) &= \sigma^1(t)\nu^1 \cdot (w^1 - \dot{u}^1(t)) + \sigma^2(t)\nu^2 \cdot (w^2 - \dot{u}^2(t)) \\ &= \sigma_\nu^1(t) \cdot (w_\nu^1 - \dot{u}_\nu^1(t)) + \sigma_\nu^2(t) \cdot (w_\nu^2 - \dot{u}_\nu^2(t)) \\ &\quad + \sigma_\tau^1(t) \cdot (w_\tau^1 - \dot{u}_\tau^1(t)) + \sigma_\tau^2(t) \cdot (w_\tau^2 - \dot{u}_\tau^2(t)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sigma_\nu(t) \cdot (w_\nu^1 + w_\nu^2) - \sigma_\nu(t) \cdot (\dot{u}_\nu^1(t) + \dot{u}_\nu^2(t)) \\
 &+ \sigma_\tau(t) \cdot (w_\tau^1 - w_\tau^2) - \sigma_\tau(t) \cdot (\dot{u}_\tau^1(t) - \dot{u}_\tau^2(t)) \\
 &= \sigma_\tau(t) \cdot ((w_\tau^1 - w_\tau^2) - (\dot{u}_\tau^1(t) - \dot{u}_\tau^2(t))).
 \end{aligned}$$

Alors

$$\sum_{\kappa=1}^2 \int_{\Gamma_3} \sigma^\kappa(t) \nu^\kappa \cdot (w^\kappa - \dot{u}^\kappa(t)) da = \int_{\Gamma_3} \sigma_\tau(t) \cdot ([w_\tau] - [\dot{u}_\tau(t)]) da. \quad (2.28)$$

Nous supposons que  $\Gamma_3 = \Gamma_3^+ \cup \Gamma_3^-$ , où

$$\Gamma_3^+ = \{x \in \Gamma_3 \mid \sigma_\tau(t) < g\}, \quad \Gamma_3^- = \{x \in \Gamma_3 \mid \sigma_\tau(t) = g\}.$$

On a

$$\int_{\Gamma_3} \sigma_\tau(t) \cdot ([w_\tau] - [\dot{u}_\tau(t)]) da = \int_{\Gamma_3^+} \sigma_\tau(t) \cdot ([w_\tau] - [\dot{u}_\tau(t)]) da + \int_{\Gamma_3^-} \sigma_\tau(t) \cdot ([w_\tau] - [\dot{u}_\tau(t)]) da. \quad (2.29)$$

Pour  $[\dot{u}_\tau(t)]$  :

A l'aide de définition de  $\Gamma_3^+$ , on obtient

$$\int_{\Gamma_3^+} \sigma_\tau(t) \cdot [\dot{u}_\tau(t)] da = 0. \quad (2.30)$$

Maintenant, en utilisant (2.10)

$$\int_{\Gamma_3^-} \sigma_\tau(t) \cdot [\dot{u}_\tau(t)] da = -\lambda \int_{\Gamma_3^-} [\dot{u}_\tau(t)] [\dot{u}_\tau(t)] da.$$

Nous utilisons l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on obtient

$$\begin{aligned}
 \int_{\Gamma_3^-} \sigma_\tau(t) \cdot [\dot{u}_\tau(t)] da &= -\lambda \int_{\Gamma_3^-} |[\dot{u}_\tau(t)]|^2 da \\
 &= - \int_{\Gamma_3^-} |\sigma_\tau(t)| \cdot |[\dot{u}_\tau(t)]| da \\
 &= - \int_{\Gamma_3^-} g |[\dot{u}_\tau(t)]| da,
 \end{aligned}$$

alors

$$\int_{\Gamma_3^-} \sigma_\tau(t) \cdot [\dot{u}_\tau(t)] da = - \int_{\Gamma_3^-} g |[\dot{u}_\tau(t)]| da. \quad (2.31)$$

Pour  $[w_\tau]$  :

$$\int_{\Gamma_3^-} \sigma_\tau(t) \cdot [w_\tau] da = -\lambda \int_{\Gamma_3^-} [\dot{u}_\tau(t)] [w_\tau] da.$$

Ainsi on utilise l'inégalité de Cauchy-Schwartz, il résulte

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_3^-} \sigma_\tau(t) \cdot [w_\tau] da &\geq -\lambda \int_{\Gamma_3^-} |[\dot{u}_\tau(t)]| |[w_\tau]| da \\ &\geq - \int_{\Gamma_3^-} g|[w_\tau]| da. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Nous utilisons l'égalité (2.31) et l'inégalité (2.32) pour trouver

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_3^-} \sigma_\tau(t) \cdot ([w_\tau] - [\dot{u}_\tau(t)]) da &\geq - \int_{\Gamma_3^-} g (|[w_\tau]| - |[\dot{u}_\tau(t)]|) da \\ &\geq - \int_{\Gamma_3^-} g|[w_\tau]| da + \int_{\Gamma_3^-} g|[\dot{u}_\tau(t)]| da. \end{aligned} \quad (2.33)$$

D'après (2.29), on a

$$\int_{\Gamma_3} \sigma_\tau(t) \cdot ([w_\tau] - [\dot{u}_\tau(t)]) da = \int_{\Gamma_3^+} \sigma_\tau(t) \cdot [w_\tau] da + \int_{\Gamma_3^-} \sigma_\tau(t) \cdot [w_\tau] da - \int_{\Gamma_3^+} \sigma_\tau(t) \cdot [\dot{u}_\tau] da - \int_{\Gamma_3^-} \sigma_\tau(t) \cdot [\dot{u}_\tau] da,$$

et de (2.30) et (2.33), il vient

$$\int_{\Gamma_3} \sigma_\tau(t) \cdot ([w_\tau] - [\dot{u}_\tau(t)]) da \geq - \int_{\Gamma_3^+} g|[w_\tau]| da - \int_{\Gamma_3^-} g|[w_\tau]| da + \int_{\Gamma_3^-} g|[\dot{u}_\tau(t)]| da,$$

alors

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_3} \sigma_\tau(t) \cdot ([w_\tau] - [\dot{u}_\tau(t)]) da &\geq - \int_{\Gamma_3} g|[w_\tau]| da + \int_{\Gamma_3} g|[\dot{u}_\tau(t)]| da \\ &\geq - \int_{\Gamma_3} g|w_\tau^1 - w_\tau^2| da + \int_{\Gamma_3} g|\dot{u}_\tau^1(t) - \dot{u}_\tau^2(t)| da. \end{aligned} \quad (2.34)$$

D'après (2.23) et (2.28), on obtient

$$\sum_{\kappa=1}^2 \int_{\Gamma_3} \sigma^\kappa(t) v^\kappa \cdot (w^\kappa - \dot{u}^\kappa(t)) da \geq -J(w) + J(\dot{u}(t)). \quad (2.35)$$

En combinant les inégalités (2.27) et (2.35), d'où

$$\langle \ddot{u}(t), w - \dot{u}(t) \rangle_{\mathcal{V} \times \mathcal{V}} + \sum_{\kappa=1}^2 \langle \sigma^\kappa(t), \varepsilon(w^\kappa - \dot{u}^\kappa(t)) \rangle_{\mathcal{H}^\kappa} \geq \langle F(t), w - \dot{u}(t) \rangle_{\mathcal{V} \times \mathcal{V}} - J(w) + J(\dot{u}(t)).$$

Et de (2.1), on obtient

$$\begin{aligned} &\langle \ddot{u}(t), w - \dot{u}(t) \rangle_{\mathcal{V} \times \mathcal{V}} + \sum_{\kappa=1}^2 \langle \mathcal{A}^\kappa \varepsilon(\dot{u}^\kappa(t)) + \mathcal{B}^\kappa(\varepsilon(u^\kappa(t)), \alpha^\kappa(t)), \varepsilon(w^\kappa - \dot{u}^\kappa(t)) \rangle_{\mathcal{H}^\kappa} \\ &+ \sum_{\kappa=1}^2 \langle (\mathcal{E}^\kappa)^* \nabla \psi^\kappa(t), \varepsilon(w^\kappa - \dot{u}^\kappa(t)) \rangle_{\mathcal{H}^\kappa} + \sum_{\kappa=1}^2 \langle \mathcal{F}^\kappa(\beta^\kappa(t), \tau^\kappa(t)), \varepsilon(w^\kappa - \dot{u}^\kappa(t)) \rangle_{\mathcal{H}^\kappa} \\ &+ J(w) - J(\dot{u}(t)) \geq \langle F(t), w - \dot{u}(t) \rangle_{\mathcal{V} \times \mathcal{V}}, \quad \forall w \in \mathcal{V}. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Maintenant, on utilise aussi la formule de Green (1.35) pour les inconnues électriques du problème, ainsi que les conditions (2.2), (2.7), (2.14) et la définition (2.20), pour tout  $\phi = (\phi^1, \phi^2) \in \mathbb{W}$ , et  $t \in [0, T]$ , on a

$$\langle D^\kappa(t), \nabla \phi^\kappa \rangle_{\mathbb{H}^\kappa} + \langle \operatorname{div} D^\kappa(t), \phi^\kappa \rangle_{L^2(\Omega^\kappa)} = \int_{\Gamma^\kappa} D^\kappa(t) \nu^\kappa \cdot \phi^\kappa da,$$

d'où

$$\int_{\Omega^\kappa} D^\kappa(t) \cdot \nabla \phi^\kappa dx + \int_{\Omega^\kappa} \operatorname{div} D^\kappa(t) \cdot \phi^\kappa dx = \int_{\Gamma_a^\kappa} D^\kappa(t) \nu^\kappa \cdot \phi^\kappa da + \int_{\Gamma_b^\kappa} D^\kappa(t) \nu^\kappa \cdot \phi^\kappa da. \quad (2.37)$$

Pour  $\kappa = 1, 2$ , on a d'après définition de  $\mathbb{W}$ , on a

$$\int_{\Gamma_a^\kappa} D^\kappa(t) \nu^\kappa \cdot \phi^\kappa da = 0,$$

alors

$$\int_{\Omega^\kappa} D^\kappa(t) \cdot \nabla \phi^\kappa dx + \int_{\Omega^\kappa} \operatorname{div} D^\kappa(t) \cdot \phi^\kappa dx = \int_{\Gamma_b^\kappa} D^\kappa(t) \nu^\kappa \cdot \phi^\kappa da. \quad (2.38)$$

On a d'après (2.7) et (2.14)

$$\int_{\Omega^\kappa} D^\kappa(t) \cdot \nabla \phi^\kappa dx + \int_{\Omega^\kappa} q_0^\kappa(t) \cdot \phi^\kappa dx = \int_{\Gamma_b^\kappa} q_2^\kappa(t) \cdot \phi^\kappa da. \quad (2.39)$$

La formule de Green pour  $\kappa = 1$

$$\int_{\Omega^1} D^1(t) \cdot \nabla \phi^1 dx + \int_{\Omega^1} q_0^1(t) \cdot \phi^1 dx = \int_{\Gamma_b^1} q_2^1(t) \cdot \phi^1 da. \quad (2.40)$$

La formule de Green pour  $\kappa = 2$

$$\int_{\Omega^2} D^2(t) \cdot \nabla \phi^2 dx + \int_{\Omega^2} q_0^2(t) \cdot \phi^2 dx = \int_{\Gamma_b^2} q_2^2(t) \cdot \phi^2 da. \quad (2.41)$$

En additionnant (2.40) et (2.41) on a

$$\sum_{\kappa=1}^2 \int_{\Omega^\kappa} D^\kappa(t) \cdot \nabla \phi^\kappa dx + \sum_{\kappa=1}^2 \int_{\Omega^\kappa} q_0^\kappa(t) \cdot \phi^\kappa dx - \sum_{\kappa=1}^2 \int_{\Gamma_b^\kappa} q_2^\kappa(t) \cdot \phi^\kappa da = 0.$$

On a d'après (2.20) on obtient

$$\sum_{\kappa=1}^2 \langle D^\kappa(t), \nabla \phi^\kappa \rangle_{\mathbb{H}^\kappa} + \langle Q(t), \phi \rangle_{\mathbb{W}} = 0.$$

De (2.2), on obtient

$$\sum_{\kappa=1}^2 \langle \mathcal{R}^\kappa \nabla \psi^\kappa(t) - \mathcal{E}^\kappa \varepsilon(u^\kappa(t)) - \mathcal{G}^\kappa(\beta^\kappa(t), \tau^\kappa(t)), \nabla \phi^\kappa \rangle_{\mathbb{H}^\kappa} = \langle Q(t), \phi \rangle_{\mathbb{W}}, \quad \forall \phi \in \mathbb{W}, t \in [0, T]. \quad (2.42)$$

D'autre côté, pour les endommagements  $\alpha = (\alpha^1, \alpha^2) \in \mathcal{Z}$ , et pour tout  $\xi = (\xi^1, \xi^2) \in \mathcal{Z}$ ,  $t \in [0, T]$ , la définition 1.2.12 de  $\partial \mathbb{I}_{\mathcal{Z}^\kappa}$  et de (2.5), on obtient

$$\langle S^\kappa(\varepsilon(u^\kappa(t)), \alpha^\kappa(t)) - \dot{\alpha}^\kappa(t) + \mathcal{K}_1^\kappa \Delta \alpha^\kappa(t), \xi^\kappa - \alpha^\kappa(t) \rangle_{L^2(\Omega^\kappa)} \leq 0.$$

Donc

$$\begin{aligned} & \langle \dot{\alpha}^\kappa(t), \xi^\kappa - \alpha^\kappa(t) \rangle_{L^2(\Omega^\kappa)} - \langle \mathcal{K}_1^\kappa \Delta \alpha^\kappa(t), \xi^\kappa - \alpha^\kappa(t) \rangle_{L^2(\Omega^\kappa)} \\ & \geq \langle S^\kappa(\varepsilon(u^\kappa(t)), \alpha^\kappa(t)), \xi^\kappa - \alpha^\kappa(t) \rangle_{L^2(\Omega^\kappa)}. \end{aligned} \quad (2.43)$$

L'inégalité (2.43), pour  $\kappa=1$ ,

$$\begin{aligned} & \langle \dot{\alpha}^1(t), \xi^1 - \alpha^1(t) \rangle_{L^2(\Omega^1)} - \langle \mathcal{K}_1^1 \Delta \alpha^1(t), \xi^1 - \alpha^1(t) \rangle_{L^2(\Omega^1)} \\ & \geq \langle S^1(\varepsilon(u^1(t)), \alpha^1(t)), \xi^1 - \alpha^1(t) \rangle_{L^2(\Omega^1)}. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Aussi, l'inégalité (2.43), pour  $\kappa=2$ ,

$$\begin{aligned} & \langle \dot{\alpha}^2(t), \xi^2 - \alpha^2(t) \rangle_{L^2(\Omega^2)} - \langle \mathcal{K}_1^2 \Delta \alpha^2(t), \xi^2 - \alpha^2(t) \rangle_{L^2(\Omega^2)} \\ & \geq \langle S^2(\varepsilon(u^2(t)), \alpha^2(t)), \xi^2 - \alpha^2(t) \rangle_{L^2(\Omega^2)}. \end{aligned} \quad (2.45)$$

En additionnant (2.44) et (2.45), il vient

$$\begin{aligned} & \sum_{\kappa=1}^2 \langle \dot{\alpha}^\kappa(t), \xi^\kappa - \alpha^\kappa(t) \rangle_{L^2(\Omega^\kappa)} - \sum_{\kappa=1}^2 \langle \mathcal{K}_1^\kappa \Delta \alpha^\kappa(t), \xi^\kappa - \alpha^\kappa(t) \rangle_{L^2(\Omega^\kappa)} \\ & \geq \sum_{\kappa=1}^2 \langle S^\kappa(\varepsilon(u^\kappa(t)), \alpha^\kappa(t)), \xi^\kappa - \alpha^\kappa(t) \rangle_{L^2(\Omega^\kappa)}. \end{aligned} \quad (2.46)$$

D'après la formule de Green (1.34), nous obtenons

$$\langle \Delta \alpha^\kappa(t), \xi^\kappa - \alpha^\kappa(t) \rangle_{L^2(\Omega^\kappa)} + \langle \nabla \alpha^\kappa(t), \nabla(\xi^\kappa - \alpha^\kappa(t)) \rangle_{L^2(\Omega^\kappa)} = \int_{\Gamma^\kappa} \frac{\partial \alpha^\kappa(t)}{\partial \nu} \cdot (\xi^\kappa - \alpha^\kappa(t)) da,$$

et la condition aux limites (2.11) du problème  $\mathcal{P}$ , on a

$$\langle \Delta \alpha^\kappa(t), \xi^\kappa - \alpha^\kappa(t) \rangle_{L^2(\Omega^\kappa)} = - \int_{\Omega^\kappa} \nabla \alpha^\kappa(t) \cdot \nabla(\xi^\kappa - \alpha^\kappa(t)) dx,$$

et de (2.46), nous trouvons

$$\begin{aligned} & \sum_{\kappa=1}^2 \langle \dot{\alpha}^\kappa(t), \xi^\kappa - \alpha^\kappa(t) \rangle_{L^2(\Omega^\kappa)} + \sum_{\kappa=1}^2 \mathcal{K}_1^\kappa \int_{\Omega^\kappa} \nabla \alpha^\kappa(t) \cdot \nabla(\xi^\kappa - \alpha^\kappa(t)) dx \\ & \geq \sum_{\kappa=1}^2 \langle S^\kappa(\varepsilon(u^\kappa(t)), \alpha^\kappa(t)), \xi^\kappa - \alpha^\kappa(t) \rangle_{L^2(\Omega^\kappa)}. \end{aligned}$$

La définition (2.22) de la forme bilinéaire a permet de donner

$$\begin{aligned} & \sum_{\kappa=1}^2 \langle \dot{\alpha}^\kappa(t), \xi^\kappa - \alpha^\kappa(t) \rangle_{L^2(\Omega^\kappa)} + a_1(\alpha(t), \xi - \alpha(t)) \\ & \geq \sum_{\kappa=1}^2 \langle S^\kappa(\varepsilon(u^\kappa(t)), \alpha^\kappa(t)), \xi^\kappa - \alpha^\kappa(t) \rangle_{L^2(\Omega^\kappa)}, \quad \forall \xi \in \mathcal{Z}. \end{aligned} \quad (2.47)$$

D'autre part, les températures du problème  $\mathcal{P}$ , pour tout  $\delta = (\delta^1, \delta^2) \in E_1$ ,  $t \in [0, T]$  et l'équation (2.4), nous obtenons

$$\langle \dot{\tau}^\kappa(t), \delta^\kappa \rangle_{L^2(\Omega^\kappa)} - \langle \mathcal{K}_0^\kappa \Delta \tau^\kappa(t), \delta^\kappa \rangle_{L^2(\Omega^\kappa)} = \langle \Psi^\kappa(\varepsilon(u^\kappa(t)), \alpha^\kappa(t), \beta^\kappa(t), \tau^\kappa(t)) + \chi^\kappa(t), \delta^\kappa \rangle_{L^2(\Omega^\kappa)}. \quad (2.48)$$

Donc

$$\begin{aligned} & \langle \Psi^\kappa(\varepsilon(u^\kappa(t)), \alpha^\kappa(t), \beta^\kappa(t), \tau^\kappa(t)) + \chi^\kappa(t), \delta^\kappa \rangle_{L^2(\Omega^\kappa)} \\ & = \langle \dot{\tau}^\kappa(t), \delta^\kappa \rangle_{L^2(\Omega^\kappa)} - \int_{\Omega^\kappa} \mathcal{K}_0^\kappa \Delta \tau^\kappa(t) \delta^\kappa dx. \end{aligned} \quad (2.49)$$

L'égalité (2.49) pour  $\kappa=1$

$$\begin{aligned} & \langle \Psi^1(\varepsilon(u^1(t)), \alpha^1(t), \beta^1(t), \tau^1(t)) + \chi^1(t), \delta^1 \rangle_{L^2(\Omega^1)} \\ & = \langle \dot{\tau}^1(t), \delta^1 \rangle_{L^2(\Omega^1)} - \int_{\Omega^1} \mathcal{K}_0^1 \Delta \tau^1(t) \delta^1 dx, \end{aligned} \quad (2.50)$$

et, l'égalité (2.49) pour  $\kappa=2$

$$\begin{aligned} & \langle \Psi^2(\varepsilon(u^2(t)), \alpha^2(t), \beta^2(t), \tau^2(t)) + \chi^2(t), \delta^2 \rangle_{L^2(\Omega^2)} \\ & = \langle \dot{\tau}^2(t), \delta^2 \rangle_{L^2(\Omega^2)} - \int_{\Omega^2} \mathcal{K}_0^2 \Delta \tau^2(t) \delta^2 dx, \end{aligned} \quad (2.51)$$

En additionnant (2.50) et (2.51), d'où

$$\begin{aligned} & \sum_{\kappa=1}^2 \langle \Psi^\kappa(\varepsilon(u^\kappa(t)), \alpha^\kappa(t), \beta^\kappa(t), \tau^\kappa(t)) + \chi^\kappa(t), \delta^\kappa \rangle_{L^2(\Omega^\kappa)} \\ & = \sum_{\kappa=1}^2 \langle \dot{\tau}^\kappa(t), \delta^\kappa \rangle_{L^2(\Omega^\kappa)} - \sum_{\kappa=1}^2 \int_{\Omega^\kappa} \mathcal{K}_0^\kappa \Delta \tau^\kappa(t) \delta^\kappa dx. \end{aligned} \quad (2.52)$$

La formule de Green (1.37), pour  $\kappa=1, 2$  donne

$$-\mathcal{K}_0^\kappa \langle \Delta \tau^\kappa(t), \delta^\kappa \rangle_{L^2(\Omega^\kappa)} = \mathcal{K}_0^\kappa \int_{\Omega^\kappa} \nabla \tau^\kappa(t) \cdot \nabla \delta^\kappa dx - \mathcal{K}_0^\kappa \int_{\Gamma^\kappa} \frac{\partial^\kappa \tau^\kappa(t)}{\partial \nu^\kappa} \delta^\kappa dx,$$

on a d'après (2.12)

$$-\mathcal{K}_0^\kappa \langle \Delta \tau^\kappa(t), \delta^\kappa \rangle_{L^2(\Omega^\kappa)} = \mathcal{K}_0^\kappa \int_{\Omega^\kappa} \nabla \tau^\kappa(t) \cdot \nabla \delta^\kappa dx + \lambda_0^\kappa \int_{\Gamma^\kappa} \tau^\kappa(t) \delta^\kappa dx. \quad (2.53)$$

En combinant les inégalités (2.52) et (2.53), on a

$$\begin{aligned} & \sum_{\kappa=1}^2 \langle \Psi^\kappa(\varepsilon(u^\kappa(t)), \alpha^\kappa(t), \beta^\kappa(t), \tau^\kappa(t)) + \chi^\kappa(t), \delta^\kappa \rangle_{L^2(\Omega^\kappa)} \\ &= \sum_{\kappa=1}^2 \langle \dot{\tau}^\kappa(t), \delta^\kappa \rangle_{L^2(\Omega^\kappa)} + \sum_{\kappa=1}^2 \int_{\Omega^\kappa} \mathcal{K}_0^\kappa \nabla \tau^\kappa(t) \nabla \delta^\kappa dx + \sum_{\kappa=1}^2 \int_{\Gamma^\kappa} \lambda_0^\kappa \tau^\kappa(t) \delta^\kappa da. \end{aligned}$$

D'après (2.21), on obtient

$$\begin{aligned} a_0(\tau(t), \delta) &= \sum_{\kappa=1}^2 \langle \Psi^\kappa(\varepsilon(u^\kappa(t)), \alpha^\kappa(t), \beta^\kappa(t), \tau^\kappa(t)), \delta^\kappa \rangle_{L^2(\Omega^\kappa)} - \sum_{\kappa=1}^2 \langle \dot{\tau}^\kappa(t) - \chi^\kappa(t), \delta^\kappa \rangle_{L^2(\Omega^\kappa)}, \\ & \quad \forall \delta \in E_1. \end{aligned} \quad (2.54)$$

Finalement, de (2.3), (2.15), (2.36), (2.42), (2.47), (2.54), on obtient la formulation variationnelle suivante du problème de contact électrique  $\mathcal{P}$ .

**Problème  $\mathcal{PV}$ .** Trouver le champ des déplacements  $u = (u^1, u^2) : [0, T] \rightarrow \mathcal{V}$ , le champ de potentiel électrique  $\psi = (\psi^1, \psi^2) : [0, T] \rightarrow \mathbb{W}$ , le champ de température  $\tau = (\tau^1, \tau^2) : [0, T] \rightarrow E_1$ , le champ d'endommagement  $\alpha = (\alpha^1, \alpha^2) : [0, T] \rightarrow E_1$ , et le champ de variable d'état interne  $\beta = (\beta^1, \beta^2) : [0, T] \rightarrow \mathbb{Y}$  tels que, pour tout  $t \in [0, T]$

$$\dot{\beta}^\kappa(t) = \Theta^\kappa(\varepsilon(u^\kappa(t)), \alpha^\kappa(t), \beta^\kappa(t), \tau^\kappa(t)) \quad \text{dans } \Omega^\kappa, \quad (2.55)$$

$$\left. \begin{aligned} & \langle \ddot{u}(t), w - \dot{u}(t) \rangle_{\mathcal{V} \times \mathcal{V}} + \sum_{\kappa=1}^2 \langle \mathcal{A}^\kappa \varepsilon(\dot{u}^\kappa(t)) + \mathcal{B}^\kappa(\varepsilon(u^\kappa(t)), \alpha^\kappa(t)), \varepsilon(w^\kappa - \dot{u}^\kappa(t)) \rangle_{\mathcal{H}^\kappa} \\ & + \sum_{\kappa=1}^2 \langle (\mathcal{E}^\kappa)^* \nabla \psi^\kappa(t), \varepsilon(w^\kappa - \dot{u}^\kappa(t)) \rangle_{\mathcal{H}^\kappa} + \sum_{\kappa=1}^2 \langle \mathcal{F}^\kappa(\beta^\kappa(t), \tau^\kappa(t)), \varepsilon(w^\kappa - \dot{u}^\kappa(t)) \rangle_{\mathcal{H}^\kappa} \\ & + J(w) - J(\dot{u}(t)) \geq \langle F(t), w - \dot{u}(t) \rangle_{\mathcal{V} \times \mathcal{V}} \quad \forall w \in \mathcal{V}, \end{aligned} \right\} \quad (2.56)$$

$$\sum_{\kappa=1}^2 \langle \mathcal{R}^\kappa \nabla \psi^\kappa(t) - \mathcal{E}^\kappa \varepsilon(u^\kappa(t)) - \mathcal{G}^\kappa(\beta^\kappa(t), \tau^\kappa(t)), \nabla \phi^\kappa \rangle_{\mathbb{H}^\kappa} = \langle Q(t), \phi \rangle_{\mathbb{W}}, \quad \forall \phi \in \mathbb{W}, \quad (2.57)$$

$$\left. \begin{aligned} & \sum_{\kappa=1}^2 \langle \dot{\alpha}^\kappa(t), \xi^\kappa - \alpha^\kappa(t) \rangle_{L^2(\Omega^\kappa)} + a_1(\alpha(t), \xi - \alpha(t)) \\ & \geq \sum_{\kappa=1}^2 \langle S^\kappa(\varepsilon(u^\kappa(t)), \alpha^\kappa(t)), \xi^\kappa - \alpha^\kappa(t) \rangle_{L^2(\Omega^\kappa)}, \quad \forall \xi \in \mathcal{Z}, \end{aligned} \right\} \quad (2.58)$$

$$\left. \begin{aligned} a_0(\tau(t), \delta) &= \sum_{\kappa=1}^2 \langle \Psi^\kappa(\varepsilon(u^\kappa(t)), \alpha^\kappa(t), \beta^\kappa(t), \tau^\kappa(t)), \delta^\kappa \rangle_{L^2(\Omega^\kappa)} \\ & - \sum_{\kappa=1}^2 \langle \dot{\tau}^\kappa(t) - \chi^\kappa(t), \delta^\kappa \rangle_{L^2(\Omega^\kappa)}, \quad \forall \delta \in E_1, \end{aligned} \right\} \quad (2.59)$$

$$u(0) = (u_0^1, u_0^2), \quad \dot{u}(0) = (v_0^1, v_0^2), \quad \alpha(0) = (\alpha_0^1, \alpha_0^2), \quad \beta(0) = (\beta_0^1, \beta_0^2), \quad \tau(0) = (\tau_0^1, \tau_0^2). \quad (2.60)$$

Nous notons que le problème variationnel  $\mathcal{PV}$  est formulé en termes de champ des déplacements, champ de potentiel électrique, champ de température, champ d'endommagement et la variable d'état interne. Le principal d'existence et d'unicité est prouvée dans la prochaine section.

## 2.3 Existence et unicité de la solution

L'existence et l'unicité du problème variationnel  $\mathcal{PV}$  est donnée par le Théorème suivant :

**Théorème 2.3.1.** *Sous les hypothèses H(1) – H(14), le problème variationnel  $\mathcal{PV}$  admet une solution unique  $\{u, \psi, \tau, \alpha, \beta\}$  ayant la régularité suivante :*

$$u \in W^{1,2}(0, T; \mathcal{V}) \cap C^1(0, T; \mathbb{H}) \cap W^{2,2}(0, T; \mathcal{V}'), \quad (2.61)$$

$$\psi \in C(0, T; \mathbb{W}), \quad (2.62)$$

$$\tau \in W^{1,2}(0, T; E_0) \cap L^2(0, T; E_1), \quad (2.63)$$

$$\alpha \in W^{1,2}(0, T; E_0) \cap L^2(0, T; E_1), \quad (2.64)$$

$$\beta \in W^{1,2}(0, T; \mathbb{Y}). \quad (2.65)$$

Les fonctions  $\{\sigma, D, u, \psi, \tau, \alpha, \beta\}$  qui satisfait (2.1)-(2.2) et (2.55)-(2.60) sont appelées solution faible du problème de contact thermo-piézoélectrique  $\mathcal{P}$ . Nous concluons par le Théorème 2.3.1 que, sous les hypothèses H(1)-H(14), il existe une unique solution faible du problème (2.1)–(2.15). Pour préciser la régularité de la solution faible, notons que la relation constitutive (2.1)-(2.2), les hypothèses H(1)-H(5), H(9), et les régularités (2.61)-(2.65), soient  $t_1, t_2 \in [0, T]$  pour simplifier nous écrivons  $u(t_i) = u_i, \dot{u}(t_i) = \dot{u}_i, \psi(t_i) = \psi_i, \tau(t_i) = \tau_i, \alpha(t_i) = \alpha_i$  et  $\beta(t_i) = \beta_i$  pour  $i = 1, 2$ , en utilisant (2.1) et (1.32), nous obtenons

$$\begin{aligned} C\|\sigma(t_1) - \sigma(t_2)\|_{\mathcal{H}} &\leq \|\dot{u}_1 - \dot{u}_2\|_{\mathcal{V}} + \|u_1 - u_2\|_{\mathcal{V}} + \|\alpha_1 - \alpha_2\|_{E_0} \\ &\quad + \|\beta_1 - \beta_2\|_{\mathbb{Y}} + \|\tau_1 - \tau_2\|_{E_0} + \|\psi_1 - \psi_2\|_{\mathbb{W}}, \end{aligned}$$

et les régularités (2.61)-(2.65) et de Théorème 1.2.5, on tire

$$\sigma \in C(0, T; \mathcal{H}).$$

D'autre côté, utilisant des arguments similaires, nous trouvons que

$$D \in C(0, T; \mathbb{H}).$$

De plus, pour  $\kappa = 1, 2$ , on choisit  $w = v + \dot{u}$  où  $v = (v^1, v^2)$  avec  $v^\kappa \in \mathcal{D}(\Omega^\kappa)^d$  et  $v^{3-\kappa} = 0$  dans (2.56). Puis, on choisit  $\phi^\kappa \in \mathcal{D}(\Omega^\kappa)^d$  avec  $\phi^{3-\kappa} = 0$  dans (2.57), pour obtenir que

$$\begin{aligned} \operatorname{Div} \sigma^\kappa(t) + f_0^\kappa(t) &= \rho^\kappa \ddot{u}^\kappa(t), \\ \operatorname{div} D^\kappa(t) &= q_0^\kappa(t), \end{aligned} \quad (2.66)$$

où  $\mathcal{D}(\Omega^\kappa)$  l'espace des fonctions réelles infiniment différentiables à support compact dans  $\Omega^\kappa$ . Ensuite, nous utilisons les hypothèses H(10) et H(11), pour déduire que  $\operatorname{Div} \sigma^\kappa \in C(0, T; \mathbb{H}^\kappa)$ ,  $\operatorname{div} D^\kappa \in C(0, T; E_0^\kappa)$ ,  $\kappa = 1, 2$ , on a alors

$$\sigma \in C(0, T; \mathcal{H}_1), \quad D \in C(0, T; \mathcal{W}). \quad (2.67)$$

Nous concluons que la solution faible  $\{\sigma, D, u, \psi, \tau, \alpha, \beta\}$  du contact thermo-piézoélectrique Problème  $\mathcal{P}$  a la régularité (2.61)-(2.65), et (2.67).

### Démonstration du Théorème 2.3.1

La démonstration du Théorème 2.3.1 s'effectue en plusieurs étapes que nous prouvons dans ce qui suit. Par tout dans cette section, nous supposons ce qui suit que tenir H(1) à H(14) et nous considérons que  $C$  est une constante positive générique qui dépend de  $\Omega^\kappa, \Gamma_1^\kappa, \Gamma_2^\kappa, \Gamma_3, \mathcal{A}^\kappa, \mathcal{B}^\kappa, \mathcal{F}^\kappa, \mathcal{G}^\kappa, \mathcal{E}^\kappa, \Theta^\kappa, S^\kappa, \Psi^\kappa, \mathcal{K}_0^\kappa, \lambda_0^\kappa, \mathcal{K}_1^\kappa, \chi^\kappa, m$  et  $L$ , avec  $\kappa = 1, 2$ . Mais ne dépend pas de  $t$  ni du reste des données d'entrée, et dont la valeur peut changer d'un endroit à l'autre.

**Première étape :** Soit  $\eta = (\eta^1, \eta^2) \in L^2(0, T; \mathcal{V}')$  donné, et nous considérons le problème intermédiaire suivant :

**Problème  $\mathcal{PV}_{u_\eta}$ .** Trouver les champs des déplacements  $u_\eta = (u_\eta^1, u_\eta^2) : [0, T] \rightarrow \mathcal{V}$  tels que :

$$\left. \begin{aligned} &\langle \ddot{u}_\eta(t), w - \dot{u}_\eta(t) \rangle_{\mathcal{V}' \times \mathcal{V}} + \sum_{\kappa=1}^2 \langle \mathcal{A}^\kappa \varepsilon(\dot{u}_\eta^\kappa(t)), \varepsilon(w^\kappa - \dot{u}_\eta^\kappa(t)) \rangle_{\mathcal{H}^\kappa} \\ &+ J(w) - J(\dot{u}_\eta(t)) \geq \langle F(t) - \eta(t), w - \dot{u}_\eta(t) \rangle_{\mathcal{V}' \times \mathcal{V}} \quad \forall w \in \mathcal{V}, \text{ p.p. } t \in (0, T), \\ &u_\eta(0) = (u_0^1, u_0^2), \quad \dot{u}_\eta(0) = (v_0^1, v_0^2). \end{aligned} \right\} \quad (2.68)$$

En utilisant le Théorème de représentation de Riesz-Fréchet, nous définissons l'opérateur  $\mathcal{A} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}'$  comme suivant :

$$\langle \mathcal{A}u, v \rangle_{\mathcal{V}' \times \mathcal{V}} = \sum_{\kappa=1}^2 \langle \mathcal{A}^\kappa \varepsilon(u^\kappa), \varepsilon(v^\kappa) \rangle_{\mathcal{H}^\kappa} \quad \forall u, v \in \mathcal{V}. \quad (2.69)$$

On pose le variable de vitesse  $v_\eta^\kappa = \dot{u}_\eta^\kappa$ ,  $\kappa = 1, 2$ , le Problème  $\mathcal{PV}_{u_\eta}$  peut être formulé de la façon suivant :

**Problème  $\mathcal{PV}_{v_\eta}$ .** Trouver les champs des vitesses  $v_\eta = (v_\eta^1, v_\eta^2) : [0, T] \rightarrow \mathcal{V}$  tels que :

$$\left. \begin{aligned} & \langle \dot{v}_\eta(t), w - v_\eta(t) \rangle_{\mathcal{V}' \times \mathcal{V}} + \langle \mathcal{A}v_\eta(t), w - v_\eta(t) \rangle_{\mathcal{V}' \times \mathcal{V}} + J(w) - J(v_\eta(t)) \\ & \geq \langle F_\eta(t), w - v_\eta(t) \rangle_{\mathcal{V}' \times \mathcal{V}} \quad \forall w \in \mathcal{V}, \text{ p.p. } t \in (0, T), \\ & v_\eta(0) = (v_0^1, v_0^2), \end{aligned} \right\} \quad (2.70)$$

où  $F_\eta = F - \eta$ . Pour résoudre le Problème  $\mathcal{PV}_{v_\eta}$ , nous besoin le lemme suivant.

**Lemme 2.3.1.** *Suppose que H(1), l'opérateur  $\mathcal{A}$  défini par (2.69) satisfait :*

- (a)-  $\mathcal{A} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}'$  est hemicontinu et fortement monotone,
- (b)-  $\exists C_{\mathcal{A}}^1 \geq 0, \exists C_{\mathcal{A}}^2 \geq 0$  telle que  $\|\mathcal{A}u\|_{\mathcal{V}'} \leq C_{\mathcal{A}}^1 \|u\|_{\mathcal{V}} + C_{\mathcal{A}}^2, \quad \forall u \in \mathcal{V}$ ,
- (c)- pour toute suite  $(u_n)$  et  $u$  dans  $L^2(0, T; \mathcal{V})$  telle que  $u_n \rightharpoonup u$  faiblement dans  $L^2(0, T; \mathcal{V})$ , alors  $\mathcal{A}u_n \rightharpoonup \mathcal{A}u$  faiblement dans  $L^2(0, T; \mathcal{V}')$ , et
 
$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_0^T \langle \mathcal{A}u_n(s), u_n(s) \rangle_{\mathcal{V}' \times \mathcal{V}} ds \geq \int_0^T \langle \mathcal{A}u(s), u(s) \rangle_{\mathcal{V}' \times \mathcal{V}} ds.$$

**Démonstration.**

(a) D'après définition de  $\mathcal{A}$  dans (2.69), et pour tout  $u, v, w \in \mathcal{V}$ , on obtient

$$\langle \mathcal{A}(u + \lambda_n v) - \mathcal{A}(u + \lambda v), w \rangle_{\mathcal{V}' \times \mathcal{V}} = \sum_{\kappa=1}^2 \langle \mathcal{A}^\kappa(\varepsilon(u^\kappa) + \lambda_n \varepsilon(v^\kappa)) - \mathcal{A}^\kappa(\varepsilon(u^\kappa) + \lambda \varepsilon(v^\kappa)), \varepsilon(w^\kappa) \rangle_{\mathcal{H}^\kappa},$$

en utilisant l'hypothèse H(1)(a), il vient :

$$\begin{aligned} \left| \langle \mathcal{A}(u + \lambda_n v) - \mathcal{A}(u + \lambda v), w \rangle_{\mathcal{V}' \times \mathcal{V}} \right| & \leq \sum_{\kappa=1}^2 \|\mathcal{A}^\kappa(\varepsilon(u^\kappa) + \lambda_n \varepsilon(v^\kappa)) - \mathcal{A}^\kappa(\varepsilon(u^\kappa) + \lambda \varepsilon(v^\kappa))\|_{\mathcal{H}^\kappa} \|\varepsilon(w^\kappa)\|_{\mathcal{H}^\kappa} \\ & \leq \sum_{\kappa=1}^2 L_{\mathcal{A}}^\kappa \|(\varepsilon(u^\kappa) + \lambda_n \varepsilon(v^\kappa)) - (\varepsilon(u^\kappa) + \lambda \varepsilon(v^\kappa))\|_{\mathcal{H}^\kappa} \|\varepsilon(w^\kappa)\|_{\mathcal{H}^\kappa} \\ & \leq \sum_{\kappa=1}^2 L_{\mathcal{A}}^\kappa |\lambda_n - \lambda| \|\varepsilon(v^\kappa)\|_{\mathcal{H}^\kappa} \|\varepsilon(w^\kappa)\|_{\mathcal{H}^\kappa}, \end{aligned}$$

alors si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_n = \lambda$ , on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \langle \mathcal{A}(u + \lambda_n v), w \rangle_{\mathcal{V}' \times \mathcal{V}} = \langle \mathcal{A}(u + \lambda v), w \rangle_{\mathcal{V}' \times \mathcal{V}}, \quad \forall u, v, w \in \mathcal{V}.$$

$\mathcal{A}$  hemicontinu.

D'autre côté, en utilisant la définition (2.69) et l'hypothèse H(1)(b), pour tout  $u_1, u_2 \in \mathcal{V}$ , on

obtient

$$\begin{aligned}
 \langle \mathcal{A}u_1 - \mathcal{A}u_2, u_1 - u_2 \rangle_{\mathcal{V}' \times \mathcal{V}} &= \sum_{\kappa=1}^2 \langle \mathcal{A}^\kappa \varepsilon(u_1^\kappa) - \mathcal{A}^\kappa \varepsilon(u_2^\kappa), \varepsilon(u_1^\kappa) - \varepsilon(u_2^\kappa) \rangle_{\mathcal{H}^\kappa} \\
 &\geq \sum_{\kappa=1}^2 m_{\mathcal{A}^\kappa} \|\varepsilon(u_1^\kappa) - \varepsilon(u_2^\kappa)\|_{\mathcal{H}^\kappa}^2 \\
 &\geq \sum_{\kappa=1}^2 m_{\mathcal{A}^\kappa} \|u_1^\kappa - u_2^\kappa\|_{\mathcal{V}^\kappa}^2,
 \end{aligned}$$

soit  $m_{\mathcal{A}} = \min(m_{\mathcal{A}^1}, m_{\mathcal{A}^2})$ , alors

$$\langle \mathcal{A}u_1 - \mathcal{A}u_2, u_1 - u_2 \rangle_{\mathcal{V}} \geq m_{\mathcal{A}} \|u_1 - u_2\|_{\mathcal{V}}^2,$$

donc  $\mathcal{A}$  est un opérateur fortement monotone.

(b) Maintenant, d'après (2.69), et choisie  $v = 0$ , on a

$$\begin{aligned}
 \|\mathcal{A}u - \mathcal{A}0\|_{\mathcal{V}'}^2 &= \sum_{\kappa=1}^2 \langle \mathcal{A}^\kappa \varepsilon(u^\kappa) - \mathcal{A}^\kappa \varepsilon(0), \mathcal{A}^\kappa \varepsilon(u^\kappa) - \mathcal{A}^\kappa \varepsilon(0) \rangle_{\mathcal{H}^\kappa} \\
 &= \sum_{\kappa=1}^2 \|\mathcal{A}^\kappa \varepsilon(u^\kappa) - \mathcal{A}^\kappa \varepsilon(0)\|_{\mathcal{H}^\kappa}^2
 \end{aligned}$$

en utilisant l'hypothèse H(1) (a), on obtient :

$$\begin{aligned}
 \|\mathcal{A}u - \mathcal{A}0\|_{\mathcal{V}'}^2 &\leq \sum_{\kappa=1}^2 L_{\mathcal{A}^\kappa}^2 \|\varepsilon(u^\kappa) - \varepsilon(0)\|_{\mathcal{H}^\kappa}^2 \\
 &\leq \sum_{\kappa=1}^2 L_{\mathcal{A}^\kappa}^2 \|u^\kappa - 0\|_{\mathcal{V}^\kappa}^2,
 \end{aligned}$$

et pour  $L_{\mathcal{A}} = \max(L_{\mathcal{A}^1}, L_{\mathcal{A}^2})$ , il vient

$$\|\mathcal{A}u - \mathcal{A}0\|_{\mathcal{V}'} \leq L_{\mathcal{A}} \|u\|_{\mathcal{V}},$$

alors

$$\|\mathcal{A}u\|_{\mathcal{V}'} - \|\mathcal{A}0\|_{\mathcal{V}'} \leq L_{\mathcal{A}} \|u\|_{\mathcal{V}},$$

on a

$$\|\mathcal{A}u\|_{\mathcal{V}'} \leq L_{\mathcal{A}} \|u\|_{\mathcal{V}} + \|\mathcal{A}0\|_{\mathcal{V}'},$$

donc

$$\|\mathcal{A}u\|_{\mathcal{V}'} \leq C_{\mathcal{A}}^1 \|u\|_{\mathcal{V}} + C_{\mathcal{A}}^2,$$

où  $C_{\mathcal{A}}^1 = L_{\mathcal{A}}$  et  $C_{\mathcal{A}}^2 = \|\mathcal{A}0\|_{\mathcal{V}'}$ . Alors  $\mathcal{A}$  satisfait la condition (b).

(c) D'autre par, pour tout  $\Phi \in L^2(0, T; \mathcal{V}')$ , on a

$$\langle \mathcal{A}u_n - \mathcal{A}u, \Phi \rangle_{L^2(0, T; \mathcal{V}')} = \int_0^T \langle \mathcal{A}u_n - \mathcal{A}u, \Phi \rangle_{\mathcal{V}'} dt,$$

et, en appliquant Théorème de Lebesgue, on obtient

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^T \langle \mathcal{A}u_n - \mathcal{A}u, \Phi \rangle_{\mathcal{V}'} dt = \int_0^T \lim_{n \rightarrow +\infty} \langle \mathcal{A}u_n - \mathcal{A}u, \Phi \rangle_{\mathcal{V}'} dt,$$

grâce de lipschitzien de l'opérateur  $\mathcal{A}$  ( alors continue), il vient

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^T \langle \mathcal{A}u_n - \mathcal{A}u, \Phi \rangle_{\mathcal{V}'} dt = \int_0^T \langle \mathcal{A}u - \mathcal{A}u, \Phi \rangle_{\mathcal{V}'} dt = 0,$$

donc  $\mathcal{A}u_n \rightharpoonup \mathcal{A}u$  faiblement dans  $L^2(0, T; \mathcal{V}')$ .

Par la monotonie de l'opérateur  $\mathcal{A}$ , il s'ensuit que

$$\langle \mathcal{A}u_n, u_n - u \rangle_{\mathcal{V}' \times \mathcal{V}} \geq \langle \mathcal{A}u, u_n - u \rangle_{\mathcal{V}' \times \mathcal{V}} \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

alors

$$\langle \mathcal{A}u_n, u_n \rangle_{\mathcal{V}' \times \mathcal{V}} \geq \langle \mathcal{A}u, u_n - u \rangle_{\mathcal{V}' \times \mathcal{V}} + \langle \mathcal{A}u_n, u \rangle_{\mathcal{V}' \times \mathcal{V}} \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

en utilisant les limites

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle \mathcal{A}u, u_n - u \rangle_{\mathcal{V}' \times \mathcal{V}} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \mathcal{A}u_n, u \rangle_{\mathcal{V}' \times \mathcal{V}} = \langle \mathcal{A}u, u \rangle_{\mathcal{V}' \times \mathcal{V}},$$

et, d'après l'inégalité

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \langle \mathcal{A}u_n, u_n \rangle_{\mathcal{V}' \times \mathcal{V}} ds \geq \int_0^T \liminf_{n \rightarrow \infty} \langle \mathcal{A}u_n, u_n \rangle_{\mathcal{V}' \times \mathcal{V}} ds,$$

d'après les étapes précédentes, nous trouvons

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \langle \mathcal{A}u_n, u_n \rangle_{\mathcal{V}' \times \mathcal{V}} ds \geq \int_0^T \langle \mathcal{A}u, u \rangle_{\mathcal{V}' \times \mathcal{V}} ds.$$

Nous concluons que l'opérateur  $\mathcal{A}$  satisfait le condition (c).

**Lemme 2.3.2.** *Suppose que  $H(12)$ , la fonctionnelle  $J$  défini par (2.23) satisfait :*

(a)-  $J : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction convexe et semi-continu inférieurement (s.c.i),

(b)- il existe une suite de  $\mathcal{C}^1$ , des fonctions convexes  $(J_k) : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ , tels que :

(i)-  $\exists C_g \geq 0$  telle que  $\|J'_k(u)\|_{\mathcal{V}'} \leq C_g, \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall u \in \mathcal{V}$ ,

(ii)-  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_0^T J_k(u(s)) ds = \int_0^T J(u(s)) ds, \quad \forall u \in L^2(0, T; \mathcal{V})$ ,

(iii)- il existe une suite  $(u_k)$  et  $u$  dans  $L^2(0, T; \mathcal{V})$  telle que  $u_k \rightharpoonup u$  faiblement dans  $L^2(0, T; \mathcal{V})$ , puis  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \inf \int_0^T J_k(u_k(s)) ds \geq \int_0^T J(u(s)) ds$ ,

où  $J'_k(u)$  désigne la dérivée au sens de Fréchet de  $J_k$  en  $u$ .

### Démonstration.

(a) Pour tout  $u, v \in \mathcal{V}$ ,  $\lambda \in [0, 1]$ , et d'après la définition ( 2.23), nous obtenons

$$\begin{aligned} J(\lambda u + (1 - \lambda)v) &= \int_{\Gamma_3} g |(\lambda u_\tau^1 + (1 - \lambda)v_\tau^1) - (\lambda u_\tau^2 + (1 - \lambda)v_\tau^2)| da \\ &\leq \lambda \int_{\Gamma_3} g |u_\tau^1 - u_\tau^2| da + (1 - \lambda) \int_{\Gamma_3} g |v_\tau^1 - v_\tau^2| da \\ &\leq \lambda J(u) + (1 - \lambda)J(v), \end{aligned}$$

alors  $J$  convexe.

Maintenant, pour toute suite  $(u_n)_n$  convergeant vers  $u$  dans  $\mathcal{V}$ , on a

$$\inf_{p \geq n} \int_{\Gamma_3} g |u_{p\tau}^1 - u_{p\tau}^2| da \geq \int_{\Gamma_3} \inf_{p \geq n} g |u_{p\tau}^1 - u_{p\tau}^2| da,$$

et, en appliquant Théorème de Lebesgue, il vient

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} J(u_n) \geq J(u).$$

Donc  $J$  semi-continu inférieurement.

(b) Pour approcher la fonction  $J$ , nous utilisons la suite des fonctionnelles  $J_k : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :

$$J_k(u) = \int_{\Gamma_3} g \sqrt{|u_\tau^1 - u_\tau^2|^2 + k^{-1}} da, \quad \forall u = (u^1, u^2) \in \mathcal{V}, \quad \forall k \in \mathbb{N}^*.$$

Nous vérifions que la dérivée au sens de Fréchet de  $J_k$  at  $u = (u^1, u^2)$  est donnée par

$$\langle J'_k(u), h \rangle_{\mathcal{V}' \times \mathcal{V}} = \int_{\Gamma_3} g \frac{(u_\tau^1 - u_\tau^2, h_\tau^1 - h_\tau^2)_{\mathbb{R}^d}}{\sqrt{|u_\tau^1 - u_\tau^2|^2 + k^{-1}}} da, \quad \forall h = (h^1, h^2) \in \mathcal{V}. \quad (2.71)$$

Nous constatons que  $J_k$  est continûment différentiable. Pour tous  $a \geq 0, b \geq 0$  telle que  $a + b = 1$ , et pour tous  $x, y \in \mathbb{R}, k \geq 1$ , devient

$$2xy \leq x^2 + y^2,$$

on a

$$2xyk^{-1} \leq x^2k^{-1} + y^2k^{-1},$$

donc

$$x^2y^2 + (k^{-1})^2 + 2xyk^{-1} \leq x^2y^2 + (k^{-1})^2 + x^2k^{-1} + y^2k^{-1},$$

on obtient

$$(xy + k^{-1})^2 \leq (x^2 + k^{-1})(y^2 + k^{-1}),$$

alors

$$xy + k^{-1} \leq \sqrt{x^2 + k^{-1}}\sqrt{y^2 + k^{-1}}. \quad (2.72)$$

D'autre part

$$\begin{aligned} (a\sqrt{x^2 + k^{-1}} + b\sqrt{y^2 + k^{-1}})^2 &= a^2(x^2 + k^{-1}) + b^2(y^2 + k^{-1}) + 2ab\sqrt{x^2 + k^{-1}}\sqrt{y^2 + k^{-1}} \\ &\geq a^2x^2 + (a^2 + b^2)k^{-1} + b^2y^2 + 2ab\sqrt{x^2 + k^{-1}}\sqrt{y^2 + k^{-1}}, \end{aligned}$$

et de (2.72), il vient

$$\begin{aligned} (a\sqrt{x^2 + k^{-1}} + b\sqrt{y^2 + k^{-1}})^2 &\geq a^2x^2 + (a^2 + b^2)k^{-1} + b^2y^2 + 2abxy + 2abk^{-1} \\ &\geq (ax + by)^2 + k^{-1}, \end{aligned}$$

donc

$$\sqrt{(ax + by)^2 + k^{-1}} \leq a\sqrt{x^2 + k^{-1}} + b\sqrt{y^2 + k^{-1}}.$$

Alors  $J_k$  est convexe pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ .

On prend (2.71), et pour  $h \in \mathcal{V}$  telle que  $\|h\|_{\mathcal{V}} \leq 1$ , on a

$$\begin{aligned} |\langle J'_k(u), h \rangle|_{\mathcal{V}' \times \mathcal{V}} &\leq \|g\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \int_{\Gamma_3} \frac{|u_\tau^1 - u_\tau^2| |h_\tau^1 - h_\tau^2|}{\sqrt{|u_\tau^1 - u_\tau^2|^2 + k^{-1}}} da \\ &\leq \|g\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \int_{\Gamma_3} |h_\tau^1 - h_\tau^2| da. \end{aligned}$$

Moyennant de Théorème du trâce avec  $\|h\|_{\mathcal{V}} \leq 1$ , il s'ensuit qu'il existe  $c > 0$  telle que

$$\forall u \in \mathcal{V}, \quad \|J'_k(u)\|_{\mathcal{V}'} \leq c\|g\|_{L^\infty(\Gamma_3)},$$

donc (i) est satisfaite.

D'après la définition de  $J_k$ , on a

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} J_k(u) = J(u),$$

et comme  $J_k$  est continue sur  $\mathcal{V}$ , en appliquant le théorème de Lebesgue, on obtient

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_0^T J_k(u(s)) ds = \int_0^T \lim_{k \rightarrow +\infty} J_k(u(s)) ds = \int_0^T J(u(s)) ds,$$

Alors la propriété (ii) satisfaite.

Par définition  $J_k$  et  $J$ , on a

$$J_k(u_k) \geq J(u_k),$$

nous utilisons la continuité de  $J$ , il vient

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} J(u_k) = J(u),$$

donc

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \inf J_k(u_k) \geq J(u).$$

Nous notons que

$$\inf \int_0^T J_k(u_k(s)) ds \geq \int_0^T \inf J_k(u_k(s)) ds.$$

D'ailleurs, avec Théorème de Lebesgue, on a

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \inf \int_0^T J_k(u_k(s)) ds \geq \int_0^T \lim_{k \rightarrow +\infty} \inf J_k(u_k(s)) ds \geq \int_0^T J(u(s)) ds.$$

Enfin, (iii) est satisfaite.

**Lemme 2.3.3.** *Problème  $\mathcal{PV}_{v_\eta}$  a une solution unique  $v_\eta$  que satisfait :*

$$v_\eta \in \mathcal{C}(0, T; \mathbb{H}) \cap L^2(0, T; \mathcal{V}) \cap W^{1,2}(0, T; \mathcal{V}').$$

**Démonstration.** L'opérateur  $A$  est hemicontinu et fortement monotone d'après lemme 2.3.1(a), et d'après (2.71),  $J'_k$  monotone et hemicontinu, alors l'opérateur  $\mathcal{A} + J'_k$  hemicontinu et fortement monotone, ensuite il est monotone et la condition (1.44) est vérifiée. Aussi d'après lemme 2.3.1(a) et lemme 2.3.2 (i), la condition (1.45) est vérifiée. En utilisant le théorème 1.2.17, où  $F_\eta \in L^2(0, T; \mathcal{V}')$  et  $v_0 \in \mathbb{H}$ , il résulte

$$\forall k \in \mathbb{N}, \exists ! v_\eta^k \in L^2(0, T; \mathcal{V}) \cap C(0, T; \mathbb{H}) \cap W^{1,2}(0, T; \mathcal{V}'),$$

tels que

$$\begin{cases} \dot{v}_\eta^k(t) + \mathcal{A}v_\eta^k(t) + J'_k(v_\eta^k(t)) = F_\eta(t) \text{ dans } \mathcal{V}', & \text{p.p. } t \in (0, T), \\ v_\eta^k(0) = v_0. \end{cases} \quad (2.73)$$

On utilise inégalité (2.71), il vient

$$\begin{aligned} \langle J'_k(v_\eta^k(t)), w - v_\eta^k(t) \rangle_{\mathcal{V}' \times \mathcal{V}} &= \int_{\Gamma_3} g \frac{(v_{\eta\tau}^{k1}(t) - v_{\eta\tau}^{k2}(t), w_\tau^1 - w_\tau^2)_{\mathbb{R}^d}}{\sqrt{|v_{\eta\tau}^{k1}(t) - v_{\eta\tau}^{k2}(t)|^2 + k^{-1}}} da \\ &\quad - \int_{\Gamma_3} g \frac{(v_{\eta\tau}^{k1}(t) - v_{\eta\tau}^{k2}(t), v_{\eta\tau}^{k1}(t) - v_{\eta\tau}^{k2}(t))_{\mathbb{R}^d}}{\sqrt{|v_{\eta\tau}^{k1}(t) - v_{\eta\tau}^{k2}(t)|^2 + k^{-1}}} da, \end{aligned}$$

et grâce l'inégalité du Cauchy Shwartz, on obtient

$$\begin{aligned} \langle J'_k(v_\eta^k(t)), w - v_\eta^k(t) \rangle_{\mathcal{V}' \times \mathcal{V}} &= \int_{\Gamma_3} g \frac{|v_{\eta\tau}^{k1}(t) - v_{\eta\tau}^{k2}(t)| |w_\tau^1 - w_\tau^2| + k^{-1}}{\sqrt{|v_{\eta\tau}^{k1}(t) - v_{\eta\tau}^{k2}(t)|^2 + k^{-1}}} da \\ &\quad - \int_{\Gamma_3} g \frac{|v_{\eta\tau}^{k1}(t) - v_{\eta\tau}^{k2}(t)|^2 + k^{-1}}{\sqrt{|v_{\eta\tau}^{k1}(t) - v_{\eta\tau}^{k2}(t)|^2 + k^{-1}}} da, \end{aligned}$$

et moyennant (2.72), il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \langle J'_k(v_\eta^k(t)), w - v_\eta^k(t) \rangle_{\mathcal{V}' \times \mathcal{V}} &\leq \int_{\Gamma_3} g \frac{\sqrt{|v_{\eta\tau}^{k1}(t) - v_{\eta\tau}^{k2}(t)|^2 + k^{-1}} \sqrt{|w_\tau^1 - w_\tau^2|^2 + k^{-1}}}{\sqrt{|v_{\eta\tau}^{k1}(t) - v_{\eta\tau}^{k2}(t)|^2 + k^{-1}}} da \\ &\quad - \int_{\Gamma_3} g \sqrt{|v_{\eta\tau}^{k1}(t) - v_{\eta\tau}^{k2}(t)|^2 + k^{-1}} da, \end{aligned}$$

et nous trouvons

$$\langle J'_k(v_\eta^k(t)), w - v_\eta^k(t) \rangle_{\mathcal{V}' \times \mathcal{V}} \leq J_k(w) - J_k(v_\eta^k(t)) \quad \forall w \in \mathcal{V},$$

ce qui implique, d'après (2.73) que

$$\begin{aligned} \langle \dot{v}_\eta^k(t), w - v_\eta^k(t) \rangle_{\mathcal{V}' \times \mathcal{V}} + \langle \mathcal{A}v_\eta^k(t), w - v_\eta^k(t) \rangle_{\mathcal{V}' \times \mathcal{V}} + J_k(w) - J_k(v_\eta^k(t)) \\ \geq \langle F_\eta(t), w - v_\eta^k(t) \rangle_{\mathcal{V}' \times \mathcal{V}}, \quad \forall w \in \mathcal{V}, \text{ p.p. } t \in (0, T). \end{aligned} \quad (2.74)$$

On applique aussi (2.73), il résulte

$$\begin{aligned} \langle \dot{v}_\eta^k(t), v_\eta^k(t) \rangle_{\mathcal{V}' \times \mathcal{V}} + \langle \mathcal{A}v_\eta^k(t), v_\eta^k(t) \rangle_{\mathcal{V}' \times \mathcal{V}} + \langle J'_k(v_\eta^k(t)), v_\eta^k(t) \rangle_{\mathcal{V}' \times \mathcal{V}} \\ = \langle F_\eta(t), v_\eta^k(t) \rangle_{\mathcal{V}' \times \mathcal{V}}, \quad \text{p.p. } t \in (0, T). \end{aligned} \quad (2.75)$$

En utilisant H(1), la monotonie de  $J'_k$  et le théorème 1.2.12, pour déduire que

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|v_\eta^k(t)\|_{\mathbb{H}}^2 + m_A \|v_\eta^k(t)\|_{\mathcal{V}}^2 + \|v_\eta^k(t)\|_{\mathcal{V}}^2 \leq \langle F_\eta(t), v_\eta^k(t) \rangle_{\mathcal{V}' \times \mathcal{V}}, \quad (2.76)$$

où  $m_A = \min(m_{A^1}, m_{A^2})$ . On applique l'inégalité  $\alpha\beta \leq \alpha^2 + \beta^2$ ,  $\alpha \geq 0, \beta \geq 0$ , pour obtenir

$$\left| \langle F_\eta(t), v_\eta^k(t) \rangle_{\mathcal{V}' \times \mathcal{V}} \right| \leq \frac{\|F_\eta(t)\|_{\mathcal{V}'}}{m_A + 2} + (m_A + 2) \|v_\eta^k(t)\|_{\mathcal{V}}^2. \quad (2.77)$$

On intègre l'égalité (2.76) sur  $[0, t]$  et d'après (2.77), il en résulte que

$$\|v_\eta^k(t)\|_{\mathbb{H}}^2 \leq a + b \int_0^t \|v_\eta^k(t)\|_{\mathcal{V}}^2 dt$$

où  $a \geq 0, b \geq 0$ . Alors d'après le lemme de Gronwall on obtien

$$\exists C > 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall t \in [0, T], \quad \|v_\eta^k(t)\|_{\mathbb{H}} \leq C, \quad \int_0^T \|v_\eta^k(t)\|_{\mathcal{V}}^2 dt \leq C.$$

D'après (2.73) et lemme 2.3.2(b.i), nous avons

$$\exists C > 0, \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad \int_0^T \|\dot{v}_\eta^k(t)\|_{\mathcal{V}'}^2 dt \leq C.$$

Nous pouvons donc extraire une sous-suite notée encore  $(v_\eta^k)$  pour trouver que

$$\begin{cases} v_\eta^k \rightharpoonup v_\eta \text{ faiblement dans } L^2(0, T; \mathcal{V}) \text{ et faiblement étoile dans } L^\infty(0, T; \mathbb{H}), \\ \dot{v}_\eta^k \rightharpoonup \dot{v}_\eta \text{ faiblement étoile dans } L^2(0, T; \mathcal{V}'). \end{cases} \quad (2.78)$$

alors  $v_\eta^k \rightarrow v_\eta$  faiblement étoile dans  $H^1(0, T; \mathcal{V})$ . Il s'ensuit que

$$v_\eta \in C([0, T]; \mathbb{H}) \text{ et } v_\eta^k(t) \rightharpoonup v_\eta(t) \text{ faiblement étoile dans } \mathbb{H}, \forall t \in [0, T]. \quad (2.79)$$

On intègre (2.74), nous avons  $\forall u \in L^2(0, T; \mathcal{V})$ ,

$$\begin{aligned} & \int_0^T \langle \dot{v}_\eta^k(t), w \rangle_{\mathcal{V}' \times \mathcal{V}} dt + \int_0^T \langle \mathcal{A}v_\eta^k(t), w \rangle_{\mathcal{V}' \times \mathcal{V}} dt + \int_0^T J_k(w) dt \\ & \geq \int_0^T \langle \dot{v}_\eta^k(t), v_\eta^k(t) \rangle_{\mathcal{V}' \times \mathcal{V}} dt + \int_0^T \langle \mathcal{A}v_\eta^k(t), v_\eta^k(t) \rangle_{\mathcal{V}' \times \mathcal{V}} dt \\ & + \int_0^T J_k(v_\eta^k(t)) dt + \int_0^T \langle F_\eta(t), w - v_\eta^k(t) \rangle_{\mathcal{V}' \times \mathcal{V}} dt, \end{aligned}$$

et nous trouvons

$$\begin{aligned} & \int_0^T \langle \dot{v}_\eta^k(t), w \rangle_{\mathcal{V}' \times \mathcal{V}} dt + \int_0^T \langle \mathcal{A}v_\eta^k(t), w \rangle_{\mathcal{V}' \times \mathcal{V}} dt + \int_0^T J_k(w) \geq \frac{1}{2} \|v_\eta^k(T)\|_{\mathbb{H}}^2 \\ & - \frac{1}{2} \|v_\eta^k(0)\|_{\mathbb{H}}^2 + \int_0^T \langle \mathcal{A}v_\eta^k(t), v_\eta^k(t) \rangle_{\mathcal{V}' \times \mathcal{V}} dt + \int_0^T J_k(v_\eta^k(t)) dt + \int_0^T \langle F_\eta(t), w - v_\eta^k(t) \rangle_{\mathcal{V}' \times \mathcal{V}} dt, \end{aligned}$$

Nous utilisons Lemme 2.3.1 (c), Lemme 2.3.2 (ii)-(iii), (2.78), (2.79) et la semi-continuité inférieurement faiblement, on obtient que  $\forall u \in L^2(0, T; \mathcal{V})$ ,

$$\begin{aligned} & \int_0^T \langle \dot{v}_\eta, w - v_\eta \rangle_{\mathcal{V}' \times \mathcal{V}} dt + \int_0^T \langle \mathcal{A}v_\eta, w - v_\eta \rangle_{\mathcal{V}' \times \mathcal{V}} dt + \int_0^T (J(w) - J(v_\eta)) dt \\ & \geq \int_0^T \langle F_\eta, w - v_\eta \rangle_{\mathcal{V}' \times \mathcal{V}} dt. \end{aligned}$$

L'inégalité précédente implique que

$$\begin{aligned} & \langle \dot{v}_\eta(t), w - v_\eta(t) \rangle_{\mathcal{V}' \times \mathcal{V}} + \langle \mathcal{A}v_\eta(t), w - v_\eta(t) \rangle_{\mathcal{V}' \times \mathcal{V}} + J(w) - J(v_\eta(t)) \\ & \geq \langle F_\eta(t), w - v_\eta(t) \rangle_{\mathcal{V}' \times \mathcal{V}} \quad \forall w \in \mathcal{V}, \quad \text{p.p. } t \in (0, T). \end{aligned} \quad (2.80)$$

Nous concluons que  $\mathcal{PV}_{v_\eta}$  a au moins une solution  $v_\eta \in C(0, T; \mathbb{H}) \cap L^2(0, T; \mathcal{V}) \cap W^{1,2}(0, T; \mathcal{V}')$ .

**Pour l'unicité**, soient  $v_{1\eta}, v_{2\eta}$  deux solutions de  $\mathcal{PV}_{v_\eta}$ . Nous utilisons (2.70) à obtenir pour p.p.  $t \in (0, T)$

$$\langle \dot{v}_{2\eta}(t) - \dot{v}_{1\eta}(t), v_{2\eta}(t) - v_{1\eta}(t) \rangle_{\mathcal{V}' \times \mathcal{V}} + \langle \mathcal{A}v_{2\eta}(t) - \mathcal{A}v_{1\eta}(t), v_{2\eta}(t) - v_{1\eta}(t) \rangle_{\mathcal{V}' \times \mathcal{V}} \leq 0$$

Intégrons l'inégalité précédente sur  $[0, t]$ , en utilisant Lemme 2.3.1 (a), nous trouvons

$$\frac{1}{2} \|v_{2\eta}(t) - v_{1\eta}(t)\|_{\mathbb{H}}^2 + m_A \int_0^t \|v_{2\eta}(s) - v_{1\eta}(s)\|_{\mathcal{V}}^2 ds \leq 0, \forall t \in [0, T],$$

ce qui implique  $v_{1\eta} = v_{2\eta}$ .

Maintenant, on utilise  $v_\eta = (v_\eta^1, v_\eta^2)$  la solution du problème  $\mathcal{PV}_{v_\eta}$  obtenue dans le Lemme 2.3.3, on définit les fonctions  $u_\eta : [0, T] \rightarrow \mathcal{V}$ , par :

$$u_\eta^\kappa = \int_0^t v_\eta^\kappa(s) ds + u_0^\kappa, \quad \forall t \in [0, T], \quad \kappa = 1, 2. \quad (2.81)$$

Nous avons le résultat suivant.

**Lemme 2.3.4.** *La problème  $\mathcal{PV}_{u_\eta}$  possède une solution unique qui satisfaisant la régularité exprimée dans (2.61).*

**Deuxième étape :** Soit  $\pi = (\pi^1, \pi^2) \in L^2(0, T; E_0)$ , et considérons le problème auxiliaire :

**Problème  $\mathcal{PV}_{\tau_\pi}$ .** Trouver le champ de température  $\tau_\pi = (\tau_\pi^1, \tau_\pi^2) : [0, T] \rightarrow E_0$ , tel que :

$$\sum_{\kappa=1}^2 \langle \dot{\tau}_\pi^\kappa(t) - \pi^\kappa(t) - \chi^\kappa(t), \delta^\kappa \rangle_{E_0^\kappa} + a_0(\tau_\pi(t), \delta) = 0 \quad \forall \delta \in E_0, \quad (2.82)$$

$$\tau_\pi(0) = (\tau_0^1, \tau_0^2). \quad (2.83)$$

Nous avons le résultat suivant pour le problème.

**Lemme 2.3.5.** *Il existe une solution unique  $\tau_\pi$  au problème auxiliaire  $\mathcal{PV}_{\tau_\pi}$  vérifiant (2.63).*

**Démonstration.** Nous appliquons l'inégalité de Poincaré-Friedrichs, on peut trouver une constante  $c_0 > 0$  telle que

$$\int_{\Omega^\kappa} |\nabla \lambda|^2 dx + \frac{\lambda_0^\kappa}{\mathcal{K}_0^\kappa} \int_{\Gamma^\kappa} |\lambda|^2 da \geq c_0 \int_{\Omega^\kappa} |\lambda|^2 dx, \quad \forall \lambda \in E_1^\kappa, \quad \kappa = 1, 2,$$

on obtient

$$a_0(\lambda, \lambda) \geq c_1 \|\lambda\|_{E_1}^2, \quad \forall \lambda \in E_1,$$

où  $c_1 = \min(1, c_0, \mathcal{K}_0^1, \mathcal{K}_0^2)/2$ , ce qui implique que  $a_0$  is  $E_1$ -elliptique. Par conséquent, en se basant sur les classiques arguments d'analyse fonctionnelle concernant les équations paraboliques (voir Théorème 1.2.16), l'équation variationnelle (2.82) a une unique solution  $\tau_\pi$  satisfaisant  $\tau_\pi(0) = \tau_0$  et la régularité (2.63).

**Troisième étape :** Soit  $(\eta, \pi, \mu) \in L^2(0, T, \mathcal{V} \times E_0 \times \mathbb{Y})$ , et définissons  $\beta_\mu \in W^{1,2}(0, T, \mathbb{Y})$  par

$$\beta_\mu^\kappa(t) = \beta_0^\kappa + \int_0^t \mu^\kappa(s) ds, \quad \kappa = 1, 2, \quad (2.84)$$

on utilise  $u_\eta$  obtenu dans le Lemme 2.3.4 et  $\tau_\pi$  obtenu dans le Lemme 2.3.5 construire le problème variationnel auxiliaire suivant :

**Problème  $\mathcal{PV}_{\psi_{\eta\pi\mu}}$ .** Trouver les champs des potentiels électriques  $\psi_{\eta\pi\mu} = (\psi_{\eta\pi\mu}^1, \psi_{\eta\pi\mu}^2) : [0, T] \rightarrow \mathbb{W}$  tel que :

$$\begin{aligned} & \sum_{\kappa=1}^2 \langle \mathcal{R}^\kappa \nabla \psi_{\eta\pi\mu}^\kappa(t), \nabla \phi^\kappa \rangle_{\mathbb{H}^\kappa} - \sum_{\kappa=1}^2 \langle \mathcal{E}^\kappa \varepsilon(u_\eta^\kappa(t)) + \mathcal{G}^\kappa(\beta_\mu^\kappa(t), \tau_\pi^\kappa(t)), \nabla \phi^\kappa \rangle_{\mathbb{H}^\kappa} \\ & = \langle Q(t), \phi \rangle_{\mathbb{W}} \quad \forall \phi \in \mathbb{W}. \end{aligned} \quad (2.85)$$

Nous avons les résultats suivants.

**Lemme 2.3.6.** *Le Problème  $\mathcal{PV}_{\psi_{\eta\pi\mu}}$  possède une solution unique qui satisfait la régularité (2.62).*

**Démonstration.** Nous considérons l'application  $b(., .) : \mathbb{W} \times \mathbb{W} \rightarrow \mathbb{R}$  défini par :

$$b(\psi, \phi) = \sum_{\kappa=1}^2 \langle \mathcal{R}^\kappa \nabla \psi^\kappa, \nabla \phi^\kappa \rangle_{\mathbb{H}^\kappa}, \quad \forall \psi, \phi \in \mathbb{W}. \quad (2.86)$$

Il s'ensuit d'après les propriétés H(5) que  $b(., .)$  est continue, symétrique et coercitive sur  $\mathbb{W}$ . En outre, nous appliquons (2.20) et le Théorème de représentation de Riesz, pour définir la fonction  $Q_{\eta\pi\mu} : [0, T] \rightarrow \mathbb{W}$  par

$$\begin{aligned} \langle Q_{\eta\pi\mu}(t), \phi \rangle_{\mathbb{W}} & = \langle Q(t), \phi \rangle_{\mathbb{W}} + \sum_{\kappa=1}^2 \langle \mathcal{E}^\kappa \varepsilon(u_\eta^\kappa(t)) + \mathcal{G}^\kappa(\beta_\mu^\kappa(t), \tau_\pi^\kappa(t)), \nabla \phi^\kappa \rangle_{\mathbb{H}^\kappa} \\ & \quad \forall \phi \in \mathbb{W}, t \in (0, T). \end{aligned}$$

Nous appliquons le Théorème de Lax-Milgram pour en déduire qu'il existe un élément unique  $\psi_{\eta\pi\mu}(t) = (\psi_{\eta\pi\mu}^1(t), \psi_{\eta\pi\mu}^2(t)) \in \mathbb{W}$  tel que

$$b(\psi_{\eta\pi\mu}(t), \phi) = \langle Q_{\eta\pi\mu}(t), \phi \rangle_{\mathbb{W}} \quad \forall \phi \in \mathbb{W}. \quad (2.87)$$

Nous concluons que  $\psi_{\eta\pi\mu}$  est une solution du Problème  $\mathcal{PV}_{\psi_{\eta\pi\mu}}$ .

Maintenant, pour  $t_1, t_2 \in [0, T]$ , ça suit de (2.85) que

$$\begin{aligned} \|\psi_{\eta\pi\mu}(t_1) - \psi_{\eta\pi\mu}(t_2)\|_{\mathbb{W}} & \leq C (\|u_\eta(t_1) - u_\eta(t_2)\|_{\mathcal{V}} + \|\beta_\mu(t_1) - \beta_\mu(t_2)\|_{\mathbb{Y}} \\ & \quad + \|\tau_\pi(t_1) - \tau_\pi(t_2)\|_{E_0} + \|Q(t_1) - Q(t_2)\|_{\mathbb{W}}). \end{aligned} \quad (2.88)$$

De (2.24), (2.61), (2.63), et  $\beta_\mu \in W^{1,2}(0, T; \mathbb{Y})$ , nous déduisons de l'inégalité (2.88) que  $\psi_{\eta\pi\mu} \in \mathcal{C}(0, T; \mathbb{W})$ .  $\blacksquare$

**Quatrième étape :** Soit  $\theta = (\theta^1, \theta^2) \in L^2(0, T; E_0)$ , nous considérons le problème intermédiaire suivant :

**Problème  $\mathcal{PV}_{\alpha_\theta}$ .** Trouver le champ d'endommagement  $\alpha_\theta = (\alpha_\theta^1, \alpha_\theta^2) : [0, T] \rightarrow E_0$  tel que :

$$\alpha_\theta(t) \in \mathcal{Z}, \quad \sum_{\kappa=1}^2 \langle \dot{\alpha}_\theta^\kappa(t) - \theta^\kappa, \xi^\kappa - \alpha_\theta^\kappa \rangle_{L^2(\omega)} + a_1(\alpha_\theta(t), \xi - \alpha_\theta(t)) \geq 0 \quad \forall \xi \in \mathcal{Z}, \quad (2.89)$$

$$\alpha_\theta(0) = \alpha_0,$$

où  $\mathcal{Z} = \mathcal{Z}^1 \times \mathcal{Z}^2$ .

Le résultat abstrait suivant pour les inégalités variationnelles paraboliques.

**Lemme 2.3.7.** *Il existe une solution unique  $\alpha_\theta$  du problème  $\mathcal{PV}_{\alpha_\theta}$  et satisfait (2.64).*

**Démonstration** L'application d'inclusion de  $(E_1, \|\cdot\|_{E_1})$  dans  $(E_0, \|\cdot\|_{E_0})$  est continue et à image dense. Notant par  $E_1'$  l'espace dual de  $E_1$  et identifiant le dual de  $E_1$  avec lui-même, nous pouvons écrire le triplet de Gelfand

$$E_1 \subset E_0 = E_0' \subset E_1'.$$

Nous utilisons la notation  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{E_1' \times E_1}$  pour désigner le produit de dualité entre  $E_1'$  et  $E_1$ , on trouve que

$$\langle \alpha, \varphi \rangle_{E_1' \times E_1} = \langle \alpha, \varphi \rangle_{E_0} \quad \forall \alpha \in E_0, \varphi \in E_1.$$

On sait que l'ensemble des endommagements admissibles  $\mathcal{Z}$  est un sous-ensemble non vide, fermé et convexe dans  $E_1$ . Ainsi, le champ d'endommagement initial  $\alpha_0 \in \mathcal{Z}$ . Maintenant, on utilise la définition (2.22) de la forme bilinéaire  $a_1(\cdot, \cdot)$ , pour tout  $\delta, \phi \in E_1$ , on a

$$a_1(\delta, \phi) = a_1(\phi, \delta),$$

et

$$\begin{aligned} |a_1(\delta, \phi)| &\leq \max\{\mathcal{K}_1^1, \mathcal{K}_1^2\} \|\nabla \delta\|_{\mathbb{H}} \|\nabla \phi\|_{\mathbb{H}} \\ &\leq c \|\delta\|_{\mathbb{H}^1} \|\phi\|_{\mathbb{H}^1}, \end{aligned}$$

donc,  $a_1(\cdot, \cdot)$  est continue et symétrique. Ainsi, pour tout  $\delta \in E_1$ , nous avons

$$a_1(\delta, \delta) \geq k \|\nabla \delta\|_{\mathbb{H}}^2,$$

où  $k = \min\{\mathcal{K}_1^1, \mathcal{K}_1^2\}$ , alors

$$a_1(\delta, \delta) + k \|\delta\|_{E_0}^2 \geq k (\|\nabla\delta\|_{\mathbb{H}}^2 + \|\delta\|_{E_0}^2),$$

et d'où

$$a(\delta, \delta) + k \|\delta\|_{E_0}^2 \geq k \|\delta\|_{E_1}^2.$$

Nous remarquons que toutes les conditions du Théorème 1.2.18 sont vérifiées, implique que (2.89) a une solution unique  $\alpha_\theta$  ayant la régularité (2.64).

**Cinquième étape :** en conséquence de ces résultats et en utilisant les propriétés de l'opérateur  $\mathcal{B}^\kappa$ , l'opérateur  $\mathcal{E}^\kappa$ , la fonctionnelle  $\mathcal{F}$  et les fonctions  $\Psi^\kappa$ ,  $\Theta^\kappa$  et  $S^\kappa$ , pour  $t \in [0, T]$ , on considère l'opérateur

$$\Sigma : L^2(0, T; \mathcal{V}' \times \mathbb{Y} \times E_0 \times E_0) \rightarrow L^2(0, T; \mathcal{V}' \times \mathbb{Y} \times E_0 \times E_0)$$

tel que

$$\Sigma(\eta, \mu, \pi, \theta)(t) = (\Sigma_1(\eta, \mu, \pi, \theta)(t), \Sigma_2(\eta, \mu, \pi, \theta)(t), \Sigma_3(\eta, \mu, \pi, \theta)(t), \Sigma_4(\eta, \mu, \pi, \theta)(t)), \quad (2.90)$$

défini par les équations

$$\begin{aligned} \langle \Sigma_1(\eta, \mu, \pi, \theta)(t), v \rangle_{\mathcal{V}' \times \mathcal{V}} &= \sum_{\kappa=1}^2 \langle \mathcal{B}^\kappa(\varepsilon(u_\eta^\kappa(t)), \alpha_\theta^\kappa(t)) + (\mathcal{E}^\kappa)^* \nabla \psi_{\eta\pi\mu}^\kappa(t), \varepsilon(v^\kappa) \rangle_{\mathcal{H}^\kappa} \\ &+ \sum_{\kappa=1}^2 \langle \mathcal{F}^\kappa(\beta_\mu^\kappa(t), \tau_\pi^\kappa(t)), \varepsilon(v^\kappa) \rangle_{\mathcal{H}^\kappa} \quad \forall v \in \mathcal{V}, \end{aligned} \quad (2.91)$$

$$\Sigma_2(\eta, \mu, \pi, \theta)(t) = (\Theta^1(\varepsilon(u_\eta^1(t)), \alpha_\theta^1(t), \beta_\mu^1(t), \tau_\pi^1(t)), \Theta^2(\varepsilon(u_\eta^2(t)), \alpha_\theta^2(t), \beta_\mu^2(t), \tau_\pi^2(t))), \quad (2.92)$$

$$\Sigma_3(\eta, \mu, \pi, \theta)(t) = (\Psi^1(\varepsilon(u_\eta^1(t)), \alpha_\theta^1(t), \beta_\mu^1(t), \tau_\pi^1(t)), \Psi^2(\varepsilon(u_\eta^2(t)), \alpha_\theta^2(t), \beta_\mu^2(t), \tau_\pi^2(t))), \quad (2.93)$$

$$\Sigma_4(\eta, \mu, \pi, \theta)(t) = (S^1(\varepsilon(u_\eta^1(t)), \alpha_\theta^1(t)), S^2(\varepsilon(u_\eta^2(t)), \alpha_\theta^2(t))). \quad (2.94)$$

Ici, pour tout  $(\eta, \mu, \pi, \theta) \in L^2(0, T; \mathcal{V}' \times \mathbb{Y} \times E_0 \times E_0)$ , nous utilisons  $u_\eta, \tau_\pi, \alpha_\theta, \beta_\mu$  et  $\psi_{\eta\pi\mu}$  représentent le champ de déplacement, le champ de température, le champ d'endommagement, le champ variable d'état interne et le potentiel électrique, obtenus dans les Lemmes 2.3.4, 2.3.5, 2.3.6, 2.3.7 et (2.84) respectivement, nous avons le résultat suivant.

**Lemme 2.3.8.** *L'opérateur  $\Sigma$  admet un point fixe  $(\eta^*, \mu^*, \pi^*, \theta^*) \in L^2(0, T; \mathcal{V}' \times \mathbb{Y} \times E_0 \times E_0)$ .*

**Démonstration.** Nous montrons que pour un nombre entier positif  $n$ , la puissance  $n$  ième de l'opérateur  $\Sigma$ , notée  $\Sigma^n$ , est une contraction dans  $L^2(0, T; \mathcal{V}' \times \mathbb{Y} \times E_0 \times E_0)$ .

Soient  $t \in [0, T]$  et  $(\eta_1, \mu_1, \pi_1, \theta_1), (\eta_2, \mu_2, \pi_2, \theta_2) \in L^2(0, T; \mathcal{V}' \times \mathbb{Y} \times E_0 \times E_0)$  et par simplicité, nous utilisons les notations  $u_{\eta_i} = u_i$ ,  $\dot{u}_{\eta_i} = v_i$ ,  $\psi_{\eta_i \pi_i \mu_i} = \psi_i$ ,  $\beta_{\mu_i} = \beta_i$ ,  $\tau_{\pi_i} = \tau_i$  et  $\alpha_{\theta_i} = \alpha_i$ , pour  $i = 1, 2$ .

Commençons par utiliser les hypothèses H(2), H(3) et H(6)-H(9), nous obtenons qu'il existe  $C > 0$ , tel que

$$\begin{aligned} & \|\Sigma_1(\eta_1, \mu_1, \pi_1, \theta_1)(t) - \Sigma_1(\eta_2, \mu_2, \pi_2, \theta_2)(t)\|_{\mathcal{V}' \times \mathbb{Y} \times E_0 \times E_0}^2 \\ & \leq \sum_{\kappa=1}^2 \|\mathcal{B}^\kappa(\varepsilon(u_1^\kappa(t)), \alpha_1^\kappa(t)) - \mathcal{B}^\kappa(\varepsilon(u_2^\kappa(t)), \alpha_2^\kappa(t))\|_{\mathcal{H}^\kappa}^2 \\ & + \sum_{\kappa=1}^2 \|(\mathcal{E}^\kappa)^* \nabla \psi_1^\kappa(t) - (\mathcal{E}^\kappa)^* \nabla \psi_2^\kappa(t)\|_{\mathcal{H}^\kappa}^2 \\ & + \sum_{\kappa=1}^2 \|\mathcal{F}^\kappa(\beta_1^\kappa(t), \tau_1^\kappa(t)) - \mathcal{F}^\kappa(\beta_2^\kappa(t), \tau_2^\kappa(t))\|_{\mathcal{H}^\kappa}^2, \end{aligned}$$

en utilisant H(2)(a), H(3)(a) et H(9)(a)

$$\begin{aligned} & \|\Sigma_1(\eta_1, \mu_1, \pi_1, \theta_1)(t) - \Sigma_1(\eta_2, \mu_2, \pi_2, \theta_2)(t)\|_{\mathcal{V}' \times \mathbb{Y} \times E_0 \times E_0}^2 \\ & \leq \sum_{\kappa=1}^2 2L_{\mathcal{B}^\kappa}^2 \left( \|u_1^\kappa(t) - u_2^\kappa(t)\|_{\mathcal{V}^\kappa}^2 + \|\alpha_1^\kappa(t) - \alpha_2^\kappa(t)\|_{L^2(\Omega^\kappa)}^2 \right) \\ & + \sum_{\kappa=1}^2 \|(\mathcal{E}^\kappa)^*\|_{L^\infty(\Omega^\kappa)}^2 \|\nabla \psi_1^\kappa(t) - \nabla \psi_2^\kappa(t)\|_{\mathbb{H}^\kappa}^2 \\ & + \sum_{\kappa=1}^2 2L_{\mathcal{F}^\kappa}^2 \left( \|\beta_1^\kappa(t) - \beta_2^\kappa(t)\|_{\mathbb{Y}^\kappa}^2 + \|\tau_1^\kappa(t) - \tau_2^\kappa(t)\|_{L^2(\Omega^\kappa)}^2 \right), \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} & \|\Sigma_1(\eta_1, \mu_1, \pi_1, \theta_1)(t) - \Sigma_1(\eta_2, \mu_2, \pi_2, \theta_2)(t)\|_{\mathcal{V}' \times \mathbb{Y} \times E_0 \times E_0}^2 \leq C \left( \|u_1(t) - u_2(t)\|_{\mathcal{V}}^2 + \right. \\ & \left. \|\alpha_1(t) - \alpha_2(t)\|_{E_0}^2 + \|\psi_1(t) - \psi_2(t)\|_{\mathbb{W}}^2 + \|\beta_1(t) - \beta_2(t)\|_{\mathbb{Y}}^2 + \|\tau_1(t) - \tau_2(t)\|_{E_0}^2 \right), \end{aligned} \quad (2.95)$$

où  $C = \max_{\kappa=1,2} (2L_{\mathcal{B}^\kappa}^2, \|(\mathcal{E}^\kappa)^*\|_{L^\infty(\Omega^\kappa)}^2, 2L_{\mathcal{F}^\kappa}^2)$ .

D'autre part, puisque  $u_i(t) = u_0 + \int_0^t v_i(s) ds$ , on sait que pour p.p.  $t \in [0, T]$

$$\|u_1(t) - u_2(t)\|_{\mathcal{V}} \leq \int_0^t \|v_1(s) - v_2(s)\|_{\mathcal{V}} ds. \quad (2.96)$$

De plus, on trouve en prenant la substitution  $\eta = \eta_1$ ,  $\eta = \eta_2$  dans (2.70) et en choisissant  $w = v_1$  puis  $w = v_2$ , on obtient

$$\langle \dot{v}_1 - \dot{v}_2, v_1 - v_2 \rangle_{\mathcal{V}' \times \mathcal{V}} + \sum_{\kappa=1}^2 \langle \mathcal{A}^\kappa \varepsilon(v_1^\kappa) - \mathcal{A}^\kappa \varepsilon(v_2^\kappa), \varepsilon(v_1^\kappa - v_2^\kappa) \rangle_{\mathcal{H}^\kappa} + \langle \eta_1 - \eta_2, v_1 - v_2 \rangle_{\mathcal{V}' \times \mathcal{V}} \leq 0.$$

On intègre cette égalité par rapport au temps, on utilise les conditions initiales  $v_1(0) = v_2(0) = (v_0^1, v_0^2)$  et les conditions H(1)(b, c) pour trouver

$$\min(m_{\mathcal{A}^1}, m_{\mathcal{A}^2}) \int_0^t \|v_1(s) - v_2(s)\|_{\mathcal{V}}^2 ds \leq - \int_0^t \langle \eta_1(s) - \eta_2(s), v_1(s) - v_2(s) \rangle_{\mathcal{V}' \times \mathcal{V}} ds,$$

pour tout  $t \in [0, T]$ . Alors, en utilisant l'inégalité  $2ab \leq \frac{a^2}{\epsilon} + \epsilon b^2$ , on obtient

$$\int_0^t \|v_1(s) - v_2(s)\|_{\mathcal{V}}^2 ds \leq C \int_0^t \|\eta_1(s) - \eta_2(s)\|_{\mathcal{V}'}^2 ds \quad \forall t \in [0, T], \quad (2.97)$$

on utilise (2.96), (2.97), pour obtenir

$$\|u_1(t) - u_2(t)\|_{\mathcal{V}}^2 \leq C \int_0^t \|\eta_1(s) - \eta_2(s)\|_{\mathcal{V}'}^2 ds. \quad (2.98)$$

Maintenant, la définition (2.84) donne

$$\|\beta_1(t) - \beta_2(t)\|_{\mathbb{Y}}^2 \leq C \int_0^t \|\mu_1(s) - \mu_2(s)\|_{\mathbb{Y}}^2 ds. \quad (2.99)$$

D'autre part, en substituant  $\pi = \pi_1$ ,  $\pi = \pi_2$  dans (2.82) et en soustrayant les deux équations obtenues, on en déduit en choisissant  $\delta = \tau_{\pi_1} - \tau_{\pi_2}$  comme fonction test

$$\begin{aligned} & \langle \dot{\tau}_1(t) - \dot{\tau}_2(t), \tau_1(t) - \tau_2(t) \rangle_{E_0} + a_0(\tau_1(t) - \tau_2(t), \tau_1(t) - \tau_2(t)) \\ &= \langle \pi_1(t) - \pi_2(t), \tau_1(t) - \tau_2(t) \rangle_{E_0} \quad \text{p.p. } t \in (0, T), \end{aligned}$$

nous intégrons cette égalité par rapport au temps, en utilisant les conditions initiales  $\tau_1(0) = \tau_2(0) = \tau_0$  et l'inégalité  $a_0(\tau_1 - \tau_2, \tau_1 - \tau_2) \geq 0$ , il vient

$$\frac{1}{2} \|\tau_1(t) - \tau_2(t)\|_{E_0}^2 \leq \int_0^t \langle \pi_1(s) - \pi_2(s), \tau_1(s) - \tau_2(s) \rangle_{E_0} ds,$$

alors, en utilisant l'inégalité  $2ab < a^2 + b^2$ , il vient

$$\|\tau_1(t) - \tau_2(t)\|_{E_0}^2 \leq \int_0^t \|\tau_1(s) - \tau_2(s)\|_{E_0}^2 ds + \int_0^t \|\pi_1(s) - \pi_2(s)\|_{E_0}^2 ds,$$

moyennant une version de Lemme 1.2.2 du Gronwall, il s'ensuit que

$$\|\tau_1(t) - \tau_2(t)\|_{E_0}^2 \leq C \int_0^t \|\pi_1(s) - \pi_2(s)\|_{E_0}^2 ds \quad \text{p.p. } t \in (0, T). \quad (2.100)$$

De plus, en substituant  $\theta = \theta_1$ ,  $\xi = \alpha_1$ , puis  $\theta = \theta_2$ ,  $\xi = \alpha_2$  dans (2.89) et en soustrayant les deux inégalités obtenues, on trouve

$$\langle \dot{\alpha}_1 - \dot{\alpha}_2, \alpha_1 - \alpha_2 \rangle_{E_0} + a_1 (\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_1 - \alpha_2) \leq \langle \theta_1 - \theta_2, \alpha_1 - \alpha_2 \rangle_{E_0} \quad \text{p.p. } t \in (0, T),$$

on intègre l'ingalité précédente et en appliquant Lemme 1.2.3 du Young avec Lemme 1.2.2 du Gronwall, on en déduit que

$$\|\alpha_1(t) - \alpha_2(t)\|_{E_0}^2 \leq C \int_0^t \|\theta_1(s) - \theta_2(s)\|_{E_0}^2 ds \quad \text{p.p. } t \in (0, T). \quad (2.101)$$

Maintenant, en substituant  $\eta = \eta_1$ ,  $\mu = \mu_1$ , et  $\pi = \pi_1$ , avec  $\phi = \psi_1 - \psi_2$ , puis  $\eta = \eta_2$ ,  $\mu = \mu_2$ , et  $\pi = \pi_2$ , avec  $\phi = \psi_1 - \psi_2$  aussi dans (2.85) et en soustrayant les deux inégalités obtenues, on trouve

$$\begin{aligned} \sum_{\kappa=1}^2 \langle \mathcal{R}^\kappa \nabla \psi_1^\kappa(t) - \mathcal{R}^\kappa \nabla \psi_2^\kappa(t), \nabla \psi_1^\kappa - \nabla \psi_2^\kappa \rangle_{\mathbb{H}^\kappa} &= \sum_{\kappa=1}^2 \langle \mathcal{E}^\kappa \varepsilon(u_1^\kappa(t)) - \mathcal{E}^\kappa \varepsilon(u_2^\kappa(t)), \nabla \psi_1^\kappa - \nabla \psi_2^\kappa \rangle_{\mathbb{H}^\kappa} \\ &+ \sum_{\kappa=1}^2 \langle \mathcal{G}^\kappa(\beta_1^\kappa(t), \tau_1^\kappa(t)) - \mathcal{G}^\kappa(\beta_2^\kappa(t), \tau_2^\kappa(t)), \nabla \psi_1^\kappa - \nabla \psi_2^\kappa \rangle_{\mathbb{H}^\kappa}, \end{aligned}$$

et, moyennant H(4)(a), H(5)(a, b) et H(9), on deduit que

$$\|\psi_1(t) - \psi_2(t)\|_{\mathbb{W}} \leq C (\|u_1(t) - u_2(t)\|_{\mathcal{V}} + \|\beta_1(t) - \beta_2(t)\|_{\mathbb{Y}} + \|\tau_1(t) - \tau_2(t)\|_{E_0}).$$

Combinons maintenant l'inégalité précédente avec les inégalités (2.98)-(2.100), pour trouver

$$\|\psi_1(t) - \psi_2(t)\|_{\mathbb{W}}^2 \leq C \int_0^t (\|\eta_1(s) - \eta_2(s)\|_{\mathcal{V}'}^2 + \|\mu_1(s) - \mu_2(s)\|_{\mathbb{Y}}^2 + \|\pi_1(s) - \pi_2(s)\|_{E_0}^2) ds. \quad (2.102)$$

Nous pouvons en déduire, en utilisant (2.98)-(2.102) que

$$\begin{aligned} &\|\Sigma_1(\eta_1, \mu_1, \pi_1, \theta_1)(t) - \Sigma_1(\eta_2, \mu_2, \pi_2, \theta_2)(t)\|_{\mathcal{V}' \times \mathbb{Y} \times E_0 \times E_0}^2 \\ &\leq C \int_0^t (\|\eta_1(s) - \eta_2(s)\|_{\mathcal{V}'}^2 + \|\mu_1(s) - \mu_2(s)\|_{E_0}^2 + \|\beta_1(s) - \beta_2(s)\|_{\mathbb{Y}}^2 + \|\theta_1(s) - \theta_2(s)\|_{E_0}^2) ds \\ &\leq C \int_0^t \|(\eta_1, \mu_1, \beta_1, \theta_1)(s) - (\eta_2, \mu_2, \beta_2, \theta_2)(s)\|_{\mathcal{V}' \times \mathbb{Y} \times E_0 \times E_0}^2 ds. \end{aligned} \quad (2.103)$$

D'autre part, l'hypothèse H(6) avec définition (2.92), il résulte

$$\begin{aligned} &\|\Sigma_2(\eta_1, \mu_1, \pi_1, \theta_1)(t) - \Sigma_2(\eta_2, \mu_2, \pi_2, \theta_2)(t)\|_{\mathcal{V}' \times \mathbb{Y} \times E_0 \times E_0}^2 \\ &= \sum_{\kappa=1}^2 \|\Theta^\kappa(\varepsilon(u_1(t)), \alpha_1(t), \beta_1(t), \tau_1(t)) - \Theta^\kappa(\varepsilon(u_2(t)), \alpha_2(t), \beta_2(t), \tau_2(t))\|_{\mathcal{V}^{\kappa'} \times \mathbb{Y}^{\kappa'} \times E_0^\kappa \times E_0^\kappa}^2 \\ &\leq C (\|u_1(t) - u_2(t)\|_{\mathcal{V}'}^2 + \|\alpha_1(t) - \alpha_2(t)\|_{E_0}^2 + \|\beta_1(t) - \beta_2(t)\|_{\mathbb{Y}}^2 + \|\tau_1(t) - \tau_2(t)\|_{E_0}^2) \quad \text{p.p. } t \in (0, T), \end{aligned}$$

cela nous permet de déduire, via (2.98)-(2.101), que

$$\begin{aligned}
 & \|\Sigma_2(\eta_1, \mu_1, \pi_1, \theta_1)(t) - \Sigma_2(\eta_2, \mu_2, \pi_2, \theta_2)(t)\|_{\mathcal{V}' \times \mathbb{Y} \times E_0 \times E_0}^2 \\
 & \leq C \int_0^t (\|\eta_1(s) - \eta_2(s)\|_{\mathcal{V}'}^2 + \|\theta_1(s) - \theta_2(s)\|_{E_0}^2 + \|\mu_1(s) - \mu_2(s)\|_{\mathbb{Y}}^2 + \|\pi_1(s) - \pi_2(s)\|_{E_0}^2) ds \\
 & \leq C \int_0^t \|(\eta_1, \mu_1, \beta_1, \theta_1)(s) - (\eta_2, \mu_2, \beta_2, \theta_2)(s)\|_{\mathcal{V}' \times \mathbb{Y} \times E_0 \times E_0}^2 ds,
 \end{aligned} \tag{2.104}$$

Nous utilisons (2.93) et moyennant des arguments similaires nous obtenons l'estimation suivante

$$\begin{aligned}
 & \|\Sigma_3(\eta_1, \mu_1, \pi_1, \theta_1)(t) - \Sigma_3(\eta_2, \mu_2, \pi_2, \theta_2)(t)\|_{\mathcal{V}' \times \mathbb{Y} \times E_0 \times E_0}^2 \\
 & \leq C \int_0^t \|(\eta_1, \mu_1, \beta_1, \theta_1)(s) - (\eta_2, \mu_2, \beta_2, \theta_2)(s)\|_{\mathcal{V}' \times \mathbb{Y} \times E_0 \times E_0}^2 ds.
 \end{aligned} \tag{2.105}$$

Aussi, d'une manière similaire, et de (2.98), (2.101) de et H(8)(a), il s'ensuit que

$$\begin{aligned}
 & \|\Sigma_4(\eta_1, \mu_1, \pi_1, \theta_1)(t) - \Sigma_4(\eta_2, \mu_2, \pi_2, \theta_2)(t)\|_{\mathcal{V}' \times \mathbb{Y} \times E_0 \times E_0}^2 \\
 & \leq C \int_0^t (\|\eta_1(s) - \eta_2(s)\|_{\mathcal{V}'}^2 + \|\theta_1(s) - \theta_2(s)\|_{E_0}^2) ds \\
 & \leq C \int_0^t \|(\eta_1, \mu_1, \beta_1, \theta_1)(s) - (\eta_2, \mu_2, \beta_2, \theta_2)(s)\|_{\mathcal{V}' \times \mathbb{Y} \times E_0 \times E_0}^2 ds.
 \end{aligned} \tag{2.106}$$

On substitue (2.103)-(2.106), avec (2.90) on conclut qu'il existe une constante positive  $C > 0$  vérifiant

$$\begin{aligned}
 & \|\Sigma(\eta_1, \mu_1, \pi_1, \theta_1)(t) - \Sigma(\eta_2, \mu_2, \pi_2, \theta_2)(t)\|_{\mathcal{V}' \times \mathbb{Y} \times E_0 \times E_0}^2 \\
 & \leq C \int_0^t \|(\eta_1, \mu_1, \pi_1, \theta_1)(s) - (\eta_2, \mu_2, \pi_2, \theta_2)(s)\|_{\mathcal{V}' \times \mathbb{Y} \times E_0 \times E_0}^2 ds,
 \end{aligned}$$

De plus, on a

$$\begin{aligned}
 & \|\Sigma^2(\eta_1, \mu_1, \pi_1, \theta_1)(t) - \Sigma^2(\eta_2, \mu_2, \pi_2, \theta_2)(t)\|_{\mathcal{V}' \times \mathbb{Y} \times E_0 \times E_0}^2 \\
 & \leq C \int_0^t \|\Sigma(\eta_1, \mu_1, \pi_1, \theta_1)(s) - \Sigma(\eta_2, \mu_2, \pi_2, \theta_2)(s)\|_{\mathcal{V}' \times \mathbb{Y} \times E_0 \times E_0}^2 ds \\
 & \leq C \int_0^t C \int_0^{s_1} \|(\eta_1, \mu_1, \pi_1, \theta_1)(r) - (\eta_2, \mu_2, \pi_2, \theta_2)(r)\|_{\mathcal{V}' \times \mathbb{Y} \times E_0 \times E_0}^2 dr ds_1 \\
 & \leq C^2 \int_0^t \int_0^{s_1} \|(\eta_1, \mu_1, \pi_1, \theta_1)(r) - (\eta_2, \mu_2, \pi_2, \theta_2)(r)\|_{\mathcal{V}' \times \mathbb{Y} \times E_0 \times E_0}^2 dr ds_1, \\
 & \|\Sigma^3(\eta_1, \mu_1, \pi_1, \theta_1)(t) - \Sigma^3(\eta_2, \mu_2, \pi_2, \theta_2)(t)\|_{\mathcal{V}' \times \mathbb{Y} \times E_0 \times E_0}^2 \\
 & \leq C^3 \int_0^t \int_0^{s_1} \int_0^{s_2} \|(\eta_1, \mu_1, \pi_1, \theta_1)(l) - (\eta_2, \mu_2, \pi_2, \theta_2)(l)\|_{\mathcal{V}' \times \mathbb{Y} \times E_0 \times E_0}^2 dl ds_2 ds_1, \\
 & \vdots
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \|\Sigma^n(\eta_1, \mu_1, \pi_1, \theta_1)(t) - \Sigma^n(\eta_2, \mu_2, \pi_2, \theta_2)(t)\|_{\mathcal{V}' \times \mathbb{Y} \times E_0 \times E_0}^2 \\
 & \leq C^n \underbrace{\int_0^t \int_0^{s_1} \cdots \int_0^{s_{n-1}}}_{n \text{ fois}} \|(\eta_1, \mu_1, \pi_1, \theta_1)(l) - (\eta_2, \mu_2, \pi_2, \theta_2)(l)\|_{\mathcal{V}' \times \mathbb{Y} \times E_0 \times E_0}^2 dl ds_{n-1} \cdots ds_1 \\
 & \leq C^n \underbrace{\int_0^t \int_0^{s_1} \cdots \int_0^{s_{n-2}}}_{(n-1) \text{ fois}} \left[ \int_0^T \|(\eta_1, \mu_1, \pi_1, \theta_1)(l) - (\eta_2, \mu_2, \pi_2, \theta_2)(l)\|_{\mathcal{V}' \times \mathbb{Y} \times E_0 \times E_0}^2 dl \right] ds_{n-1} \cdots ds_1 \\
 & \leq C^n \|(\eta_1, \mu_1, \pi_1, \theta_1) - (\eta_2, \mu_2, \pi_2, \theta_2)\|_{L^2(0,T; \mathcal{V}' \times \mathbb{Y} \times E_0 \times E_0)}^2 \underbrace{\int_0^t \int_0^{s_1} \cdots \int_0^{s_{n-2}}}_{(n-1) \text{ fois}} ds_{n-1} \cdots ds_1.
 \end{aligned}$$

On sait que  $\int_0^{s_{n-2}} ds_{n-1} = s_{n-2}$ , et que  $\int_0^{s_{n-3}} \int_0^{s_{n-2}} ds_{n-1} ds_{n-2} = \int_0^{s_{n-3}} s_{n-2} ds_{n-2} = \frac{s_{n-3}^2}{2}$ ,  
 et  $\int_0^{s_{n-4}} \int_0^{s_{n-3}} \int_0^{s_{n-2}} ds_{n-1} ds_{n-2} ds_{n-3} = \frac{s_{n-4}^3}{3!}$ .

Enfin on a

$$\int_0^t \int_0^{s_1} \cdots \int_0^{s_{n-2}} ds_{n-1} \cdots ds_1 = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Alors

$$\begin{aligned}
 & \|\Sigma^n(\eta_1, \mu_1, \pi_1, \theta_1)(t) - \Sigma^n(\eta_2, \mu_2, \pi_2, \theta_2)(t)\|_{\mathcal{V}' \times \mathbb{Y} \times E_0 \times E_0}^2 \\
 & \leq C^n \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \|(\eta_1, \mu_1, \pi_1, \theta_1) - (\eta_2, \mu_2, \pi_2, \theta_2)\|_{L^2(0,T; \mathcal{V}' \times \mathbb{Y} \times E_0 \times E_0)}^2,
 \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
 & \|\Sigma^n(\eta_1, \mu_1, \pi_1, \theta_1) - \Sigma^n(\eta_2, \mu_2, \pi_2, \theta_2)\|_{L^2(0,T; \mathcal{V}' \times \mathbb{Y} \times E_0 \times E_0)}^2 \leq \\
 & \frac{C^n T^n}{n!} \|(\eta_1, \mu_1, \theta_1, \pi_1) - (\eta_2, \mu_2, \theta_2, \pi_2)\|_{L^2(0,T; \mathcal{V}' \times \mathbb{Y} \times E_0 \times E_0)}^2.
 \end{aligned}$$

Comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{C^n T^n}{n!} = 0$ , alors pour  $n$  suffisamment grand, l'opérateur  $\Sigma^n$  est une contraction sur l'espace de Banach  $L^2(0, T; \mathcal{V}' \times \mathbb{Y} \times E_0 \times E_0)$ , il existe donc un unique  $(\eta_*, \mu_*, \pi_*, \theta_*) \in L^2(0, T; \mathcal{V}' \times \mathbb{Y} \times E_0 \times E_0)$  tel que

$$\Sigma^n(\eta_*, \mu_*, \pi_*, \theta_*) = (\eta_*, \mu_*, \pi_*, \theta_*),$$

et grâce Théorème 1.2.14 qui est aussi l'unique point fixe de  $\Sigma$ , ce qui conclut la preuve.

Maintenant, nous avons tous les ingrédients de prouver le Théorème 2.3.1.

**Existence.** Soit  $(\eta_*, \mu_*, \pi_*, \theta_*) \in L^2(0, T; \mathcal{V}' \times \mathbb{Y} \times E_0 \times E_0)$  le point fixe de  $\Sigma$  défini par (2.90)-(2.94), pour simplifier l'écriture, on suppose que

$$u_* = u_{\eta_*}, \quad \tau_* = \tau_{\pi_*}, \quad \beta_* = \beta_{\mu_*}, \quad \psi_* = \psi_{\eta_* \pi_* \mu_*}, \quad \alpha_* = \alpha_{\theta_*}. \quad (2.107)$$

Nous prouvons que les  $\{u_*, \psi_*, \tau_*, \alpha_*, \beta_*\}$  satisfait (2.55)-(2.60) et la régularité (2.61)-(2.65).

D'après (2.68), pour  $\eta = \eta_*$  et de (2.107), on obtient

$$\begin{aligned} \langle \ddot{u}_*(t), w - \dot{u}_*(t) \rangle_{\mathcal{V}' \times \mathcal{V}} + \sum_{\kappa=1}^2 \langle \mathcal{A}^\kappa(\varepsilon(\dot{u}_*^\kappa(t))), \varepsilon(w^\kappa - \dot{u}_*^\kappa(t)) \rangle_{\mathcal{H}^\kappa} + J(w) - J(\dot{u}_*(t)) \\ + \langle \eta_*(t), w - \dot{u}_*(t) \rangle_{\mathcal{V}' \times \mathcal{V}} \geq \langle F(t), w - \dot{u}_*(t) \rangle_{\mathcal{V}' \times \mathcal{V}} \quad \forall w \in \mathcal{V}, \quad \text{p.p.t } t \in (0, T), \end{aligned} \quad (2.108)$$

Nous combinons les équations  $\Sigma_1(\eta_*, \mu_*, \pi_*, \theta_*) = \eta_*$  et  $\Sigma_2(\eta_*, \mu_*, \pi_*, \theta_*) = \mu_*$  avec (2.91) et (2.92), il vient

$$\begin{aligned} \langle \eta_*(t), w - \dot{u}_*(t) \rangle_{\mathcal{V}' \times \mathcal{V}} = \sum_{\kappa=1}^2 \langle \mathcal{B}^\kappa(\varepsilon(u_*^\kappa(t)), \alpha_*^\kappa(t)), \varepsilon(w - \dot{u}_*(t)) \rangle_{\mathcal{H}^\kappa} + \\ \sum_{\kappa=1}^2 \langle \mathcal{F}^\kappa(\beta_*^\kappa(t), \tau_*^\kappa(t)) + (\mathcal{E}^\kappa)^* \nabla \psi_*^\kappa(t), \varepsilon(w - \dot{u}_*(t)) \rangle_{\mathcal{H}^\kappa}, \end{aligned} \quad (2.109)$$

$$\mu_*^\kappa(t) = \Theta^\kappa(\varepsilon(u_*^\kappa(t)), \alpha_*^\kappa(t), \beta_*^\kappa(t), \tau_*^\kappa(t)) \quad \text{p.p.t } t \in (0, T), \kappa = 1, 2. \quad (2.110)$$

De (2.108) et (2.109), on a

$$\begin{aligned} \langle \ddot{u}_*(t), w - \dot{u}_*(t) \rangle_{\mathcal{V}' \times \mathcal{V}} + \sum_{\kappa=1}^2 \langle \mathcal{A}^\kappa(\varepsilon(\dot{u}_*^\kappa(t))) + \mathcal{B}^\kappa(\varepsilon(u_*^\kappa(t)), \alpha_*^\kappa(t)), \varepsilon(w^\kappa - \dot{u}_*^\kappa(t)) \rangle_{\mathcal{H}^\kappa} \\ + J(w) - J(\dot{u}_*(t)) + \sum_{\kappa=1}^2 \langle \mathcal{F}^\kappa(\beta_*^\kappa(t), \tau_*^\kappa(t)) + (\mathcal{E}^\kappa)^* \nabla \psi_*^\kappa(t), \varepsilon(w - \dot{u}_*(t)) \rangle_{\mathcal{H}^\kappa} \\ \geq \langle F(t), w - \dot{u}_*(t) \rangle_{\mathcal{V}' \times \mathcal{V}}, \quad \forall w \in \mathcal{V}. \end{aligned} \quad (2.111)$$

Ainsi, de (2.84) et (2.110), on a

$$\dot{\beta}_*^\kappa(t) = \Theta^\kappa(\varepsilon(u_*^\kappa(t)), \alpha_*^\kappa(t), \beta_*^\kappa(t), \tau_*^\kappa(t)), \quad \kappa = 1, 2. \quad (2.112)$$

Nous écrivons maintenant (2.85) pour  $(\eta, \pi, \mu) = (\eta_*, \pi_* \mu_*)$  et on utilise (2.107), il vient

$$\sum_{\kappa=1}^2 \langle \mathcal{R}^\kappa \nabla \psi_*^\kappa(t) - \mathcal{E}^\kappa \varepsilon(u_*^\kappa(t)) - \mathcal{G}^\kappa(\beta_*^\kappa(t), \tau_*^\kappa(t)), \nabla \phi^\kappa \rangle_{\mathbb{H}^\kappa} = \langle Q(t), \phi \rangle_{\mathbb{W}}, \quad \forall \phi \in \mathbb{W}. \quad (2.113)$$

Nous combinons les égalités  $\Sigma_3(\eta_*, \mu_*, \pi_*, \theta_*) = \pi_*$  et  $\Sigma_4(\eta_*, \mu_*, \pi_*, \theta_*) = \theta_*$  combiné avec (2.93) et (2.94), pour obtenir

$$\pi_*^\kappa(t) = \Psi^\kappa(\varepsilon(u_*^\kappa(t)), \alpha_*^\kappa(t), \beta_*^\kappa(t), \tau_*^\kappa(t)), \quad \kappa = 1, 2, \quad (2.114)$$

$$\theta_*^\kappa(t) = S^\kappa(\varepsilon(u_*^\kappa(t)), \alpha_*^\kappa(t)), \quad \kappa = 1, 2, \quad (2.115)$$

on substitue (2.114) dans (2.82), on déduit

$$\left. \begin{aligned} a_0(\tau_*(t), \delta) &= \sum_{\kappa=1}^2 \langle \Psi^\kappa(\varepsilon(u_*^\kappa(t)), \alpha_*^\kappa(t), \beta_*^\kappa(t), \tau_*^\kappa(t)), \delta^\kappa \rangle_{E_0^\kappa} \\ &\quad - \sum_{\kappa=1}^2 \langle \dot{\tau}_*^\kappa(t) - \chi^\kappa(t), \delta^\kappa \rangle_{E_0^\kappa}, \quad \forall \delta \in E_0, \end{aligned} \right\} \quad (2.116)$$

Pour  $t \in [0; T]$ ; et nous substituons (2.115) dans (2.89),  $\alpha_*(t) \in \mathcal{Z}$  on obtient

$$\left. \begin{aligned} &\sum_{\kappa=1}^2 \langle \dot{\alpha}_*^\kappa(t), \xi^\kappa - \alpha_*^\kappa(t) \rangle_{L^2(\Omega^\kappa)} + a_1(\alpha_*(t), \xi - \alpha_*(t)) \\ &\geq \sum_{\kappa=1}^2 \langle S^\kappa(\varepsilon(u_*^\kappa(t)), \alpha_*^\kappa(t)), \xi^\kappa - \alpha_*^\kappa(t) \rangle_{L^2(\Omega^\kappa)}, \quad \forall \xi \in \mathcal{Z}, \end{aligned} \right\} \quad (2.117)$$

Finalement, les relations (2.111)-(2.113), (2.116) et (2.117) nous permettent de conclure maintenant que  $\{u_*, \psi_*, \tau_*, \alpha_*, \beta_*\}$  solution du Problème  $\mathcal{PV}$ . Et la régularité (2.61)-(2.65) suivre les Lemmes 2.3.4 – 2.3.7 et la relation (2.84), en ce qui termine la preuve de la partie d'existence du Théorème 2.3.1.

**Unicité.** L'unicité de la solution est une conséquence de l'unicité du point fixe de l'opérateur  $\Sigma(., ., ., .)$ , définie par (2.90)- (2.94).

## Conclusion

Dans ce mémoire, on a étudié un problème du contact bilatéral avec friction du Tresca entre deux corps thermo-électro-viscoélastique avec endommagement et la variable d'état interne.

Nous avons présenté le modèle pour le processus dynamique. On a utilisé les formules de Green pour obtenir la formulation variationnelle de ce problème.

On a montré l'existence et l'unicité de la solution de problème variationnelle par l'utilisation des arguments suivants : Théorème de représentation de Riesz-Fréchet, Inégalités variationnelles paraboliques, Théorème du Lax-Milgram, Lemme de Gronwall et Théorème point fixe.

# Bibliographie

- [1] H. Brézis, *Analyse fonctionnelle, Théorie et Application*, MASSON Paris New York Barcelone Milan Mexico Sao Paulo 1987.
- [2] D. S. Chandrasekhariah, *A temperature rate dependent theory of piezoelectricity*, Journal Thermal Stresses, **7** 1984, 293-306.
- [3] B. Douib, T. Hadj Ammar, A. Azeb Ahmed, *Analysis of a dynamic contact problem for electro-viscoelastic materials with tresca's friction*, TWMS Journal Applied and Engineering Mathematics, **12** (4), 2022, 1490-1505.
- [4] M. Frémond and B. Nedjar, *Damage, Gradient of Damage and Principle of Virtual Work*, International Journal of Solids and Structures, **33** (8) 1996, 1083-1103.
- [5] M. Frémond, *Equilibre des structures qui adhèrent à leur support*, Comptes Rendus des Seances de L'academie des Sciences, **295** (2) 1982, 913-916.
- [6] M. Frémond, K. L. Kuttler and M. Shillor, *Existence and uniqueness of solutions for a one dimensional damage model*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, **229** 1999, 271-294.
- [7] L. Gossa, T. Hadj Ammar and K. Saoudi *A Dynamic Contact Problem between Viscoelastic Piezoelectric Bodies with Friction and Damage*, Nonlinear Dynamics and Systems Theory, **22** (5), 2022, 522-537.
- [8] T. Hadj ammar, A. Saïdi and A. Azeb ahmed, *Dynamic contact problem with adhesion and damage between thermo-electro-elasto-viscoplastic bodies*, Comptes Rendus Mécanique, **345** 2017, 329-336.
- [9] T. Hadj Ammar, *Etude Variationnelle et Numérique de Quelques Problèmes de Contact Entre Deux Corps Déformables*, Thèse de doctorat Université Ferhat Abbas-sétif, 2015.

- 
- [10] K. L. Kuttler and M. Shillor, *Existence for models of damage*, preprint, Sér. II, **295**, 2001.
- [11] Z. Lerguet, *Analyse de Quelques problèmes de contact avec frottement et adhésion*, Thèse doctorat, Université Ferhat Abbas-Sétif, 2008.
- [12] L. Maiza, T. Hadj Ammar, and M. L. Gossa, *A Dynamic contact problem for thermo-electro-viscoplastic Materials with Damage and Internal State Variable*, *Surveys in Mathematics & its Applications*, **17** 2022, 241-267.
- [13] F. Messelmi and B. Merouani, *Quasi-static evolution of damage in thermo-viscoplastic materials*, *Analele Universității din Oradea, Fascicola Mathematica*, Tome **XVII** (2), 2010, 133-148.
- [14] R. D. Mindlin, *Elasticity, piezoelectricity and crystal lattice dynamics*, *Journal of Elasticity*, **4**, 1972, 217-280.
- [15] R. D. Mindlin, *On the Equations of Motion of Piezoelectric Crystals*, In : N. I. Muskhilishvili, Ed., *Problems of continuum Mechanics*, SIAM, Philadelphia, **70** 1961, pp. 282-290.
- [16] W. Nowacki, *Some general theorems of thermo-piezoelectricity*, *Journal of Thermal Stresses*, **1** (2), 1978, 171-182.
- [17] M. Said Ameer, T. Hadj Ammar and L. Maiza, *Analysis of a Frictional Contact Problem for Viscoelastic Piezoelectric Materials*, *Austrian Journal Mathematical Analysis Applications*, **17** (1), 2020, Art. 6, pp.20.
- [18] J. N. Sharma and M. Pal, *Propagation of Lamb waves in a transversely isotropic piezothermoelastic plate*, *Journal of Sound and Vibration*, **270** (4-5), 2004, 587-610.
- [19] J. N. Sharma and V. Walia, *Straight and circular crested waves in generalized piezothermoelastic materials*, *Journal of Thermal Stresses*, **29** (6), 2006, 529-551.
- [20] J. N. Sharma, M. Pal and D. Chand, *Three dimensional vibrational analysis of a piezothermoelastic cylindrical panel*, *International Journal of Engineering Science*, **42** (15-16), 2004, 1655-1673.
- [21] M. Sofonea and A. Matei, *Mathematical Models in Contact Mechanics*, Cambridge University Press, London mathematical society lecture note (398), 2012.

- [22] M. Sofonea, W. Han and M. Shillor, *Analysis and Approximation of Contact Problems with Adhesion or Damage*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics. Chapman-Halls/CRC Press, New York 2005.
- [23] J. S. Yang, and R. C. Batra, *Free vibrations of a linear thermo-piezoelectric body*, Journal of Thermal Stresses, **18** (2), 1995, 247-262.

## Résumé

Notre mémoire est l'étude analytique d'un problème de contact bilatéral avec forttement de Tresca, on utilise des lois constitutives thermo-électro-viscoélastiques avec variable d'état interne et endommagement. Pour prouver l'existence et l'unicité d'une solution faible où problème on a utilisé des outils mathématiques.

**Mots Clés :** thermo-électro-viscoélastiques, variable d'état interne, endommagement, contact bilatéral, forttement de Tresca, solution faible, théorème de point fixe.

## Abstract

In this memoire we have study the problem of bilateral contact with Tresca's friction for thermo-electro-viscoelastic. We concenter constitutive laws with internal state variable and damage, with arguments mathematical and we have used this to prove the existence and uniqueness of a weak solution for the problem.

**Key words :** thermo-electro-viscoelastics, internal state variable, damage, the bilateral contact, Tresca's friction, weak solution, fixed point theorem.

## ملخص

إن الهدف من هذه المذكرة هو الدراسة التحليلية لمسألة الاتصال الثنائي مع احتكاك تريسكا للقوانين التأسيسية الحرارية والكهربائية اللزجة مع متغير الحالة الداخلية و الاضرار، وقد تم استخدام المعطيات الرياضية التحليلية لإثبات وجود وتفرد الحل ضعيف للمسألة المدروسة.

كلمات مفتاحية : الكهروحرارية اللزجة المطاطية، متغير الحالة الداخلية، الضرر، الاتصال الثنائي، احتكاك تريسكا، الحل الضعيف، نظرية النقطة الثابتة.