



République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de
la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ HAMMA LAKHDAR EL OUED
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES

Mémoire de fin d'étude

MASTER ACADEMIQUE

Domaine: Mathématiques et Informatique
Filière: Mathématiques
Spécialité: Mathématiques fondamentales et appliquées

Quelques équations différentielles d'ordres
fractionnaires

Thème

Présenté par:

- Bekkari Mouna
- Benamara Amina

Soutenu publiquement devant le jury composé de

Djedidi Mostefa	MCB.	Président	Univ. El Oued
Meneceur Bekkar	MCB.	Rapporteur	Univ. El Oued
Guedda Al Amine	MCB	Examineur	Univ. El Oued

Table des matières

Dédicace	i
Remerciement	i
Notations	vi
Introduction	vii
1 Préliminaire	1
1.1 Espaces des fonctions continues et absolument continues	1
1.2 Quelques propriétés d'analyse réel	1
1.3 Quelques éléments de topologie	3
1.4 Théorèmes du point fixe	4
2 Calcul Fractionnaire	6
2.1 Fonctions Utiles	6
2.1.1 La fonction Gamma	6
2.1.2 La fonction bêta	8
2.1.3 Fonction Mittag-Leffler	9
2.2 L'intégrale fractionnaire sur un intervalle $[a, b]$	11
2.3 Dérivés fractionnaires de Riemann-Liouville	12
2.4 Composition d'intégrale fractionnaire de Riemann – Liouville et sa dérivée	14
2.5 La dérivation fractionnaire au sens de Caputo	14
2.6 Comparaison entre la dérivée de Caputo et de Riemann-Liouville	16
2.7 Quelques propriétés des dérivées fractionnaires	16
3 Résolutions de quelques équations différentielles d'ordre fractionnaire via transformée de Laplace	18
3.1 Transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire	18
3.1.1 Propriétés de la transformée de Laplace	19
4 Quelques Résultats d'existence et l'unicité des solutions des problèmes de Cauchy	26
4.1 Problème de Cauchy linéaire d'ordre fractionnaire	26
4.2 Équation différentielle fractionnaire d'une forme plus générale	29
4.3 Théorème d'existence et d'unicité Comme méthode de solution	32

5	Quelques problèmes non linéaire avec conditions intégrales	34
5.1	Problème non locale	34
5.1.1	Résultats d'existence et l'unicité d'après le théorème de Principe de contraction de Banach	35
5.1.2	Résultats d'existence d'après le théorème du point fixe de krasnoselskii	36
5.1.3	Résultats d'existence d'après le théorème d'alternative non linéaire de Leray-Schauder	37
5.1.4	Exemples	39
5.2	Problème au limite	40
5.2.1	Construction d'une fonction de Green	40
5.2.2	Résultats d'existence et l'unicité d'après le théorème de Principe de contraction de Banach	41
5.2.3	Résultats d'existence d'après le théorème du point fixe de Schauder	42
5.2.4	Exemple	44
	Conclusion	45
	Annexe A	45
	Bibliographie	49

Dédicace

Je dédie ce mémoire :

A mon père, le chemin à suivre dans cette vie .

A ma mère, la source de tendresse et l'exemple du dévouement.

A mes très chers frères , sœurs et mon fiancé .

A toute la famille "Bekkari".

Je dédie ce mémoire :

A mon père, qui ont sacrifié leur vie pour être témoin de tous ceux

que je leur dois et au grand amour que je leur porte .

A ma mère, la source de tendresse .

A mes très chers frères et sœurs surtout Mariem

A toute la famille "Benamara " et à tous les travailleurs du daïra Mih Ouenssa

Remerciement

Nous tenons en premier lieu à rendre grâce à "Dieu" l'aider à compléter à ce travail et remercier Monsieur "Meneceur Bekkar", qui a dirigé cette mémoire.

Nous remercions tous les professeurs des mathématiques à l'université Echahid Hamma Lakhdar. Nous remercions tous les professeurs qui nous ont encouragé dans nos études. C'est à eux qui nous ont donné le goût du travail et l'envie de découvrir. Un grand merci à toutes les personnes que nous avons consultées pour la compréhension et l'assimilation de ce travail.

Pour finir c'est un grand merci à nos parents et à tous nos amis.

Notation

Dans tout ce qui suit, nous utiliserons les notations suivantes :

Γ	La fonction Gamma.
B	La fonction bêta .
E_α	La fonction Mittag-Leffler à un seul paramètre.
$E_{\alpha,\beta}$	La fonction de Mittag-Leffler à deux paramètres.
${}_aD_t^\alpha$	La dérivé fractionnaire de Riemann-Liouville à gauche.
${}_tD_b^\alpha$	La dérivé fractionnaire de Riemann-Liouville à droite.
${}_aD_t^{-\alpha}$	L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville à gauche.
${}_tD_b^{-\alpha}$	L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville à droite.
${}_a^CD_t^\alpha$	La dérivé fractionnaire de Caputo à gauche.
${}_t^CD_b^\alpha$	La dérivé fractionnaire de Caputo à droite.
L	La transformée de Laplace.
L^{-1}	La transformée de Laplace inverse.
$\mathbb{N}$	$1, 2, 3, \dots$ L'ensemble des nombres naturels.
$\mathbb{N}_0$	$\mathbb{N} \cup \{0\}$.
$\mathbb{R}_0$	L'ensemble des nombres réels.
$\mathbb{R}_+$	$x \in \mathbb{R} : x > 0$, L'ensemble des nombres réels strictement positifs.
$\mathbb{C}$	L'ensemble des nombres complexe.
s	Paramètre dans la transformation de Laplace .

$n!$ Fonction de factorielle .

$\Re(z)$ Partie réelle de z .

$\| \cdot \|$ La norme.

$C(J; \mathbb{R})$ Espace des fonctions continues sur J et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

$B_0(x, \rho)$ Boule ouvert de centre x et rayon ρ .

Introduction générale

Le sujet du calcul fractionnel (c'est-à-dire le calcul des intégrales et des dérivés arbitraire, réel ou complexe) a acquis une popularité et une importance considérables au cours des trois dernières décennies, principalement en raison de ses applications démontrées dans de nombreux domaines de la science et du génierie. Il fournit en effet plusieurs outils potentiellement utiles pour résoudre des équations différentielles et intégrales, ainsi que divers autres problèmes impliquant des fonctions spéciales de la physique mathématique, ainsi que leurs extensions et généralisations. Dans une ou plusieurs variables.

On croit généralement que le concept de calcul fractionnel découle d'une question posée en 1695 par le marquis de L'hôpital (1661-1704) à Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), qui cherchait à comprendre le sens de Leibniz (actuellement populaire) notation $\frac{d^n y}{dx^n}$ pour le dérivé de l'ordre $n \in \mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, \dots\}$ quand $n = \frac{1}{2}$ (Et qu'est-ce qui se passerait si $n = \frac{1}{2}$?) .

Dans sa réponse en date du 30 septembre 1695, Leibniz écrivit à L'Hôpital comme suit : " ... C'est un paradoxe apparent à partir duquel, un jour, des conséquences utiles seront tirées. . . "

Une mention ultérieure de dérivés fractionnaires a été faite, par (par exemple) Euler en 1730, Lagrange en 1772, Laplace en 1812, Lacroix en 1819, Fourier en 1822, Liouville en 1832, Riemann en 1847, Greer 1859, Holmgren en 1865, Grünwald en 1867, Letnikov en 1868, Sonin en 1869, Laurent en 1884, Nekrassov en 1888, Krug en 1890 et Weyl en 1917.

Les théories des équations différentielles, intégrales et intégral-différentielles et des fonctions spéciales de la physique mathématique, ainsi que leurs extensions et généralisations dans une où plusieurs variables, voici quelques exemples d'applications actuelles du calcul fractionnel : circulation des fluides, rhéologie, processus dynamiques dans les structures auto-similaires et poreuses, transport par diffusion s'apparentant à la diffusion, réseaux électriques, probabilités et statistiques, théorie du contrôle des systèmes dynamiques, viscoélasticité, électrochimie de la corrosion, physique chimique, optique et traitement du signal, etc.

Ce travail est divisé en cinq chapitres .

- Dans le premier chapitre, nous allons présenter certaines définitions et théories que nous avons utilisées dans cette mémoire.
- Dans le deuxième chapitre, nous allons mentionner les concepts de certaines fonctions spéciales, intégrales et dérivés fractionnaires de Riemann-Liouville et de Caputo, ainsi que certaines de leurs caractéristiques et La relation entre eux.

-
- Dans le troisième chapitre, nous allons présenter le concept de transformée de Laplace et certaines de ses propriétés, ainsi que la formulation de la transformée de Laplace pour la dérivé fractionnaire de Riemann-Liouville, Caputo et la transformée de Laplace de la fonction Mittag-Leffler et dérivée fractionnaire séquentiel de Miller-Ross. À la fin de ce chapitre, nous allons résoudre des équations différentielles fractionnaires à coefficients constante par transformée de Laplace.
 - Dans le quatrième chapitre, nous allons présenter quelques résultats d'existence et d'unicité des solutions pour des équations différentielles linéaires à valeur initial (problème de Cauchy).
 - Dans le Cinquième chapitre, nous allons discuter l'existence et l'unicité de solutions pour quelques problèmes aux limite avec condition intégrale d'équations différentielles fractionnaires non linéaires [1],[12] .

Le premier problème :

$$\begin{cases} {}^c D^q x(t) = f(t, x(t)), 0 < t < 1, 0 < q \leq 1 \\ x(0) = \alpha D^{-p} x(\eta), 0 < \eta < 1, 0 < p < 1 \end{cases}$$

Le deuxième problème :

$$\begin{cases} {}^c D^\alpha y(t) = f(t, y(t)), \text{ Pour tous } t \in J := [0, T], \quad \alpha \in (0, 1] \\ y(0) + \mu \int_0^T y(s) ds = y(T) \end{cases}$$

Chapitre 1

Préliminaire

1.1 Espaces des fonctions continues et absolument continues

Définition 1.1.1. [9] Soit $\Omega = (a, b)$ ($-\infty \leq a < b \leq \infty$) un intervalle fini ou infini de $\mathbb{R}$ et $1 \leq p \leq \infty$.

1. Si $1 \leq p < \infty$ l'espace $L_p(\Omega)$

$$L_p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ mesurable et } \int_{\Omega} |f(x)|^p dx < \infty \right\}.$$

2. Pour $p = \infty$, l'espace $L_{\infty}(\Omega)$ est l'espace des fonctions mesurables, f bornées presque partout sur Ω , on note

$$\sup_{x \in \Omega} |f(x)| = \inf \{ C \geq 0 ; |f(x)| \leq C \text{ p.p sur } \Omega \}.$$

Définition 1.1.2. [9] Soit $[a, b]$ ($-\infty < a < b < \infty$) un intervalle fini. On désigne par $AC[a, b]$ l'espace des fonctions primitives des fonctions intégrables au sens de Lebesgue

$$f \in AC[a, b] \Leftrightarrow f(x) = c + \int_a^x \varphi(t) dt \quad (\varphi(t) \in L(a, b)),$$

et on appelle $AC[a, b]$ l'espace des fonctions absolument continues sur $[a, b]$.

Définition 1.1.3. [9] Pour $n \in \mathbb{N}$, on désigne par $AC^n[a, b]$ l'espace des fonctions f ayant des dérivées jusqu'à l'ordre $(n-1)$ continues sur $[a, b]$ telles que $f^{(n-1)} \in AC[a, b]$

$$AC^n[a, b] = \left\{ f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C} \text{ et } f^{(n-1)} \in AC([a, b]) \right\}.$$

En particulier $AC^1[a, b] = AC[a, b]$.

1.2 Quelques propriétés d'analyse réel

Définition 1.2.1 (La continuité). [16] Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application. On dit que f est continue si elle est continue en tout point de $\mathbb{R}$. En d'autres termes, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est continue en a si

$$\forall a \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in \mathbb{R}, |x - a| < \alpha \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Définition 1.2.2 (Applications uniformément continues). [16] Soient (X, d) et (X', d') des espaces métriques. Une application $f : X \rightarrow X'$ est dite uniformément continue si pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$\forall (x, y) \in X \times X, d(x, y) < \alpha \implies d'(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Définition 1.2.3 (Lipschitzienne). [3] Soient G une partie de $\mathbb{R}^2$, $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ une application et A un nombre réel positif. On dit que f est A -lipschitzienne par rapport à y si :

$$\forall (t, y) \in G, |f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq A |y_1 - y_2|.$$

Où A est appelée la constante de Lipschitz .

- Si $0 \leq A < 1$, on dite que f est contractante.

Proposition 1.2.1. Toute application lipschitzienne est continue.

Définition 1.2.4 (Convergence uniforme). [16] On dit que la suite des fonctions f_n converge uniformément vers la fonction f , quand n tendant vers $+\infty$, si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists m \in \mathbb{N}, \forall x \in E, \forall n \geq m : |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

Définition 1.2.5 (Fonction bornée). Une fonction $f : G \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est bornée si :

$$\exists M > 0, \forall t \in G : |f(t)| \leq M.$$

Définition 1.2.6 (Fonction convexe). [16] L'application f est convexe si et seulement si, pour tout $x, y, z \in I \subset \mathbb{R}$ avec $x \leq y \leq z$, pour $y = tx + (1 - t)z$, on a

$$f(y) \leq tf(x) + (1 - t)f(z).$$

Définition 1.2.7 (Fonction d'ordre exponentiel α). [13] On dit que la fonction $f(t)$ est d'ordre exponentiel α , s'il existe deux constantes positives M et T telles que

$$e^{-\alpha t} |f(t)| \leq M \text{ pour tout } t > T.$$

Définition 1.2.8 (Intégrale de Gauss). Une intégrale de Gauss est l'intégrale d'une fonction gaussienne sur l'ensemble des réels. i.e

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}.$$

Définition 1.2.9 (Produit de convolution). [13] Le produit de convolution de deux fonctions réelles ou complexes f et g sont intégrables est :

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x - t)g(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x - t) dt.$$

Proposition 1.2.2 (Formule de Dirichlet). [8] Soit F une fonction continue et λ, μ, ν sont des nombre positive. Alors

$$\int_a^t (t - x)^{\mu-1} dx \int_a^x (y - a)^{\lambda-1} (x - y)^{\nu-1} F(x, y) dy = \int_a^t (y - a)^{\lambda-1} dy \int_y^t (t - x)^{\mu-1} (x - y)^{\nu-1} F(x, y) dx.$$

Définition 1.2.10 (Théorème de convergence dominé de Lebesgue). [18] Soit E un ensemble mesurable dans $\mathbb{R}$ et Soit $\{f_n\}$ une suite de fonctions mesurables telles que

- $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ p.p sur E .
- Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, $|f_n(x)| \leq g(x)$ p.p sur E , où g est intégrable au sens de Lebesgue sur E .

Alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n(x) dx = \int_E f(x) dx.$$

Démonstration. Voir [11] □

Théorème 1.1 (Fubini). [10] Soit $f(x, y)$ une fonction sommable sur le produit des espaces mesurables (X, μ) et (Y, ν) . On a alors les assertions suivantes :

- 1) Pour μ -presque tous les $x \in X$, la fonction. $f(x, y)$ est sommable sur Y et son intégrale sur Y est une fonction sommable sur X .
- 2) Pour ν -presque tous les $y \in Y$, la fonction $f(x, y)$ est sommable sur X et son intégrale sur X est une fonction sommable sur Y .
- 3) On a

$$\int_{x \times Y} f(x, y) d(\mu \times \nu)(x, y) = \int_X \left(\int_Y f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int_Y \left(\int_X f(x, y) d\mu(x) \right) d\nu(y).$$

Démonstration. Voir [10] □

1.3 Quelques éléments de topologie

Définition 1.3.1 (Norme). Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. On appelle une norme sur E toute application $\| \cdot \| : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ vérifie

- $\forall x \in E : \|x\| = 0 \iff x = 0$.
- $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in E : \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$.
- $\forall x, y \in E : \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ "inégalité triangulaire".

Exemple 1.1. L'espace $C(J; \mathbb{R})$ muni de la norme

$$\|y\|_\infty := \sup\{|y(t)| : t \in J\}.$$

Définition 1.3.2 (Espace de Banach). [15] On appelle espace de Banach tout espace vectoriel normé complet sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Exemple 1.2. $C(J; \mathbb{R})$ espace des fonctions continues sur J et à valeurs dans $\mathbb{R}$ est de Banach.

Définition 1.3.3 (Parties ouvertes). [15] Soit E un espace métrique. Une partie A de E est appelée ouverte si, toutes les fois qu'elle contient un point de E , elle contient au moins une boule ouverte (de rayon > 0) ayant pour centre ce point. i.e

$$(\forall x \in A) (\exists \rho > 0) : B_0(x, \rho) \subset A.$$

Définition 1.3.4 (Parties fermées). [15] On appelle partie fermée de E toute partie de E dont le complémentaire est ouvert.

Exemple 1.3. Toute boule fermée est une partie fermée.

Définition 1.3.5 (Parties compacts). [10] On dit que $C \subset \mathbb{R}$ est compact si pour tout recouvrement de C par des ouverts on peut extraire un sous-recouvrement fini. Ceci se traduit de la manière suivante : si $(U_i)_{i \in I}$ est une famille d'ouverts telle que $C \subset (U_i)_{i \in I}$ alors il existe un sous-ensemble fini $J \subset I$, $C \subset \bigcup_{i \in J} U_i$.

Définition 1.3.6 (Parties relativement compacts). [16] On dit que A est une partie relativement compact d'un espace métrique X si son adhérence est une partie compacte de X .

Définition 1.3.7 (Parties convexes). [18] Soit C une partie de E . On dit que C est convexe dans E si, pour tout $x, y \in C$ et tout $t \in [0, 1]$, on a $(1 - t)x + ty \in C$.

Définition 1.3.8 (Opérateur). [2] Soit E un espace vectoriel normé ; une application linéaire A de E dans lui-même est appelée un opérateur linéaire dans E . On appelle domaine de A et on le désigne par D_A , où $D_A = \{x \in E, Ax \in E\}$

Définition 1.3.9 (Opérateur continu). L'opérateur A est continu, si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que l'inégalité

$$(x', x'' \in D_A) : \|x' - x''\| < \delta \implies \|Ax' - Ax''\| < \varepsilon.$$

Définition 1.3.10 (Opérateurs Linéaire Bornés). [2] Soit E un espace vectoriel normé ; on appelle opérateur linéaire borné. Toute application linéaire continue de E dans E .

- Si A est un opérateur linéaire borné, alors

$$(\forall x \in D_A) : \|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|.$$

où la norme de A étant définie par

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| = \sup_{x \in D_A} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

Définition 1.3.11 (Opérateur compact). [10] L'opérateur A est dit compact si l'image de l'ensemble $X \subset \mathbb{R}$ par A c'est à dire l'ensemble $A(X)$ est relativement compact.

1.4 Théorèmes du point fixe

Définition 1.4.1 (Point fixe). Soit T une application d'un ensemble S dans lui-même. On appelle point fixe de T tout point $s \in S$ tel que $T(s) = s$.

Théorème 1.2 (Principe de contraction de Banach). [3] Soit S un espace métrique complet et soit $T : S \rightarrow S$ une application contractante, c'est à dire il existe $0 < k < 1$ telle que

$$d(Tx, Ty) \leq k(x, y), \forall x, y \in S.$$

Alors T admet un point fixe unique $s \in S$. On a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T^n(s) = s,$$

avec

$$d(T^n(s), s) \leq \frac{k^n}{1-k} d(s, T(s)).$$

Démonstration. Voir [3] □

Théorème 1.3 (Arzela-Ascoli). [10] Soit $C(X)$ l'espace normé des fonctions réelles continues sur un espace métrique compact X de norme $\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|$. Pour qu'une famille $A \subset C(X)$ soit relativement compacte, il est nécessaire et suffisant qu'elle soit :

- Uniformément bornée :

$$\exists C : |f(x)| \leq C, \forall f \in A, \forall x \in X.$$

- Equicontinue :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon, \forall f \in A.$$

Démonstration. voir [10] □

Théorème 1.4 (Théorème de point fixe de Schauder). [17] Soit X un sous-ensemble de E et $f : X \rightarrow E$ une fonction continue, X compact, convexe et E espace de Banach. Alors f admet un point fixe dans X .

Démonstration. Voir [17] □

Théorème 1.5 (Krasnoselskii). [17] Soit X un sous-ensemble d'un espace E , et $f, g : X \rightarrow E$.

- X : fermé, convexe.
- E : espace de Banach.
- f et g sont continus, f est compact, g est une contraction et $f(X) + g(X) \subseteq X$.

Alors $f + g$ admet un point fixe dans X .

Démonstration. Voir [17] □

Chapitre 2

Calcul Fractionnaire

Dans ce chapitre nous nous intéressons au calcul intégral fractionnaire et dérivation au sens de Riemann-Liouville et de Caputo. Nous donnons ici quelques définitions et propriétés des fonctions Utiles.

2.1 Fonctions Utiles

La fonction Gamma, la fonction Bêta et la fonction Mittag-Leffler sont dites des fonctions spéciales. Ces fonctions jouent un rôle très important dans la théorie du calcul différentiel d'ordre fractionnaire.

2.1.1 La fonction Gamma

La fonction Gamma d'Euler est une fonction qui prolonge naturellement la factorielle aux nombres réels, et même aux nombres complexes. Pour $z \in \mathbb{C} / \{0, -1, -2, \dots\}$ tel que $\Re(z) > 0$. [13]

Définition 2.1.1. On définit la fonction Gamma par : [13]

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt \quad ; z \in \mathbb{C} \text{ et } \Re(z) > 0, \quad (2.1)$$

(cette intégrale est convergente).

Proposition 2.1.1. [13]

1. $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ en particulier $\Gamma(n+1) = n!$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
2. $\Gamma(1) = 1$ et $\Gamma(-m) = \mp\infty$ pour tout $m \in \mathbb{N}$.
3. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.
4. $\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)! \sqrt{\pi}}{4^n n!}$ et pour les valeurs négatives $\Gamma\left(-n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(-1)^n 2^n}{1.3.5 \dots (2n-1)} \sqrt{\pi}$.
5. La fonction Gamma peut être représentée par la limite :

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^z}{z(z+1) \dots (z+n)}, \quad \Re(z) > 0.$$

Démonstration.

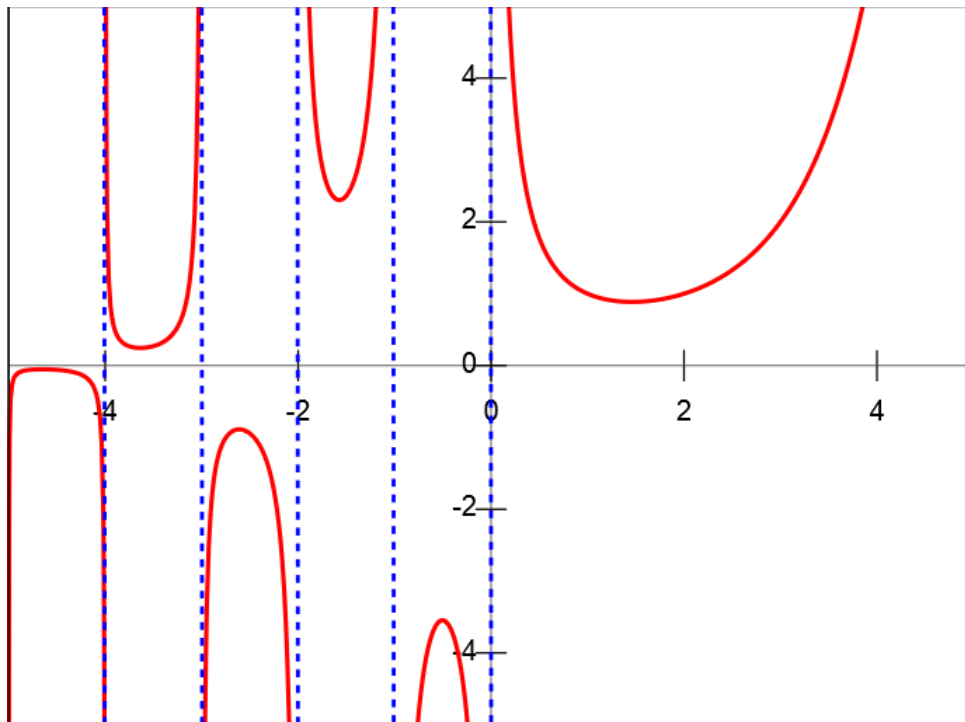


FIGURE 2.1 – La fonction Gamma

1.

- En utilisant l'intégration par partie on obtient :

$$\Gamma(z+1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^z dt = \left[-t^z e^{-t} \right]_0^{+\infty} + z \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt = z \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt = z \Gamma(z).$$

- On a $\Gamma(1) = 0! = 1$ et la propriété $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$, on obtient :

$$\begin{aligned} \Gamma(2) &= 1 \times \Gamma(1) = 1! \\ \Gamma(3) &= 2 \times \Gamma(2) = 2! \\ \dots & \\ \Gamma(n+1) &= n\Gamma(n) = n! \end{aligned}$$

2. On a : $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = [-e^{-t}]_0^{+\infty} = 1$ et $\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z}$.
donc $\Gamma(0^+) = +\infty$.

3. Avec le changement de variable $s = \sqrt{t}$ on obtient :

$$\begin{aligned} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt \\ &= 2 \int_0^{+\infty} e^{-s^2} ds \\ &= 2 \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} \right) \text{ (d'après l'intégrale de Gauss)} \\ &= \sqrt{\pi}. \end{aligned}$$

4. En peut facilement démontrer par récurrence la propriété suivante :

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)! \sqrt{\pi}}{4^n n!}, \text{ pour } n \in \mathbb{N}.$$

- Pour $n = 0$, on a $\Gamma\left(0 + \frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.
- Supposons que la formule est vérifiée pour $(n - 1)$ et le montrons pour n :
on a

$$\Gamma\left((n - 1) + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2(n - 1))!\sqrt{\pi}}{4^{(n-1)}(n - 1)!},$$

est vérifié. Alors

$$\begin{aligned}\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) &= \left(n - \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(n - \frac{1}{2}\right) \\ &= \left(n - \frac{1}{2}\right) \frac{(2(n - 1))!\sqrt{\pi}}{4^{(n-1)}(n - 1)!} \\ &= \left(\frac{2n - 1}{2}\right) \frac{(2n - 2)!\sqrt{\pi}}{4^{(n-1)}(n - 1)!} \\ &= \frac{2n}{2n} \frac{(2n - 1)}{2} \frac{(2n - 2)!\sqrt{\pi}}{4^{(n-1)}(n - 1)!} \\ \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) &= \frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{4^n n!}.\end{aligned}$$

Et la même démonstration pour la deuxième l'expression .

5. Voir [13]

□

Exemple 2.1.

- $\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{4}{3}\sqrt{\pi} \approx 2.363271801207$.
- $\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = -2\sqrt{\pi} \approx -3.544907701811$.
- $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} \approx 0.886226925453$.
- $\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{4}\sqrt{\pi} \approx 1.329340388179$.
- $\Gamma\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{15}{8}\sqrt{\pi} \approx 3.323350970448$.

2.1.2 La fonction bêta

La fonction bêta est appelée intégrale d'Euler du premier type.

Définition 2.1.2. La fonction Bêta est définie par :[13]

$$B(z, w) = \int_0^1 t^{z-1}(1 - t)^{w-1} dt, \quad (\Re(z) > 0, \Re(w) > 0). \quad (2.2)$$

Par exemple pour trouver :

$$\begin{aligned}B(2, 3) &= \int_0^1 t(1 - t)^2 dt \\ &= \int_0^1 (t - 2t^2 + t^3) dt \\ &= \frac{1}{12}.\end{aligned}$$

Proposition 2.1.2. *La relation entre la fonction Gamma et la fonction Bêta sont données par :[\[13\]](#)*

$$B(z, w) = \frac{\Gamma(z) \cdot \Gamma(w)}{\Gamma(z + w)}, (z, w \in \mathbb{C}; \Re(z), \Re(w) > 0). \quad (2.3)$$

Démonstration. [\[8\]](#)

$$\begin{aligned} \Gamma(z)\Gamma(w) &= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} t_1^{z-1} t_2^{w-1} e^{-t_1} e^{-t_2} dt_1 dt_2 \\ &= \int_0^{+\infty} t_1^{z-1} \left(\int_0^{+\infty} t_2^{w-1} e^{-(t_1+t_2)} dt_2 \right) dt_1. \end{aligned}$$

Par changement de variable

$$t'_2 = t_1 + t_2.$$

On trouve

$$\begin{aligned} \Gamma(z)\Gamma(w) &= \int_0^{+\infty} t_1^{z-1} dt_1 \int_0^{+\infty} (t'_2 - t_1)^{w-1} e^{-t'_2} dt'_2 \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-t'_2} dt'_2 \int_0^{t'_2} (t'_2 - t_1)^{w-1} t_1^{z-1} dt_1. \end{aligned}$$

Si on pose $t'_1 = \frac{t_1}{t'_2}$, on arrive à :

$$\begin{aligned} &= \int_0^{+\infty} e^{-t'_2} dt'_2 \left(\int_0^1 (t'_1 t'_2)^{z-1} (t'_2 - t'_1 t'_2)^{w-1} t'_2 dt'_1 \right) \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-t'_2} dt'_2 \left((t'_2)^{z+w-1} B(z, w) \right) \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-t'_2} (t'_2)^{z+w-1} dt'_2 B(z, w) \\ &= \Gamma(z + w) B(z, w). \end{aligned}$$

Ce qui donne le résultat désiré. □

Corollaire 2.1.1. [\[13\]](#) *La fonction Bêta est symétrique : $B(z, w) = B(w, z)$*

Démonstration. On a :

$$B(z, w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z + w)} = \frac{\Gamma(w)\Gamma(z)}{\Gamma(w + z)} = B(w, z).$$

□

2.1.3 Fonction Mittag-Leffler

La fonction Mittag-Leffler joue un rôle très important dans la théorie des équations différentielles d'ordre entier, et on la trouve largement utilisée dans la résolution des équations différentielles d'ordre fractionnaire. Cette fonction a été présentée par G. M. Mittag-Leffler, et étudié par A. Wiman .

Définition 2.1.3. [\[13\]](#) *La fonction de Mittag-Leffler $E_\alpha(z)$ est définie par :*

$$E_\alpha(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{\Gamma(n\alpha + 1)} \quad (z \in \mathbb{C}, \alpha > 0), \quad (2.4)$$

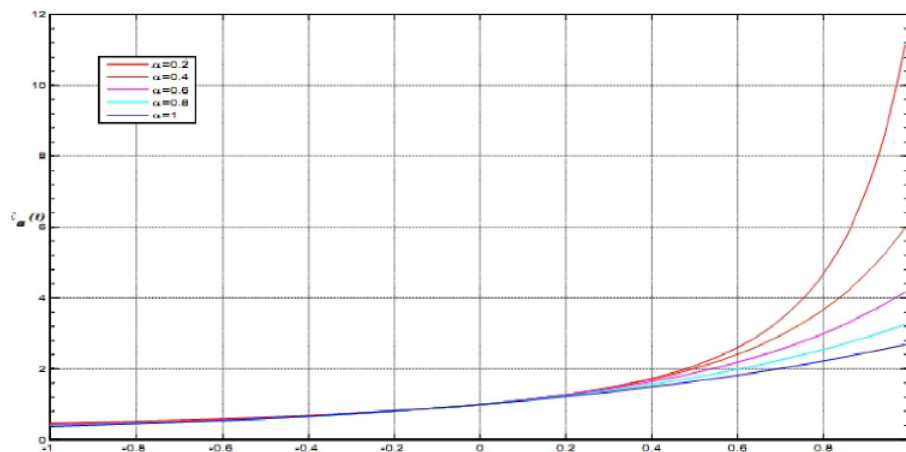


FIGURE 2.2 – La fonction de Mittag-Leffler à un seul paramètre

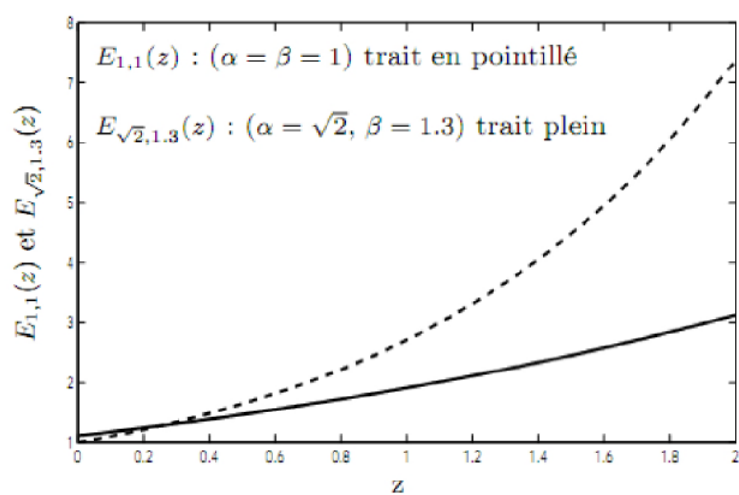


FIGURE 2.3 – La fonction de Mittag-Leffler à deux paramètres

et la fonction Mittag-Leffler généralisée $E_{\alpha,\beta}(z)$ est définie comme suit :

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{\Gamma(n\alpha + \beta)} \quad (\alpha, \beta > 0). \quad (2.5)$$

Exemple 2.2. [13] Pour des valeurs spéciales donnée à α et β on a :

$$\begin{aligned} E_{1,1}(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z. \\ E_{1,2}(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+2)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+1)!} = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{e^z - 1}{z}. \\ E_{1,3}(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+3)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+2)!} = \frac{1}{z^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{k+2}}{(k+2)!} = \frac{e^z - 1 - z}{z^2}. \end{aligned}$$

2.2 L'intégrale fractionnaire sur un intervalle [a, b]

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$. On considère les intégrales suivante

$$\begin{aligned} D^{(-1)}f(t) &= \int_a^t f(\tau) d\tau, \\ D^{(-2)}f(t) &= \int_a^t d\tau_1 \int_a^{\tau_1} f(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

En permutant l'ordre d'intégration, on obtient

$$D^{(-2)}f(t) = \int_a^t (t - \tau) f(\tau) d\tau,$$

plus généralement le n^{ime} itéré de l'Opérateur D^- peut s'écrire

$$D^{-n}f(t) = \int_a^t d\tau_1 \int_a^{\tau_1} d\tau_2 \dots \int_a^{\tau_{n-1}} f(\tau_n) d\tau_n = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t - \tau)^{n-1} f(\tau) d\tau.$$

Pour tout entier n . Cette formule est appelée formule de Cauchy et depuis la généralisation du factoriel par la fonction Gamma : $(n-1)! = \Gamma(n)$. [6]

Définition 2.2.1. [18] Soit $\Omega = [a, b]$ ($-\infty < a < b < \infty$) l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville de la fonction f d'ordre $\alpha \in \mathbb{R}_+$ notée ${}_a D_t^{-\alpha} f(t)$ et ${}_t D_b^{-\alpha} f(t)$ sont définies par :

$${}_a D_t^{-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau, \quad t > a, \quad \alpha > 0, \quad (2.6)$$

et

$${}_t D_b^{-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^b (\tau - t)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau, \quad t < b, \quad \alpha > 0. \quad (2.7)$$

Quand $\alpha = n \in \mathbb{N}$, les définitions (2.6), (2.7) on obtient :

$${}_a D_t^{-n} f(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t - \tau)^{n-1} f(\tau) d\tau, \quad t > a, \quad (2.8)$$

et

$${}_t D_b^{-n} f(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_t^b (\tau - t)^{n-1} f(\tau) d\tau, \quad t < b. \quad (2.9)$$

Proposition 2.2.1. [18]

(1) Si $\alpha \geq 0$ et $\beta > 0$, alors :

$${}_a D_t^{-\alpha} (t-a)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+\alpha)} (t-a)^{\beta+\alpha-1} (\alpha > 0),$$

et

$${}_t D_b^{-\alpha} (b-t)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+\alpha)} (b-t)^{\beta+\alpha-1} (\alpha > 0).$$

(2) Si $\alpha > 0$, $\beta > 0$ et $f \in L_p([a, b], \mathbb{R}^n)$ ($1 \leq p < \infty$) pour $t \in [a, b]$ alors :

$${}_a D_t^{-\alpha} ({}_a D_t^{-\beta} f(t)) = {}_a D_t^{-\alpha-\beta} f(t) \quad \text{et} \quad {}_t D_b^{-\alpha} ({}_t D_b^{-\beta} f(t)) = {}_t D_b^{-\alpha-\beta} f(t).$$

Exemple 2.3. [6] Soit $f(t) = t^\mu$ et $\mu > -1$ par définition :

$$\begin{aligned} {}_a D_t^{-\nu} t^\mu &= \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_a^t (t-\tau)^{\nu-1} \tau^\mu d\tau, \\ &= \frac{B(\nu, \mu+1)}{\Gamma(\nu)} t^{\nu+\mu}, \\ &= \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+\nu+1)} t^{\mu+\nu}, \quad \Re(\nu) > 0, t > 0. \end{aligned}$$

2.3 Dérivés fractionnaires de Riemann-Liouville

Définition 2.3.1. ([19]) Les dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville à gauche et à droite ${}_a D_t^\alpha f(t)$ et ${}_t D_b^\alpha f(t)$ d'ordre $\alpha \in \mathbb{R}_+$, sont définies par

$$\begin{aligned} {}_a D_t^\alpha f(t) &= \frac{d^n}{dt^n} {}_a D_t^{-(n-\alpha)} f(t) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \left(\int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau \right), \quad t > a \end{aligned} \tag{2.10}$$

et

$$\begin{aligned} {}_t D_b^\alpha f(t) &= (-1)^n \frac{d^n}{dt^n} {}_t D_b^{-(n-\alpha)} f(t) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} (-1)^n \frac{d^n}{dt^n} \left(\int_t^b (\tau-t)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau \right), \quad t < b \end{aligned} \tag{2.11}$$

respectivement, où $n = [\alpha] + 1$, $[\alpha]$ désigne la partie entière de α .

En particulier, quand $\alpha = n \in \mathbb{N}_0$, alors

$${}_a D_t^0 f(t) = {}_t D_b^0 f(t) = f(t).$$

$${}_a D_t^n f(t) = f^{(n)}(t) \quad \text{et} \quad {}_t D_b^n f(t) = (-1)^n f^{(n)}(t).$$

où $f^{(n)}(t)$ est la dérivée habituel de $f(t)$ d'ordre n . Si $0 < \alpha < 1$, alors

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \left(\int_a^t (t-\tau)^{-\alpha} f(\tau) d\tau \right), \quad t > a$$

et

$${}_t D_b^\alpha f(t) = -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \left(\int_t^b (\tau-t)^{-\alpha} f(\tau) d\tau \right), \quad t < b$$

Proposition 2.3.1. [18]

(1) Si $\alpha \geq 0$ et $\beta > 0$, alors

$${}_a D_t^\alpha (t-a)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} (t-a)^{\beta-\alpha-1} (\alpha \geq 0),$$

et

$${}_t D_b^\alpha (b-t)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} (b-t)^{\beta-\alpha-1} (\alpha \geq 0).$$

En particulier, si $\beta = 1$ et $\alpha \geq 0$, alors la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville de constante est :

$${}_a D_t^\alpha 1 = \frac{(t-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \quad \text{et} \quad {}_t D_b^{-\alpha} 1 = \frac{(b-t)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}.$$

D'autre part, pour $j = 1, 2, \dots, [\alpha] + 1$:

$${}_a D_t^\alpha (t-a)^{\alpha-j} = 0 \quad \text{et} \quad {}_a D_b^\alpha (b-t)^{\alpha-j} = 0.$$

Exemple 2.4. [13]) La dérivée fractionnaire d'ordre p au sens de Riemann-Liouville du fonction $f(t) = (t-a)^\nu$:

- La définition de la dérivée au sens de Riemann-Liouville d'ordre p est :

$${}_a D_t^p (t-a)^\nu = \frac{d^n}{dt^n} \left({}_a D_t^{-(n-p)} (t-a)^\nu \right), \quad (n-1 \leq p < n).$$

- L'intégrale fractionnaire d'ordre $\alpha = n - p$ de cette fonction est donné

$${}_a D_t^{-\alpha} ((t-a)^\nu) = \frac{\Gamma(1+\nu)}{\Gamma(1+\nu+\alpha)} (t-a)^{\nu+\alpha}.$$

- Nous obtenons aussi

$${}_a D_t^p ((t-a)^\nu) = \frac{\Gamma(1+\nu)}{\Gamma(1+\nu-p)} (t-a)^{\nu-p},$$

et la seule restriction pour $f(t) = (t-a)^\nu$ est son intégrabilité, à savoir $\nu > -1$.

Les dérivées fractionnaires de quelque fonctions au sens de Riemann-Liouville

[13]

$f(t)$	${}_0 D_t^\alpha f(t), \quad (t > 0, \quad \alpha \in \mathbb{R})$
$\delta(t)$ Dirac	$\frac{t^{-\alpha-1}}{\Gamma(-\alpha)}$
t^ν	$\frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu+1-\alpha)} t^{\nu+\alpha} \quad (\nu > -1)$
$e^{\lambda t}$	$t^{-\alpha} E_{1,1-\alpha}(\lambda t)$
$\cosh(\sqrt{\lambda} t)$	$t^{-\alpha} E_{2,1-\alpha}(\lambda t^2)$
$\frac{\sinh(\sqrt{\lambda} t)}{\sqrt{\lambda} t}$	$t^{1-\alpha} E_{2,2-\alpha}(\lambda t^2)$
$t^{\beta-1} E_{\mu,\beta}(\lambda t^\mu)$	$t^{\beta-\alpha-1} E_{\mu,\beta-\alpha}(\lambda t^\mu) \quad (\beta > 0, \quad \mu > 0)$

2.4 Composition d'intégrale fractionnaire de Riemann – Liouville et sa dérivée

Proposition 2.4.1. ([13],[18])

(1) Si $\alpha > 0$ et $f \in L_p([a, b], \mathbb{R}^n)$ ($1 \leq p \leq \infty$), alors

$${}_a D_t^\alpha ({}_a D_t^{-\alpha} f(t)) = f(t) \quad \text{et} \quad {}_t D_b^\alpha ({}_t D_b^{-\alpha} f(t)) = f(t) \quad (\alpha > 0).$$

(2) Si $\alpha > \beta > 0$ et $f \in L_p([a, b], \mathbb{R}^n)$ ($1 \leq p \leq \infty$), alors

$${}_a D_t^\beta ({}_a D_t^{-\alpha} f(t)) = {}_a D_t^{-\alpha+\beta} f(t) \quad \text{et} \quad {}_t D_b^\beta ({}_t D_b^{-\alpha} f(t)) = {}_t D_b^{-\alpha+\beta} f(t) \quad (\alpha > 0).$$

(3) Si la dérivée fractionnaire de la fonction $f(t)$ d'ordre p est intégrable, alors

$${}_a D_t^{-p} ({}_a D_t^p f(t)) = f(t) - \sum_{j=1}^k [{}_a D_t^{p-j} f(t)]_{t=a} \frac{(t-a)^{p-j}}{\Gamma(p-j+1)}, \quad (k-1 \leq p < k).$$

• Un cas particulier. Si $0 < p < 1$, alors

$${}_a D_t^{-p} ({}_a D_t^p f(t)) = f(t) - [{}_a D_t^{p-1} f(t)]_{t=a} \frac{(t-a)^{p-1}}{\Gamma(p)}.$$

(4) la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville de la fonction de puissance est

$${}_a D_t^{q-p} \left\{ \frac{(t-a)^{q-j}}{\Gamma(1+q-j)} \right\} = \frac{(t-a)^{p-j}}{\Gamma(1+p-j)}. \quad (2.12)$$

2.5 La dérivation fractionnaire au sens de Caputo

Les dérivées de Riemann-Liouville présentent des inconvénients lorsqu'ils tentent de façonner des phénomènes réels par des équations différentielles fractionnaires. Nous allons donc maintenant aborder un concept modifié de dérivée fractionnaire. Nous montrerons que la deuxième option est plus appropriée pour de telles tâches.

Définition 2.5.1. [18] La dérivée fractionnaire de Caputo à gauche et à droite ${}_a^C D_t^\alpha f(t)$ et ${}_t^C D_b^\alpha f(t)$ d'ordre $\alpha \in \mathbb{R}_+$ sont définis par :

$${}_a^C D_t^\alpha f(t) = {}_a D_t^\alpha \left[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k \right], \quad (2.13)$$

et

$${}_t^C D_b^\alpha f(t) = {}_t D_b^\alpha \left[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(b)}{k!} (b-t)^k \right]. \quad (2.14)$$

respectivement, tel que

$$n = [\alpha] + 1 \text{ pour } \alpha \notin \mathbb{N}_0; \quad n = \alpha \text{ pour } \alpha \in \mathbb{N}_0. \quad (2.15)$$

En particulier, quand $0 < \alpha < 1$, alors

$${}_a^C D_t^\alpha f(t) = {}_a D_t^\alpha (f(t) - f(a)),$$

et

$${}_t^C D_b^\alpha f(t) = {}_t D_b^\alpha (f(t) - f(b)).$$

La dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville et la dérivée fractionnaire de Caputo sont reliées l'un à l'autre par les relations suivantes.

Remarque 2.1.

- Si $\alpha = n \in \mathbb{N}_0$ et la dérivée habituel $f^{(n)}(t)$ d'ordre n existe, alors ${}_a^C D_t^n f(t)$ et ${}_t^C D_b^n f(t)$ sont représentées par

$${}_a^C D_t^n f(t) = f^{(n)}(t) \quad \text{et} \quad {}_t^C D_b^n f(t) = (-1)^n f^{(n)}(t). \quad (2.16)$$

En particulier :

$${}_a^C D_t^0 f(t) = {}_t^C D_b^0 f(t) = f(t).$$

Proposition 2.5.1. [18] Si $\alpha \notin \mathbb{N}_0$, alors les dérivées fractionnaires de Caputo ${}_a^C D_t^\alpha f(t)$ et ${}_t^C D_b^\alpha f(t)$ d'ordre $\alpha \in \mathbb{R}_+$ de la fonction f sont existées en même temps avec les dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville ${}_a D_t^\alpha f(t)$ et ${}_t D_b^\alpha f(t)$ comme suit

$${}_a^C D_t^\alpha f(t) = {}_a D_t^\alpha f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k - \alpha + 1)} (t - a)^{k-\alpha},$$

et

$${}_t^C D_b^\alpha f(t) = {}_t D_b^\alpha f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(b)}{\Gamma(k - \alpha + 1)} (b - t)^{k-\alpha},$$

où $n = [\alpha] + 1$. En particulier, quand $0 < \alpha < 1$, on a

$${}_a^C D_t^\alpha f(t) = {}_a D_t^\alpha f(t) - \frac{f(a)}{\Gamma(1 - \alpha)} (t - a)^{-\alpha},$$

et

$${}_t^C D_b^\alpha f(t) = {}_t D_b^\alpha f(t) - \frac{f(b)}{\Gamma(1 - \alpha)} (b - t)^{-\alpha}.$$

Proposition 2.5.2. [18] Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+$ et n est donné par (2.15). Si $f \in AC^n([a, b], \mathbb{R}^n)$, alors les dérivées fractionnaires de Caputo ${}_a^C D_t^\alpha f(t)$ et ${}_t^C D_b^\alpha f(t)$ sont existées presque partout sur $[a, b]$.

Si $\alpha \notin \mathbb{N}_0$, ${}_a^C D_t^\alpha f(t)$ et ${}_t^C D_b^\alpha f(t)$ sont représentées par

$${}_a^C D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \left(\int_a^t (t - \tau)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau) d\tau \right),$$

et

$${}_t^C D_b^\alpha f(t) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n - \alpha)} \left(\int_t^b (\tau - t)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau) d\tau \right),$$

respectivement, tel que $n = [\alpha] + 1$.

En particulier, quand $0 < \alpha < 1$ et $f \in AC([a, b], \mathbb{R}^n)$

$${}_a^C D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} \left(\int_a^t (t - \tau)^{-\alpha} f'(\tau) d\tau \right),$$

et

$${}_t^C D_b^\alpha f(t) = -\frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} \left(\int_t^b (\tau - t)^{-\alpha} f'(\tau) d\tau \right).$$

Proposition 2.5.3. [18]

- Soit $\alpha > 0$ et $y \in L_\infty([a, b], \mathbb{R}^n)$ ou $y \in C([a, b], \mathbb{R}^n)$ alors

$${}_a^C D_t^\alpha ({}_a D_t^{-\alpha} y(t)) = y(t) \quad \text{et} \quad {}_t^C D_b^\alpha ({}_t D_b^{-\alpha} y(t)) = y(t).$$

- Soit $\alpha > 0$ et n donné par (2.15). Si $y \in AC^n([a, b], \mathbb{R}^n)$ ou $y \in C^n([a, b], \mathbb{R}^n)$ alors

$${}_a D_t^{-\alpha} ({}_a^C D_t^\alpha y(t)) = y(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k,$$

et

$${}_t D_b^{-\alpha} ({}_t^C D_b^\alpha y(t)) = y(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k y^{(k)}(b)}{k!} (b-t)^k.$$

En particulier, si $0 < \alpha \leq 1$ et $y \in AC([a, b], \mathbb{R}^n)$ ou $y \in C([a, b], \mathbb{R}^n)$ alors

$${}_a D_t^{-\alpha} ({}_a^C D_t^\alpha y(t)) = y(t) - y(a) \quad \text{et} \quad {}_t D_b^{-\alpha} ({}_t^C D_b^\alpha y(t)) = y(t) - y(b).$$

2.6 Comparaison entre la dérivée de Caputo et de Riemann-Liouville

La dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre α d'une fonction constante est donnée par :

$${}_a D_t^\alpha C = \frac{C}{\Gamma(1-\alpha)} (t-a)^{-\alpha}, \quad {}_t D_b^\alpha C = \frac{C}{\Gamma(1-\alpha)} (b-t)^{-\alpha},$$

mais la dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'ordre p d'une fonction constante est nulle

$${}_a^C D_t^p C = 0.$$

2.7 Quelques propriétés des dérivées fractionnaires

Théorème 2.1 (Linéarité). [13] L'Opérateur de dérivée fractionnaire est un Opérateur linéaire

$$D^p(\lambda f(t) + \mu g(t)) = \lambda D^p f(t) + \mu D^p g(t), \quad t > 0.$$

Démonstration. Par exemple, pour l'opérateur de la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre p ($k-1 \leq p < k$)

$$\begin{aligned} {}_0 D_t^p(\lambda f(t) + \mu g(t)) &= \frac{1}{\Gamma(k-p)} \frac{d^k}{dt^k} \int_0^t (t-\tau)^{k-p-1} (\lambda f(\tau) + \mu g(\tau)) d\tau \\ &= \frac{\lambda}{\Gamma(k-p)} \frac{d^k}{dt^k} \int_0^t (t-\tau)^{k-p-1} f(\tau) d\tau \\ &\quad + \frac{\mu}{\Gamma(k-p)} \frac{d^k}{dt^k} \int_0^t (t-\tau)^{k-p-1} g(\tau) d\tau \\ &= \lambda {}_0 D_t^p f(t) + \mu {}_0 D_t^p g(t). \end{aligned}$$

□

Définition 2.7.1 (Règle de Leibniz). [13]

On sait que de la règle de Leibniz pour calculer la dérivée n -ième du produit de deux fonctions $f(t)$, $g(t)$, ce qui est donné par la relation suivante :

$$\frac{d^n}{dt^n} (f(t)g(t)) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(t) g^{(n-k)}(t). \quad (2.17)$$

En remplaçant l'entier n par un paramètre réel p , dans le membre à droite de (2.17), on obtient la formule :

$$D^p (f(t)g(t)) = \sum_{k=0}^n \binom{p}{k} f^{(k)}(t) D^{(p-k)} g(t) - R_n^p, \quad n \geq p + 1, \quad (2.18)$$

où

$$R_n^p(t) = \frac{1}{n! \Gamma(-p)} \int_a^t (t - \tau)^{-p-1} g(\tau) d\tau \int_\tau^t f^{(n+1)}(\xi) (\tau - \xi)^n d\xi, \quad (2.19)$$

telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n^p(t) = 0.$$

Alors on a une généralisation de la règle de Leibniz d'ordres fractionnaires.

Chapitre 3

Résolutions de quelques équations différentielles d'ordre fractionnaire via transformée de Laplace

Dans ce chapitre, nous utilisons la formule de transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire pour résoudre des équations différentielles fractionnaires linéaires avec coefficients constants comme suit :[13]

$$\int_0^\infty e^{-st} {}_0D_t^\alpha f(t) dt = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k \left[{}_0D_t^{\alpha-k-1} f(t) \right]_{t=0},$$
$$(n-1 < \alpha \leq n).$$

3.1 Transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire

La méthode de transformation de Laplace est un outil extrêmement utile pour résoudre des problèmes de valeurs initiales linéaires (fractionnaires ou classiques).

Définition 3.1.1. [13] La fonction $F(s)$ de la variable complexe s définie par

$$F(s) = L\{f(t); s\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt, \quad (3.1)$$

est appelée transformée de Laplace de la fonction $f(t)$.

- * Pour l'existence de l'intégrale (3.1) la fonction $f(t)$ doit être d'ordre exponentiel α .
- * On peut trouver l'originale $f(t)$ de la transformée de Laplace $F(s)$ à l'aide de la transformée de Laplace inverse.
- * On note la transformée de Laplace par des lettres majuscules et les originaux en minuscules.

- la transformée de Laplace inverse est

$$f(t) = L^{-1}\{F(s); t\} = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{st} F(s) ds, \quad c = \Re(s) > c_0,$$

où c_0 réside dans le demi-plan droit de la convergence absolue de l'intégrale de Laplace.

Pour indiquer que f est la transformée inverse unique de F .

- La transformée de Laplace de la convolution

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau,$$

de deux fonctions $f(t)$ et $g(t)$, qui sont égales à zéro pour $t < 0$, est égale au produit de leurs transformées de Laplace :

$$L\{f(t) * g(t); s\} = F(s)G(s),$$

sous l'hypothèse que $F(s)$ et $G(s)$ existent.

- La formule de la transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire d'un ordre entier n de la fonction $f(t)$:

$$L\{f^n(t); s\} = s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^{(k)}(0) = s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k f^{(n-k-1)}(0).$$

3.1.1 Propriétés de la transformée de Laplace

Soient les fonctions f_1 , f_2 et f_3 définies sur $[0, \infty)$, les transformées de Laplace des ces fonctions existent pour $s \geq s_0$ comme $s_0 \in \mathbb{R}$. [4]

1. Si $f_3 = a_1 f_1 + a_2 f_2$ avec a_1 et $a_2 \in \mathbb{R}$ donc :

$$F_3(s) = a_1 F_1(s) + a_2 F_2(s).$$

(Linéarité de la transformée de Laplace)

2. Si $f_3(x) = \int_0^x f_1(t)dt$ et $s > \max\{0, s_0\}$

$$F_3(s) = \frac{1}{s} F_1(s).$$

(l'intégration du théorème)

3. Soit $a > 0$ et $f_3(x) = f_1(ax)$. Alors

$$F_3(s) = \frac{1}{a} F_1(s/a).$$

4. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $f_3(x) = e^{-ax} f_1(x)$. Alors

$$F_3(s) = F_1(s + a).$$

Tableau récapitule certaines transformations de Laplace de quelque fonctions et certaines propriétés des transformées de Laplace

[6]

Une fonction f(t)	Transformer F(s)	Une fonction f(t)	Transformer F(s)
$t^{m-1}e^{at}$	$\frac{\Gamma(m)}{(s-a)^m} (m > 0)$	$af(t) + bg(t)$	$aF(s) + bG(s)$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$	$\underbrace{\int_0^t d\tau \cdots \int_0^\tau f(\tau') d\tau'}_{n \text{ fois}}$	$s^{-n} F(s)$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$	$f^n(t)$	$s^n F(s) - \sum_{j=0}^{n-1} s^{n-1-j} f^j(0)$
$t^m (m > -1)$	$\frac{\Gamma(m+1)}{s^{m+1}}, \operatorname{Re} s > 0$	$f(ct)$	$\frac{1}{c} F(s/c)$
$\delta(t-a)$	e^{-as}	$tf(t)$	$-\frac{dF}{ds}$
$H(t-a)$	$\frac{1}{s} e^{-as}$	$\frac{f(t)}{t}$	$\int_s^\infty F(s') ds'$
$(\pi t)^{\frac{1}{2}} e^{-a^2/4t}$	$\frac{1}{\sqrt{s}} e^{-a\sqrt{s}}$	$\int_0^t g(t-\tau) f(\tau) d\tau$	$F(s)G(s)$

La transformée de Laplace de la fonction de Mittag-Leffler à deux paramètres

Pour obtenir la transformation de Laplace de la fonction $t^k e^{at}$. Nous allons effectuer une transformation de Laplace de la fonctions Mittag-Leffler et e^z . [13]

Au début, nous allons démontrer la formule suivante :

$$\int_0^\infty e^{-t} e^{\pm zt} dt = \frac{1}{1 \mp z}, \quad |z| < 1. \quad (3.2)$$

On utilise la série l'expansion de e^z Nous obtenons le

$$\int_0^\infty e^{-t} e^{zt} dt = \frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^\infty \frac{(\pm z)^k}{k!} \int_0^\infty e^{-t} t^k dt = \sum_{k=0}^\infty (\pm z)^k = \frac{1}{1 \mp z}. \quad (3.3)$$

Et cette formule (3.2) donné la suit

$$\int_0^\infty e^{-t} t^k e^{\pm zt} dt = \frac{k!}{(1-z)^{k+1}}, \quad (|z| < 1),$$

et

$$\int_0^\infty e^{-pt} t^k e^{\pm at} dt = \frac{k!}{(p \mp a)^{k+1}}, \quad (\Re(p) > |a|).$$

Nous remplaçons la définition de la fonction Mittag-Leffler (2.5) Dans l'intégration ci-dessous

$$\int_0^\infty e^{-t} t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(zt^\alpha) dt = \frac{1}{1-z}, \quad (|z| < 1). \quad (3.4)$$

Nous avons obtenu (3.4) par la transformée de Laplace de la fonction $t^{\alpha k + \beta - 1} E_{\alpha, \beta}^{(k)}(\pm z t^{(\alpha)})$,
 $(E_{\alpha, \beta}^{(k)}(y) \equiv \frac{d^k}{dy^k} E_{\alpha, \beta}(y))$:

$$\int_0^\infty e^{-pt} t^{\alpha k + \beta - 1} E_{\alpha, \beta}^{(k)}(\pm a t^\alpha) dt = \frac{k! p^{\alpha - \beta}}{(p^\alpha \mp a)^{k+1}}, \quad (\Re(p) > |a|^{1/\alpha}). \quad (3.5)$$

Cas particulier de (3.5) pour $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$

$$\int_0^\infty e^{-pt} t^{\frac{k-1}{2}} E_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^{(k)}(\pm a \sqrt{t}) dt = \frac{k!}{(\sqrt{p} \mp a)^{k+1}}, \quad (\Re(p) > a^2).$$

La transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville

Proposition 3.1.1. *La transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre $p > 0$ est définie par [13] :*

$$L\{ {}_0 D_t^p f(t); s \} = s^p F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k [{}_0 D_t^{p-k-1} f(t)]_{t=0} \quad (n-1 \leq p < n). \quad (3.6)$$

Démonstration. Nous allons commencer par la transformée de Laplace de l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre $p > 0$. On peut écrire la définition sous forme Le produit de convolution de deux fonctions $g(t) = t^{p-1}$ et $f(t)$:

$${}_0 D_t^{-p} f(t) = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^t (t - \tau)^{p-1} f(\tau) d\tau = t^{p-1} * f(t).$$

La transformée de Laplace de la fonction t^{p-1} est

$$G(s) = L\{t^{p-1}; s\} = \Gamma(p) s^{-p}.$$

On obtient la transformée de Laplace de l'intégrale fractionnelle de Riemann Liouville

$$L\{ {}_0 D_t^{-p} f(t); s \} = s^{-p} F(s).$$

On peut écrire la transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Riemann Liouville comme suit

$$\begin{aligned} {}_0 D_t^p f(t) &= g^{(n)}(t), \\ g(t) &= {}_0 D_t^{-(n-p)} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-p)} \int_0^t (t - \tau)^{n-p-1} f(\tau) d\tau, \\ &(n-1 \leq p < n). \end{aligned}$$

Nous utilisons la transformée de Laplace pour la dérivée d'ordre entier

$$L\{ {}_0 D_t^p f(t); s \} = s^n G(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k g^{(n-k-1)}(0).$$

La transformée de Laplace de la fonction $g(t)$ est

$$G(s) = s^{-(n-p)} F(s).$$

En outre, de la définition de la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville, on a

$$g^{(n-k-1)}(t) = \frac{d^{n-k-1}}{dt^{n-k-1}} {}_0D_t^{-(n-p)} f(t) = {}_0D_t^{p-k-1} f(t).$$

Au final, nous obtenons la transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre $p > 0$:

$$L \{ {}_0D_t^p f(t); s \} = s^p F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k \left[{}_0D_t^{p-k-1} f(t) \right]_{t=0}.$$

$$(n-1 \leq p < n).$$

□

Exemple 3.1. [6]

$$L \left[D^{-\mu} t^\nu \right] = \frac{\Gamma(\nu+1)}{s^{\mu+\nu+1}}, \quad \mu > 0, \nu > -1.$$

$$L \left[D^{-\mu} e^{at} \right] = \frac{1}{s^\mu (s-a)}, \quad \mu > 0.$$

$$L \left[D^{-\mu} \cos at \right] = \frac{1}{s^{\mu-1} (s^2 + a^2)}, \quad \mu > 0.$$

La transformée de Laplace de la dérivée de Caputo

Proposition 3.1.2. La formule de la transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Caputo est définie par : [13]

$$L \{ {}_0^C D_t^p f(t); s \} = s^p F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{p-k-1} f^{(k)}(0), \quad (n-1 < p \leq n). \quad (3.7)$$

Démonstration. On peut écrire la définition de la dérivée de Caputo comme suit

$${}_0^C D_t^p f(t) = {}_0D_t^{-(n-p)} g(t), \quad g(t) = f^{(n)}(t),$$

$$(n-1 < p \leq n).$$

En utilisant la formule de la transformée de Laplace de l'intégration de Riemann-Liouville, nous donnons

$$L \left\{ {}_0^C D_t^p f(t); s \right\} = s^{-(n-p)} G(s).$$

Nous utilisons la transformée de Laplace de la dérivée d'ordre entier comme suit

$$G(s) = s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^{(k)}(0) = s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k f^{(n-k-1)}(0).$$

D'où, la formule de la transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Caputo est :

$$L \left\{ {}_0^C D_t^p f(t) \right\} = s^p F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{p-k-1} f^{(k)}(0).$$

□

La transformation de Laplace de la dérivée fractionnaire séquentiel de Miller-Ross

Proposition 3.1.3. *La formule de la transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire séquentiel de Miller-Ross est définie par : [13]*

$$L \{ {}_0D_t^{\sigma_m} f(t); s \} = s^{\sigma_m} F(s) - \sum_{k=0}^{m-1} s^{\sigma_m - \sigma_{m-k}} \left[{}_0D_t^{\sigma_{m-k}-1} f(t) \right]_{t=0}, \quad (3.8)$$

$${}_0D_t^{\sigma_{m-k}-1} \equiv {}_0D_t^{\alpha_{m-k}-1} {}_0D_t^{\alpha_{m-k-1}} \dots {}_0D_t^{\alpha_1},$$

$$(k = 0, 1, \dots, m-1).$$

Démonstration. Voir [13] □

Maintenant, nous allons donner quelques exemples pour résoudre des équations différentielles linéaires fractionnaires. [13]

Exemple 3.2. *Soit l'équation suivants :*

$${}_0D_t^{\alpha} \left({}_0D_t^{\beta} y(t) \right) + {}_0D_t^q y(t) = h(t), \quad (3.9)$$

$$\text{et } 0 < \alpha < 1, 0 < \beta < 1, 0 < q < 1, \alpha + \beta = Q > q. \quad (3.10)$$

La transformée de Laplace de l'équation (3.9) donnée par :

$$(s^{\alpha+\beta} + s^q) Y(s) = H(s) + s^{\alpha} b_2 + b_1,$$

$$b_1 = \left[{}_0D_t^{\alpha-1} \left({}_0D_t^{\beta} y(t) \right) \right]_{t=0} + \left[{}_0D_t^{q-1} y(t) \right]_{t=0} \text{ et } b_2 = \left[{}_0D_t^{\beta-1} y(t) \right]_{t=0}.$$

On écrit $Y(s)$ à la forme :

$$Y(s) = \frac{s^{-q} H(s)}{s^{\alpha+\beta-q} + 1} + b_2 \frac{s^{\alpha-q}}{s^{\alpha+\beta-q} + 1} + b_1 \frac{s^{-q}}{s^{\alpha+\beta-q} + 1}.$$

Après la transformée inverse Laplace et avec l'aide (3.5), nous trouvons la solution de le problème (3.9) comme suit

$$y(t) = b_2 t^{\beta-1} E_{\alpha+\beta-q, \beta} \left(-t^{\alpha+\beta-q} \right) + b_1 t^{\alpha+\beta-q} E_{\alpha+\beta-q, \alpha+\beta} \left(-t^{\alpha+\beta-q} \right) \\ + \int_0^t (t-\tau)^{\alpha+\beta-1} E_{\alpha+\beta-q, \alpha+\beta} \left(-(t-\tau)^{\alpha+\beta-q} \right) h(\tau) d\tau.$$

Exemple 3.3. *Considérons le problème de valeur initial :*

$${}_0D_t^{\alpha_2} ({}_0D_t^{\alpha_1} y(t)) - \lambda y(t) = h(t); \quad (3.11)$$

et

$$\left[{}_0D_t^{\alpha_2-1} ({}_0D_t^{\alpha_1} y(t)) \right]_{t=0} = b_1, \quad \left[{}_0D_t^{\alpha_1-1} y(t) \right]_{t=0} = b_2. \quad (3.12)$$

Considérons $0 < \alpha_1 < 1, 0 < \alpha_2 < 1$. La transformée de Laplace de l'équation (3.11) donne

$$(s^{\alpha_1+\alpha_2} - \lambda) Y(s) = s^{\alpha_2} b_2 + b_1 + H(s).$$

Après la transformée inverse Laplace et avec l'aide (3.5), nous trouvons la solution de le problème comme suit :

$$y(t) = b_2 t^{\alpha_1-1} E_{\alpha, \alpha_1} (\lambda t^{\alpha}) + b_1 t^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha} (\lambda t^{\alpha}) \\ + \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha} (\lambda (t-\tau)^{\alpha}) h(\tau) d\tau, \\ (\alpha = \alpha_1 + \alpha_2).$$

Exemple 3.4. *Réolvons*

$${}_0D_t^{1/2}f(t) + af(t) = 0, \quad (t > 0); \quad \left[{}_0D_t^{-1/2}f(t)\right]_{t=0} = C,$$

avec a une constante, on a $\alpha = \frac{1}{2} \leq 1$. En prenant la transformée Laplace des deux côtés de l'équation que nous avons

$$L\left\{{}_0D_t^{1/2}f(t) + af(t)\right\} = 0.$$

Ce qui implique que

$$s^{\frac{1}{2}}F(s) - D^{-(1-\frac{1}{2})}f(0) + aF(s) = 0.$$

Alors

$$s^{\frac{1}{2}}F(s) + aF(s) = C, \quad \left[{}_0D_t^{-1/2}f(t)\right]_{t=0} = C.$$

Nous obtenons

$$F(s) = \frac{C}{s^{\frac{1}{2}} + a}.$$

Nous concluons que

$$f(t) = L^{-1}\left\{\frac{C}{s^{\frac{1}{2}} + a}\right\} = Ct^{-\frac{1}{2}}E_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(-at^{\frac{1}{2}}).$$

Exemple 3.5. *Réolvons*

$${}_0D_t^Q f(t) + {}_0D_t^q f(t) = h(t), \quad (3.13)$$

supposer que $0 < q < Q < 1$. En prenant la transformée Laplace des deux côtés de l'équation que nous avons

$$(s^Q + s^q)F(s) = C + H(s). \quad (3.14)$$

Où

$$C = \left[{}_0D_t^{q-1}f(t) + {}_0D_t^{Q-1}f(t)\right]_{t=0}.$$

Alors

$$F(s) = \frac{C + H(s)}{s^Q + s^q} = \frac{C + H(s)}{s^q(s^{Q-q} + 1)} = (C + H(s))\frac{s^{-q}}{s^{Q-q} + 1}. \quad (3.15)$$

On pose $\alpha = Q - q$ et $\beta = Q$. Et en considérant la transformée de Laplace de la fonction de Mittag-Leffler, on obtient

$$f(t) = CG(t) + \int_0^t G(t - \tau)h(\tau)d\tau, \quad (3.16)$$

$$C = \left[{}_0D_t^{q-1}f(t) + {}_0D_t^{Q-1}f(t)\right]_{t=0}, \quad G(t) = t^{Q-1}E_{Q-q,Q}(-t^{Q-q})$$

Exemple 3.6. *Considérons le problème de valeur initiale suivant pour l'équation différentielle fractionnaire non homogène dans des conditions initiales non nulles :*

$${}_0D_t^\alpha y(t) - \lambda y(t) = h(t), \quad (t > 0)$$

$$\left[{}_0D_t^{\alpha-k}y(t)\right]_{t=0} = b_k, \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Si $n - 1 < \alpha < n$. En prenant la transformée Laplace des deux côtés de l'équation que nous avons

$$L\{{}_0D_t^\alpha y(t) - \lambda y(t)\} = L\{h(t)\}.$$

Ce qui implique que

$$s^\alpha Y(s) - \lambda Y(s) = H(s) + \sum_{k=1}^n b_k s^{k-1},$$

nous obtenons

$$Y(s) = \frac{H(s)}{s^\alpha - \lambda} + \sum_{k=1}^n b_k \frac{s^{k-1}}{s^\alpha - \lambda},$$

d'où

$$y(t) = \sum_{k=1}^n b_k t^{\alpha-k} E_{\alpha, \alpha-k+1}(\lambda t^\alpha) + \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(\lambda(t-\tau)^\alpha) h(\tau) d\tau.$$

Exemple 3.7. Considérons $0 < \alpha < 1$, $0 < \beta < 1$, $\alpha + \beta = 1/2$ dans cette le problème :

$${}_0D_t^\alpha ({}_0D_t^\beta y(t)) + ay(t) = 0, \quad (3.17)$$

$$[{}_0D_t^{\alpha-1} ({}_0D_t^\beta y(t))]_{t=0} = b_1, \quad [{}_0D_t^{\beta-1} y(t)]_{t=0} = b_2. \quad (3.18)$$

En prenant la transformée Laplace des deux côtés de l'équation (3.17) nous avons

$$(s^{\alpha+\beta} + a) Y(s) = s^\alpha b_2 + b_1, \quad (3.19)$$

il s'ensuit que

$$Y(s) = b_2 \frac{s^\alpha}{s^{\alpha+\beta} + a} + b_1 \frac{1}{s^{\alpha+\beta} + a}. \quad (3.20)$$

Après la transformée inverse Laplace et avec l'aide (3.5), nous trouvons la solution de problème (3.17, 3.18) :

$$y(t) = b_2 t^{\beta-1} E_{\alpha+\beta, \beta}(-at^{\alpha+\beta}) + b_1 t^{\alpha+\beta-1} E_{\alpha+\beta, \alpha+\beta}(-at^{\alpha+\beta}).$$

Chapitre 4

Quelques Résultats d'existence et l'unicité des solutions des problèmes de Cauchy

Dans ce chapitre, nous présenterons quelques théorème d'existence et d'unicité des problèmes de Cauchy d'ordre fractionnaire .

4.1 Problème de Cauchy linéaire d'ordre fractionnaire

Considérons le problème de valeur initiale qui suit [13]

$${}_0D_t^{\sigma_n}y(t) + \sum_{j=1}^{n-1} p_j(t){}_0D_t^{\sigma_{n-j}}y(t) + p_n(t)y(t) = f(t), \quad (4.1)$$

$$(0 < t < T < \infty)$$

$$\left[{}_0D_t^{\sigma_k-1}y(t)\right]_{t=0} = b_k, \quad k = 1, \dots, n, \quad (4.2)$$

où

$$\begin{aligned} {}_aD_t^{\sigma_k} &\equiv {}_aD_t^{\alpha_k} {}_aD_t^{\alpha_{k-1}} \dots {}_aD_t^{\alpha_1}; \\ {}_aD_t^{\sigma_{k-1}} &\equiv {}_aD_t^{\alpha_{k-1}} {}_aD_t^{\alpha_{k-2}} \dots {}_aD_t^{\alpha_1}; \\ \sigma_k &= \sum_{j=1}^k \alpha_j, \quad (k = 1, 2, \dots, n); \\ 0 < \alpha_j &\leq 1, \quad (j = 1, 2, \dots, n), \end{aligned}$$

et $f(t) \in L_1(0, T)$, i. e.

$$\int_0^T |f(t)| dt < \infty.$$

Nous supposons que $f(t) \equiv 0$ pour $t > T$.

Comme première étape, considérons le cas de $p_k(t) \equiv 0$, $(k = 1, \dots, n)$.

Théorème 4.1. [13] Si $f(t) \in L_1(0, T)$, alors l'équation

$${}_0D_t^{\sigma_n}y(t) = f(t), \quad (4.3)$$

admet une solution unique $y(t) \in L_1(0, T)$, qui vérifie la condition initiale (4.2).

Démonstration. [13] La transformée de Laplace (3.1) de l'équation (4.3) donne

$$s^{\sigma_n} Y(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\sigma_n - \sigma_{n-k}} \left[{}_0D_t^{\sigma_{n-k}-1} y(t) \right]_{t=0} = F(s), \quad (4.4)$$

où $Y(s)$ et $F(s)$ désignent les transformées de Laplace de $y(t)$ et $f(t)$. Nous remplaçons par la condition initiale dans (4.2), on peut écrire comme suit

$$Y(s) = s^{-\sigma_n} F(s) + \sum_{k=0}^{n-1} b_{n-k} s^{-\sigma_{n-k}}. \quad (4.5)$$

La transformée de Laplace inverse donne

$$y(t) = \frac{1}{\Gamma(\sigma_n)} \int_0^t (t-\tau)^{\sigma_n-1} f(\tau) d\tau + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b_{n-k}}{\Gamma(\sigma_{n-k})} t^{\sigma_{n-k}-1}, \quad (4.6)$$

on pose $i = n - k$,

$$y(t) = \frac{1}{\Gamma(\sigma_n)} \int_0^t (t-\tau)^{\sigma_n-1} f(\tau) d\tau + \sum_{i=1}^n \frac{b_i}{\Gamma(\sigma_i)} t^{\sigma_i-1}. \quad (4.7)$$

Nous utilisons les propriétés de la différenciation de Riemann-Liouville de la fonction de puissance et en tenant compte de cela

$$\frac{1}{\Gamma(-m)} = 0, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

$${}_0D_t^{\sigma_k} \left(\frac{t^{\sigma_i-1}}{\Gamma(\sigma_i)} \right) = \begin{cases} \frac{t^{\sigma_i-\sigma_k-1}}{\Gamma(\sigma_i-\sigma_k)} & , \quad (k < i) \\ 0 & , \quad (k \geq i) \end{cases} \quad (4.8)$$

$${}_0D_t^{\sigma_k-1} \left(\frac{t^{\sigma_i-1}}{\Gamma(\sigma_i)} \right) = \begin{cases} \frac{t^{\sigma_i-\sigma_k}}{\Gamma(1+\sigma_i-\sigma_k)} & , \quad (k < i) \\ 1 & , \quad (k = i) \\ 0 & , \quad (k > i) \end{cases} \quad (4.9)$$

Il résulte de (4.7) que $y(t)$ dans $L_1(0, T)$. En utilisant (4.8) et (4.9), la substitution directe de la fonction $y(t)$ définie par l'expression (4.7) dans l'équation (4.3) et les conditions initiales (4.2) montre que $y(t)$ les satisfait, et donc, l'existence de la solution est prouvée. Reste à montrer l'unicité de cette dernière. Pour cela, posons $z(t) = y_1(t) - y_2(t)$ où y_1 et y_2 sont deux solutions (dans $L_1(0; T)$) du problème (4.3).

Et donc $z(t)$ sera solution du problème suivant :

$$\begin{cases} {}_0D_t^{\sigma_n} z(t) = 0, \\ \left[{}_0D_t^{\sigma_{n-1}} z(t) \right]_{t=0} = 0. \end{cases} \quad (4.10)$$

En appliquant la transformée de Laplace dans les deux membres de la première équation de (4.9), on obtient

$$Z(s) = L\{z(t); s\} = 0,$$

et donc $z(t) = 0$ pour presque tout $t \in (0, T)$, ce qui prouve que la solution $y(t)$ est l'unique solution dans $L_1(0, T)$ du problème (4.3). $\square$

Maintenant, nous pouvons prouver l'existence et l'unicité de la solution du problème (4.1), (4.2).

Théorème 4.2. [13] Si $f(t) \in L_1(0, T)$ et $p_j(t) (j = 1, \dots, n)$ sont des fonctions continues dans l'intervalle fermé $[0, T]$, alors le problème du valeur initiale (4.1)-(4.2) admet une solution unique $y(t) \in L_1(0, T)$.

Démonstration. La méthode de preuve de ce théorème utilise l'idée de base de MM. M. Dzhrbashyan et A. B. Nersesyan.

Supposons que le problème (4.1)-(4.2) admet une solution $y(t)$. et dénoter

$${}_0D_t^{\sigma_n} y(t) = \varphi(t) \quad (4.11)$$

En utilisant le théorème (4.1), on a

$$y(t) = \frac{1}{\Gamma(\sigma_n)} \int_0^t (t - \tau)^{\sigma_n - 1} \varphi(\tau) d\tau + \sum_{i=1}^n b_i \frac{t^{\sigma_i - 1}}{\Gamma(\sigma_i)} \quad (4.12)$$

Nous substituons (4.12) à l'équation (4.1)

$${}_0D_t^{\sigma_n} y(t) + \sum_{k=1}^{n-1} p_{n-k}(t) {}_0D_t^{\sigma_k} y(t) + p_n(t) y(t) = f(t) \quad (4.13)$$

et en utilisant (4.8), on obtient l'équation intégrale de Volterra du second type pour la fonction $\varphi(t)$:

$$\varphi(t) + \int_0^t K(t, \tau) \varphi(\tau) d\tau = g(t), \quad (4.14)$$

Où

$$K(t, \tau) = p_n(t) \frac{(t - \tau)^{\sigma_n - 1}}{\Gamma(\sigma_n)} + \sum_{k=1}^{n-1} p_{n-k}(t) \frac{(t - \tau)^{\sigma_n - \sigma_k - 1}}{\Gamma(\sigma_n - \sigma_k)},$$

$$g(t) = f(t) - p_n(t) \sum_{i=1}^n b_i \frac{t^{\sigma_i - 1}}{\Gamma(\sigma_i)} - \sum_{k=1}^{n-1} p_{n-k}(t) \sum_{i=k+1}^n b_i \frac{t^{\sigma_i - \sigma_k - 1}}{\Gamma(\sigma_i - \sigma_k)}.$$

Puisque la fonction $p_j(t) (j = 1, \dots, n)$ est continue, alors le noyau peut être écrit à la forme d'un noyau faiblement singulier

$$K(t, \tau) = \frac{K^*(t, \tau)}{(t - \tau)^{1-\mu}}, \quad (4.15)$$

où $K^*(t, \tau)$ est continue pour $0 \leq t \leq T, 0 \leq \tau \leq T$, et

$$\mu = \min \{ \sigma_n, \sigma_n - \sigma_{n-1}, \sigma_n - \sigma_{n-2}, \dots, \sigma_n - \sigma_1, \} = \min \{ \sigma_n, \alpha_n \}$$

De même, $g(t)$ peut être écrit à la forme

$$g(t) = \frac{g^*(t)}{t^{1-\nu}} \quad (4.16)$$

où $g^*(t)$ est continue pour $0 \leq t \leq T$, et

$$\nu = \min \{ \sigma_1, \dots, \sigma_n; \sigma_2 - \sigma_1, \dots, \sigma_n - \sigma_1 \}$$

$$\sigma_3 - \sigma_2, \dots, \sigma_n - \sigma_2; \dots; \sigma_n - \sigma_{n-1}\}$$

$$= \min \{\sigma_1, \dots, \sigma_n; \alpha_2, \dots, \alpha_n\} = \min \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$$

Évidemment $0 < \mu \leq 1$, $0 < \nu \leq 1$. On sait que l'équation (4.14) avec le noyau faiblement singulier (4.15) et le côté droit $g(t) \in L_1(0, T)$ admet une solution unique $\varphi(t) \in L_1(0, T)$.

Ensuite, selon le théorème 4.1, la solution unique $y(t) \in L_1(0, T)$ du problème (4.11), (4.2) qui est en même temps la solution du problème (4.1)-(4.2), peut être déterminée à l'aide de la formule (4.12). Ceci termine la preuve du théorème 4.2. $\square$

Corollaire 4.1.1. *Considérons le problème du valeur initiale qui suit*

$$\begin{cases} {}_0D_t^\alpha y(t) = f(t), & (0 < t < T < \infty) \\ [{}_0D_t^{\alpha-1} y(t)]_{t=0} = b, \end{cases} \quad (4.17)$$

où $0 < \alpha \leq 1$ et $f(t) \in L_1(0, T)$. la solution de problème (4.17) est

$$y(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau + \frac{b}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1}.$$

D'après le théorème (4.1), $y(t) \in L_1(0, T)$ et unique.

Démonstration. Voir [7] $\square$

4.2 Équation différentielle fractionnaire d'une forme plus générale

En plus des équations différentielles fractionnaires linéaires, les équations non linéaires apparaissent dans les applications.

Dans cette section, nous discuterons l'existence et l'unicité d'une solution du problème à valeur initiale de l'équation différentielle fractionnaire .[13]

Considérons le problème à valeur initiale suivant :

$$\begin{cases} {}_0D_t^{\sigma_n} y(t) = f(t, y(t)), \\ [{}_0D_t^{\sigma_k-1} y(t)]_{t=0} = b_k, \quad k = 1, \dots, n. \end{cases} \quad (4.18)$$

Nous supposons que $f(t, y)$ est définie dans un domaine G du plan (t, y) , et nous définissons une région $R(h, K) \subset G$, comme étant l'ensemble des points $(t, y) \in G$, qui vérifient les inégalités suivantes :

$$0 < t < h, \quad |t^{1-\sigma_1} y(t) - \sum_{i=1}^n b_i \frac{t^{\sigma_i-\sigma_1}}{\Gamma(\sigma_i)}| \leq K, \quad (4.19)$$

où h et K sont des constantes.

Théorème 4.3. [13] Soit $f(t, y)$ une fonction continue à valeurs réelles, définie dans le domaine G , vérifie dans G la condition de Lipschitz par rapport à y

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq A |y_1 - y_2|,$$

où

$$|f(t, y)| \leq M < \infty \quad \text{pour tout} \quad (t, y) \in G.$$

Soit aussi

$$K \geq \frac{Mh^{\sigma_n - \sigma_1 + 1}}{\Gamma(1 + \sigma_n)}.$$

Alors il existe dans la région $R(h, K)$ une unique solution continue $y(t)$ du problème (4.18).

Démonstration. [13] La méthode de la preuve de ce théorème est basée sur l'idée due à M. A. Al-Bassam .

Tout d'abord, nous réduisons le problème (4.18) à une équation intégrale fractionnaire équivalente. En utilisant la formule(4.7), nous obtenons

$$y(t) = \sum_{i=1}^n \frac{b_i}{\Gamma(\sigma_i)} t^{\sigma_i-1} + \frac{1}{\Gamma(\sigma_n)} \int_0^t (t-\tau)^{\sigma_n-1} f(\tau, y(\tau)) d\tau. \quad (4.20)$$

On voit donc que si $y(t)$ vérifie (4.18), alors elle vérifie aussi l'équation (4.20).

D'autre part, si $y(t)$ est une solution de (4.20), alors en appliquant à(4.20) l'opérateur dérivée fractionnaire séquentiel de Miller-Ross ${}_0D_t^{\sigma_n}$ et en tenant compte du fait que la dérivée ${}_0D_t^{\alpha} t^{\alpha-1}$ est nulle, nous obtenons l'équation différentielle fractionnaire (4.18). En outre que, ${}_0D_t^{\sigma_n-1} t^{\sigma_n-1} = \Gamma(\sigma_n)$ alors si $y(t)$ vérifie (4.20), elle vérifie donc la condition initiale introduite dans (4.18). Par conséquent, l'équation (4.20) est équivalente au problème à valeur initiale (4.18).

Définissons maintenant la suite des fonctions $y_0(t); y_1(t); \dots$, par les relations suivantes :

$$y_0(t) = \sum_{i=1}^n \frac{b_i}{\Gamma(\sigma_i)} t^{\sigma_i-1}, \quad (4.21)$$

$$y_m(t) = \sum_{i=1}^n \frac{b_i}{\Gamma(\sigma_i)} t^{\sigma_i-1} + \frac{1}{\Gamma(\sigma_n)} \int_0^t (t-\tau)^{\sigma_n-1} f(\tau, y_{m-1}(\tau)) d\tau, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (4.22)$$

Nous allons montrer que la $\lim_{m \rightarrow \infty} y_m(t)$ existe et donner la solution souhaitée $y(t)$ de l'équation (4.20).

Tout d'abord, on peut montrer par récurrence que pour $0 < t \leq h$, on a $y_m(t) \in R(h, K)$ pour tout m . En effet

$$\begin{aligned} \left| t^{1-\sigma_1} y_m(t) - \sum_{i=1}^n b_i \frac{t^{\sigma_i-\sigma_1}}{\Gamma(\sigma_i)} \right| &= \left| \frac{t^{1-\sigma_1}}{\Gamma(\sigma_n)} \int_0^t (t-\tau)^{\sigma_n-1} f(\tau, y_{m-1}(\tau)) d\tau \right| \\ &\leq \frac{M t^{\sigma_n-\sigma_1+1}}{\Gamma(1+\sigma_n)} \leq \frac{M h^{\sigma_n-\sigma_1+1}}{\Gamma(1+\sigma_n)} \leq K, \end{aligned} \quad (4.23)$$

et pour la même raison on a la même inégalité pour $y_1(t)$:

$$\left| t^{1-\sigma_1} y_1(t) - \sum_{i=1}^n b_i \frac{t^{\sigma_i-\sigma_1}}{\Gamma(\sigma_i)} \right| \leq \frac{M h^{\sigma_n-\sigma_1+1}}{\Gamma(1+\sigma_n)} \leq K.$$

De plus, on peut aussi montrer par récurrence que, pour tout m

$$|y_m(t) - y_{m-1}(t)| \leq \frac{MA^{m-1}t^{m\sigma_n}}{\Gamma(1 + m\sigma_n)}. \quad (4.24)$$

En effet, en utilisant (4.23), on a pour $m = 1$:

$$|y_1(t) - y_0(t)| \leq \frac{Mt^{\sigma_n}}{\Gamma(1 + \sigma_n)}, \quad (0 < t \leq h). \quad (4.25)$$

Supposons que

$$|y_{m-1}(t) - y_{m-2}(t)| \leq \frac{MA^{m-2}t^{(m-1)\sigma_n}}{\Gamma(1 + (m-1)\sigma_n)}, \quad (0 < t \leq h). \quad (4.26)$$

Alors, en utilisant (4.22) et (4.26), et en s'aidant de la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville de la fonction de puissance (2.4.1), on aura

$$\begin{aligned} |y_m(t) - y_{m-1}(t)| &\leq \frac{A}{\Gamma(\sigma_n)} \int_0^t (t - \tau)^{\sigma_n} |y_{m-1}(\tau) - y_{m-2}(\tau)| d\tau \\ &\leq \frac{MA^{m-1}}{\Gamma(1 + (m-1)\sigma_n)} \frac{1}{\Gamma(\sigma_n)} \int_0^t (t - \tau)^{\sigma_n-1} \tau^{(m-1)\sigma_n} d\tau \\ &= \frac{MA^{m-1}}{\Gamma(1 + (m-1)\sigma_n)} {}_0D_t^{-\sigma_n} t^{(m-1)\sigma_n} \\ &= \frac{MA^{m-1}}{\Gamma(1 + (m-1)\sigma_n)} \frac{\Gamma(1 + (m-1)\sigma_n)t^{(m-1)\sigma_n + \sigma_n}}{\Gamma(1 + (m-1)\sigma_n + \sigma_n)} \\ &= \frac{MA^{m-1}t^{m\sigma_n}}{\Gamma(1 + m\sigma_n)}. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Et donc (4.24) a lieu pour tout m .

Considérons maintenant la série

$$y^*(t) = \lim_{m \rightarrow \infty} (y_m(t) - y_0(t)) = \sum_{j=1}^{\infty} (y_j(t) - y_{j-1}(t)). \quad (4.28)$$

Selon l'estimation (4.24), pour $0 < t < h$, la valeur absolue de ses termes est inférieure aux termes correspondants de la série numérique convergente.

$$M \sum_{j=1}^{\infty} \frac{MA^{j-1}h^{j\sigma_n}}{\Gamma(1 + j\sigma_n)} = \frac{M}{A} (E_{\sigma_n,1}(Ah_n^{\sigma}) - 1),$$

cela signifie que la série (4.28) converge uniformément.

Évidemment, chaque terme $(y_j(t) - y_{j-1}(t))$ de la série (4.28) est une fonction continue de t pour $0 \leq t \leq h$. Par conséquent, la somme de la série (4.28), $y^*(t)$ est une fonction continue pour $0 \leq t \leq h$ et

$$y(t) = \lim_{m \rightarrow \infty} y_m(t) = y_0(t) + y^*(t),$$

est donc une fonction continue pour $0 < t \leq h$.

La convergence uniforme de la suite $y_m(t)$ nous permet de faire tendre m vers l'infini dans la relation (4.22). Ce qui donne l'équation (4.20), montrant que $y(t)$, la limite de

fonction du processus défini par (4.21) et (4.22) est solution de (4.20).

Finalement, prouvons l'unicité de la solution. Supposons donc que $\tilde{y}(t)$ est une autre solution de l'équation (4.20), qui est continue sur l'intervalle $0 < t \leq h$. Alors, il suit de (4.20) que la fonction $z(t) = y(t) - \tilde{y}(t)$ vérifie l'équation.

$$z(t) = \frac{1}{\Gamma(\sigma_n)} \int_0^t (t - \tau)^{\sigma_n-1} f(\tau, z(\tau)) d\tau, \quad (4.29)$$

De plus, cette fonction est continue pour $0 \leq t \leq h$. Par conséquent, $|z(t)| < B$ pour $0 \leq t \leq h$, où B est une constante. Nous l'obtenons

$$|z(t)| \leq \frac{ABt^{\sigma_n}}{\Gamma(1 + \sigma_n)}, \quad (0 \leq t \leq h). \quad (4.30)$$

En répétant ces estimations j fois, on aura

$$|z(t)| \leq \frac{A^j B t^{j\sigma_n}}{\Gamma(\sigma_n)}, \quad j = 1, 2, \dots \quad (4.31)$$

Dans le membre de droite, on récupère (à une constante près) le terme général de la série associée à la fonction de Mittag-Leffler $E_{\sigma_n,1}(At_n^\sigma)$, et donc pour tout t

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{A^j t^{j\sigma_n}}{\Gamma(\sigma_n)} = 0.$$

Prenant la limite de $j \rightarrow \infty$ dans (4.31), on conclut que $z(t) \equiv 0$ et $\tilde{y}(t) \equiv y(t)$ pour $0 < t \leq h$. Ce qui achève la preuve du théorème 4.2. $\square$

4.3 Théorème d'existence et d'unicité Comme méthode de solution

Dans certains cas, le théorème 4.3 peut être utilisée pour résoudre des équations différentielles fractionnaires. Nous allons expliquer cela avec quelque exemple

Exemple 4.1. [13] *Considérons le problème de valeur initiale qui suit :*

$$\begin{aligned} {}_0D_t^{\sigma_n} y(t) &= \lambda y(t) \\ [{}_0D_t^{\sigma_k-1} y(t)]_{t=0} &= b_k, \quad k = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (4.32)$$

Dans ce cas, nous avons $f(t, y) = \lambda y$. Selon preuve théorème 4.3, on prend

$$y_0(t) = \sum_{i=1}^n b_i \frac{t^{\sigma_i-1}}{\Gamma(\sigma_i)}, \quad (4.33)$$

$$\begin{aligned} y_m(t) &= y_0(t) + \frac{\lambda}{\Gamma(\sigma_n)} \int_0^t (t - \tau)^{\sigma_n-1} y_{m-1}(\tau) d\tau \\ &= y_0(t) + \lambda {}_0D_t^{-\sigma_n} y_{m-1}(t), \\ m &= 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (4.34)$$

On rappelle L'équation différentielle fractionnaire de la fonction de puissance

$${}_aD_t^{q-p} \left\{ \frac{(t-a)^{q-j}}{\Gamma(1+q-j)} \right\} = \frac{(t-a)^{p-j}}{\Gamma(1+p-j)} \quad (4.35)$$

On utilise (4.33) et (4.34). Et en appliquant la formule différentielle fractionnaire pour la fonction de puissance (4.35), on obtient :

$$\begin{aligned}
 y_1(t) &= y_0(t) + \lambda_0 D_t^{-\sigma_n} \left\{ \sum_{i=1}^n b_i \frac{t^{\sigma_i-1}}{\Gamma(\sigma_i)} \right\} \\
 &= y_0(t) + \lambda \sum_{i=1}^n b_i \frac{t^{\sigma_n+\sigma_i-1}}{\Gamma(\sigma_n+\sigma_i)}, \\
 y_2(t) &= y_0(t) + \lambda_0 D_t^{-\sigma_n} y_1(t) \\
 &= y_0(t) + \lambda_0 D_t^{-\sigma_n} \left\{ y_0(t) + \lambda \sum_{i=1}^n b_i \frac{t^{\sigma_n+\sigma_i-1}}{\Gamma(\sigma_n+\sigma_i)} \right\} \\
 &= y_0(t) + \lambda \sum_{i=1}^n b_i \frac{t^{\sigma_n+\sigma_i-1}}{\Gamma(\sigma_n+\sigma_i)} + \lambda^2 \sum_{i=1}^n b_i \frac{t^{2\sigma_n+\sigma_i-1}}{\Gamma(2\sigma_n+\sigma_i)} \\
 &= \sum_{i=1}^n b_i \sum_{k=0}^2 \frac{\lambda^k t^{k\sigma_n+\sigma_i-1}}{\Gamma(k\sigma_n+\sigma_i)},
 \end{aligned}$$

il peut apparaître $y_m(t)$ de la manière suivante :

$$y_m(t) = \sum_{i=1}^n b_i \sum_{k=0}^m \frac{\lambda^k t^{k\sigma_n+\sigma_i-1}}{\Gamma(k\sigma_n+\sigma_i)}, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (4.36)$$

Lorsque $m \rightarrow \infty$ dans (4.36), on obtient la solution du problème (4.32) :

$$y(t) = \sum_{i=1}^n b_i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k t^{k\sigma_n+\sigma_i-1}}{\Gamma(k\sigma_n+\sigma_i)} = \sum_{i=1}^n b_i t^{\sigma_i-1} E_{\sigma_n, \sigma_i}(\lambda t^{\sigma_n}).$$

Exemple 4.2. [13] Considérons le problème de valeur initiale suivant :

$${}_0 D_t^\alpha y(t) = t^\alpha y(t), \quad \left[{}_0 D_t^{\alpha-1} y(t) \right]_{t=0} = b, \quad (4.37)$$

où $0 < \alpha < 1$.

Dans ce cas $f(t, y) = t^\alpha y$. Selon la théorème 4.3, On prend

$$y_0(t) = b \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, \quad (4.38)$$

$$\begin{aligned}
 y_m(t) &= b \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \tau^\alpha y_{m-1}(\tau) d\tau, \\
 m &= 1, 2, 3, \dots
 \end{aligned} \quad (4.39)$$

En utilisant (4.33) et (4.34) et en appliquant la formule pour la dérivée fractionnaire de la fonction de puissance (4.35), on peut montrer par induction que

$$\begin{aligned}
 y_m(t) &= b \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + b \sum_{k=1}^m \frac{\Gamma(2\alpha)\Gamma(4\alpha)\cdots\Gamma(2k\alpha)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(3\alpha)\cdots\Gamma(2k\alpha+\alpha)} t^{\alpha(2k+1)-1}, \\
 m &= 1, 2, 3, \dots
 \end{aligned}$$

En faisant tendre $m \rightarrow \infty$

$$y(t) = b \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + b \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\prod_{j=1}^k \Gamma(2j\alpha)}{\prod_{j=0}^k \Gamma(2j\alpha+\alpha)} t^{\alpha(2k+1)-1}.$$

Chapitre 5

Quelques problèmes non linéaire avec conditions intégrales

Dans ce chapitre, nous discutons l'existence et l'unicité de solutions pour quelques problèmes non linéaire avec conditions intégrales d'équations différentielles fractionnaires non linéaires.

Le travail effectué de ce chapitre a fait l'objet des publications [1],[12] .

5.1 Problème non locale

Considérons la problème non locale d'équation différentielle fractionnaire comme suit :

$$\begin{cases} {}^c D^q x(t) = f(t, x(t)), & 0 < t < 1, \quad 0 < q \leq 1, \\ x(0) = \alpha D^{-p} x(\eta), & 0 < \eta < 1, \quad 0 < p < 1, \end{cases} \quad (5.1)$$

où $f : [0, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue, $\alpha \in \mathbb{R}$ est tel que $\alpha \neq \frac{\Gamma(p+1)}{\eta^p}$.

Pour définir la solution du problème aux limites (5.1), nous donnons de lemme suivant :

Lemme 5.1. *Soit $\alpha \neq \frac{\Gamma(p+1)}{\eta^p}$. Alors pour $g \in C([0, 1], \mathbb{R})$ donnée, la solution de l'équation différentielle fractionnaire*

$${}^c D^q x(t) = g(t), \quad 0 < q \leq 1, \quad (5.2)$$

sous réserve du condition aux limites

$$x(0) = \alpha D^{-p} x(\eta), \quad (5.3)$$

est donnée par

$$\begin{aligned} x(t) = & \int_0^t \frac{(t-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} g(s) ds \\ & + \frac{\alpha \Gamma(p+1)}{\Gamma(p+1) - \alpha \eta^p} \int_0^\eta \frac{(\eta-s)^{p+q-1}}{\Gamma(p+q)} g(s) ds, \quad t \in [0, 1]. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Démonstration. Pour une constante $c_0 \in \mathbb{R}$, on a

$$x(t) = \int_0^t \frac{(t-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} g(s) ds - c_0. \quad (5.5)$$

Utilisation l'intégrale de Riemann-Liouville d'ordre p alors (5.5) est implique

$$\begin{aligned} D^{-p}x(t) &= \int_0^t \frac{(t-s)^{p-1}}{\Gamma(p)} \left[\int_0^s \frac{(s-r)^{q-1}}{\Gamma(q)} g(r) dr - c_0 \right] ds \\ &= D^{-p}D^{-q}g(t) - c_0 \frac{t^p}{\Gamma(p+1)} = D^{-(p+q)}g(t) - c_0 \frac{t^p}{\Gamma(p+1)}, \end{aligned}$$

en utilisant la condition (5.3) dans l'expression ci-dessus, nous obtenons

$$c_0 = -\frac{\alpha\Gamma(p+1)}{\Gamma(p+1) - \alpha\eta^p} D^{-(p+q)}g(\eta).$$

En remplaçant la valeur de c_0 dans (5.5), nous obtenons (5.4). $\square$

Soit $\mathcal{C} = C([0, 1], \mathbb{R})$. En vue de Lemme précédente, on définit un opérateur $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ par

$$\begin{aligned} (Fx)(t) &= \int_0^t \frac{(t-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} f(s, x(s)) ds \\ &\quad + \frac{\alpha\Gamma(p+1)}{\Gamma(p+1) - \alpha\eta^p} \int_0^\eta \frac{(\eta-s)^{p+q-1}}{\Gamma(p+q)} f(s, x(s)) ds, \quad t \in [0, 1]. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Le problème (5.1) admet des solutions si et seulement si l'équation d'opérateur F ($Fx = x$) admet des points fixes.

5.1.1 Résultats d'existence et l'unicité d'après le théorème de Principe de contraction de Banach

Théorème 5.1. Supposer que $f : [0, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est continue et qu'il existe une constante $L > 0$ telle que

$$(A_1) \quad |f(t, x) - f(t, y)| \leq L |x - y|, \quad \forall t \in [0, 1], \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Si $LA < 1$, où

$$A = \frac{1}{\Gamma(q+1)} + \frac{|\alpha| \eta^{p+q} \Gamma(p+1)}{\Gamma(p+q+1) |\Gamma(p+1) - \alpha\eta^p|}, \quad (5.7)$$

alors le problème au limite (5.1) admet une solution unique.

Démonstration. On pose $\sup_{t \in [0, 1]} |f(t, 0)| = M$ et montrons que $FB_\rho \subset B_\rho$, où F est

défini par (5.6), $B_\rho = \{x \in C([0, 1], \mathbb{R}) : \|x\| \leq \rho\}$ et $\rho \geq \frac{MA}{1 - LA}$ avec A donné par (5.7).

pour $x \in B_\rho$, $t \in [0, 1]$, on a

$$\begin{aligned}
 & \| (Fx)(t) \| \\
 & \leq \sup_{t \in [0,1]} \left\{ \int_0^t \frac{(t-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} |f(s, x(s))| ds \right. \\
 & \quad \left. + \frac{|\alpha| \Gamma(p+1)}{|\Gamma(p+1) - \alpha \eta^p|} \int_0^\eta \frac{(\eta-s)^{p+q-1}}{\Gamma(p+q)} |f(s, x(s))| ds \right\} \\
 & \leq \sup_{t \in [0,1]} \left\{ \int_0^t \frac{(t-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} (|f(s, x(s)) - f(s, 0)| + |f(s, 0)|) ds \right. \\
 & \quad \left. + \frac{|\alpha| \Gamma(p+1)}{|\Gamma(p+1) - \alpha \eta^p|} \int_0^\eta \frac{(\eta-s)^{p+q-1}}{\Gamma(p+q)} (|f(s, x(s)) - f(s, 0)| + |f(s, 0)|) ds \right\} \\
 & = [L\rho + M] \left\{ \frac{1}{\Gamma(q+1)} + \frac{|\alpha| \eta^{p+q} \Gamma(p+1)}{\Gamma(p+q+1) |\Gamma(p+1) - \alpha \eta^p|} \right\} \\
 & \leq [L\rho + M] A \leq \rho.
 \end{aligned}$$

Cela montre que $FB_\rho \subset B_\rho$.

Maintenant, pour $x, y \in C([0, 1], \mathbb{R})$ et $t \in [0, 1]$, on obtient

$$\begin{aligned}
 & \| (Fx) - (Fy) \| \\
 & \leq \sup_{t \in [0,1]} \left\{ \int_0^t \frac{(t-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} |f(s, x(s)) - f(s, y(s))| ds \right. \\
 & \quad \left. + \frac{|\alpha| \Gamma(p+1)}{|\Gamma(p+1) - \alpha \eta^p|} \int_0^\eta \frac{(\eta-s)^{p+q-1}}{\Gamma(p+q)} |f(s, x(s)) - f(s, y(s))| ds \right\} \\
 & \leq L \|x - y\| \left\{ \frac{1}{\Gamma(q+1)} + \frac{|\alpha| \eta^{p+q} \Gamma(p+1)}{\Gamma(p+q+1) |\Gamma(p+1) - \alpha \eta^p|} \right\} \\
 & = LA \|x - y\|.
 \end{aligned}$$

Comme $LA \in (0, 1)$ d'après l'hypothèse, donc F est un contraction. Alors, le problème (5.1) admet une solution unique. $\square$

5.1.2 Résultats d'existence d'après le théorème du point fixe de krasnoselskii

nous prouvons l'existence de solutions de (5.1) en utilisant le théorème du point fixe de krasnoselskii.

Théorème 5.2. *Soit $f : [0, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue vérifiant (A_1) . De plus, nous supposons que l'hypothèse suivante est vraie :*

$$(A_2) \quad |f(t, x)| \leq \mu(t), \quad \forall (t, x) \in [0, 1] \times \mathbb{R}, \quad \text{et } \mu \in C([0, 1], \mathbb{R}_+).$$

Alors le problème au limite (5.1) admet au moins une solution sur $[0, 1]$, si

$$\frac{L |\alpha| \eta^{p+q} \Gamma(p+1)}{\Gamma(p+q+1) |\Gamma(p+1) - \alpha \eta^p|} < 1. \quad (5.8)$$

Démonstration. On pose $\sup_{t \in [0,1]} \|\mu(t)\| = \|\mu\|$, nous fixons

$$\bar{r} \geq \|\mu\| \left\{ \frac{1}{\Gamma(q+1)} + \frac{|\alpha|\eta^{p+q}\Gamma(p+1)}{\Gamma(p+q+1)|\Gamma(p+1) - \alpha\eta^p|} \right\},$$

et considérer $B_{\bar{r}} = \{x \in \mathcal{C} : \|x\| \leq \bar{r}\}$. Nous définissons deux opérateurs $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sur $B_{\bar{r}}$ comme suit

$$(\mathcal{P}x)(t) = \int_0^t \frac{(t-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} f(s, x(s)) ds, \quad t \in [0, 1],$$

$$(\mathcal{Q}x)(t) = \frac{\alpha\Gamma(p+1)}{\Gamma(p+1) - \alpha\eta^p} \int_0^\eta \frac{(\eta-s)^{p+q-1}}{\Gamma(p+q)} f(s, x(s)) ds, \quad t \in [0, 1].$$

Pour $x, y \in B_{\bar{r}}$, nous trouvons que

$$\begin{aligned} \|\mathcal{P}x + \mathcal{Q}y\| &\leq \|\mu\| \int_0^1 \frac{(1-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} ds + \frac{\|\mu\|\alpha\Gamma(p+1)}{|\Gamma(p+1) - \alpha\eta^p|} \int_0^\eta \frac{(\eta-s)^{p+q-1}}{\Gamma(p+q)} ds \\ &\leq \|\mu\| \left\{ \frac{1}{\Gamma(q+1)} + \frac{|\alpha|\eta^{p+q}\Gamma(p+1)}{\Gamma(p+q+1)|\Gamma(p+1) - \alpha\eta^p|} \right\} \\ &\leq \bar{r}. \end{aligned}$$

Ainsi, $\mathcal{P}x + \mathcal{Q}y \in B_{\bar{r}}$. Nous observons de l'hypothèse (A_1) avec (5.8) que $\mathcal{Q}$ est un opérateur contraction. La continuité de f implique que l'opérateur $\mathcal{P}$ est continu. Alors, $\mathcal{P}$ est uniformément borné sur $B_{\bar{r}}$ comme suit

$$\|\mathcal{P}x\| \leq \frac{\|\mu\|}{\Gamma(q+1)}.$$

Maintenant, nous prouvons la compacité de l'opérateur $\mathcal{P}$.

En vue de (A_1) , nous définissons $\sup_{(t,x) \in [0,1] \times B_{\bar{r}}} |f(t, x)| = \bar{f}$, et par conséquent, on a

$$\begin{aligned} |(\mathcal{P}x)(t_1) - (\mathcal{P}x)(t_2)| &= \left| \frac{1}{\Gamma(q)} \left[\int_0^{t_1} (t_2-s)^{q-1} - (t_1-s)^{q-1} \right] f(s, x(s)) ds \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_{t_1}^{t_2} (t_2-s)^{q-1} f(s, x(s)) ds \right| \\ &\leq \frac{\bar{f}}{\Gamma(q+1)} (t_2^q - t_1^q), \end{aligned}$$

qui est indépendant de x .

Si $t_2 - t_1 \rightarrow 0$. Ainsi, $\mathcal{P}$ est équicontinu. Par conséquent, d'après le théorème d'Arzelà-Ascoli, $\mathcal{P}$ est compact sur $B_{\bar{r}}$. Ainsi toutes les hypothèses du théorème 5.2 sont satisfaites. Donc, le théorème 5.2 implique que le problème au limite admet au moins une solution sur $[0, 1]$. $\square$

5.1.3 Résultats d'existence d'après le théorème d'alternative non linéaire de Leray-Schauder

Théorème 5.3. Soit E un espace de Banach, C un sous-ensemble fermé et convexe de E , U un sous-ensemble ouvert de C et $0 \in U$.

Supposons que $F : \bar{U} \rightarrow C$ est une fonction continue et compacte (c'est-à-dire que $F(\bar{U})$ est un sous-ensemble relativement compact de C). Alors

- F admet un point fixe dans $\overline{U}$, ou
- Il y a $u \in \partial U$ (la frontière de U dans C) et $\lambda \in (0, 1)$ avec $u = \lambda F(u)$.

Démonstration. voir [3] □

Théorème 5.4. Suppose que :

(A₃) il existe une fonction continue non décroissante $\psi : [0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ et une fonction $\phi \in L^1([0, 1], \mathbb{R}_+)$ telle que

$$|f(t, x)| \leq \phi(t)\psi(\|x\|) \text{ pour tous } (t, x) \in [0, 1] \times \mathbb{R};$$

(A₄) il existe une constante $M > 0$ telle que

$$\frac{M}{\psi(M) \left[D^{-q}\phi(1) + \frac{|\alpha|\Gamma(p+1)}{|\Gamma(p+1) - \alpha\eta^p|} D^{-(p+q)}\phi(\eta) \right]} > 1.$$

Alors le problème au limite (5.1) admet au moins une solution sur $[0, 1]$.

Démonstration. Nous observons que l'Opérateur $f : C([0, 1], \mathbb{R}) \rightarrow C([0, 1], \mathbb{R})$ défini par (5.6) est continu. Ensuite, nous montrons que F applique des ensembles bornés en ensembles bornés en $C([0, 1], \mathbb{R})$.

Soit $B_\rho = \{\rho > 0, \quad x \in C([0, 1], \mathbb{R}) : \quad \|x\| \leq \rho\}$, où B est une boule bornée dans $C([0, 1], \mathbb{R})$. Alors, on a

$$\begin{aligned} |(Fx)(t)| &\leq \int_0^t \frac{(t-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} |f(s, x(s))| ds \\ &\quad + \frac{|\alpha|\Gamma(p+1)}{|\Gamma(p+1) - \alpha\eta^p|} \int_0^\eta \frac{(\eta-s)^{p+q-1}}{\Gamma(p+q)} |f(s, x(s))| ds \\ &\leq \psi(\|x\|) \int_0^1 \frac{(1-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} \phi(s) ds \\ &\quad + \frac{\psi(\|x\|)|\alpha|\Gamma(p+1)}{|\Gamma(p+1) - \alpha\eta^p|} \int_0^\eta \frac{(\eta-s)^{p+q-1}}{\Gamma(p+q)} \phi(s) ds \\ &\leq \psi(\|x\|) \left[D^{-q}\phi(1) + \frac{|\alpha|\Gamma(p+1)}{|\Gamma(p+1) - \alpha\eta^p|} D^{-(p+q)}\phi(\eta) \right]. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\|Fx\| \leq \psi(\rho) \left[D^{-q}\phi(1) + \frac{|\alpha|\Gamma(p+1)}{|\Gamma(p+1) - \alpha\eta^p|} D^{-(p+q)}\phi(\eta) \right].$$

Nous montrons maintenant que F applique des ensembles bornés en ensembles équi-continus de $C([0, 1], \mathbb{R})$.

Soit $t', t'' \in [0, 1]$ avec $t' < t''$ et $x \in B_\rho$. Alors

$$\begin{aligned} |(Fx)(t'') - (Fx)(t')| &\leq \left| \psi(\rho) \int_0^{t'} \left[\frac{(t''-s)^{q-1} - (t'-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} \right] \phi(s) ds + \psi(\rho) \int_{t'}^{t''} \frac{(t''-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} \phi(s) ds \right|. \end{aligned}$$

Il est évident que le côté droit de l'inégalité ci-dessus tend à zéro indépendamment de $x \in B_\rho$ comme $t'' - t' \rightarrow 0$. Par conséquent, d'après le théorème d'Ascoli-Arzelà

$F : C([0, 1], \mathbb{R}) \rightarrow C([0, 1], \mathbb{R})$ est complètement continu.

Maintenant, soit $\lambda \in (0, 1)$ et soit $x = \lambda Fx$. Alors pour $t \in [0, 1]$ on a

$$x(t) = \lambda \int_0^t \frac{(t-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} f(s, x(s)) ds + \lambda \frac{\alpha \Gamma(p+1)}{\Gamma(p+1) - \alpha \eta^p} \int_0^\eta \frac{(\eta-s)^{p+q-1}}{\Gamma(p+q)} f(s, x(s)) ds.$$

Ensuite, en utilisant les calculs de la première étape, on a

$$|x(t)| \leq \psi(\|x\|) \left[D^{-q} \phi(1) + \frac{|\alpha| \Gamma(p+1)}{|\Gamma(p+1) - \alpha \eta^p|} D^{-(p+q)} \phi(\eta) \right].$$

En conséquence

$$\frac{\|x\|}{\psi(\|x\|) \left[D^{-q} \phi(1) + \frac{|\alpha| \Gamma(p+1)}{|\Gamma(p+1) - \alpha \eta^p|} D^{-(p+q)} \phi(\eta) \right]} \leq 1.$$

Au vu de (A_4) , il existe M tel que $\|x\| \neq M$. Soit l'ensemble

$$U = \{x \in C([0, 1], \mathbb{R}) : \|x\| < M\}.$$

Nous observons que l'Opérateur $F : \bar{U} \rightarrow C([0, 1], \mathbb{R})$ est continu et complètement continu. à partir du choix de U , il n'existe pas $x \in \partial U$ tel que $x = \lambda F(x)$ pour $\lambda \in (0, 1)$. Par conséquent, par l'alternative non linéaire de type Leray-Schauder, nous concluons que F admet un point fixe $x \in \bar{U}$ qui est une solution du problème (5.1). La preuve est terminée. $\square$

Dans le cas particulier quand $p(t) = 1$ et $\psi(|x|) = k|x| + N$ on a le corolaire suivant.

Corollaire 5.1.1. Soit $f : [0, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Supposons que :

(A_5) il existe des constantes $0 \leq \kappa < \frac{1}{A}$, où A est donné par (5.7) et $M > 0$ tel que

$$|f(t, x)| \leq \kappa|x| + M, \quad \text{pour tous } t \in [0, 1], x \in C[0, 1].$$

Alors le problème au limite (5.1) admet au moins une solution.

5.1.4 Exemples

Exemple 5.1. Considérons le problème suivant

$$\begin{cases} {}^c D^{1/2} x(t) = \frac{1}{2(t+2)^2} \frac{|x|}{1+|x|} + 1 + \sin^2 t, & t \in [0, 1], \\ x(0) = \sqrt{3} D^{-1/2} x\left(\frac{1}{3}\right). \end{cases} \quad (5.9)$$

On a : $q = 1/2$, $\alpha = \sqrt{3}$, $p = 1/2$, $\eta = 1/3$ et $f(t, x) = \frac{1}{2(t+2)^2} \frac{|x|}{1+|x|} + 1 + \sin^2 t$.

Comme $\alpha = \sqrt{3} \neq \Gamma(p+1)/\eta^p = \Gamma(3/2)/(1/3)^{1/2}$ et $|f(t, x) - f(t, y)| \leq \frac{1}{8}|x - y|$, donc, (A_1) est satisfait avec $L = \frac{1}{8}$.

$$\begin{aligned} LA &= L \left\{ \frac{1}{\Gamma(q+1)} + \frac{\alpha \eta^{p+q} \Gamma(p+1)}{\Gamma(p+q+1) |\Gamma(p+1) - \alpha \eta^p|} \right\} \\ &= \frac{1}{8} \left\{ \frac{2}{\sqrt{\pi}} + \frac{\sqrt{3}\pi}{3(2 - \sqrt{\pi})} \right\} \approx 0.7019863 < 1, \end{aligned}$$

à la conclusion d'après du théorème 5.1, le problème au limite (5.9) admet une solution unique sur $[0, 1]$.

Exemple 5.2. *Considérons le problème suivant*

$$\begin{cases} {}^c D^{1/2} x(t) = \frac{1}{16\pi} \sin(2\pi x) + \frac{|x|}{2(1+|x|)} + \frac{1}{2}, & t \in [0, 1], \\ x(0) = \sqrt{3} D^{-1/2} x\left(\frac{1}{3}\right). \end{cases} \quad (5.10)$$

On a :

$$|f(t, x)| = \left| \frac{1}{16\pi} \sin(2\pi x) + \frac{|x|}{2(1+|x|)} + \frac{1}{2} \right| \leq \frac{1}{8}|x| + 1.$$

Il est clair $M = 1$ et $\kappa = \frac{1}{8} < \frac{1}{A} \approx 0.1780661$.

Ainsi, toutes les conditions de corollaire 5.1.1 sont satisfaites et par conséquent le problème (5.10) admet au moins une solution.

5.2 Problème au limite

On considère le problème de Cauchy fractionnaire à la forme suivant :

$${}^c D^\alpha y(t) = f(t, y(t)), \text{ Pour tous } t \in J := [0, T], \quad \alpha \in (0, 1], \quad (5.11)$$

$$y(0) + \mu \int_0^T y(s) ds = y(T). \quad (5.12)$$

Pour l'existence de solutions au problème (5.11), (5.12), nous avons besoin des lemmes suivant :

5.2.1 Construction d'une fonction de Green

La fonction de Green définie par

$$G(t, s) = \begin{cases} \frac{-(T-s)^\alpha + \alpha T(t-s)^{\alpha-1}}{T\Gamma(\alpha+1)} + \frac{(T-s)^{\alpha-1}}{T\mu\Gamma(\alpha)} & , \quad \text{si } 0 \leq s < t, \\ \frac{-(T-s)^\alpha}{T\Gamma(\alpha+1)} + \frac{(T-s)^{\alpha-1}}{T\mu\Gamma(\alpha)} & , \quad \text{si } t \leq s < T \end{cases} \quad (5.13)$$

Lemme 5.2. *Soit $\alpha > 0$; Alors l'équation différentielle*

$${}^c D^\alpha h(t) = 0,$$

admet des solutions $h(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \dots + c_{n-1} t^{n-1}$, $c_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$, $n = [\alpha] + 1$.

Lemme 5.3. *Soit $\alpha > 0$; Alors*

$$D^{-\alpha} {}^c D^\alpha h(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \dots + c_{n-1} t^{n-1},$$

où $c_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$, $n = [\alpha] + 1$.

Lemme 5.4. *Soient $0 < \alpha \leq 1$ et $h \in C(J, \mathbb{R})$ est une fonction quelconque. Alors, le problème de la valeur au limite*

$${}^c D^\alpha y(t) = h(t), t \in J, \quad (5.14)$$

$$y(0) + \mu \int_0^T y(s) ds = y(T), \quad \mu \in \mathbb{R}^*, \quad (5.15)$$

admet une solution unique donné par

$$y(t) = \int_0^T G(t, s) h(s) ds. \quad (5.16)$$

Démonstration. Par Lemme (5.3) nous pouvons réduire le problème (5.14), (5.15) à l'équivalent d'une équation intégration

$$y(t) = D^{-\alpha}h(t) - c_0 = \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} h(s) ds - c_0. \quad (5.17)$$

Pour $c_0 \in \mathbb{R}$. On a par intégration (en utilisant le théorème intégral de Fubini)

$$\begin{aligned} \int_0^T y(s) ds &= \int_0^T \left(\int_0^s \frac{(s-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} h(\tau) d\tau - c_0 \right) ds \\ &= \int_0^T \left(\int_\tau^T \frac{(s-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} ds \right) h(\tau) d\tau - c_0 T \\ &= \int_0^T \frac{(T-\tau)^\alpha}{\alpha \Gamma(\alpha)} h(\tau) d\tau - c_0 T. \end{aligned}$$

Appliquer la condition aux limites (5.15), on a

$$\begin{aligned} y(0) &= -c_0 \\ y(T) &= \int_0^T \frac{(T-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} h(s) ds - c_0. \end{aligned}$$

Donc

$$c_0 = \frac{1}{T} \int_0^T \left(-\frac{(T-s)^{\alpha-1}}{\mu \Gamma(\alpha)} + \frac{(T-s)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \right) h(s) ds.$$

Par conséquent, la solution unique de (5.14), (5.15) est

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} h(s) ds + \frac{1}{T} \int_0^T \left(-\frac{(T-s)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{(T-s)^{\alpha-1}}{\mu \Gamma(\alpha)} \right) h(s) ds, \\ &= \int_0^t \left(\frac{-(T-s)^\alpha + \alpha T(t-s)^{\alpha-1}}{T \Gamma(\alpha+1)} + \frac{(T-s)^{\alpha-1}}{T \mu \Gamma(\alpha)} \right) h(s) ds \\ &\quad + \int_t^T \left(\frac{-(T-s)^\alpha}{T \Gamma(\alpha+1)} + \frac{(T-s)^{\alpha-1}}{T \mu \Gamma(\alpha)} \right) h(s) ds \\ &= \int_0^T G(t, s) h(s) ds. \end{aligned} \quad (5.18)$$

D'où le résultat. □

Remarque 5.1. La fonction $t \in J \mapsto \int_0^T |G(t, s)| ds$ est continue sur J , donc elle est bornée. Soit

$$\hat{G} = \sup \left\{ \int_0^T |G(t, s)| ds, t \in J \right\}.$$

5.2.2 Résultats d'existence et l'unicité d'après le théorème de Principe de contraction de Banach

Théorème 5.5. Suppose que

(H1) Il existe $k > 0$ tel que

$$|f(t, u) - f(t, v)| \leq k|u - v|, \quad \text{pour } t \in J \text{ et } u, v \in \mathbb{R}.$$

Si

$$k\hat{G} < 1,$$

alors il existe une solution unique du problème (5.11), (5.12).

Démonstration. Considérons l'opérateur $N : C(J, \mathbb{R}) \longrightarrow C(J, \mathbb{R})$ défini par

$$N(y)(t) = \int_0^T G(t, s) f(s, y(s)) ds,$$

où $G(t; s)$ est la fonction de Green donnée par (5.13). Il est clair que, à partir du lemme 5.4, les points fixes de N sont des solutions de (5.11), (5.12).

Nous montrerons que N est une contraction.

$$\begin{aligned} |N(x)(t) - N(y)(t)| &\leq \int_0^T |G(t, s)| |f(s, x(s)) - f(s, y(s))| ds \\ &\leq k \|x - y\|_\infty \int_0^T |G(t, s)| ds \\ &\leq k \hat{G} \|x - y\|_\infty. \end{aligned}$$

Ainsi, nous obtenons que

$$\|N(x) - N(y)\|_\infty \leq L \|x - y\|_\infty,$$

où

$$L := k \hat{G} < 1.$$

La preuve est terminée . □

5.2.3 Résultats d'existence d'après le théorème du point fixe de Schauder

Théorème 5.6. *La problème au limite (5.11), (5.12) admet au moins une solution si les conditions suivantes sont remplies.*

(C1) *La fonction $f : J \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est continue.*

(C2) *Il existe $p \in C(J, \mathbb{R}_+)$ et $\psi : [0, \infty) \longrightarrow (0, \infty)$ continue et non décroissante telle que*

$$|f(t, u)| \leq p(t) \psi(|u|), \quad \text{pour } t \in J, u \in \mathbb{R}$$

(C3) *Il existe une constante $M > 0$ telle que*

$$\frac{M}{p^* \psi(M) \hat{G}} > 1, \tag{5.19}$$

où

$$p^* = \sup\{p(s), s \in J\}.$$

Démonstration. Soit

$$\mathbf{C} = \{y \in C(J, \mathbb{R}), \|y\|_\infty \leq M\},$$

où M est la constante de (C3). Il est clair que $\mathbf{C}$ est un sous-ensemble fermé et convexe de $C(J; \mathbb{R})$.

Nous montrerons que l'Opérateur N remplit les conditions de le théorème de point fixe de Schauder.

Étape 1 : N est continu.

Soit $\{y_n\}$ est une suite telle que $y_n \rightarrow y$ dans $C(J; \mathbb{R})$. Donc pour tous $t \in J$

$$|Ny_n(t) - Ny(t)| \leq \int_0^T |G(t, s)| |f(s, y_n(s)) - f(s, y(s))| ds.$$

Tant que f est continu, le théorème de convergence dominé par Lebesgue implique que

$$\|Ny_n - Ny\|_\infty \rightarrow 0 \quad \text{comme} \quad n \rightarrow \infty.$$

Étape 2 : N applique $\mathbf{C}$ dans un ensemble borné de $C(J; \mathbb{R})$.

Soit $y \in \mathbf{C}$; Alors pour tous $t \in J$, (C2) implique

$$\begin{aligned} |Ny(t)| &\leq \int_0^T |G(t, s)| |f(s, y(s))| ds \\ &\leq p^* \psi(\|y\|_\infty) \int_0^T |G(t, s)| ds. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\|Ny\|_\infty \leq p^* \psi(M) \hat{G} := \ell.$$

Étape 3 : N applique $\mathbf{C}$ dans un ensemble équicontinu de $C(J; \mathbb{R})$.

Soit $y \in \mathbf{C}$, $t_1, t_2 \in J$, $t_1 < t_2$; Alors

$$\begin{aligned} |Ny(t_2) - Ny(t_1)| &= \left| \int_0^T G(t_2, s) f(s, y(s)) ds - \int_0^T G(t_1, s) f(s, y(s)) ds \right| \\ &\leq \int_0^T |G(t_2, s) - G(t_1, s)| |f(s, y(s))| ds \\ &\leq p^* \psi(M) \left[\int_0^T |G(t_2, s) - G(t_1, s)| ds \right]. \end{aligned}$$

Comme $t_1 \rightarrow t_2$ le côté droit de l'inégalité ci-dessus tend à zéro. Par le théorème d'Arzela-Ascoli, N est complètement continu.

Étape 4 : $N(\mathbf{C}) \subset \mathbf{C}$.

Soit $y \in \mathbf{C}$. Nous montrerons que $Ny \in \mathbf{C}$. Pour tous $t \in J$. On a

$$\begin{aligned} |Ny(t)| &\leq \int_0^T |G(t, s)| |f(s, y(s))| ds \\ &\leq p^* \psi(\|y\|_\infty) \int_0^T |G(t, s)| ds. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\|Ny\|_\infty \leq p^* \psi(M) \hat{G}.$$

Par (5.19), on a

$$\|Ny\|_\infty \leq M.$$

On déduit donc que N admet un point fixe y qui est une solution le problème au limite (5.11), (5.12). □

5.2.4 Exemple

Exemple 5.3. *Considérons le problème suivant :*

$${}^c D^\alpha y(t) = \frac{e^{-t}}{10(1+e^t)} |y(t)|, \quad t \in J := [0, 1], \quad \alpha \in (0, 1], \quad (5.20)$$

$$y(0) + \int_0^1 y(s) ds = y(1). \quad (5.21)$$

On pose

$$f(t, x) = \frac{e^{-t}}{10(1+e^t)} x, \quad (t, x) \in J \times [0, \infty).$$

Soit $x, y \in [0, \infty)$ et $t \in J$. Ensuite on a

$$\begin{aligned} |f(t, x) - f(t, y)| &= \frac{e^{-t}}{10(1+e^t)} |x - y| \\ &\leq \frac{1}{20} |x - y|. \end{aligned}$$

La condition (H1) est vraie avec $k = \frac{1}{20}$. de (5.13), G est donné par

$$G(t, s) = \begin{cases} \frac{-(1-s)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + \frac{(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} & , \quad 0 \leq s < t, \\ \frac{-(1-s)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} & , \quad t \leq s < 1. \end{cases} \quad (5.22)$$

De (5.22) on a

$$\begin{aligned} \int_0^1 G(t, s) ds &= \int_0^t G(t, s) ds + \int_t^1 G(t, s) ds \\ &= \frac{(1-t)^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+2)} - \frac{(1-t)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} - \frac{1}{\Gamma(\alpha+2)} + \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} - \frac{(1-t)^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+2)} + \frac{(1-t)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}. \end{aligned}$$

Il est facile de voir que

$$\hat{G} < \frac{4}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{3}{\Gamma(\alpha+2)}.$$

La condition $k\hat{G} < 1$ est vérifié pour les valeurs appropriées de $\alpha \in (0, 1]$ avec $\mu = T = 1$. Le théorème 5.6 implique que le problème de la valeur au limite (5.20)-(5.21) admet une solution unique.

Conclusion

Dans cette mémoire, Nous avons présenté deux approches des dérivées et intégrales fractionnaires (Riemann-Liouville, Caputo). Nous avons présenté quelques résultats des existences des solutions de certains problèmes de Cauchy des équations différentielles d'ordres fractionnaires et des certaines problèmes non linéaires d'ordres fractionnaires avec conditions intégrales. Nous avons traité des cas linéaire par la transformée de Laplace des dérivées fractionnaires et des cas non linéaires avec les théorèmes de point fixe (théorème Principe de contraction de Banach, théorème de Krasnoselskii, théorème de point fixe de Schauder, théorème d'alternative non linéaire de Leray-Schauder). Le problème d'existence des solutions des equations différentielles d'ordre fractionnaires reste parmi les importants problèmes qui nécessitent beaucoup plus de recherche.

Annexe A

Dans ce qui suit, nous avons essayé de donner un compte rendu historique de certaines des personnalités mentionnées dans notre mémorandum, ce qui a eu un impact important sur le travail et les recherches qu'ils ont présentés au monde.



FIGURE 5.1 – Georg Friedrich Bernhard Riemann

Georg Friedrich Bernhard Riemann, né le 17 septembre 1826 à Breselenz, état de Hanovre, mort le 20 juillet 1866 à Selasca, hameau de la commune de Verbania, Italie, est un mathématicien allemand. Influent sur le plan théorique, il a apporté de nombreuses contributions importantes à l'analyse et à la géométrie différentielle, certaines d'entre elles ayant permis par la suite le développement de la relativité générale.

En 1840, Bernhard s'établit à Hanovre pour vivre chez sa grand-mère et aller au Lyceum (collège). Après le décès de sa grand-mère en 1842, il va à Lunebourg pour continuer ses études secondaires. Au lycée, Riemann étudie la Bible intensivement, mais il est distrait par les mathématiques ; Il essaye même de prouver, mathématiquement, l'exactitude de la Genèse. Ses professeurs sont surpris par ses capacités à résoudre des problèmes complexes en mathématique. En 1846, âgé de 19 ans, grâce à l'argent de sa famille, il commence à étudier la philosophie et la théologie pour devenir pasteur afin de financer sa famille.

En 1847, son père l'autorise à étudier les mathématiques. Il étudie d'abord à l'université de Göttingen où il rencontre Carl Friedrich Gauss, puis à l'université de Berlin, où il a entre autres comme professeurs Jacobi, Steiner et Dirichlet. Il effectue sa thèse à Göttingen sous la direction de Gauss.

Dans sa thèse, présentée en 1851, Riemann met au point la théorie des fonctions d'une

variable complexe, introduisant notamment le concept des surfaces qui portent son nom, notamment la sphère de Riemann. Il approfondira cette théorie en 1857, en faisant progresser la théorie des fonctions abéliennes.

On lui doit également d'importants travaux sur les intégrales, poursuivant ceux de Cauchy, qui ont donné entre autres ce qu'on appelle aujourd'hui les intégrales de Riemann. Intéressé par la dynamique des fluides, il jette les bases de l'analyse des équations aux dérivées partielles de type hyperbolique et résout un cas particulier de ce qu'on appelle maintenant le problème de Riemann en introduisant les invariants de Riemann.



FIGURE 5.2 – Joseph-Liouville

Joseph Liouville, né le 24 mars 1809, Joseph est le fils d'un militaire qui survit aux campagnes napoléoniennes et qui, en 1814, établit sa famille à Toul.

Il est diplômé de l'école polytechnique. Deux ans plus tard, il intègre l'école des ponts et chaussées, dont il n'obtient pas le diplôme en raison de problèmes de santé et, surtout, de sa volonté de suivre une carrière académique plutôt qu'une carrière d'ingénieur. Il obtient le doctorat ès sciences mathématiques en 1836 devant la faculté des sciences de Paris sous la direction de Siméon Denis Poisson et Louis Jacques Thenard.

Après quelques années dans diverses institutions comme assistant et comme professeur à l'école centrale (1833, où il est répétiteur depuis 1831), il est nommé professeur à l'école polytechnique en 1838.

À côté de ses réussites académiques, il est un remarquable organisateur. Liouville fonde en 1836 le Journal de mathématiques pures et appliquées parfois appelé Journal de Liouville, qui garde sa haute réputation au XXI^e siècle. Il publie beaucoup dans ce journal, en son nom ou en utilisant le pseudonyme de « Besge ».

Liouville publia dans divers domaines des mathématiques, dont la théorie des nombres, l'analyse complexe, la géométrie différentielle et la topologie différentielle, mais aussi la physique mathématique et même l'astronomie .



FIGURE 5.3 – Michele Caputo

Michele Caputo

Anniversaire : le 5 mai 1927.

Lieu de naissance : Ferrara, Italie.

Degrés :

- 1950 Mathématiques (laurea) Université de Ferrare.
- 1955 Physique (laurea) Université de Bologne.
- 1959 Géodésie (libera docenza) Ministère de la éducation d'Italie.

Bibliographie

- [1] M. Benchohra, F. Ouaar, *Existence Results For Nonlinear Fractional Differential Equations With Integral Boundary Conditions*, J, Bulletin of Mathematical Analysis and Applications, 2010.
- [2] N. Boccara, *Analyse Fonctionnelle une introduction pour physiciens*, 1984 .
- [3] B. Bollobas, W. Fulton, A. Katok, F. Kirwan, P. Sarnak. *Fixed Point Theory and Applications*, 2004.
- [4] K. Diethelm, *The Analysis of Fractional Differential Equations* , 2010.
- [5] A. Erdelyi, W. Magnus, F. Oberhettinger, F. G. Tricomi, *Higher Transcendental Functions*, Vol. III, Krieger Pub, Melbourne, Florida, (1955).
- [6] B. Guo, X. Pu, F. Huang. *Fractional Partial Differential Equations and Their Numerical Solutions*, China, 2015.
- [7] K. Haouam, *Existence et non-existence de solutions des équations différentielles fractionnaires* , Thèse, Constantine, 2007.
- [8] M. Kaddouri, *Problèmes pour les équations différentielles d'ordre fractionnaire*, Mémoire, Saïda, 2017.
- [9] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, J. J. Trujillo. *Theory And Applications Of Fractional Differential Equations*. North-Holland Mathematical studies 204, Ed van Mill, Amsterdam , 2006.
- [10] A. Kirillov, A. Gvichiani, *Théorèmes Et Problèmes D'analyse Fonctionnelle*, Éditions Mir Moscou , 1982.
- [11] A. Kolmogorov, S. Fomine, *Eléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle*. 2^e édition, Editions Mir-Moscou. 1974.
- [12] S. K. Ntouyas, *Existence Results For First Order Boundary Value Problems For Fractional Differential Equations And Inclusions With Fractional Integral Boundary Conditions*, J, Fractional Calculus and Applications, July, 2012.
- [13] I. Podlubny. *Fractional differential equations*. Academic Press , 1999.
- [14] S. G. Samko, A. A. Kilbas , O. I. Marichev, *Fractional integrals and derivatives Theory and Applivations* , Russian , Belarus, Yverdon, 1993.
- [15] L. Schwartz, *Analyse Topologie générale et analyse fonctionnelle*, Édition Corrigée , Paris, 2008.
- [16] G. Skandalis, *Topologie Et Analyse 3^e Année*, 2004.
- [17] T. Stuckless, *Brouwer's Fixed Point Theorem : Methods of Proof and Generalizations* , 2003.

- [18] (Y. Zhou, *Basic Theory Of Fractional Differential Equations*. Xiangtan University, China, 2014.

Résumé

Dans cette mémoire, Nous avons présente quelques résultats des existences des solutions de certains problèmes de Cauchy fractionnaires et des certaines problèmes aux limites avec conditions intégrales. Nous avons traité des cas linéaire par la transformée de Laplace des dérivées fractionnaires et des cas non linéaires avec des théorèmes de point fixe.

Mots clés : Intégration fractionnelle, Dérivation fractionnelle, Problème de Cauchy, Problème au limite avec conditions intégrales, Point fixe.

Abstract

In this memory, we have presented some existences results of the solutions of some fractional Cauchy problems and some boundary values problems with integral conditions. We have treated linear cases by Laplace transform of fractional derivatives and nonlinear cases with fixed point theorems.

Key words : Fractional integration, Fractional derivation, Cauchy problem, boundary value problem with integral condition, Fixed point.

ملخص

تعنى هذه المذكرة بمسألة وجود الحل لبعض مسائل كوشي الكسرية و بعض المسائل الحادية الكسرية بشروط تكاملية. حيث عالجت الحالات الخطية بواسطة تحويل لابلاس للمشتقات الكسرية و الحالة الغير خطية بواسطة بعض نظريات النقطة الثابتة .
الكلمات المفتاحية : التكامل الكسري , الاشتقاق الكسري , مسألة كوشي مسألة القيمة الحادية بشروط تكاملية , النقطة الثابتة.