

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique



Mémoire de Fin d'Étude

Présenté à

L'Université Echahid Hamma Lakhdar d'El Oued

Faculté de Technologie

Département de Génie Electrique

En vue de l'obtention du diplôme de

MASTER ACADEMIQUE

En Télécommunications

Présenté par

AGGAB Souhir

BEN AROUBA Zineb

Thème

**Estimation des paramètres d'un bruit alpha-stable à
partir d'un signal reçu BPSK**

Soutenu le 19/05/2016. Devant le jury composé de :

Mr. Hima Abdelkader.

Maitre de Assistant A

Président

Dr. CHEMSA Ali.

Maitre de conférences

Rapporteur

Mr. HETTIRI Massoude.

Maitre de Assistant A

Examineur

Année Universitaire 2015/2016

كلمة شكر

الحمد لله ونشكره ونثني عليه ,إلى منارة العلم و الإمام المصطفى
سيد الخلق والمرسلين إلى رسولنا الحبيب محمد صلى الله
عليه وسلم.

إلى أساتذتنا الكرام الذين قدموا لنا الكثير باذلين جهودا كبيرة في بناء جيل الغد لتبعث الأمة من جديد
و إلى اللجنة الكريمة نتقدم لهم بأسمى عبارات الشكر والتقدير بتفضلهم مناقشه هذا العمل المتواضع.

و نتوجه بخاص الشكر وتقدير **للدكتور شمسه علي** الذي زرع فينا التفاؤل في دربنا وقدم لنا المساعدات
والتسهيلات والأفكار والمعلومات و علمنا المضي إلى الأمام، إلى من راعانا وحافظ علينا، إلى من وقف إلى
جانبنا طول الطريق.

Sommaire

Résumé	1
Liste des figures	2
Glossaire	4
Introduction générale	5
Chapitre 1 Notions de base sur les distributions α – stables	8
1.1 Introduction	8
1.2. Rudiments des lois α – stables	9
1.2.1 Définitions	9
1.2.2 Définition et interprétation des paramètres d'une loi $S_\alpha(\beta, \gamma, \delta)$	10
1.3 Diverses propriétés	13
1.4 Puissance géométrique	16
1.4.1 Définitions	16
1.4.2 Propriétés	17
1.4.3 Puissance géométrique d'une distribution $S_\alpha S$	17
1.4.4 Le rapport signal sur bruit géométrique	18
1.5 La simulation d'un bruit α – stable	18
1.6 Statistiques sur les lois symétriques α – stables	20
1.7 Conclusion	22
Chapitre 2 Méthodes d'estimation des paramètres d'un bruit α – stable	24
2.1 Introduction	24
2.2 Les estimateurs utilisés	25
2.2.1 Les sommes pondérées des v.a α – stable i.i.d	25
2.2.2 Les méthodes FIOM	26
2.2.3 Les moments logarithmiques	31
2.3 L'évaluation de Monte Carlo	33
2.3.1 Estimation α	33
2.3.2 Estimation β	34
2.3.3 Estimation γ	34
2.4 Conclusion	37

Chapitre 3: Estimation du paramètre γ d'un bruit $S\alpha S$ et simulation numérique.....	38
3.1 Introduction.....	38
3.2 Modèle de simulation	39
3.2.1 Source d'information.....	39
3.2.2 Modulation utilisée	40
3.2.3 Source de bruit	40
3.2.4 Comparateur	41
3.3 Estimation du paramètre de dispersion d'un bruit $S\alpha S$	42
3.3.1 Les FLOS d'un bruit et la probabilité ρ	42
3.3.1.1 Les FLOS d'un bruit $S\alpha S$	43
3.3.1.2 La notion et le calcul de la probabilité ρ	45
3.3.2 Approche semi-aveugle pour estimer le paramètre γ d'un bruit $S\alpha S$	48
3.3.2.1 Estimation semi-aveugle du paramètre de dispersion utilisant FLOS	48
3.3.2.1.1 L'approche d'estimation semi-aveugle.....	48
3.3.2.1.2 Résultats et discussions	50
3.4 Conclusion	52
Conclusion générale et perspectives.....	54
Bibliographie	56

Résumé

Ce travail étudie l'estimation des paramètres d'un bruit α -stable à partir d'un signal reçu en modulation BPSK, particulièrement l'estimation du paramètre de dispersion d'un bruit α -stable symétrique $S\alpha S$. Plusieurs méthodes sont présentées dans la littérature sur ce contexte, mais si on essaye d'appliquer une de ces méthodes d'estimation pour estimer le paramètre de dispersion du bruit, il faut à partir du signal reçu, séparer le bruit du signal transmis, parce que toutes ces méthodes d'estimation sont applicables pour un nombre d'échantillons du bruit qui représente la variable aléatoire $S\alpha S$. Néanmoins, c'est irréalisable de séparer deux signaux aléatoires superposés. Dans notre travail on a surmonté ce problème où on a présenté une approche d'estimation semi-aveugle basée sur les statistiques d'ordre inférieur fractionnel FLOS, qui estime le paramètre de dispersion du bruit à partir du signal reçu uniquement. L'avantage majeur de cette approche est qu'elle présente de très bonne estimation du paramètre.

Mots clefs : BPSK, Bruit α -stable, Estimation, Bruit $S\alpha S$, paramètre de dispersion, FLOS, RMSE relative.

Abstract

This work studies the estimate α -stable noise parameters from a received signal in BPSK modulation, particularly the dispersion parameter estimation of an symmetrical noise α -stable $S\alpha S$. Several methods are presented in the literature on this context, but if we try to apply these estimation methods for estimating the noise dispersion parameter, it is necessary from the received signal, separating the noise from the transmitted signal, because all these estimation methods are applicable to a number of noise samples that represents the random variable $S\alpha S$. Nevertheless, it is impossible to separate superimposed random signals. In our work, we have overcome this problem, where we presented a semi-blind estimation approach based on fractional lower order statistics FLOS, which estimates the noise dispersion parameter from the received signal only. The major advantage of this approach is that it has very good estimate of the parameter.

Key words : BPSK, α -stable noise, Estimation, $S\alpha S$ noise, Dispersion parameter, FLOS, Relative RMSE.

ملخص

هذا العمل يدرس كيفية تقدير معاملات التشويش α - مستقر انطلاقاً من الإشارة الواردة ذات الموائمة BPSK، وبصفة أدق كيفية تقدير معامل التبديد لتشويش متناظر α - مستقر والذي يرمز له $S\alpha S$. في المراجع المتخصصة في هذا الميدان، هناك عدة طرق تعالج اشكالية التقدير، ولكن إذا حاولنا تطبيق إحدى هذه الطرق لتقدير معامل التبديد لتشويش انطلاقاً من الإشارة الواردة، فمن الضروري فصل التشويش عن الإشارة المرسل، لأن كل هذه الطرق المطروحة قابلة للتطبيق على عدد من العينات من التشويش الذي يُمثل بمتغير عشوائي $S\alpha S$. ولكن، من المستحيل فصل إشارتين عشوائيتين عن بعضهما. في عملنا تغلبنا على هذه المشكلة، حيث قدمنا طريقة تقدير شبه عمياء تعتمد على الإحصاءات ذات الرتب المنخفضة الكسرية FLOS، التي تقدر معامل التبديد لتشويش من الإشارة الواردة فقط. الميزة الرئيسية لهذه الطريقة هو أن لديها دقة عالية في التقدير.

المصطلحات الأساسية : BPSK، تشويش α - مستقر، تقدير، تشويش $S\alpha S$ ، معامل التبديد، FLOS، RMSE النسبي.

Liste des figures

Fig. 1.1 La PDF pour $\alpha \in \{0.5, 0.75, 1, 1.25, 1.5\}$, $\beta = 0, \gamma = 1, \delta = 0$	12
Fig. 1.2 La PDF pour $\alpha \in \{0.5, 0.75, 1, 1.25, 1.5\}$, $\beta = -1, \gamma = 1, \delta = 0$	12
Fig. 1.3 La PDF pour $\alpha \in \{0.5, 0.75, 1, 1.25, 1.5\}$, $\beta = 1, \gamma = 1, \delta = 0$	13
Fig. 1.4 La PDF pour $\alpha \in \{0.5, 0.75, 1, 1.25, 1.5\}$, $\beta = 0, \gamma = 2, \delta = 0$	13
Fig. 1.5 La PDF pour $\alpha \in \{0.5, 0.75, 1, 1.25, 1.5\}$, $\beta = 0, \gamma = 5, \delta = 0$	13
Fig. 1.6 La PDF pour $\alpha \in \{0.5, 0.75, 1, 1.25, 1.5\}$, $\beta = 0, \gamma = 1, \delta = -3$	13
Fig. 1.7 La PDF pour $\alpha \in \{0.5, 0.75, 1, 1.25, 1.5\}$, $\beta = 0, \gamma = 1, \delta = 3$	13
Fig. 1.8 Le tracé de 5000 échantillons d'un bruit <i>SaS</i> . (a) $\alpha = 2$ (b) $\alpha = 1.5$ (c) $\alpha = 1$	22
Fig. 1.9 Test graphique de la variance pour $N = 5000$ échantillons d'un bruit <i>SaS</i> (a) $\alpha = 2$ (b) $\alpha = 1.5$ (c) $\alpha = 1$	23
Fig. 2.1 Comparaison des biais (a) et les écarts-types standards (b) de diverses estimateurs de α pour $\beta = 1.0$	35
Fig. 2.2 Erreur quadratique moyenne MSE de l'estimations de β . (a) les méthodes FLOS à $\alpha = 1.5$; $\beta = 0.9$ en fonction de l'ordre r (b) FLOS signé pour $r = 0$ par rapport aux autres méthodes en fonction de α pour $r = 0$ (c) pour $\beta = 0.5, 0.9$ respectivement.....	36
Fig. 2.3 MSE pour les estimateurs de γ (a) la dépendance de l'estimateur FLOS de l'ordre de moment r pour $\beta = 0, \gamma = 1$ (b) la comparaison des méthodes logarithmique et FLOS en fonction de α pour $\beta = 0, 0.9$	36
Fig. 3.1 Modèle de simulation.....	39
Fig. 3.1 Le tracé de 5000 échantillons d'un bruit <i>SaS</i> pour $\alpha = 0.75$: (a) $\gamma = 0.2$ (b) $\gamma = 10$	41
Fig. 3.3 Le tracé de 5000 échantillons d'un bruit <i>SaS</i> pour $\alpha = 1.5$: (a) $\gamma = 0.2$ (b) $\gamma = 10$	41

Fig. 3.4 La $RMSE$ de l'estimation du moment m_r en fonction de r pour un bruit $S\alpha S$ et pour différentes valeurs de N : (a) $N = 100$ (b) $N = 1000$ (c) $N = 10\,000$	44
Fig. 3.5 La probabilité ρ en fonction du paramètre de dispersion γ pour un bruit $S\alpha S$	47
Fig. 3.6 Le modèle de simulation adopté pour calculer l'erreur $RMSE_{rel}$ en fonction de γ	51
Fig. 3.7 La $RMSE_{rel}$ en fonction de la valeur exacte de γ pour : (a) $\alpha = 0.75$, (b) $\alpha = 1$, (c) $\alpha = 1.25$ et (d) $\alpha = 1.5$	51

Glossaire

BPSK	B inary P hase S hift K eying
CDF	C umulative D istribution F unction
DSL	D igital S ubscriber L ines
ECF	E mpirical C haracteristic F unction
FFT	F ast F ourier T ransform
FLOS	F ractional L ower O rders S tatistics
GSNR	G eometric S ignal N oise R ate
HOS	H igher O rders S tatistics
I.I.d	I ndependent and I dentically D istributed
LOS	L ower O rders S tatistics
MAP	M aximum A Posteriori
ML	M aximum L ikelihood
MSE	M ean S quare E rror
OFDM	O rthogonal F requency D ivision M ultiplexing
PDF	P robability D ensity F unction
PLC	P ower L ine C ommunication
PSK	P hase S hift K eying
RMSE	R oot M ean S quare E rror
SNR	S ignal N oise R ate
V.a	V ariable aléatoire
SαS	S ymmetric α – S table with localization parameter $\delta = 0$

Introduction générale

Généralement, les systèmes de communication numérique sont étudiés et évalués dans l'hypothèse de gaussianité du bruit, puisque l'objectif était d'obtenir des relations simples sur les performances et des mises en œuvre peu coûteuses. Même si cette hypothèse est justifiée dans un large éventail de scénarios de situations réelles, il y a des situations où le théorème central limite ne peut plus être invoqué et où les expériences mettent en exergue un bruit non gaussien à caractère impulsif où la queue de la distribution de son amplitude est lourde.

Parmi ces situations, nous pouvons citer les chaînes de radio [1], les canaux de communication par courants porteurs en ligne PLC [2], et des lignes numériques d'abonné DSL [3]. Le bruit impulsif qui affecte ces systèmes est caractérisé généralement par des trains d'impulsions (isolées ou en rafales) de faibles durées et de forte densité spectrale de puissance.

Par conséquent, l'étude de ce type de bruit est indispensable. Diverses approches de modélisation du bruit impulsif sont couramment utilisées et nous pouvons citer notamment : les modèles basés sur les chaînes de **Markov**, le modèle de bruit de Classe A de **Middleton** ou bien encore le modèle stochastique. Ce dernier modèle utilise une approche statistique des paramètres caractéristiques des impulsions qui sont approchées par des lois de distributions connues. Les plus utilisées dans la littérature parmi ces distributions connues sont les distributions α – stables [4][5].

Les distributions α – stables ont été introduites pour la première fois pendant les années 1920 dans les travaux de **Paul Lévy** [6] dans le théorème central limite généralisé. Par la suite, en 1970, trois chercheurs de **Bell Labs** (**Chambers**, **Mallow** et **Stuck**) ont prouvé que ce modèle peut servir à modéliser le bruit dans les lignes téléphoniques [7] ; elle a eu aussi du succès dans diverses applications en sciences de l'ingénieur comprenant le traitement des signaux de radar [8], la modélisation en télétrafic [9], etc.

Les distributions α – stables sont caractérisées par quatre paramètres : paramètre de forme $\alpha \in]0, 2]$, appelé aussi exposant caractéristique, paramètre d'asymétrie $\beta \in [-1, 1]$, paramètre de dispersion ou d'échelle $\gamma > 0$ et paramètre de localisation $\delta \in \mathbb{R}$. Dans le cas des distributions α – stables symétriques notées *SaS*, les deux paramètres β et δ sont nuls. Si le paramètre α prend ses valeurs dans l'intervalle ouvert $]0, 2[$, ces distributions ont une densité de probabilité non-gaussienne, caractérisée par des queues lourdes. Par exemple, si $\alpha = 1$, les distributions α – stables ont une densité de **Cauchy** ; mais si $\alpha = 2$, les distributions sont gaussiennes.

Contrairement aux autres distributions, les distributions α – stables présentent des limites : d'une part elles ne permettent pas un accès analytique à la densité de probabilité sauf pour $\alpha = 2$ (cas gaussien) et $\alpha = 1$ (cas de **Cauchy**) ; d'autre part, si $\alpha \neq 2$, les statistiques d'ordre supérieur, y compris la variance, ne sont pas définies, ce qui reste un problème dans la recherche [10]. Pour cette raison, la définition de la puissance d'une variable aléatoire n'est pas valide pour ce type des distributions. **Gonzalez** dans [11] et [12] a proposé une autre forme de puissance, nommée puissance géométrique, où il a proposé et utilisé la théorie des statistiques d'ordre zéro, qui est basée sur les moments d'ordre logarithmique, afin de caractériser ce type des distributions.

La deuxième partie ne contient que le troisième chapitre seulement. Ce chapitre était le plus intéressant dans ce mémoire. Il présente une méthode d'estimation semi-aveugle du paramètre de dispersion γ d'un bruit *SaS* à partir d'un signal reçu BPSK seulement. Cette méthode est une généralisation de la méthode originale proposée par **A. Chems** [13] pour différentes valeurs du paramètre de forme α . Contrairement à la méthode proposée par **A. Chems** [13] qui donne une forme implicite de la valeur estimée de γ , notre méthode permet d'exprimer la valeur estimée de γ sous une forme explicite.

La technique présentée dans ce travail permet de faire l'estimation des paramètres à partir du signal reçu uniquement, où elle n'a pas besoin de séparer le bruit au signal utile. Pour cette raison elle est qualifiée de semi-aveugle. Cette approche est basée sur les FLOS et sur la probabilité que les deux signaux reçu et transmis soient de même signe.

Comme ils ont fait dans [13], on a utilisé la *RMSE* relative pour évaluer cette technique d'estimation. Dans ce contexte, on a montré par simulation que cette approche est très précise surtout lorsque le bruit est très impulsif ou très dispersé.

Sauf la nouvelle technique proposée par **A. Chems**a [13], jusqu'à présent, nulle méthode n'existe dans la littérature qui traite le problème d'estimation des paramètres d'un bruit α -stable à partir du signal reçu. Pour cette raison, notre travail est dédié à ce problème d'estimation où le signal reçu est en modulation BPSK.

Ce mémoire est structurée en trois chapitres.

Le premier chapitre est consacré à quelques concepts de base sur les distributions α -stables et leurs propriétés principales.

Le second chapitre est dédié aux trois classes d'estimateurs des paramètres d'un bruit α -stable qui sont étudiées et recommandées par **C. R. Dance** et **E. E. Kuruoglu** [14].

Le troisième chapitre est réservé à une technique d'estimation semi-aveugle pour estimer le paramètre de dispersion γ d'un bruit SaS et à une simulation numérique.

Enfin, une conclusion générale dresse un bilan de ce travail et propose quelques perspectives de recherche.

Chapitre 1

Notions de base sur les distributions α – stables

1.1 Introduction

En traitement du signal, le bruit est une composante inéluctable dont il faut tenir compte qu'il s'agisse de l'analyse, de la modélisation, de l'identification ou de la détection. Les méthodes d'analyse et les algorithmes associés supposent que le bruit est modélisé sous la forme simple d'un bruit blanc gaussien dont les caractéristiques statistiques et spectrales sont parfaitement connues. Or la réalité est fort éloignée de cette hypothèse de travail, et en particulier, on rencontre souvent du bruit non-gaussien de type impulsif. Ce bruit se présente généralement sous forme d'impulsions élémentaires de forte amplitude, superposées au signal utile.

L'étude de l'effet des bruits impulsifs sur les systèmes de communication numérique fait un axe de recherche d'actualité, surtout lorsqu'il s'agit des systèmes à OFDM comme les systèmes filaires, y compris les lignes d'abonnés numériques DSL, les communications par courants porteurs en ligne PLC, et les systèmes sans fil standards par exemple, IEEE 802.11a/g/n/ac, WiMax (IEEE 802.16) et 3GPP LTE [15][16][17][18]. C'est pour cette raison que nous nous sommes intéressés aussi à l'étude de ce type de bruit qui apparaît dans ces de communications.

Ce chapitre s'est axé sur l'étude d'un modèle du bruit non-gaussien qui permet une représentation précise et fiable des phénomènes impulsifs. Ce modèle est très étudié dans la littérature, c'est le modèle α – stable qui possédait toujours une variance infinie, sauf dans le cas où $\alpha = 2$.

Il est bon de signaler qu'un problème de terminologie se pose : qu'est-ce que le « non-gaussien » ? Il est difficile d'échapper à une définition négative : le non-gaussien est tout ce qui n'est pas gaussien ! D'une manière générale, nous pouvons considérer qu'un modèle non-gaussien est un modèle où l'hypothèse de « gaussianité » de la loi du bruit

n'est pas faite a priori, même si, en fin de compte, nous retrouvons la loi gaussienne comme dans les cas α –stable.

1.2 Rudiments des lois α – stables

1.2.1 Définitions

Définition 1.1 [19]

Nous disons qu'une variable aléatoire réelle X qu'elle suit une loi α – stable si pour tout $n \geq 2$ il existe un réel strictement positif C_n et un réel D_n tels que

$$X_1 + X_2 + \dots + X_n \stackrel{d}{=} C_n X + D_n \quad (1.1)$$

où $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont n copies indépendantes de X .

Lorsque $D_n = 0$, nous parlons de loi strictement α – stable. Il est bon de noter que le mot « stable » signifie que la loi est stable par convolution. Nous pouvons montrer qu'il existe une constante α , $0 < \alpha \leq 2$, telle que $C_n = n^{1/\alpha}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. La démonstration est détaillée dans **Feller** [20]. D'où il vient l'appellation « α – stable ».

Définition 1.2 [21]

Nous disons qu'une variable aléatoire réelle X qu'elle suit une loi α – stable de paramètres α, β, γ et δ , que le nous notons $X \sim S_\alpha(\beta, \gamma, \delta)$, si et seulement si sa fonction caractéristique est de la forme

$$\psi_X(t) = \exp\{-\gamma^\alpha |t|^\alpha [1 + i \cdot \beta \cdot \text{sign}(t) \cdot \omega(t, \alpha)] + i \cdot \delta \cdot t\} \quad (1.2)$$

où

$$\omega(t, \alpha) = \begin{cases} -\tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \frac{2}{\pi} \ln|t| & \text{si } \alpha = 1 \end{cases} \quad (1.3.a)$$

$$\text{sign}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \\ -1 & \text{si } t < 0 \end{cases} \quad (1.3.b)$$

$$i^2 = -1, \alpha \in]0, 2], \beta \in [-1, 1], \gamma > 0 \text{ et } \delta \in \mathbb{R}.$$

Par conséquent, pour identifier complètement une loi α – stable il faut connaître ces quatre paramètres α , β , γ et δ .

Dans la définition 2.2, nous avons utilisé la fonction caractéristique au lieu de la PDF pour définir une loi $S_\alpha(\beta, \gamma, \delta)$, parce que la PDF d'une telle loi ne possède pas une forme fermée ou explicite sauf pour les deux cas particuliers suivants [21]

1. La distribution gaussienne $S_2(0, \gamma, \delta)$ où $f_X(x) = \frac{1}{2\gamma\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\delta)^2}{4\gamma^2}\right)$.
2. La distribution de **Cauchy** $S_1(0, \gamma, \delta)$ où $f_X(x) = \frac{\gamma}{\pi((x-\delta)^2 + \gamma^2)}$.

Mais, depuis l'implantation de la transformée de Fourier rapide FFT, les densités α – stables sont faciles à calculer. Nous pouvons approcher par cette méthode la densité

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} \psi_X(t) dt \quad (1.4)$$

Exemple 1.1

- La loi normale $N(m, \sigma^2)$ est une loi $S_2\left(\beta, \frac{\sigma}{\sqrt{2}}, m\right)$ (et réciproquement une loi $S_2(\beta, \gamma, \delta)$ est une loi normale $N(\delta, 2\gamma^2)$).
- La loi de **Cauchy** généralisée de densité $f_X(x) = \frac{\gamma}{\pi((x-\delta)^2 + \gamma^2)}$ est une loi $S_1(0, \gamma, \delta)$.
- La loi de **Poisson** $P(\lambda)$ n'est pas α – stable. En effet, soient X_1 et X_2 deux bruits suivent une loi de **Poisson**. Supposons que X_1 et X_2 sont α – stables, alors il existe $C > 0$ et D tels que

$$X_1 + X_2 \cong CX + D \quad (1.5)$$

Par égalité des moyennes et des variances, nous pouvons voir que

$$\begin{cases} 2\lambda = C\lambda + D \\ 2\lambda = C^2\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D = (2 - \sqrt{2})\lambda \\ C = \sqrt{2} \end{cases} \quad (1.6)$$

ce qui entraîne une contradiction car $(X_1 + X_2)$ à ses valeurs uniquement dans $\mathbb{N}$, alors que $\sqrt{2}X_1 + (2 - \sqrt{2})\lambda$ n'a pas que des valeurs dans $\mathbb{N}$.

Notations

Par convention, $S_\alpha(\beta, \gamma, \delta)$ représentera une loi α – stable de paramètres α, β, γ et δ et $S_\alpha S(\gamma)$ ou tout simplement $S_\alpha S$ une loi symétrique α – stable de paramètre γ où $\beta = \delta = 0$.

1.2.2 Définition et interprétation des paramètres d'une loi $S_\alpha(\beta, \gamma, \delta)$ [22]

Une loi α – stable alors est caractérisée par les quatre paramètres

- $0 < \alpha \leq 2$, ce paramètre est appelé le paramètre de forme, l'exposant caractéristique ou l'indice de stabilité. Il décrit la forme de la distribution ou le degré d'épaisseur de la queue de distribution (figures 1.1 jusqu'à 2.15). Plus ce paramètre est petit, plus les queues de la distribution sont épaisses, donc, plus

d'impulsivité au niveau des échantillons du bruit. Une distribution gaussienne a la valeur maximum de α soit $\alpha = 2$.

- $-1 \leq \beta \leq 1$, est le paramètre d'asymétrie. Lorsque β vaut zéro alors la distribution est symétrique (figures 1.1 jusqu'à 2.11). La loi est symétrique par rapport au paramètre δ . Si en plus, $\delta = 0$, la loi est dite symétrique α –stable SaS de fonction caractéristique

$$\psi_X(t) = \exp(-\gamma|t|^\alpha) \quad (1.7)$$

Lorsque β est positif (resp. négatif), le mode est à gauche (resp. à droite) de la moyenne. Lorsque β est positif (resp. négatif), la queue de distribution est plus épaisse à droite (resp. à gauche).

- $\gamma > 0$, est le paramètre de dispersion ou d'échelle. Plus γ est grand, plus les données sont volatiles. Le paramètre γ permet de cintrer plus ou moins le corps de la distribution (figures 1.1, 1.4 et 1.5).
- $-\infty < \delta < +\infty$, est le paramètre de localisation ou de position, pour α supérieur à 1, à la moyenne de la loi de distribution. Si $\beta = 0$ alors δ est la médiane. Dans les autres cas le paramètre δ ne peut pas être interprété (figures 1.1, 1.6 et 1.7). Lorsque δ est positif (resp. négatif), la courbe décale vers la droite (resp. vers la gauche).

Remarque 1.1

Dans les tracés de la PDF $f_X(x)$ d'une loi α –stable (voir les figures 1.2 et 1.3), nous remarquons que $f_X(-x, \alpha, \beta) = f_X(x, \alpha, -\beta)$.

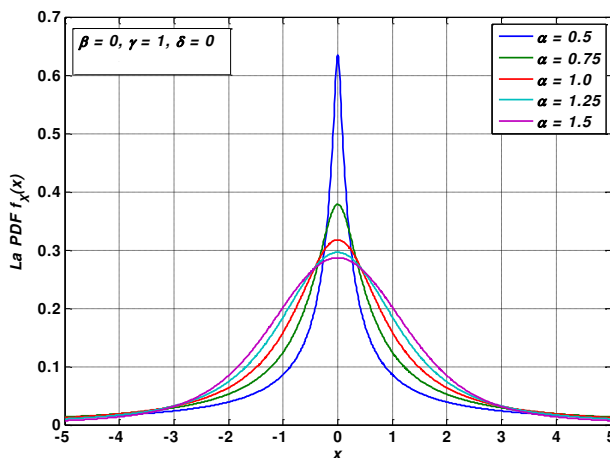


Fig. 1.1 La PDF pour $\alpha \in \{0.5, 0.75, 1, 1.25, 1.5\}$, $\beta = 0$, $\gamma = 1$, $\delta = 0$.

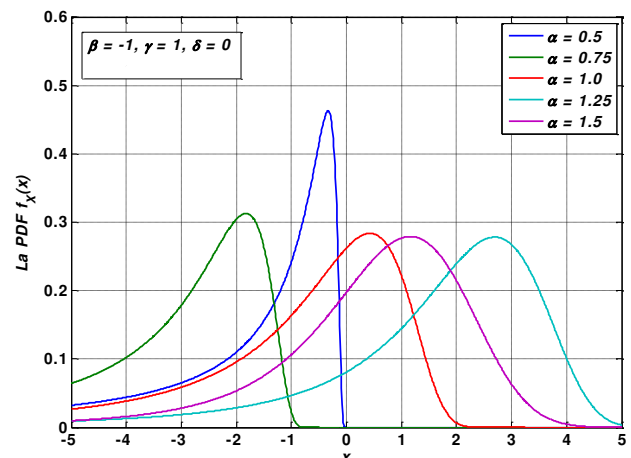


Fig. 1.2 La PDF pour $\alpha \in \{0.5, 0.75, 1, 1.25, 1.5\}$, $\beta = -1$, $\gamma = 1$, $\delta = 0$.

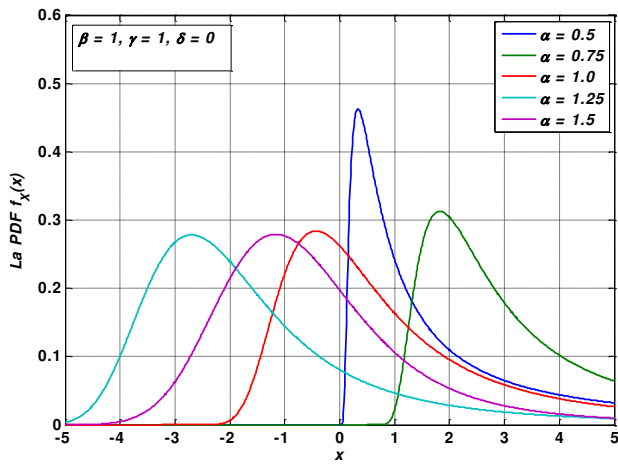


Fig. 1.3 La PDF pour $\alpha \in \{0.5, 0.75, 1, 1.25, 1.5\}$, $\beta = 1, \gamma = 1, \delta = 0$.

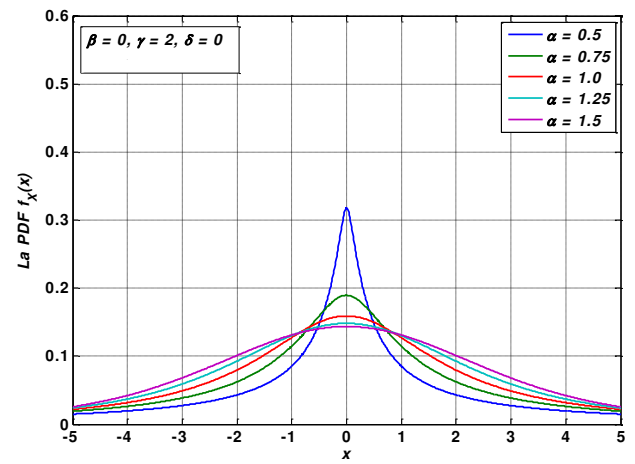


Fig. 1.4 La PDF pour $\alpha \in \{0.5, 0.75, 1, 1.25, 1.5\}$, $\beta = 0, \gamma = 2, \delta = 0$.

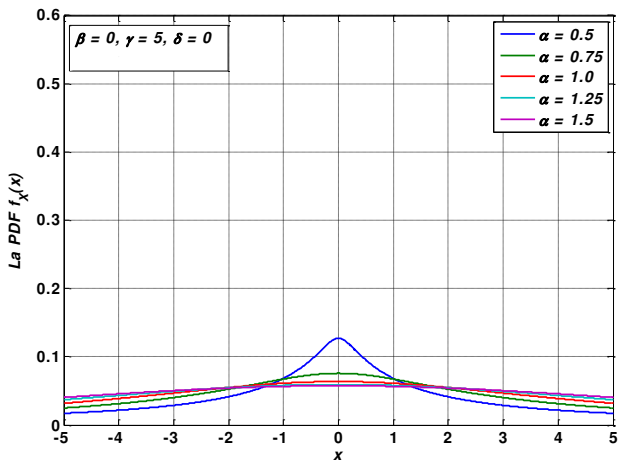


Fig. 1.5 La PDF pour $\alpha \in \{0.5, 0.75, 1, 1.25, 1.5\}$, $\beta = 0, \gamma = 5, \delta = 0$.

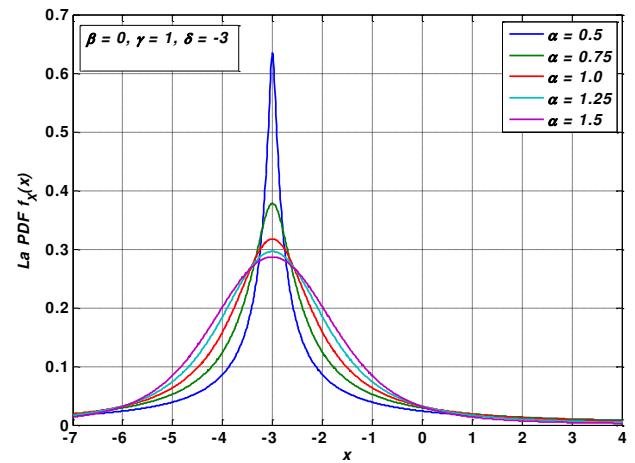


Fig. 1.6 La PDF pour $\alpha \in \{0.5, 0.75, 1, 1.25, 1.5\}$, $\beta = 0, \gamma = 1, \delta = -3$.

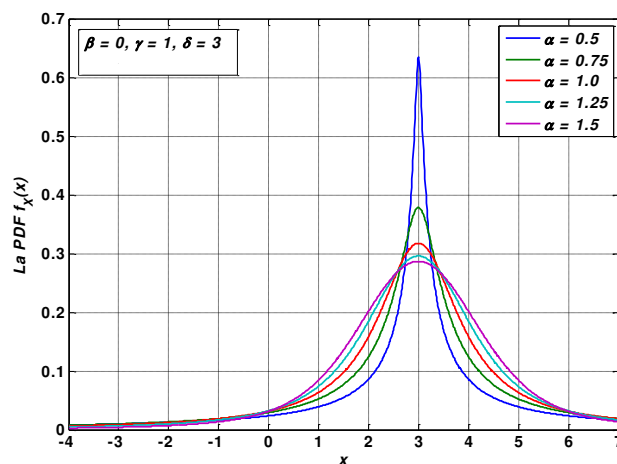


Fig. 1.7 La PDF pour $\alpha \in \{0.5, 0.75, 1, 1.25, 1.5\}$, $\beta = 0, \gamma = 1, \delta = 3$.

1.3 Diverses propriétés

Nous allons rappeler quelques propriétés importantes des bruits α – stables de loi $S_\alpha(\beta, \gamma, \delta)$ que nous utiliserons dans la suite de cette thèse.

Propriété 1.1 : La densité

Pour la plupart des lois connues, nous avons une forme explicite de la PDF (normale, **Cauchy**, gamma,...). Pour la loi α – stable, nous n'avons que la forme explicite de la fonction caractéristique. A l'aide de la transformée inverse de la fonction caractéristique, donnée par équation (1.4) nous pouvons obtenir la PDF f_X d'une loi α – stable standardisée, i.e. $\gamma = 1$ et $\delta = 0$, sous la forme d'une intégrale comme suit

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-t^\alpha} \cos[xt + \beta t^\alpha \omega(t, \alpha)] dt \quad (1.8)$$

où

$$\omega(t, \alpha) = \begin{cases} \tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) & \text{si } \alpha \neq 1 \\ -\frac{2}{\pi} \ln|t| & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}$$

Propriété 1.2 : La stabilité

Pour $\alpha \neq 1$, nous avons l'équivalence suivante

$$X \text{ suit une loi } S_\alpha(\beta, \gamma, \delta) \Leftrightarrow Y = \frac{X-\delta}{\gamma^{\frac{1}{\alpha}}} \text{ suit une loi } S_\alpha(\beta, 1, 0).$$

La démonstration de cette propriété se trouve dans [21].

Remarque 1.2

Pour la simulation (qui sera présentée dans le paragraphe 1.5), il suffit de générer des lois $S_\alpha(\beta, 1, 0)$ et par changement de variables, nous pouvons obtenir des lois $S_\alpha(\beta, \gamma, \delta)$.

Propriété 1.3 : Les queues lourdes

Soit X un bruit $S_\alpha(\beta, \gamma, \delta)$ nous avons les deux résultats suivants [23]

$$\begin{cases} \lim_{t \rightarrow +\infty} t^\alpha P(X > t) = \gamma C(\alpha) \frac{1+\beta}{2} \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} t^\alpha P(X < -t) = \gamma C(\alpha) \frac{1-\beta}{2} \end{cases}$$

où $C(\alpha) = \left(\int_0^{+\infty} x^{-\alpha} \sin x \, dx \right)^{-1}$.

L'égalité précédente nous fait penser à la caractérisation des lois de **Pareto**. En effet, un bruit suit une loi du type **Pareto** si

$$P(X \geq x) = x^{-\alpha} h(x)$$

où $h(x)$ est une fonction à variation lente, c'est-à-dire pour tout $t > 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h(tx)}{h(x)} = 1$. **Mandelbrot** [24] a montré que pour les lois α – stables, nous avons

$$P(X \geq x) = x^{-\alpha} [f_1(\alpha) + f_2(\alpha)x^{-\alpha} + o(x^{-2\alpha})] \quad (1.9)$$

Par passage à la limite quand x tend vers $+\infty$, nous s'apercevons que les lois α – stables sont asymptotiquement parétiennes.

Propriété 1.4 : L'existence des moments

Si X suit une loi $S_\alpha(\beta, \gamma, \delta)$, et $r \in \mathbb{R}$, les moments d'ordre r sont comme suivant

1. Si $\alpha = 2$: $\forall r, E(|X|^r) < +\infty$.
2. Si $0 < \alpha < 2$: $\forall r, -1 < r < \alpha, E(|X|^r) < +\infty$ et $\forall r \geq \alpha, E(|X|^r) = +\infty$.

La preuve de cette propriété est bien détaillée dans [5] et [21].

Nous pouvons conclure à partir de cette propriété que si α est strictement inférieur à 2, la variance d'une loi α – stable devient infinie. Si α est plus grand que 1, la moyenne d'une loi α – stable est δ .

Propriété 1.5 : Calcul des moments

Si X suit une loi $S_\alpha(\beta, \gamma, 0)$, nous avons pour tout réel r tel que : $-1 < r < \alpha$

$$m_r = E(|X|^r) = \frac{\Gamma(1 - \frac{r}{\alpha})}{\Gamma(1 - r)} \cdot \left| \frac{\gamma}{\cos \theta} \right|^{\frac{r}{\alpha}} \cdot \frac{\cos(\frac{r\theta}{\alpha})}{\cos(\frac{r\pi}{2})} \quad (1.10)$$

avec la fonction $\Gamma(z)$ est donnée par

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt \quad z > 0$$

et l'expression de θ est donnée par

$$\theta = \arctan\left(\beta \tan \frac{\alpha\pi}{2}\right) \quad (1.11)$$

Comme cas particulier, si la loi est $S\alpha S$, c'est-à-dire $\beta = 0$, nous trouvons

$$m_r = E(|X|^r) = \frac{\Gamma(1 - \frac{r}{\alpha})}{\Gamma(1 - r)} \cdot \frac{\gamma^{\frac{r}{\alpha}}}{\cos(\frac{r\pi}{2})} = \frac{2^{r+1} \cdot \Gamma(\frac{r+1}{2}) \cdot \Gamma(\frac{-r}{\alpha})}{\alpha\sqrt{\pi} \cdot \Gamma(\frac{-r}{2})} \cdot \gamma^{\frac{r}{\alpha}} \quad (1.12)$$

Ce résultat important a été démontré par **Nikias** dans la référence [10].

Propriété 1.6 : Les moments logarithmiques [25]

Pour éviter la présence de la fonction gamma, qui complique amplement les calculs, dans les moments d'une loi α – stable, nous utilisons ce que nous appelons les moments logarithmiques.

Soit X un bruit suit la loi $S_\alpha(\beta, \gamma, 0)$ et n un nombre entier strictement positif. D'après la relation

$$E((\ln|X|)^n) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{d^n}{dr^n} E(|X|^r), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

nous obtenons

$$L_1 = E(\ln|X|) = \psi_0 \cdot \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) + \frac{1}{\alpha} \cdot \ln \left| \frac{\gamma}{\cos \theta} \right| \quad (1.13)$$

$$L_2 = E\left((\ln|X| - E(\ln|X|))^2\right) = \psi_1 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\alpha^2}\right) - \frac{\theta}{\alpha^2} \quad (1.14)$$

$$L_3 = E\left((\ln|X| - E(\ln|X|))^3\right) = \psi_2 \cdot \left(1 - \frac{1}{\alpha^3}\right) \quad (1.15)$$

sachant que les valeurs ψ_k de la fonction polygamma sont données par

$$\psi_k = \frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}} \ln \Gamma(x) \Big|_{x=1}, \quad \psi_0 = -0.57721566 \dots, \quad \psi_1 = \frac{\pi^2}{6}, \quad \psi_2 = 1.2020569 \dots$$

et la quantité θ est donnée par (1.11).

Propriété 1.7 : L'additivité

Soient X_1 et X_2 deux bruits indépendants de lois α – stable $S_\alpha(\beta_1, \gamma_1, \delta_1)$ et $S_\alpha(\beta_2, \gamma_2, \delta_2)$ respectivement, alors $X_1 + X_2$ suit une loi α – stable $S_\alpha(\beta, \gamma, \delta)$ avec

$$\gamma = (\gamma_1^\alpha + \gamma_2^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}; \quad \beta = \frac{\beta_1 \gamma_1^\alpha + \beta_2 \gamma_2^\alpha}{\gamma_1^\alpha + \gamma_2^\alpha}; \quad \delta = \delta_1 + \delta_2 \quad (1.16)$$

Notons que si $\beta_1 = \beta_2$ alors $\beta = \beta_1 = \beta_2$.

Cette propriété d'additivité est très intéressante, car deux bruits ayant la même valeur du paramètre α peuvent être considérés ensemble et la loi qui résultera de cette association conservera la même valeur du paramètre mais les autres paramètres seront modifiés.

$$AX_1 + BX_2 + C = S_\alpha\left(\beta, \gamma(A^\alpha + B^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}, \delta(A^\alpha + B^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} + C\right) \quad (1.17)$$

1.4 Puissance géométrique

Il est important pour les processus α – stables de pouvoir évaluer l'« intensité » du processus, autrement dit sa puissance. C'est un paramètre d'échelle qui permet de comparer l'importance de l'interférence par rapport au signal utile et, éventuellement, aux autres bruits. Classiquement, la puissance arithmétique est utilisée, qui représente le moment d'ordre 2 du bruit [5].

Il est clair que la puissance arithmétique n'existe plus pour un processus α – stable avec $\alpha < 2$. Nous pouvons nous demander alors s'il est possible de définir un opérateur puissance P vérifiant quelques propriétés élémentaires de la puissance arithmétique [5]. **Gonzalez** dans [11] et [12] a proposé une autre forme de puissance, nommée puissance géométrique, qui s'affranchit de la condition de linéarité.

1.4.1 Définitions [26][5]

Définition 1.3

Nous disons qu'un bruit X est d'ordre logarithmique si et seulement si l'espérance $E(\ln|X|) < +\infty$.

Cette définition est établie par analogie avec l'expression « processus de second ordre » qui exprime que le processus considéré est à variance finie.

Définition 1.4

Soit X un bruit d'ordre logarithmique. La puissance géométrique de ce bruit s'écrit

$$S_0 = S_0(X) = e^{E(\ln(X^2))} e^{2E(\ln|X|)} \quad (1.18)$$

La puissance géométrique d'un bruit X de densité de probabilité $f_X(x)$ s'écrit alors comme suit

$$S_0 = e^{2 \int_{-\infty}^{+\infty} \ln|x| \cdot f_X(x) dx} \quad (1.19)$$

A partir de cette formule nous pouvons déterminer les puissances géométriques de quelques distributions usuelles.

- Pour la loi uniforme, $f_X(x) = 1/a$, $|x| \leq a/2$, nous avons $S_0(x) = (a/2e)^2$;
- Pour la loi gaussienne, $f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$, nous avons $S_0(x) = \sigma^2/2C_g$;
- Pour la loi de **Cauchy**, $f_X(x) = \frac{\gamma}{\pi(x^2+\gamma^2)}$, nous avons $S_0(x) = \gamma^2$.

1.4.2 Propriétés

Cette puissance géométrique présente d'importantes propriétés.

Propriété 1.8 : S_0 est un paramètre d'échelle

Pour tout processus d'ordre logarithmique X et pour toute constante c nous avons

- $S_0(X) \geq 0$;
- $S_0(cX) = c^2 S_0(X)$.

Propriété 1.9 : S_0 est un indicateur de puissance

Pour tout processus d'ordre logarithmique X et pour toutes constantes c et d nous avons

- $S_0(c) = c^2$;
- $c^2 < S_0(X) < d^2$ si pour toute réalisation x de X telle que $0 \leq c < |x| < d$;
- $S_0(X) = 0$ si et seulement si $Pr(|X| < \varepsilon) > 0 \forall \varepsilon > 0$, ce qui implique que la nullité de cette puissance quand la masse de probabilité discrète est localisée en zéro.

La démonstration se trouve dans la référence [12].

Propriété 1.10 : Multiplicativité de S_0

Pour tout couple de bruits (X, Y) et pour toute constante c nous avons

- $S_0(X \cdot Y) = S_0(X) \cdot S_0(Y)$;
- $S_0(X/Y) = S_0(X)/S_0(Y)$;
- $S_0(X^c) = S_0(X)^c$.

La démonstration est dans la référence [12].

Propriété 1.11 : L'inégalité de valeur absolue de S_0

Pour tout couple de bruits (X, Y) nous avons

$$S_0(|X| + |Y|) \geq S_0(X) + S_0(Y)$$

La démonstration est dans la référence [12].

1.4.3 Puissance géométrique d'une distribution $S\alpha S$

La puissance géométrique d'un bruit α – stable symétrique s'exprime en fonction de α et γ par [27]

$$S_0 = e^{2E(\ln|X|)} = \gamma^2 C_g^{\frac{2}{\alpha}-2} \quad (1.20)$$

où $C_g = e^{C_e} \cong 1.7811$ est une constante qui exprime l'exponentiel de la constante d'**Euler**.

La puissance géométrique nous permet de caractériser des processus impulsifs à variance infinie qui apparaissent dans les systèmes de transmission, mais elle ne permet pas de caractériser les performances de ces systèmes. Cette puissance permet par la suite de définir un nouveau rapport SNR que nous appellerons SNR géométrique ($GSNR$). Ce nouveau rapport sera bien détaillé dans ce qui suit.

1.4.4 Le rapport signal sur bruit géométrique

Dans le cadre d'un processus impulsif de variance infinie, le SNR standard du second ordre est nul et devient donc inutile pour caractériser le système de transmission et en présenter les performances. Dans ce cas, il est possible d'utiliser la puissance géométrique qui nous permet de définir un indicateur universel : le SNR géométrique ($GSNR$). Ce rapport est défini par l'équation

$$GSNR = \frac{1}{2C_g} \cdot \frac{E_b}{S_0} \quad (1.21)$$

où E_b est la puissance du signal utile reçu.

La constante de normalisation $2C_g$ garantit que dans le cas gaussien, le $GSNR$ redevient le SNR standard.

1.5 La simulation d'un bruit α – stable

Pour simuler les lois α – stables, il existe un algorithme développé par **Chambers** et al. [28]. Celui-ci permet de générer une loi $S_\alpha(\beta, 1, 0)$. Pour obtenir une loi $S_\alpha(\beta, \gamma, \delta)$, il suffit de faire un changement de variables (propriété 1.5).

✓ Première étape

Elle consiste à générer une loi Φ uniforme sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ est une loi W exponentielle de paramètre 1. Pour cela, il faut d'abord générer deux variables aléatoires U_1 et U_2 uniformes sur $]0, 1[$. Puis en utilisant le changement de variables suivant

$$\begin{cases} \Phi = \pi U_1 - \frac{\pi}{2} \\ W = \log(1 - U_2) \end{cases} \quad (1.22)$$

nous obtenons bien le résultat désiré.

✓ **Deuxième étape**

Elle consiste à générer une loi Y α – stable $S_\alpha(\beta, 1, 0)$. Pour obtenir cela, il faut utiliser la proposition suivante

Proposition 1.1 Soit Φ une loi uniforme sur $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et W une loi exponentielle de paramètre 1, si nous posons

– **Pour $\alpha \neq 1$**

$$Y = \left(\frac{\sin \alpha(\Phi - \Phi_0)}{(\cos \Phi)^{\frac{1}{\alpha}}} \right) \left(\frac{\cos(\Phi - \alpha(\Phi - \Phi_0))}{W} \right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \quad (1.23)$$

où $\Phi_0 = \left(\frac{\pi\beta}{2} \right) \left(\frac{1-|1-\alpha|}{\alpha} \right)$.

– **Pour $\alpha = 1$**

$$Y = \frac{2}{\pi} \left(\left(\frac{1}{2}\pi + \beta\Phi \right) \tan \Phi - \beta \log \left(\frac{\frac{1}{2}\pi W \cos(\Phi)}{\frac{1}{2}\pi + \beta\Phi} \right) \right) \quad (1.24)$$

alors le bruit Y suit une loi $S_\alpha(\beta, 1, 0)$.

Exemple 1.2

– Dans le cas d'une loi $S_\alpha S$ (c'est-à-dire $\beta = 0$), nous avons

$$\begin{cases} Y = \frac{\sin(\alpha\Phi)}{(\cos \Phi)^{\frac{1}{\alpha}}} \left(\frac{\cos((1-\alpha)\Phi)}{W} \right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} & \text{si } \alpha \neq 1 \\ Y = \tan \Phi & \text{si } \alpha = 1 \end{cases} \quad (1.25)$$

– Plus particulièrement, dans le cas où $\alpha = 2$, nous avons

$$Y = \frac{\sin 2\Phi}{\sqrt{\cos \Phi}} \left(\frac{\cos \Phi}{W} \right)^{-\frac{1}{2}} = 2\sqrt{W} \sin \Phi \quad (1.26)$$

– Enfin, dans le cas où $\alpha = 1$, nous avons

$$Y = \tan \Phi \quad (1.27)$$

formule connue, qui permet de simuler une loi de **Cauchy**.

1.6 Statistiques sur les lois symétriques α – stables

Nous savons bien d'après la propriété 1.5 que pour $0 < \alpha < 2$, une loi α – stable admet des moments d'ordre $r < \alpha$ uniquement.

Nous supposons que nous avons N échantillons ou réalisations $x_1, \dots, x_N$ d'un bruit X qui suit une loi symétrique α – stable $S\alpha S$. Si nous voulons prendre une idée sur la valeur de α , nous avons deux méthodes que nous pouvons les utiliser. La première méthode est basée sur le test du moment $E(|X|)$ et la variance du bruit X s'ils sont finis ou non. Il y a plusieurs façons pour faire ces tests [21]. La plus utilisée est la façon graphique [21]. La deuxième méthode est purement algébrique qui est basée sur l'estimation des paramètres de la distribution du bruit X .

La première méthode : la méthode de test

Soit à tester la variance par un test graphique. Ce test est très simple et se décompose en 2 étapes

1. Calculer la variance empirique pour différentes valeurs de $n \leq N$

$$s_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \quad \text{où} \quad \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

2. Tracer le graphique (n, s_n^2) . Intuitivement, lorsque n augmente jusqu'à N et lorsque la variance est finie, le tracé doit converger et α est égal à 2. Au contraire, si nous sommes en présence d'une loi à variance infinie, le tracé diverge et α est strictement être inférieur à 2.

La figure 1.8 présente les tracés de $n = 5000$ observations d'un bruit $S\alpha S$ pour différentes valeurs de α et pour $\gamma = 1$. Nous remarquons que plus α est petit plus le tracé présente d'impulsivité.

La figure 1.9 montre le test graphique de la variance pour les mêmes échantillons du bruit de la figure 1.8. Dans la figure 1.9.a, nous remarquons que lorsque n augmente, la variance converge vers une valeur fixe égale à 2, ce qui prouve que $\alpha = 2$ et le bruit est gaussien avec variance $\sigma^2 = 2\gamma^2 = 2$, c'est-à-dire $\gamma = 1$. Dans les deux figures 1.9.b et 1.9.c, nous observons une divergence de la variance, ce qui signifie que $\alpha < 2$.

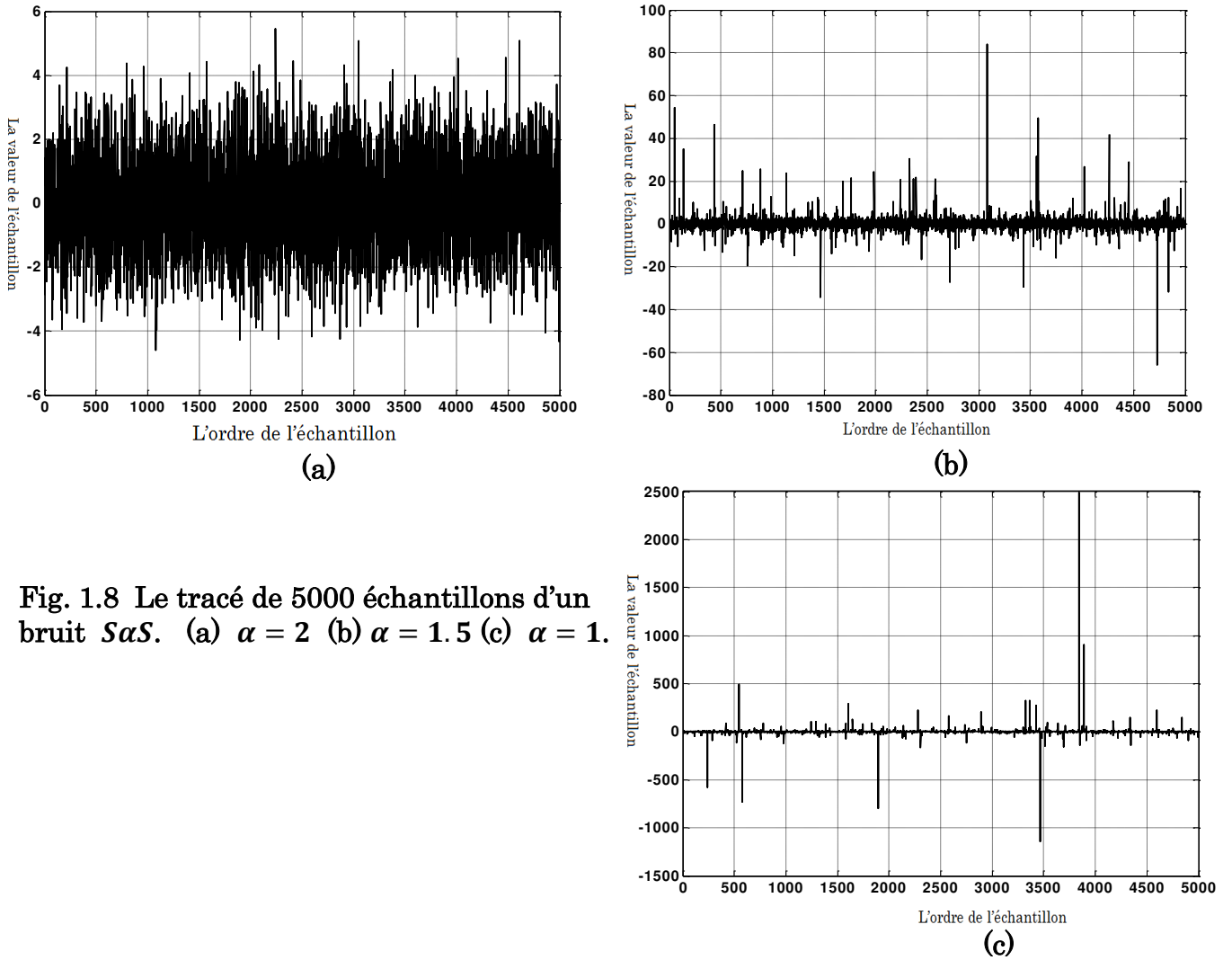


Fig. 1.8 Le tracé de 5000 échantillons d'un bruit $S\alpha S$. (a) $\alpha = 2$ (b) $\alpha = 1.5$ (c) $\alpha = 1$.

La deuxième méthode : la méthode d'estimation

La relation (1.14) nous permet d'écrire pour un bruit X qui suit une loi $S\alpha S$ de paramètres α et γ

$$\alpha = \left(\frac{L_2}{\psi_1} - \frac{1}{2} \right)^{-1/2}, \quad \psi_1 = \frac{\pi^2}{6} \quad (1.27)$$

Si nous approximations l'espérance mathématique par la moyenne arithmétique ou empirique dans les expressions de L_2 nous trouvons

$$L_2 = E \left((\ln|X| - E(\ln|X|))^2 \right) \cong \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \left(\ln|x_n| - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \ln|x_i| \right)^2$$

et nous obtenons facilement la valeur estimée de α à partir de (1.27). Par exemple, les observations du bruit $S\alpha S$ de la figure 1.8.a donnent une valeur estimée de α égale 2.0221, celles de la figure 1.8.b donnent une valeur de 1.5304 et celles de la figure 1.8.c donnent une valeur de 0.9874.

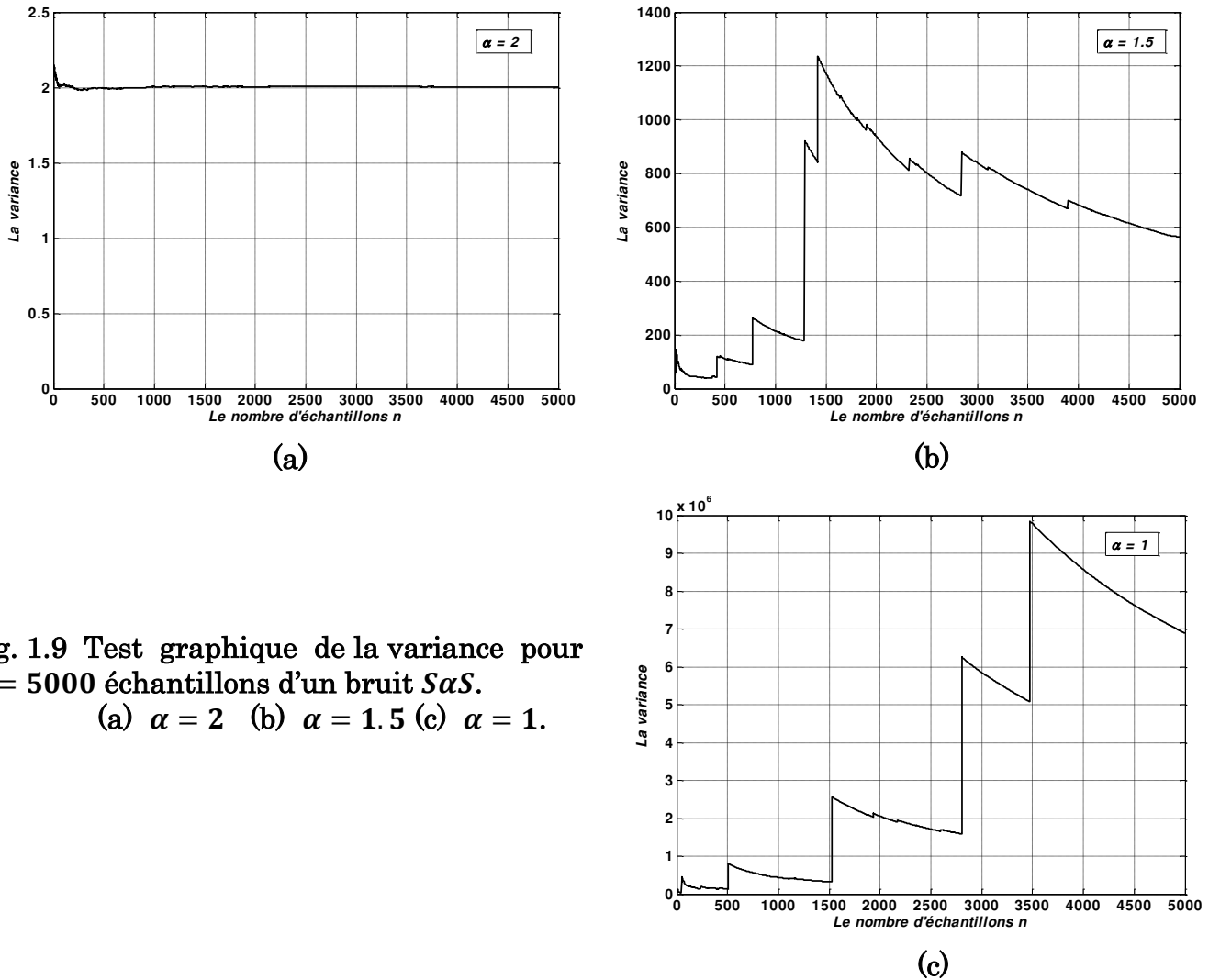


Fig. 1.9 Test graphique de la variance pour $N = 5000$ échantillons d'un bruit SaS .

(a) $\alpha = 2$ (b) $\alpha = 1.5$ (c) $\alpha = 1$.

1.7 Conclusion

Dans ce chapitre, de lois statistiques qui représentent les bruits non gaussiens à queues lourdes (bruits impulsifs) ont été présentés, à savoir, les lois α – stables. Ce sont des lois permettant de prendre en compte les notions d'asymétrie et de queue lourde. Les lois de **Gauss** ($\alpha = 2$) et de **Cauchy** ($\alpha = 1$) sont des cas particuliers de lois α – stables. Pour un bruit α – stable ($0 < \alpha \leq 2$), on a vu que plus α est petit plus la queue de la loi est lourde, ce qui traduit par la présence de fortes impulsions au niveau des observations du bruit. En plus, on a expliqué le sens et l'influence des autres paramètres d'un tel bruit, ainsi que l'algorithme de simulation qui permet de le générer.

On a constaté que si $0 < \alpha < 2$, la variance d'un bruit α – stable est infinie. Ce fait entraîne une puissance infinie pour le bruit envisagé, et pour caractériser l'intensité d'un tel bruit, une des solutions proposées est d'utiliser les moments d'ordre logarithmique [26], où on a défini la puissance géométrique d'un bruit α – stable.

L'un des inconvénients d'une loi α – stable réside dans la non-existence d'une expression explicite de sa PDF sauf pour $\alpha = 2$ et $\alpha = 1$. En effet, elle est calculée à partir d'un calcul d'intégrale aux bornes infinies d'une fonction complexe comme le montre l'équation (1.26).

On a vu que pour générer des échantillons X_i d'une variable aléatoire X qui suit une loi α – stable, il faut et il suffit de donner les valeurs des quatre paramètres : α , β , γ et δ . Si on considère la situation inverse, où on a les valeurs des échantillons X_i d'une variable aléatoire X qui suit une loi α – stable, est ce que c'est possible de trouver les valeurs des quatre paramètres α , β , γ et δ ? La réponse est oui, et il s'agit ici donc d'un problème d'estimation.

L'estimation de ces quatre paramètres fait l'objet du chapitre suivant.

Chapitre 2

Méthodes d'estimation des paramètres d'un bruit α – stable

2.1 Introduction

Différentes méthodes ont été proposées dans la littérature pour estimer les paramètres α , β , γ et δ d'une variable aléatoire α – stable. **Fama** et **Roll** [29] ont proposé une méthode basée sur les quantiles pour estimer le paramètre de forme α et le paramètre de dispersion γ d'une variable aléatoire $S\alpha S$. Cependant, cette méthode est applicable uniquement pour $\alpha > 1$. Cette méthode a été modifiée par **McCulloch** [30] pour inclure même les variables aléatoires à distribution non symétrique avec α dans l'intervalle $[0.6, 2.0]$. **Koutrouvelis** [31] a proposé une méthode basée sur la fonction caractéristique qui implique une procédure de régression itérative pour estimer les paramètres d'une variable aléatoire α – stable. **Kogon** et **Williams** [32] ont amélioré cette méthode en éliminant la procédure itérative et en simplifiant la régression. **Ma** et **Nikias** [33] et **Tsihrintzis** et **Nikias** [34] ont proposé l'utilisation de statistiques d'ordre inférieur fractionnel FLOS pour estimer les paramètres d'une variable aléatoire α – stable symétrique. **Bates** et **McLaughlin** [35] ont étudié les performances des méthodes proposées par **McCulloch** [30], **Kogon** et **Williams** [32], **Ma** et **Nikias** [33], et **Tsihrintzis** et **Nikias** [34] en utilisant deux ensembles de données réelles. Ils ont constaté qu'il existe de différences marquées entre les résultats obtenus à l'aide de différentes méthodes.

Cependant, la plupart de ces travaux considèrent que le cas particulier des variables aléatoires α – stables symétriques $S\alpha S$. Or la plupart des signaux de la vie réelle sont biaisés. En plus, toutes les techniques existantes soit elles exigent trop de calcul, soit leurs estimations possèdent des variances élevées.

Dans [36] les paramètres d'une variable aléatoire α – stable sont estimés en utilisant une procédure d'optimisation en minimisant la somme des carrés de la différence entre la CDF observée ou empirique et la CDF théorique de la distribution α – stable.

Une étude comparative récente en termes d'erreur entre quelques méthodes d'estimation déjà citées, a été présentée par **Wang** et al. [37].

Il est important de signaler ici que les méthodes d'estimation déjà citées, surtout lorsque la distribution est asymétrique, souffrent de deux contraintes de limitation : la première est purement informatique où dans quelques applications ces méthodes nécessitent des moyens informatiques trop chers, et la deuxième contrainte est lorsque la variance de l'estimateur est trop élevée [38][39].

Dans ce chapitre, on va résoudre analytiquement le problème général de l'estimation des paramètres d'une variable aléatoire α – stable. On va présenter trois nouvelles classes d'estimateurs des quatre paramètres α , β , γ et δ . Ces nouvelles classes d'estimateurs sont basées sur les FLOS positives et négatives d'une distribution α – stable asymétrique. Ce sont des généralisations des méthodes précédemment citées pour une variable aléatoire α – stable symétrique. De plus les techniques présentées dans ce chapitre nécessitent sensiblement moins de calculs [25].

On considère les distributions α – stables univariés ou unidimensionnels décrites par la fonction caractéristique (voir chapitre 1)

$$\varphi(z) = \exp \left(-\gamma |z|^\alpha \left[1 + j\beta \operatorname{sign}(z) \cdot \tan \left(\frac{\alpha\pi}{2} \right) \right] + j\delta z \right) \quad (2.1)$$

où l'exposant caractéristique $\alpha \in]0,1[\cup]1,2[$, le paramètre de symétrie $\beta \in [-1,1]$, le paramètre de dispersion $\gamma > 0$ et le paramètre de localisation $\delta \in]-\infty, +\infty[$. On ne considère pas les deux cas $\alpha = 1, 2$ où la distribution a un comportement spécial.

2.2 Les estimateurs utilisés

2.2.1 Les sommes pondérées des variables aléatoires α – stables i.i.d

Soient X_k des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d) qui suivent une loi α – stable de paramètres $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$. On note ceci comme suit

$$X_k \sim S_\alpha(\beta, \gamma, \delta) \quad (2.2)$$

La distribution d'une somme pondérée de ces variables avec des poids a_k est facilement appréciable à partir de la forme de la fonction caractéristique [23]

$$Z = \sum_{k=1}^n a_k X_k \sim S_\alpha \left(\frac{\sum_{k=1}^n a_k^{(\alpha)}}{\sum_{k=1}^n |a_k|^\alpha} \beta, \sum_{k=1}^n |a_k|^\alpha \gamma, \sum_{k=1}^n a_k \delta \right) \quad (2.3)$$

où on note la $r^{\text{ème}}$ puissance signée d'un nombre x par

$$x^{(r)} = \text{sign}(x) \cdot |x|^r \quad (2.4)$$

Cela fournit un moyen pratique pour générer des séquences de variables aléatoires indépendantes avec $\delta = 0$, $\beta = 0$ ou avec $\delta = \beta = 0$ (sauf quand $\alpha = 1$). A partir de la relation (2.3) on trouve les expressions des distributions centrée (centred), des skew ou biaisée comme suit

$$X_k^C = X_{3k} + X_{3k-1} - 2X_{3k-2} \sim S_\alpha \left(\left[\frac{2 - 2^\alpha}{2 + 2^\alpha} \right] \beta, [2 + 2^\alpha] \gamma, 0 \right) \quad (2.5)$$

$$X_k^D = X_{3k} + X_{3k-1} - 2^{\frac{1}{\alpha}} X_{3k-2} \sim S_\alpha \left(0, 4\gamma, \left[2 - 2^{\frac{1}{\alpha}} \right] \delta \right) \quad (2.6)$$

$$X_k^S = X_{2k} - X_{2k-1} \sim S_\alpha(0, 2\gamma, 0) \quad (2.7)$$

A l'aide de ces trois relations, l'estimation des paramètres α, β, γ et δ d'une distribution α –stable peut être déduite à partir de l'estimation de la même distribution α –stable centrée et/ou biaisée et/ou symétrisée mais avec une perte active de la taille de l'échantillon.

Pour cette raison notre étude sera limitée dans le chapitre suivant à l'estimation des paramètres d'une loi α –stable symétrique $S_\alpha S$.

2.2.2 Les méthodes FLOS

Une technique habituelle pour établir les estimateurs est de trouver des formules pour les moments classiques (moments d'ordre supérieur) d'une distribution en fonction des paramètres de cette distribution. Cette technique ne peut pas être directement appliquée à des distributions α –stables puisque pour $\alpha < 2$, la variance de ces distributions est infinie et pour $\alpha \leq 1$ la moyenne est infinie (voir chapitre 1). Pour surmonter ce problème, il existe une alternative qui consiste à considérer les moments ou les statistiques d'ordre inférieur fractionnaire FLOS. Des formules des FLOS pour les distributions symétriques α –stables $S_\alpha S$ sont données par **Ma** et **Nikias** [33].

Ici, on généralise leur résultat au cas biaisé. En outre, on considère à la fois les espérances des puissances signés et absolues d'une variable α – stable qu'on les appelle la FLOS signé et la FLOS absolue.

Proposition 2.1

Soit $X \sim S_\alpha(\beta, \gamma, 0)$. On a pour $\alpha \neq 1$

$$S_r = E[X^{(r)}] = \frac{\Gamma(1-\frac{r}{\alpha})}{\Gamma(1-r)} \cdot \left| \frac{\gamma}{\cos \theta} \right|^{\frac{r}{\alpha}} \cdot \frac{\sin(\frac{r\theta}{\alpha})}{\sin(\frac{r\pi}{2})} \quad \text{pour } r \in [-2, -1[\cup]-1, \alpha] \quad (2.8)$$

$$A_r = E[|X|^r] = \frac{\Gamma(1-\frac{r}{\alpha})}{\Gamma(1-r)} \cdot \left| \frac{\gamma}{\cos \theta} \right|^{\frac{r}{\alpha}} \cdot \frac{\cos(\frac{r\theta}{\alpha})}{\cos(\frac{r\pi}{2})} \quad \text{pour } r \in]-1, \alpha] \quad (2.9)$$

$$\text{où} \quad \theta = \tan^{-1} \left(\beta \tan \frac{\alpha\pi}{2} \right) \quad (2.10)$$

La présence de la fonction gamma nous empêche de trouver l'expression directe des paramètres à estimer. Toutefois, en prenant de produits et de rapports des FLOS et on applique la propriété suivante de la fonction gamma [40]

$$\Gamma(r) \cdot \Gamma(1-r) = \frac{\pi}{\sin(r\pi)} \quad (2.11)$$

On obtient dans ce cas quelques expressions simple de forme fermée pour α , β et γ . Dans ce qui suit, on note les FLOS absolus et signés par

$$A_r = E[|X|^r], \quad S_r = E[X^{(r)}] \quad (2.12)$$

Étant donné n observations indépendantes d'une variable aléatoire X , A_r et S_r peuvent être estimés en prenant respectivement les FLOS des échantillons X_k

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |X_k|^r, \quad \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k^{(r)} \quad (2.13)$$

On résume les estimateurs FLOS comme suit, dans tous les cas on suppose que $\delta = 0$ et on utilise pour les FLOS les estimations données par l'équation (2.13) au lieu des FLOS réelles.:

- **L'estimateur Sinc pour α** : L'estimation de α est la solution de l'équation suivante

$$\text{sinc}\left(\frac{r\pi}{\alpha}\right) = \left[q \left(\frac{A_r A_{-r}}{\tan q} + S_r S_{-r} \tan q \right) \right]^{-1} \quad \text{où} \quad q = \frac{r\pi}{2} \quad (2.14)$$

Les choix appropriés de l'ordre fractionnel r pour cet estimateur et pour des autres sont discutés ci-dessous. Cet estimateur est une généralisation de l'estimateur Sinc de **Ma et Nikias** [33] dans le cas biaisé.

- **L'estimateur rapport de β** : Étant donné une estimation de α , l'estimation de θ est obtenue par la résolution de l'équation

$$\frac{S_r}{A_r} = \frac{\tan\left(\frac{r\theta}{\alpha}\right)}{\tan\left(\frac{r\pi}{2}\right)} \quad (2.15)$$

Compte tenu de cette estimation de θ , on obtient l'estimation de β suivante

$$\beta = \frac{\tan(\theta)}{\tan\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)} \quad (2.16)$$

- **Estimateur produit $A_r S_{-r}$ de β** : Étant donné une estimation de α , l'estimation θ (et donc β) est obtenue en résolvant l'équation suivante

$$A_r S_{-r} = \frac{\sin\left(\frac{2r\theta}{\alpha}\right)}{\alpha \sin\left(\frac{r\pi}{\alpha}\right)} \quad (2.17)$$

- **L'estimateur produits $A_r A_{-r}$ de β** : Étant donné une estimation de α , l'estimation de $|\theta|$ (et donc de $|\beta|$) est obtenue en résolvant l'équation

$$A_r A_{-r} = \frac{2}{\alpha} \cdot \left(\frac{\sin r\pi}{1 + \cos r\pi} \right) \cdot \frac{\cos^2\left(\frac{r\theta}{\alpha}\right)}{\sin\left(\frac{r\pi}{\alpha}\right)} \quad (2.18)$$

- **L'estimateur produit $S_r S_{-r}$ de β** : Étant donné une estimation de α , l'estimation de $|\theta|$ (et donc de $|\beta|$) est obtenue en résolvant l'équation

$$S_r S_{-r} = \frac{2}{\alpha} \cdot \left(\frac{\sin r\pi}{1 - \cos r\pi} \right) \cdot \frac{\sin^2\left(\frac{r\theta}{\alpha}\right)}{\sin\left(\frac{r\pi}{\alpha}\right)} \quad (2.19)$$

- **L'estimateur FLOS de γ** : Étant donné une estimation de α et β , l'estimation de γ est donnée par

$$\gamma = |\cos \theta| \cdot \left(\frac{\Gamma(1-r) \cos\left(\frac{r\pi}{2}\right)}{\Gamma\left(1-\frac{r}{\alpha}\right) \cos\left(\frac{r\theta}{\alpha}\right)} \cdot A_r \right)^{\frac{\alpha}{r}} \quad (2.20)$$

Tous ces estimateurs tiennent en compte une valeur nulle pour δ , mais dans la réalité et surtout dans certaines applications, il y a des raisons physiques pour assumer une valeur particulière pour δ , qui peut ensuite être soustraite des données observées dans quelques cas ; et dans d'autres cas, on peut appliquer la technique de centrosymétrisation (voir les équations (2.5) et (2.7)) décrit dans la section précédente pour avoir un paramètre $\delta = 0$.

Une limitation plus importante de certains des estimateurs décrit ci-dessus est qu'ils ne sont pas en mesure de détecter le signe du paramètre β .

Preuve de la proposition 2.1

La preuve de cette proposition comporte trois étapes

1. Nous trouvons une expression intégrale pour le $r^{\text{ème}}$ moment fractionnel pour la moitié positive d'une distribution α – stable ;
2. Nous évaluons cette intégrale ;
3. Nous combinons les résultats des queues positives et négatives.

Etape 1. Nous écrivons la fonction caractéristique sous la forme

$$\varphi(t) = \begin{cases} \exp(-zt^\alpha) & t \geq 0, \\ \exp(-z^*(-t)^\alpha) & t < 0, \end{cases} \quad (2.21)$$

où
$$z = \gamma \left(1 + j\beta \tan \frac{\alpha\pi}{2} \right)$$

et pour obtenir la PDF $f(x)$ de la loi α – stable, on doit appliquer la transformée de **Fourier** inverse sur cette fonction caractéristique. Afin d'avoir une flexibilité suffisante pour l'étape 2 de la preuve, à la place de la transformée de **Fourier** de $f(x)$, on considère la transformée de **Fourier** inverse de $x^n f(x)$, où n est un entier, qui est $(-j \frac{d}{dt})^n \cdot \varphi(t)$.

Maintenant, on sait que $\varphi(-t) = \varphi(t)^*$, on a donc l'expression suivante pour la PDF $f(x)$ d'une distribution α – stable

$$2\pi x^n f(x) = 2\text{Re} \int_0^{+\infty} \exp(-jtx) \cdot \left(-j \frac{d}{dt}\right)^n \cdot \varphi(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-jtx) \cdot \left(-j \frac{d}{dt}\right)^n \cdot \varphi(t) dt$$

Ainsi le moment fractionnel pour la moitié positive d'une distribution α – stable est

$$\int_0^{+\infty} x^r f(x) dx = \text{Re} \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} x^{r-n} \exp(-jtx) \left[\left(-j \frac{d}{dt}\right)^n \cdot \exp(-zt^\alpha) \right] dt dx \quad (2.22)$$

Etape 2 : Maintenant, en utilisant la transformée de **Fourier** où on prend l'intégrale selon x positive [40], on trouve

$$\int_0^{+\infty} x^q \exp(-jtx) dx = \pi k_q t^{-q-1} ; k_q = \frac{je^{\frac{jq\pi}{2}}}{\Gamma(-q) \sin q\pi} ; q \in]-1, 0[\quad (2.23)$$

Ainsi, pour $r \in [n-1, n]$ on a

$$\int_0^{+\infty} x^r f(x) dx = \operatorname{Re} j^n k_{r-n} \int_0^{+\infty} t^{n-r-1} \left(\frac{d}{dt}\right)^n \exp(-zt^\alpha) dt$$

Les intégrales en t ont la forme

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} t^{q-1} \cdot \exp -zt^\alpha dt &= z^{-\frac{q}{\alpha}} \alpha^{-1} \int_0^{+\infty} u^{\frac{q}{\alpha}-1} \cdot \exp -u du = z^{-\frac{q}{\alpha}} \cdot \alpha^{-1} \cdot \Gamma\left(\frac{q}{\alpha}\right) \\ \int_0^{+\infty} t^{q-1} \cdot \exp -zt^\alpha dt &= z^{-\frac{q}{\alpha}} \alpha^{-1} \int_0^{+\infty} u^{\frac{q}{\alpha}-1} \cdot \exp -u du = z^{-\frac{q}{\alpha}} \cdot \alpha^{-1} \cdot \Gamma\left(\frac{q}{\alpha}\right) \end{aligned} \quad (2.24)$$

avec $\alpha, r, \operatorname{Re}(z) > 0$

En utilisant la définition de la fonction gamma [40]

$$\int_0^{+\infty} t^{x-1} \exp(-t) dt = \Gamma(x) \text{ pour } x > 0, \text{ et } \Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x) \text{ pour toute } x \quad (2.25)$$

En particulier,

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{+\infty} t^{n-r-1} \left(\frac{d}{dt}\right)^n \exp -zt^\alpha dt \\ I_0 &= z^{\frac{r}{\alpha}} \Gamma\left(-\frac{r}{\alpha}\right) \alpha^{-1} ; r < 0, \\ I_1 &= z^{\frac{r}{\alpha}} \Gamma\left(1 - \frac{r}{\alpha}\right) ; r < \alpha, \\ I_2 &= z^{\frac{r}{\alpha}} \Gamma\left(1 - \frac{r}{\alpha}\right) (r-1) ; r < \alpha \end{aligned}$$

Il peut être facilement vérifié que tous ces cas conduisent au même résultat final,

$$\int_0^{+\infty} x^r f(x) dx = \operatorname{Re} \frac{je^{\frac{jr\pi}{2}}}{\Gamma(-r) \sin r\pi} \alpha^{-1} z^{\frac{r}{\alpha}} \cdot \Gamma\left(-\frac{r}{\alpha}\right)$$

Chaque valeur de n donne une gamme distincte de validité pour cette expression.

La gamme globale de validité est $r \in]-1, 0[\cup]0, 1[\cup]1, 2[$ et $r < \alpha$.

En remarquant que

$$\operatorname{Re}(j\omega_1\omega_2) = |\omega_1\omega_2| \sin(\arg \omega_1 + \arg \omega_2)$$

pour tous nombres complexes arbitraires ω_1 et ω_2 et en mettant $\theta = \arg z$, l'expression précédente peut être simplifiée comme suit

$$\int_0^{+\infty} x^r f(x) dx = \frac{\Gamma\left(1 - \frac{r}{\alpha}\right)}{\Gamma(1-r)} |z|^{\frac{r}{\alpha}} \frac{\sin\left(\frac{r\pi}{2} + \frac{r}{\alpha} \arg z\right)}{\sin r\pi} = \frac{\Gamma\left(1 - \frac{r}{\alpha}\right)}{\Gamma(1-r)} \left| \frac{\gamma}{\cos \theta} \right|^{\frac{r}{\alpha}} \frac{\sin\left(\frac{r\pi}{2} + \frac{r\theta}{\alpha}\right)}{\sin r\pi}$$

Etape 3 : A partir de la forme de la fonction caractéristique, il est évident que

$$-X_k \sim S_\alpha(\gamma, -\beta, 0)$$

On peut donc appliquer les résultats déjà obtenus pour les deux queues positives et négatives dans les formules suivantes

$$E[|X|^r] = E[X^r | X > 0] \Pr(X > 0) + E[(-X)^r | X < 0] \Pr(X < 0) \quad (2.26)$$

$$E[X^{(r)}] = E[X^r | X > 0] \Pr(X > 0) - E[(-X)^r | X < 0] \Pr(X < 0) \quad (2.27)$$

pour obtenir la proposition 2.1 avec $r \in]-1, 0[\cup]0, 1[\cup]1, 2[$ et $r < \alpha$.

Pour étendre les résultats trouvés pour le moment signé FLOS avec $r \in]-2, -1[$, on intègre l'équation (2.22) par parties. Après la soustraction des intégrales des queues positives et négatives, la partie singulière de l'intégrale totale va disparaître. Plus précisément, avec $n = 0$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} x^{(r)} f(x) dx &= \left[\frac{x^{r+1}}{r+1} (f(x) - f(-x)) \right]_0^{+\infty} \\ &\quad - \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{x^{r+1}}{r+1} (-jt) (\exp(-jtx - zt^\alpha) + \exp(jtx - z^* t^\alpha)) dt dx \\ &= 0 + \operatorname{Re} \frac{jk_{r+1}}{r+1} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} t^{-r-1} (\exp(-zt^\alpha) - \exp(-z^* t^\alpha)) dt dx \end{aligned}$$

Ceci est juste une paire d'intégrales en t convergentes de la forme donnée par l'équation (2.24) et conduit de nouveau à la formule donnée dans la proposition 2.1.

2.2.3 Les moments logarithmiques

Une autre façon d'éliminer la fonction gamma à partir des formules de FLOS est de différencier par rapport à l'ordre du moment r . Cela se traduit par des moments du logarithme du processus α – stable. L'avantage de l'estimateur logarithmique par rapport aux estimateurs de FLOS est qu'ils ne nécessitent pas l'inversion d'une fonction *sinc* et permettent aussi d'éviter le problème du choix de l'ordre de moment r . Autrement dit, si on applique la relation suivante

$$E[(\ln|X|)^n] = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{d^n}{dr^n} E[|X|^r], \quad n = 1, 2, 3 \dots$$

on obtient les moments donnés dans la proposition suivants

Proposition 2.2

Soit $X \sim S_\alpha(\beta, \gamma, 0)$ alors

$$L_1 = E[\ln|X|] = \psi_0 \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) + \frac{1}{\alpha} \cdot \ln \left| \frac{\gamma}{\cos \theta} \right| \quad (2.28)$$

$$L_2 = E[(\ln|X| - E[\ln|X|])^2] = \psi_1 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\alpha^2}\right) - \frac{\theta^2}{\alpha^2} \quad (2.29)$$

$$L_3 = E[(\ln|X| - E[\ln|X|])^3] = \psi_2 \left(1 - \frac{1}{\alpha^3}\right) \quad (2.30)$$

où les valeurs ψ_k de la fonction de polygamma sont

$$\psi_{k-1} = \frac{d^k}{dx^k} \cdot \ln \Gamma(x) \Big|_{x=1}, \quad \psi_0 = -0.57721566 \dots \quad \psi_1 = \frac{\pi^2}{6}, \quad \psi_2 = 1.2020569 \dots$$

Les moments logarithmique trouvés est une généralisation directe des moments $\ln|S_\alpha S|$ exposés dans [33]. En calculant ces moments à partir des échantillons et en les identifiant avec les moments déjà trouvés, on peut aisément trouver

- la valeur du l'exposant caractéristique α en utilisant le troisième moment ;
- la valeur du θ et on déduit celle de β en utilisant le deuxième moment ;
- la valeur de γ en utilisant le premier moment.

Cependant, les moments logarithmiques d'ordre supérieur ont la tendance d'être plus bruyants. Nous préférons donc d'appliquer la procédure de centro-symétrisation pour obtenir un paramètre $\theta = 0$ puis on cherche la valeur estimée de α en utilisant le second moment. Cette estimation de α peut ensuite être utilisée dans la relation du deuxième moment (pour le processus α – stable biaisé) pour tirer la valeur estimée du paramètre β . Ensuite, on utilise la relation du premier moment pour calculer l'estimation du paramètre de dispersion γ . Le calcul de ces estimations peuvent être résumé comme suit

- **Estimateur logarithmique pour α** : Appliquer la technique de centro-symétrisation donné par l'équation (2.7) aux données observées (échantillons) pour obtenir des données transformées. Estimation L_1 pour les données transformées et donc l'estimation

$$\alpha = \left(\frac{L_2}{\psi_1} - \frac{1}{2} \right)^{\frac{-1}{2}} \quad (2.31)$$

- **Estimateur logarithmique pour β** : Supposons qu'une estimation de α est connue, et les données avec $\delta = 0$ a été obtenus, par exemple, par le centrage donné par l'équation (2.5). Le calcul de L_2 avec ces données nous permet d'obtenir

$$|\theta| = \left(\left(\frac{\psi_1}{2} - L_2 \right) \alpha^2 - \psi_1 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.32)$$

A partir de cette dernière équation on estime $|\beta|$ à l'aide de l'équation (2.16). Il faut noter que si le centrage donnée par (2.5) a été appliquée, il est nécessaire de multiplier le résultat trouvé par $(2 + 2^\alpha)/(2 - 2^\alpha)$.

- **Estimateur logarithmique pour γ** : Comme dans l'estimation de β , on suppose des données avec $\delta = 0$. Avec ces données on calcule le moment L_1 puis on estime γ à l'aide de la relation suivante

$$\gamma = \cos \theta \cdot \exp((L_1 - \psi_0)\alpha + 1) \quad (2.33)$$

Ici également, si le centrage (2.5) a été appliquée, il est nécessaire de multiplier la valeur trouvée de γ par $1/(2 + 2^\alpha)$.

2.3 L'évaluation de Monte Carlo

2.3.1 Estimation de α

Dans ce paragraphe, on discute les performances des estimateurs étudiés précédemment dans ce chapitre pour estimer le paramètre de forme α . Dans chaque cas, les résultats ont été obtenus en utilisant 1000 simulations ou essais de Monte Carlo sur des séquences α – stables i.i.d de longueur 10 000, et avec une dispersion $\gamma = 1$ et $\delta = 0.0$.

On compare les performances du FLOS (pour $r = 0.2$) et les techniques logarithmiques avec ceux de certaines méthodes précédemment proposées : la méthode ECF de **Kogan** [32] et la méthode des fractales d'échantillons de **McCulloch** [30] comme montre la figure 2.1. Pour les données asymétriques ($\beta = 1.0$), les performances des méthodes FLOS (SymSinc) et logarithmique (SymLn) dépassent légèrement pour $\alpha < 1.5$ les performances de la méthode ECF. La méthode logarithmique montre globalement un léger avantage par rapport à la méthode FLOS.

Dans tous les cas, la méthode des fractales montre la plus mauvaise performance. Pour les valeurs intermédiaires de $0 < \beta < 1$, il a été observé que l'augmentation de β , détériore légèrement les performances de la méthode ECF par rapport à ceux de la méthode FLOS et la méthode logarithmique, mais globalement, les performances sont

très proches. Compte tenu de la simplicité de la méthode logarithmique, on peut préférer aux autres techniques, et notamment à la méthode ECF.

2.3.2 Estimation de β

Examinons maintenant les performances des estimateurs β en fonction de α et β . Dans chaque cas, on a utilisé $N = 10\,000$ échantillons et 1000 évaluations ou essais de Monte Carlo pour chaque point de données. La figure 2.2 montre tout d'abord l'erreur quadratique moyenne MSE pour les divers estimateurs FLOS de β en fonction de l'exposant r . Il est clair que pour la valeur $r = 0$, la méthode du produit $A_r S_{-r}$ ou celle du rapport S_r/A_r sont préférés. Lorsque $r = 0$, ces deux méthodes sont identiques. Désormais, on les appelle ensemble méthode FLOS signée. Dans la figure 2.2 on trouve des résultats similaires pour les différentes valeurs de α et β .

Dans le reste de la figure 2.2, on compare les MSE des méthodes d'estimation logarithmique, FLOS signée et ECF en fonction de α pour $\beta = 0, 0.5$ et 0.9 . Dans cette figure, on remarque un comportement complexe avec une gamme large d'erreurs. Il y a une discontinuité autour de $\alpha = 1$ où l'effet de β sur la PDF se change à partir du biaisement vers la droite jusqu'au biaisement vers la gauche. Toutes les méthodes ont des performances moins bonnes quand α tend vers 2. En effet, le biaisement n'a aucun effet sur la PDF dans le cas d'une distribution gaussienne.

L'estimateur FLOS avec les méthodes présentées, donne les meilleures performances pour l'estimation de β . Cet estimateur donne une MSE beaucoup plus faible que celle de l'estimateur ECF pour $\alpha < 1.2$ et légèrement mauvais pour $\alpha > 1.2$.

2.3.3 Estimation de γ

Un problème intéressant est non traité dans ce chapitre dans le cas des estimateurs FLOS lorsqu'on veut estimer le paramètre de dispersion, ce problème est le choix de l'ordre r . **Tsihrintzis** [34] suggère le choix $r = \alpha/4$ et **Ma** [33] propose le choix $r = 0.2$. La figure 2.3.a montre le comportement de l'estimateur FLOS en fonction de α/r pour différents α avec $\beta = 0$ et $\gamma = 1$. Cette figure indique que les fractions inférieures à $\alpha/4$ sont en fait préférables. On ne rentre pas la méthode ECF dans la comparaison ici, car comme il est connu, elle donne de mauvais résultats dans l'estimation de γ [32].

La figure 2.3.b compare le comportement de l'estimateur logarithmique à celui de l'estimateur FLOS avec $r = \alpha/10$ pour $\beta = 0$ et 0.9 . Les performances obtenues pour les

deux estimateurs sont très proches de celles du cas de **Cauchy** ($\alpha = 1$) et elles s'améliorent pour les grands biaisements. L'estimateur FLOS a des performances légèrement meilleures pour $\alpha > 1$ et l'estimateur logarithmique a des performances légèrement meilleures pour $\alpha < 1$.

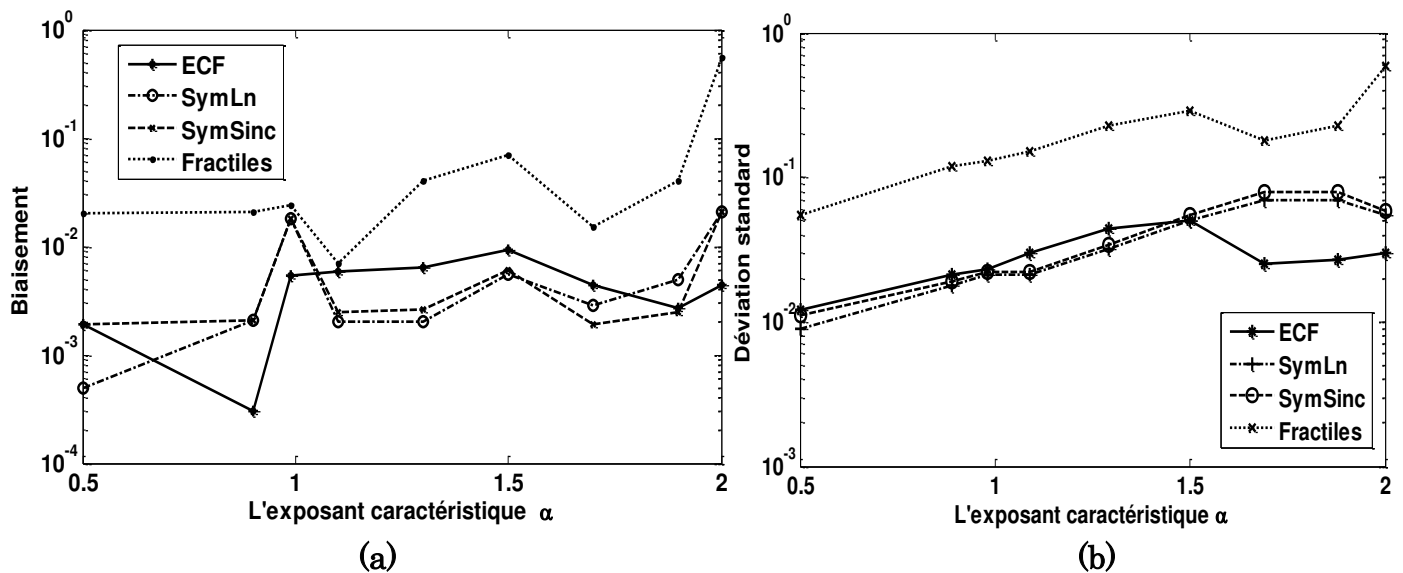
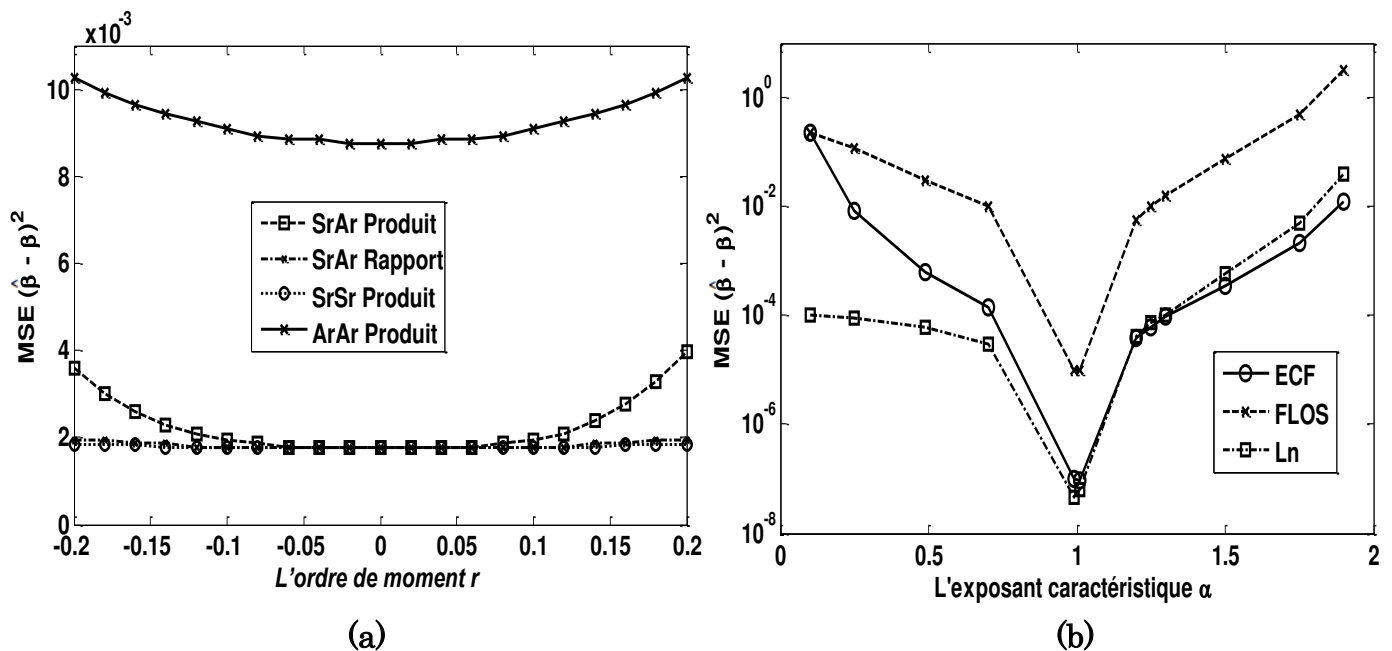


Fig. 2.1 Comparaison des biais (a) et les écarts-types standards (b) de divers estimateurs de α pour $\beta = 1.0$.



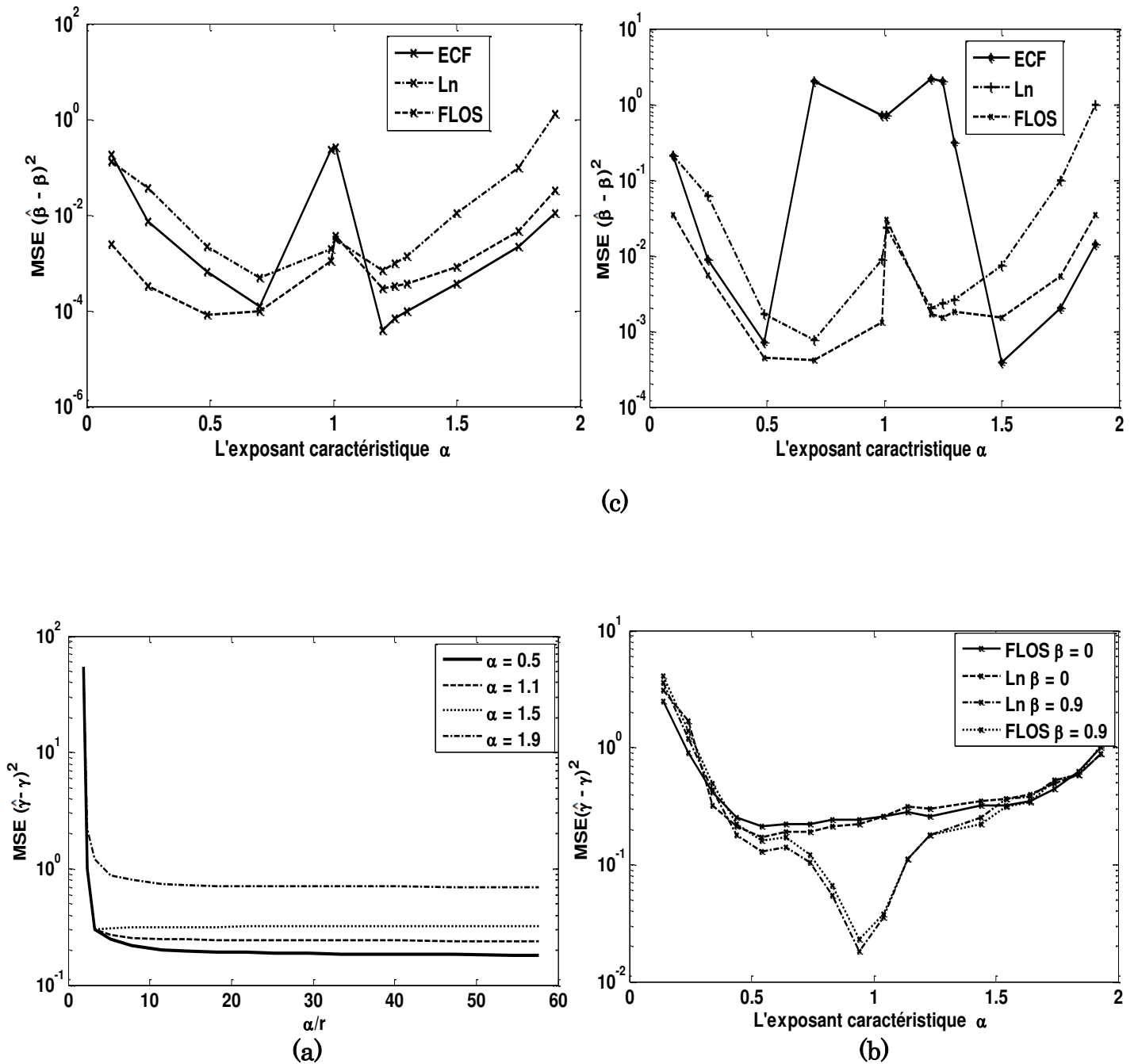


Fig. 2.3 MSE pour les estimateurs de γ (a) la dépendance de l'estimateur FLOS de l'ordre de moment r pour $\beta = 0$, $\gamma = 1$ (b) la comparaison des méthodes logarithmique et FLOS en fonction de α pour $\beta = 0, 0.9$.

2.4 Conclusion

On a présenté dans ce chapitre trois classes d'estimateurs pour les paramètres des distributions α – stable. Ce sont des généralisations des méthodes précédemment proposées pour l'estimation des paramètres des distributions symétriques α – stables $S\alpha S$. Parmi toutes les techniques connues concernant le problème général d'estimation, seules la technique de la fonction caractéristique et les méthodes qu'on a présenté dans ce chapitre qui donnent des formes explicites aux estimateurs pour calculer efficacement les paramètres estimés.

Les comparaisons des estimateurs présentées ici montrent qu'au moins l'un des techniques d'estimation présentées dans ce chapitre ayant de meilleures performances que la technique de la fonction caractéristique sur la grande partie de l'espace des paramètres. De plus ces techniques techniques nécessitent sensiblement moins de calculs.

A cause de sa simplicité et sa précision, la méthode de FLOS signé sera utilisée dans le chapitre suivant où on va essayer d'estimer le paramètre de dispersion γ d'un bruit qui suit une distribution $S\alpha S$ à partir d'un signal reçu qui est la superposition d'un signal utile et le bruit envisagé.

Chapitre 3

Estimation du paramètre γ d'un bruit $S\alpha S$ et simulation numérique

3.1 Introduction

La simulation est un outil utilisé par le chercheur, l'ingénieur, le militaire etc... pour étudier les réponses d'un système sans réaliser l'expérience sur le système réel.

Lorsque l'outil de simulation utilise un ordinateur on parle de simulation numérique. Les chercheurs, les ingénieurs, les militaires et bien d'autres professionnels se posent souvent la question : quel est le résultat que j'obtiens si j'exerce telle action sur un système ? Le moyen le plus simple serait de tenter l'expérience, c'est-à-dire d'exercer l'action souhaitée sur le système en cause pour pouvoir observer ou mesurer le résultat. Dans de nombreux cas l'expérience est irréalisable, trop chère ou contraire à l'éthique. On a alors recours à la simulation : rechercher un modèle qui réagit d'une manière semblable à celui que l'on veut étudier et qui permettra de déduire les résultats.

On appelle modèle un système, analogique ou numérique, dont le comportement vis-à-vis d'un phénomène est similaire à celui du système à étudier. Les sorties sont les éléments que l'on veut étudier. Les entrées, paramètres et contraintes sont les éléments dont la variation influe sur le comportement du modèle ; on appelle entrée ceux qui sont commandés par l'expérimentateur, paramètres ceux que l'opérateur choisit de fixer et contraintes ceux qui dépendent d'éléments extérieurs. On appelle simulation l'ensemble constitué par un modèle, les ordres d'entrée, les paramètres et contraintes, et les résultats obtenus. Les équations sont des simulations numériques. Aujourd'hui ce terme s'applique essentiellement aux modèles et simulations réalisés sur ordinateur.

On sait que dans tous les systèmes de communication numérique avec turbo codes, l'estimation des paramètres du bruit qui affecte le signal transmis est indispensable [13]. Dans ce chapitre, on va proposer une technique semi-aveugle d'estimation du paramètre de dispersion d'un bruit $S\alpha S$. Cette technique s'appuie sur deux points à savoir la probabilité que le signal reçu soit de même signe que celui transmis, et sur des statistiques d'ordre inférieur fractionnel FLOS. Il est important de signaler ici que la méthode présentée est une généralisation de celle proposée dans [13] pour différentes valeurs du paramètre de forme α . Nous allons voir que les résultats obtenus montrent que l'approche proposée possède une grande précision.

3.2 Modèle de simulation

Le modèle utilisé lors de notre simulation est représenté par la figure 3.1. Il comporte

- Une source d'information binaire (qui est dans notre cas le codeur de canal);
- Un modulateur BPSK ;
- Un canal supposé idéal (sans distorsions) à bruit additif ;
- Une source de bruit additif $S\alpha S$;
- Un estimateur qui estime le paramètre de dispersion du bruit envisagé ;
- Un comparateur pour calculer l'erreur relative de l'estimation.

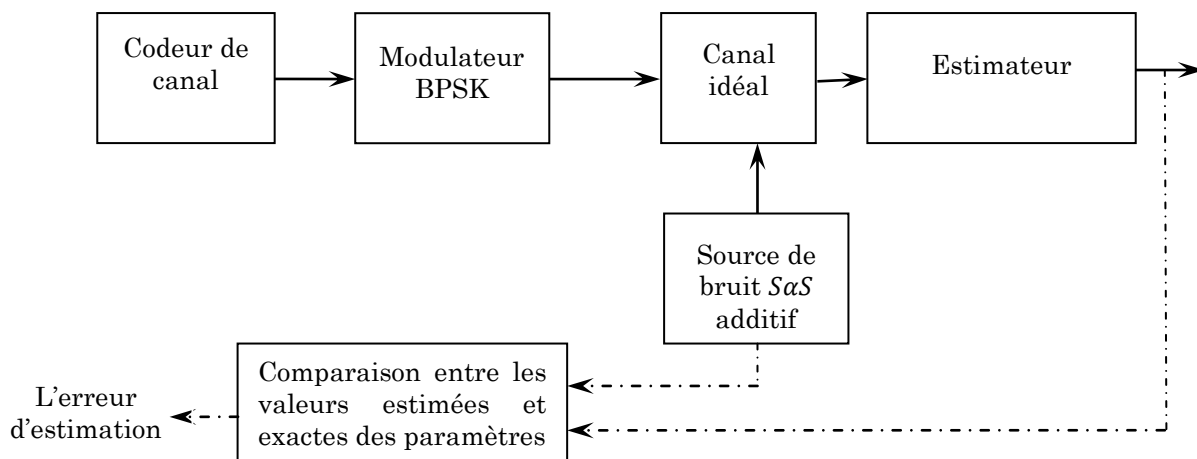


Fig. 3.1 Modèle de simulation.

3.2.1 Source d'information

La source d'information dans notre étude est le codeur de canal, qui délivre une séquence binaire aléatoire. Pour simuler une telle séquence, on a considéré une séquence

binaire pseudo-aléatoire engendrée par un registre à décalage [13]. Le choix de la longueur de la séquence à utiliser dans la simulation, c'est-à-dire la longueur du registre qui l'engendre, est basé sur le fait qu'avec de faibles longueurs de registre (3 ou 4) on risque d'obtenir des résultats différents de la réalité, car une séquence courte ne représente pas un nombre statistiquement suffisant de configurations, donc il est recommandé d'utiliser des séquences relativement longues, dont leurs nombres des registres soient supérieurs à 15 [41]. On a choisi une séquence pseudo-aléatoire de longueur $2^{20} - 1 = 1\,048\,575$.

3.2.2 Modulation utilisée

Dans cette simulation notre choix est limité à la modulation BPSK. La modulation d'un bit X d'énergie E_b délivré par le codeur du canal est donnée par

$$Y = \begin{cases} +\sqrt{E_b} & \text{pour } X = 0 \\ -\sqrt{E_b} & \text{pour } X = 1 \end{cases} \quad (3.1.a)$$

Sans restreindre la généralité, nous pouvons prendre $\sqrt{E_b} = 1$. La modulation devient tout simplement

$$Y = \begin{cases} +1 & \text{pour } X = 0 \\ -1 & \text{pour } X = 1 \end{cases} \quad \text{ou} \quad Y = 1 - 2X \quad (3.1.b)$$

3.2.3 Source de bruit

On considère dans notre simulation quatre types du bruit SaS à variance infinie

- $\alpha = 0.75$ (moyenne infinie);
- $\alpha = 1$, c'est le bruit de **Cauchy** (moyenne infinie);
- $\alpha = 1.25$ (moyenne finie);
- $\alpha = 1.5$ (moyenne finie);

La simulation d'un bruit SaS , représenté mathématiquement par une variable aléatoire, peut être effectuée à l'aide de l'algorithme présenté dans le paragraphe 1.5 où on prend $\beta = 0$.

Les figures 3.2 et 3.3 montrent les tracés de 5000 échantillons générés d'un bruit SaS pour $\alpha = 0.75$ et $\alpha = 1.5$ et ceci pour deux valeurs de γ . Un simple coup d'œil sur ces figures montre que plus nous augmentons le paramètre γ , plus la dispersion des échantillons augmente aussi, et inversement, et plus la valeur de α est petit plus le bruit est impulsif.

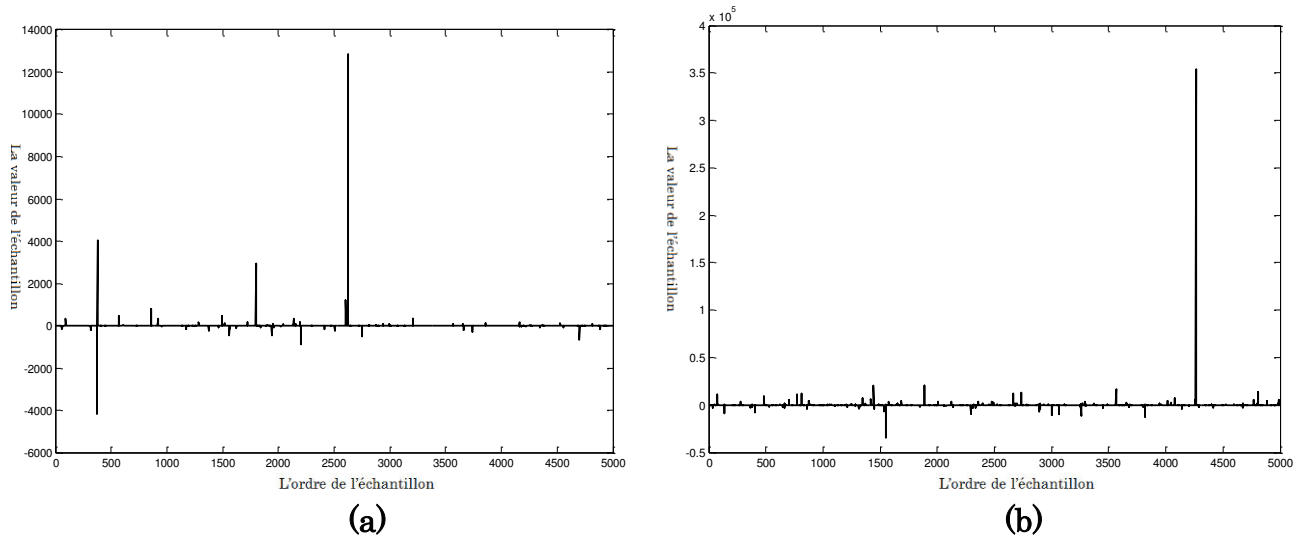


Fig. 3.2 Le tracé de 5000 échantillons d'un bruit $S\alpha S$ pour $\alpha = 0.75$:
(a) $\gamma = 0.2$ (b) $\gamma = 10$.

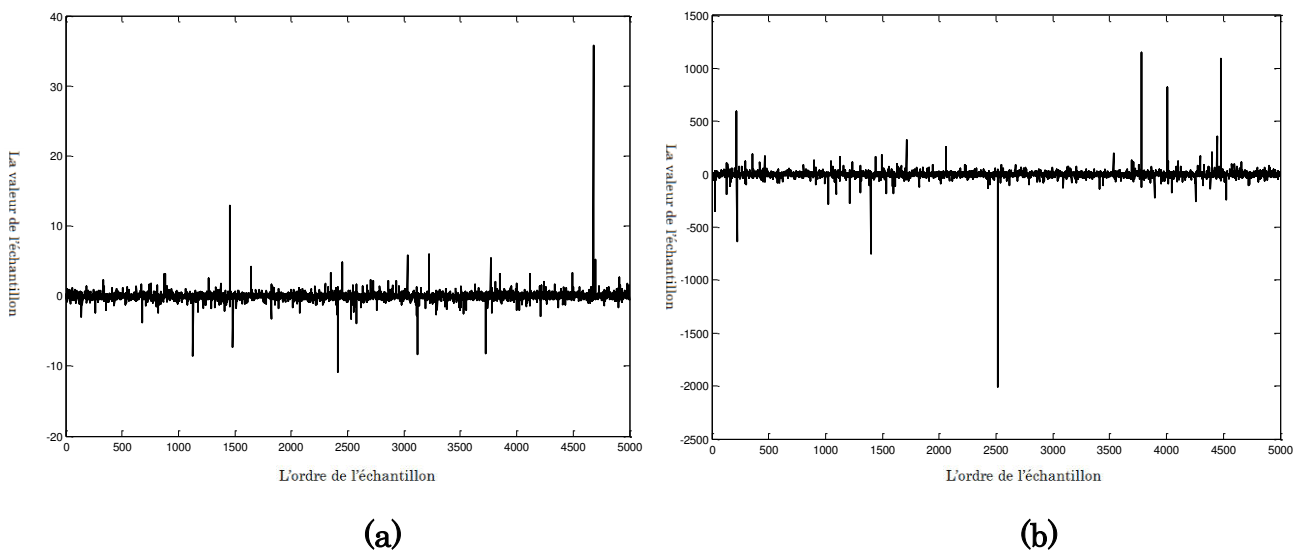


Fig. 3.3 Le tracé de 5000 échantillons d'un bruit $S\alpha S$ pour $\alpha = 1.5$:
(a) $\gamma = 0.2$ (b) $\gamma = 10$.

3.2.4 Comparateur

Dans le bloc de comparaison de notre modèle de simulation adopté, on fait la comparaison entre la valeur estimée du paramètre de dispersion et sa valeur exacte dans le but de calculer l'erreur d'estimation. Généralement, pour toiser la qualité d'une estimation d'une grandeur γ on utilise la racine carrée de l'erreur quadratique moyenne *RMSE* [42]

$$RMSE = \sqrt{E((\gamma - \hat{\gamma})^2)} \cong \sqrt{\frac{1}{N_e} \sum_{n=1}^{N_e} (\gamma - \hat{\gamma}_n)^2} \quad (3.2)$$

ou aussi la $RMSE$ relative

$$RMSE_{rel} = \frac{RMSE}{\gamma} \cong \sqrt{\frac{1}{N_e} \sum_{n=1}^{N_e} \left(1 - \frac{\hat{\gamma}_n}{\gamma}\right)^2} \quad (3.3)$$

ou N_e le nombre d'essais et $\hat{\gamma}_n$ est la valeur estimée de γ pour l'essai numéro n .

3.3 Estimation du paramètre de dispersion d'un bruit $S\alpha S$

Dans ce paragraphe nous présentons une méthode efficace semi-aveugle pour estimer le paramètre de dispersion d'un bruit $S\alpha S$.

Egalement, nous étudions avec détaille l'effet de l'ordre de moment sur l'approximation pratique de l'espérance mathématique par la moyenne arithmétique dans le calcul des moments. En outre, nous définissons une nouvelle quantité appelée la probabilité ρ , la façon de la calculer et son rôle dans l'approximation des statistiques d'ordre inférieur fractionnel FLOS.

En statistique, le terme « statistiques d'ordre inférieur » LOS se réfère à des fonctions qui utilisent au maximum la puissance 2 d'un échantillon. Si la puissance considérée est strictement inférieure à 1, nous parlons de « statistiques d'ordre inférieur fractionnel » FLOS.

Par contre, le terme « statistiques d'ordre supérieur » HOS se réfère à des fonctions qui utilisent la troisième puissance ou plus d'un échantillon [43].

3.3.1 Les FLOS d'un bruit et la probabilité ρ

Soient $W_1, W_2, \dots, W_N$, N observations d'un bruit W . La meilleure approximation du moment

$$m_r = E(|W|^r) \quad (3.4)$$

en utilisant les W_k ($k = 1, \dots, N$), est la moyenne arithmétique donnée par

$$\hat{m}_r = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N |W_k|^r \quad (3.5)$$

D'après la méthode de Monte Carlo, pour obtenir une estimation pertinente de m_r , il faut répéter un grand nombre de fois la réalisation des N observations W_k . L'estimation du moment m_r au $n^{\text{ème}}$ essai est alors

$$\hat{m}_{rn} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N |W_{kn}|^r \quad (3.6)$$

Si nous notons par N_e le nombre d'essais, dès lors, la moyenne arithmétique des moments $\hat{m}_{rn}$ trouvés est une estimation de la valeur réelle du m_r , qui est d'autant meilleure que le nombre d'essais est grand.

$$\hat{m}_r = \frac{1}{N_e} \sum_{n=1}^{N_e} \left(\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N |W_{kn}|^r \right) \quad (3.7)$$

Pour toiser la précision donc la qualité de l'estimation du moment m_r nous utilisons la racine carrée de l'erreur quadratique moyenne $RMSE$ donnée par [42]

$$RMSE = \sqrt{E((m_r - \hat{m}_{rn})^2)} \cong \sqrt{\frac{1}{N_e} \sum_{n=1}^{N_e} (m_r - \hat{m}_{rn})^2} = \sqrt{\frac{1}{N_e} \sum_{n=1}^{N_e} \left(E(|W|^r) - \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N |W_{kn}|^r \right)^2} \quad (3.2)$$

ou aussi la $RMSE$ relative

$$RMSE_{rel} = \frac{RMSE}{m_r} \cong \sqrt{\frac{1}{N_e} \sum_{n=1}^{N_e} \left(1 - \frac{\hat{m}_{rn}}{m_r} \right)^2} \quad (3.3)$$

La relation (3.2) nous montre théoriquement que

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} RMSE = 0, \quad \forall r. \quad (3.8.a)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} RMSE = 0, \quad \forall N. \quad (3.8.b)$$

Pour valider numériquement et mettre à profit ces deux résultats on a choisi le bruit impulsif SaS, comme montre le paragraphe suivant.

3.3.1.1 Les FLOS d'un bruit SaS

Soient W un bruit SaS et r un nombre réel tel que $-1 < r < \alpha$. Nous avons vu dans le chapitre 1 (voir l'équation (1.12)) que le moment d'ordre r d'un tel bruit est donné par

$$m_r = E(|W|^r) = \frac{2^{r+1} \cdot \Gamma\left(\frac{r+1}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{-r}{\alpha}\right)}{\alpha \sqrt{\pi} \cdot \Gamma\left(\frac{-r}{2}\right)} \cdot \gamma^{r/\alpha} \quad (3.9)$$

La $RMSE$ de l'estimation du moment m_r à partir de N observations $W_1, W_2, \dots, W_N$ d'un bruit SaS, est donnée toujours par la formule (3.2).

Dans ce paragraphe, nous s'intéressons à l'étude de cette $RMSE$ en fonction de l'ordre r tel que $0 < r < \alpha$. Le paramètre de forme doit suffire à la condition $0 < \alpha \leq 2$. Donc, tous les moments m_r d'un tel bruit sont des statistiques d'ordre inférieur LOS car $r < \alpha \leq 2$. Dans cette étude, sans restreindre la généralité, nous prenons le paramètre de dispersion $\gamma = 1$. Les courbes des figures 3.4 sont tracées pour $N_e = 10\,000$ essais.

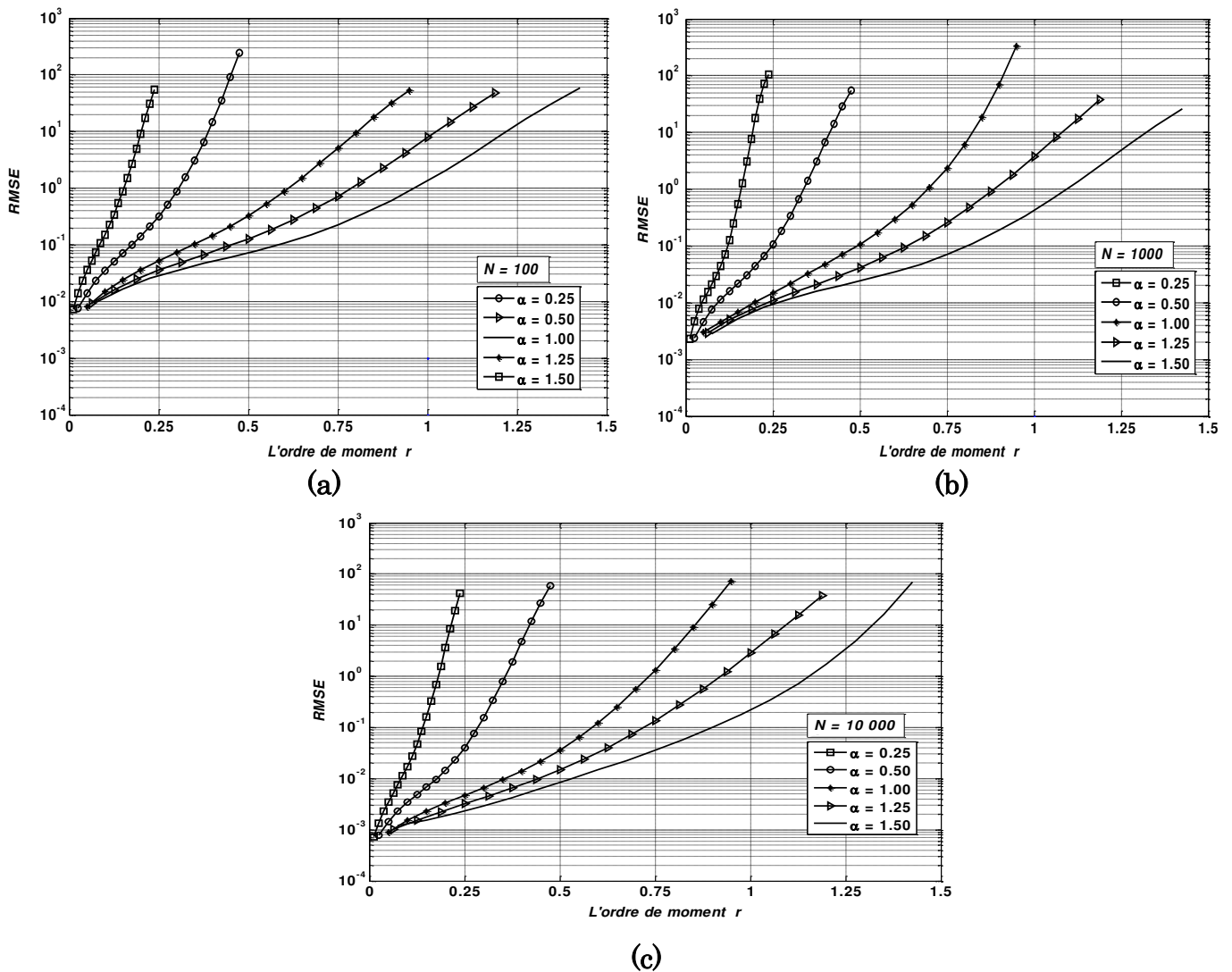


Fig. 3.4 La $RMSE$ de l'estimation du moment m_r en fonction de r
 Pour un bruit SaS et pour différentes valeurs de N .
 (a) $N = 100$ (b) $N = 1000$ (c) $N = 10\,000$.

Ces courbes nous permettent de constater que

- La $RMSE$ se diminue si nous augmentons le nombre d'échantillons N , ce qui est devinable selon l'égalité (3.8.a) ;

- La $RMSE$ s'accroît en fonction de r et son taux d'accroissement suit un decrescendo en fonction de α ;
- Lorsque r est proche de α , la $RMSE$ devient très grande car le moment m_r donné par (3.9) tend vers plus l'infini si r tend vers α ;
- La $RMSE$ devient trop petite si l'ordre r est proche de 0, ce qui est confirmé par la relation (3.8.b).

Corollairement, pour un bruit SaS, on a deux choix pour obtenir une estimation rigoureuse du moment m_r qui sont

- agrandir gigantesquement le nombre d'échantillons N surtout lorsque l'ordre de moment r est proche de α , ce qui est rigoureusement exprimé par l'égalité (3.8.a) ;
- prendre une valeur de r proche de 0, et ceci quelque soit le nombre d'échantillons N considéré, même comparativement petit. Ce choix est glosé analytiquement par l'équation (3.8.b).

La première proposition est pratiquement à éviter. En revanche, il est vital de pencher à la deuxième proposition en ceci qu'il est très avantageux d'utiliser les FLOS pour estimer les paramètres d'un bruit impulsif SaS.

Le problème majeur rencontré dans l'utilisation des FLOS pour un bruit SaS est le choix du l'ordre de moment r qui doit vérifier $0 < r < \alpha$. Or, l'estimateur doit estimer les paramètres du bruit envisagé, à savoir α et γ , en utilisant le moment m_r qui est dépend de r . Autrement dit, comment choisir r qui est majorée par α qui est à son tour dépend de r ?

Pour dépasser ce problème nous choisissons quelques types des bruits impulsifs SaS en donnant au paramètre α quelques valeurs, à savoir : $\alpha = 0.75$, $\alpha = 1$ (bruit de **Cauchy**), $\alpha = 1.25$ et $\alpha = 1.5$, et on estime à chaque fois le paramètre de dispersion γ .

3.3.1.2 La notion et le calcul de la probabilité ρ

Dans le chapitre 1 on a vu qu'une loi SaS est symétrique et à moyenne nulle, alors sa PDF $f_X(x)$ est une fonction paire. De plus, elle est une fonction décroissante sur $\mathbb{R}^+$. Par conséquent, cette PDF s'écrit sous la forme $f_X(|x|)$. Dans ces conditions, les densités de probabilité de transition du canal considéré peuvent s'écrivent donc sous la forme [13]

$$P(R_k/Y_k \text{ émis}) = f_X(|R_k - Y_k|) \quad (3.10)$$

On sait bien qu'au niveau de l'estimateur on doit trouver à partir de l'observation R_k une estimation du symbole Y_k de sorte que la probabilité moyenne de l'erreur de décision soit minimisée, donc la probabilité conditionnelle de la relation (3.10) soit maximisée. Maximiser la dernière expression revient à minimiser la quantité $|R_k - Y_k|$ car la fonction f_X est décroissante. Pour que cette dernière quantité soit minimale il faut que R_k soit de même signe que Y_k en tenir compte que $Y_k \in \{-1, +1\}$, autrement dit, il faut que le produit $R_k \times Y_k$ soit positif. D'où vient l'idée de calculer la probabilité $\rho = P(R_k \cdot Y_k > 0)$. On a

$$\rho = P(R_k \cdot Y_k > 0)$$

$$\rho = P(1 + Y_k \cdot W_k > 0) = P(Y_k \cdot W_k > -1) \text{ car } R_k = Y_k + W_k \text{ et } Y_k^2 = 1, \text{ alors}$$

$$\rho = P(Y_k \cdot W_k > -1/Y_k = -1) \cdot P(Y_k = -1) + P(Y_k \cdot W_k > -1/Y_k = +1) \cdot P(Y_k = +1)$$

et avec $P(Y_k = -1) = P(Y_k = +1) = 1/2$, on trouve

$$\rho = \frac{1}{2} \cdot (P(W_k < +1) + P(W_k > -1)) = \frac{1}{2} \cdot (1 + P(-1 < W_k < +1)),$$

enfin

$$\rho = \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \int_{-1}^1 f(w) dw \right) = \frac{1}{2} + \int_0^1 f(w) dw \quad (3.11)$$

On remarque que cette probabilité est toujours supérieure à 1/2.

Tant que le bruit considéré dans ce travail est impulsif (car $\alpha < 2$), alors la densité $f_W(w)$ présente de grandes valeurs au voisinage de 0, donc l'intégrale sur le segment $[0, 1]$ siégée dans l'égalité (3.11) est souvent comparable avec 1/2 et ceci selon l'impulsivité du bruit. Pour cette raison ρ est généralement n'est pas loin de 1. Par conséquent, il est fortement indispensable d'utiliser cette probabilité dans l'estimation des paramètres d'un bruit SaS.

Dans le cas d'un bruit SaS de **Cauchy** où $\alpha = 1$, par exemple, on obtient

$$\rho = \frac{1}{2} + \int_0^1 \frac{\gamma}{\pi(w^2 + \gamma^2)} dw = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{1}{\gamma}\right) \quad (3.12)$$

La figure 3.5 illustre la variation de ρ de la relation (3.11) en fonction du paramètre de dispersion γ pour différentes valeurs de α . Cette figure nous permet de conclure que la probabilité ρ varie inversement avec la dispersion du bruit. Néanmoins, cette probabilité reste strictement supérieur à 1/2 quelque soit α et γ .

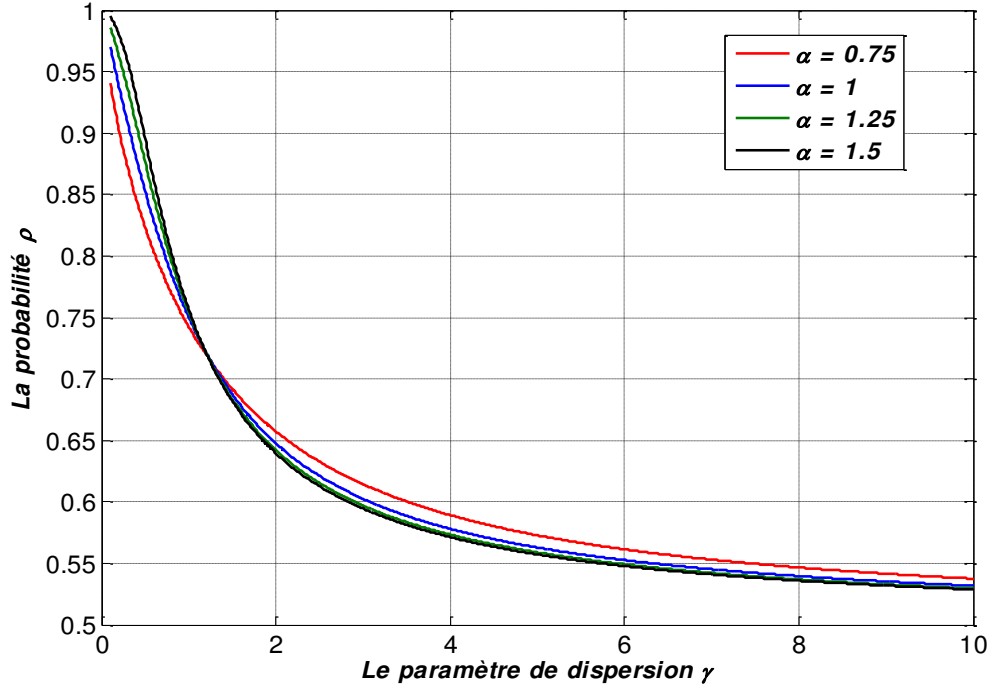


Fig. 3.5 La probabilité ρ en fonction du paramètre de dispersion γ pour un bruit SaS.

On cherche maintenant à exprimer le moment FLOS m_r en fonction de ρ . Tout d'abord, nous avons

$$Y_k = \begin{cases} \text{sign}(R_k) & \text{avec probabilité } \rho \\ -\text{sign}(R_k) & \text{avec probabilité } 1 - \rho \end{cases} \quad (3.13)$$

alors, pour tout $0 < r < 1$ nous avons

$$|W_k|^r = |R_k - Y_k|^r = \begin{cases} |R_k - \text{sign}(R_k)|^r & \text{avec probabilité } \rho \\ |R_k + \text{sign}(R_k)|^r & \text{avec probabilité } 1 - \rho \end{cases} \quad (3.14)$$

et nous pouvons approximer dans ce cas $|W_k|^r$ par sa valeur moyenne comme suit

$$|W_k|^r \cong \rho \cdot |R_k - \text{sign}(R_k)|^r + (1 - \rho) \cdot |R_k + \text{sign}(R_k)|^r \quad (3.15)$$

Donc, le moment m_r d'ordre $0 < r < 1$ est approximé par

$$m_r = E(|W_k|^r) \cong \rho \cdot E(|R_k - \text{sign}(R_k)|^r) + (1 - \rho) \cdot E(|R_k + \text{sign}(R_k)|^r) \quad (3.16)$$

ou sous la forme simplifiée suivante

$$m_r \cong a_r \cdot \rho + b_r \quad (3.17.a)$$

$$\text{où } a_r = E(|R_k - \text{sign}(R_k)|^r) - E(|R_k + \text{sign}(R_k)|^r) \text{ et } b_r = E(|R_k + \text{sign}(R_k)|^r) \quad (3.17.b)$$

Nous signalons que la formule (3.17.a) reste valable pour tout $r > 0$, bien entendu à condition que le moment m_r est fini.

Dans le paragraphe suivant nous étendons le principe de cette approche au bruit $S\alpha S$ pour différentes valeurs de α .

3.3.2 Approche semi-aveugle pour estimer le paramètre γ d'un bruit $S\alpha S$

Pour un système de communication numérique avec turbo code et qui est contaminé par un bruit de type $S\alpha S$ par exemple, si on essaye d'estimer le paramètre de dispersion γ du bruit en appliquant une méthode d'estimation parmi les méthodes citées dans le chapitre 2, il faut à partir du signal reçu, séparer le bruit du signal transmis, parce que toutes ces méthodes d'estimation sont applicables pour un nombre d'échantillons du bruit qui représente la variable aléatoire $S\alpha S$. Néanmoins, c'est irréalisable de séparer deux signaux aléatoires superposés.

Heureusement, une nouvelle méthode est présentée dans la référence [13] permet d'estimer le paramètre de dispersion γ d'un bruit $S\alpha S$ de **Cauchy** à partir d'un signal reçu qui représente la superposition de ce bruit et le signal transmis. Dans notre travail on va généraliser cette méthode pour différentes valeur de α pour un bruit $S\alpha S$.

3.3.2.1 Estimation semi-aveugle du paramètre de dispersion utilisant FLOS

Dans ce paragraphe nous présentons le principe de l'approche d'estimation pour estimer directement le paramètre de dispersion d'un bruit $S\alpha S$ à partir du signal reçu. Cette approche est basée sur les FLOS et sur la probabilité ρ donnée par l'équation (3.12). On va montrer que cette méthode est très efficace en termes de précision.

On sait que les moments m_r d'un bruit $S\alpha S$ sont existes que si l'ordre r vérifie la condition $-1 < r < \alpha \leq 2$. Or les valeurs du paramètre α envisagées dans ce travail, pour le bruit $S\alpha S$, sont : 0.75, 1, 1.25 et 1.5, par conséquent, si on choisit l'ordre r vérifie : $-1 < r < \alpha = 0.75$, tous les moments d'un bruit $S\alpha S$ devient de type FLOS.

3.3.2.1.1 L'approche d'estimation semi-avaugle

Soit m_r le moment d'ordre r ($-1 < r < \alpha$) d'un bruit $S\alpha S$ qui est donné par

$$m_r = E(|W|^r) = \frac{\Gamma\left(1 - \frac{r}{\alpha}\right)}{\Gamma(1-r)} \cdot \frac{\gamma^{\frac{r}{\alpha}}}{\cos\left(\frac{r\pi}{2}\right)} = \frac{2^{r+1} \cdot \Gamma\left(\frac{r+1}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{-r}{\alpha}\right)}{\alpha\sqrt{\pi} \cdot \Gamma\left(\frac{-r}{2}\right)} \cdot \gamma^{\frac{r}{\alpha}} \quad (3.18)$$

En utilisant les approximations suivantes

$$\Gamma(x) \cdot \Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)} \text{ et } \Gamma(x) \sim_0 \frac{1}{x}$$

On trouve pour $|r| \rightarrow 0$ que le moment m_r s'écrit sous la forme approximée suivante

$$m_r \cong \frac{\gamma^{r/\alpha}}{\cos\left(\frac{r\pi}{2}\right)} \quad (3.19)$$

L'identification de cette relation avec (3.17) donne

$$m_r \cong \frac{\gamma^{r/\alpha}}{\cos\left(\frac{r\pi}{2}\right)} \cong a_r \cdot \rho + b_r \quad (3.20)$$

avec $a_r = E(|R_k - \text{sign}(R_k)|^r) - E(|R_k + \text{sign}(R_k)|^r)$ et $b_r = E(|R_k + \text{sign}(R_k)|^r)$

et finalement on trouve

$$\gamma \cong \frac{(a_r \cdot \rho + b_r)^{\alpha/r}}{\cos\left(\frac{r\pi}{2}\right)} \quad (3.21)$$

On essaye maintenant de trouver une approximation de la probabilité ρ .

On a d'après (2.18) avec $\theta = 0$

$$m_r m_{-r} = \frac{2}{\alpha} \left(\frac{\sin(r\pi)}{1 + \cos(r\pi)} \right) \frac{1}{\sin\left(\frac{r\pi}{\alpha}\right)} \quad (3.22)$$

et avec (3.17) on trouve pour $|r| \rightarrow 0$

$$(a_r \rho + b_r)(a_{-r} \rho + b_{-r}) \cong \frac{2}{\alpha} \left(\frac{r\pi}{1 + \cos(r\pi)} \right) \frac{1}{\frac{r\pi}{\alpha}} = \frac{2}{1 + \cos(r\pi)} \quad \text{car } \sin x \sim_0 x$$

ou sous la forme d'un trinôme en ρ

$$a_r a_{-r} \rho^2 + (a_r b_{-r} + a_{-r} b_r) \rho + b_r b_{-r} - \frac{2}{1 + \cos(r\pi)} = 0$$

ce qui donne deux valeurs pour ρ

$$\rho_1 = \frac{-(a_r b_{-r} + a_{-r} b_r) + \sqrt{(a_r b_{-r} - a_{-r} b_r)^2 + \frac{8a_r a_{-r}}{1 + \cos(r\pi)}}}{2a_r a_{-r}} \quad (3.23. a)$$

$$\rho_2 = \frac{-(a_r b_{-r} + a_{-r} b_r) - \sqrt{(a_r b_{-r} - a_{-r} b_r)^2 + \frac{8a_r a_{-r}}{1 + \cos(r\pi)}}}{2a_r a_{-r}} \quad (3.23. b)$$

On prend toujours la valeur de ρ qui vérifie la condition $0 \leq \rho \leq 1$.

Enfin, on peut résumer les formules utilisées dans l'estimation du paramètre de dispersion γ d'un bruit SaS, en utilisant l'approche semi-aveugle, comme suit

$$\left\{ \begin{array}{l} r \text{ est choisi trop petit} \\ a_r = E(|R_k - \text{sign}(R_k)|^r) - E(|R_k + \text{sign}(R_k)|^r) \text{ et } b_r = E(|R_k + \text{sign}(R_k)|^r) \\ \rho = \frac{-(a_r b_{-r} + a_{-r} b_r) \mp \sqrt{(a_r b_{-r} - a_{-r} b_r)^2 + \frac{8a_r a_{-r}}{1 + \cos(r\pi)}}}{2a_r a_{-r}} \text{ avec } 0 \leq \rho \leq 1 \\ \gamma \cong \hat{\gamma} = \frac{(a_r \cdot \rho + b_r)^{\alpha/r}}{\cos\left(\frac{r\pi}{2}\right)} \end{array} \right. \quad (3.24)$$

Notre nouvelle approche s'appuyait alors sur deux points, à savoir

- Le calcul des moments de type FLOS positif a_r et b_r et négatif a_{-r} et b_{-r} de l'équation (3.24) à partir des observations du signal reçu R_k , dans le but de calculer la probabilité ρ ;
- L'utilisation de l'approximation de γ donnée dans (3.24) qui permet de trouver la valeur estimée $\hat{\gamma}$.

3.3.2.1.2 Résultats et discussions

Dans cette partie on va montrer l'avantage de l'approche présentée dans ce travail pour estimer le paramètre de dispersion γ d'un bruit W de type SaS. Pour ce faire, nous avons besoin d'une comparaison en termes de $RMSE$, c'est-à-dire de précision, et en termes de simplicité des calculs, avec une autre méthode qui fait l'estimation de ce paramètre à partir du signal reçu $R = Y + W$. Malheureusement, jusqu'à ce moment, nulle méthode n'est présentée dans la littérature sur ce contexte, sauf la méthode proposée par **A. Chems**a [13] qui est un cas particulier de notre approche pour $\alpha = 1$.

Pour surmonter ce problème de comparaison, nous avons un autre moyen pour toiser l'efficacité de notre approche, c'est le maniement de la racine carrée de l'erreur quadratique moyenne relative $RMSE_{rel}$ donnée par (3.3).

Pour étudier la $RMSE_{rel}$ nous avons pris l'ordre de moment $r = 1/10^5$ et le nombre d'essais $N_e = 1000$. La longueur de l'information binaire est le nombre des échantillons $N = 2^{20} - 1 = 1\,048\,575$. Le modèle de simulation adopté pour cette étude est illustré dans la figure 3.6. La figure 3.7 montre les tracés de la $RMSE_{rel}$ en fonction de la valeur exacte du paramètre γ pour différentes de α : 0.75, 1, 1.25 et 1.5.

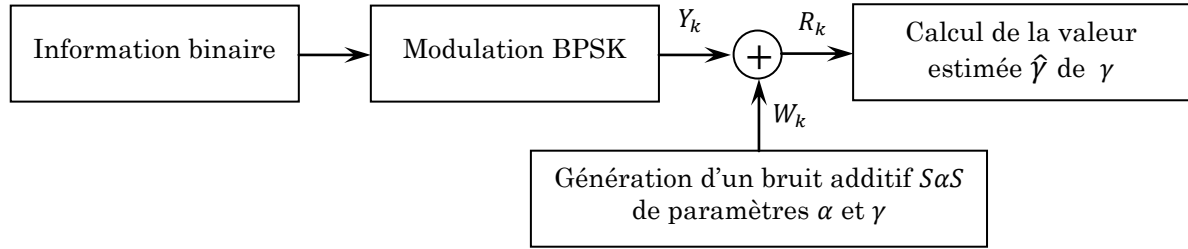


Fig. 3.6 Le modèle de simulation adopté pour calculer l'erreur $RMSE_{rel}$ en fonction de γ .

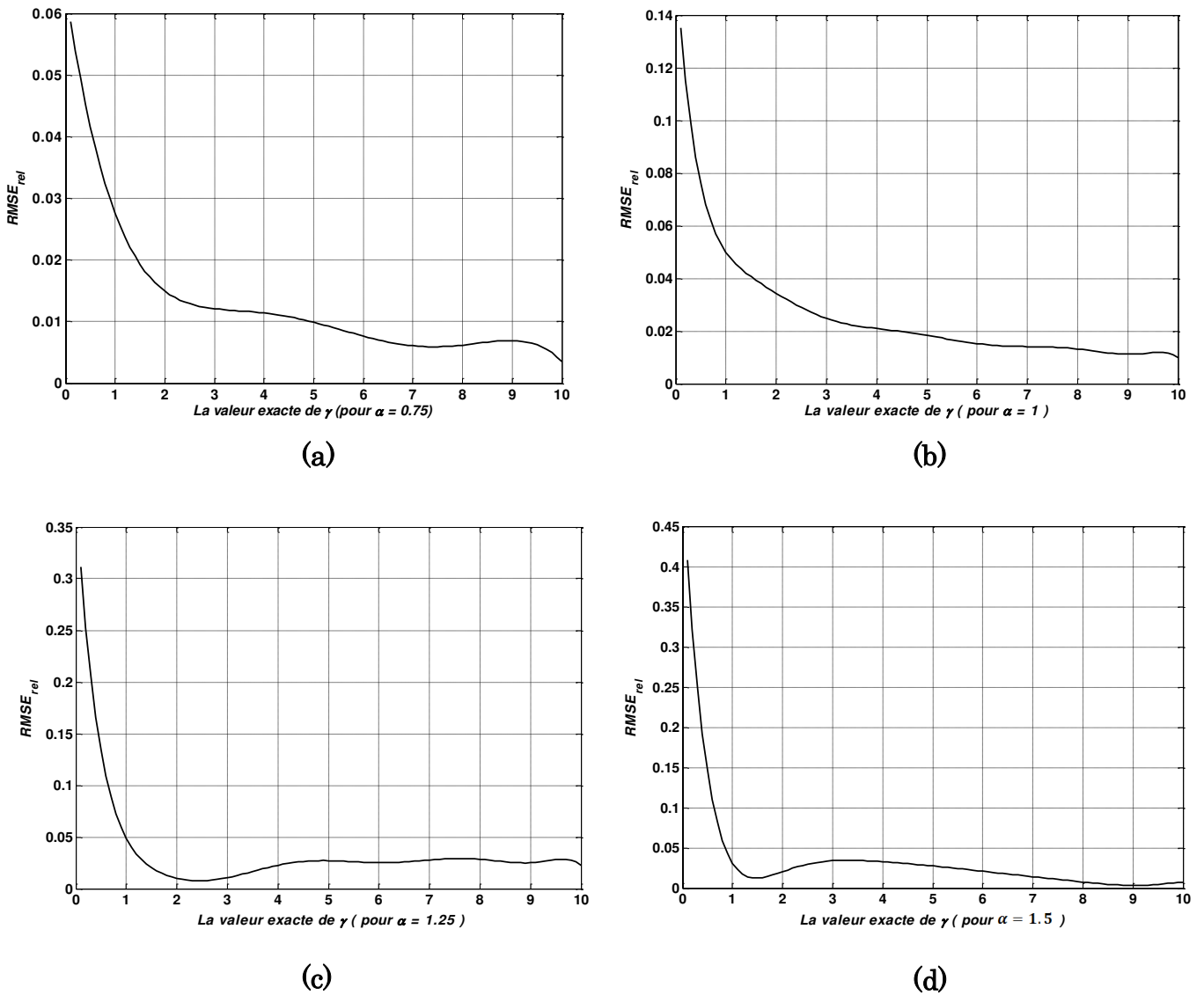


Fig. 3.7 La $RMSE_{rel}$ en fonction de la valeur exacte de γ pour :
 (a) $\alpha = 0.75$, (b) $\alpha = 1$, (c) $\alpha = 1.25$ et (d) $\alpha = 1.5$.

La figure 3.7 montre la variation de la $RMSE_{rel}$ en fonction de la valeur exacte de γ pour différentes valeurs du paramètre de forme α . L'analyse de cette figure montre que la $RMSE_{rel}$ se diminue si nous augmentons la valeur de γ et inversement, ce qui signifie que l'erreur absolue $RMSE$ est toujours très bornée et la $RMSE_{rel}$ varie alors en $1/\gamma$. Autrement dit, $RMSE_{rel} = RMSE/\gamma = C(\alpha, \gamma)/\gamma$ avec $C(\alpha, \gamma)$ une fonction de α et γ positive bornée : $0 \leq C(\alpha, \gamma) \leq C_{max}$.

En plus, l'analyse de la figure 3.7 en fonction du paramètre α nous permet de constater que plus α est petit plus la $RMSE_{rel}$ est ainsi. Ce résultat est prévisible, puisque plus α est petit plus le bruit est impulsif, ce qui entraine une valeur de la probabilité ρ proche de 1. Si cette probabilité est voisine de 1, l'estimation du moment FLOS m_r à partir de la relation (3.16) ou (3.17) devient pertinente, ce qui permet d'obtenir une bonne estimation de γ en utilisant la relation (3.24).

Numériquement, dans la figure 3.7.a où $\alpha = 0.75$ (bruit très impulsif), la $RMSE_{rel}$ ne dépasse pas 10 % même si γ est très petit. Si γ est grand ($\gamma \geq 5$), cette erreur est toujours inférieure à 1 %. Dans la figure 3.7.b où $\alpha = 1$ (bruit très impulsif), dans le pire des cas où γ est très petit, la $RMSE_{rel}$ ne dépasse pas 14 %. Si γ est grand ($\gamma \geq 5$), cette erreur est toujours inférieure à 2 %. Dans la figure 3.7.c où $\alpha = 1.25$ (bruit impulsif), la $RMSE_{rel}$ ne dépasse pas 35 % si γ est très petit, et elle est toujours inférieure à 5 % si $\gamma \geq 1$. Dans la figure 3.7.d où $\alpha = 1.5$ (bruit impulsif), la $RMSE_{rel}$ ne dépasse pas 45 % pour les petites valeurs de γ et elle est bornée par 4 % pour $\gamma \geq 1$.

Ipso facto, l'approche présentée dans ce chapitre permet d'avoir une très bonne estimation pour le paramètre de dispersion d'un bruit SaS et surtout lorsque ce bruit est très impulsif ou très dispersé, ce qui traduit l'importance de cette approche.

3.4 Conclusion

Dans ce chapitre on a présenté une méthode d'estimation du paramètre de dispersion γ d'un bruit SaS. Cette méthode est une généralisation de celle proposée par A. Chemsal [13] pour différentes valeurs du paramètre de forme α .

Cette approche permet d'estimer le paramètre de dispersion du bruit envisagé à partir du signal reçu directement. Pour cette raison elle est qualifiée de semi-aveugle.

Cette approche est basée sur les FLOS et sur la probabilité que les deux signaux reçu et transmis soient de même signe.

Comme il n'y a pas une autre méthode qui traite le même problème dans la littérature jusqu'à présent, nous avons utilisé la *RMSE* relative pour évaluer cette approche.

On a montré par simulation que l'approche présentée est très précise et surtout lorsque le bruit est très impulsif (α est petit) ou très dispersé (γ est grand).

Comme on a déjà signalé dans l'introduction de ce chapitre, la technique présentée ici est une généralisation de celle proposée dans [13] pour différentes valeurs du paramètre de forme α , et la différence entre les deux techniques réside dans l'expression de la valeur estimée $\hat{\gamma}$ du paramètre de dispersion, où $\hat{\gamma}$ est donnée sous une forme explicite dans notre technique qui est la forme la plus simple, et donnée sous une forme implicite (sous forme d'équation non linéaire) dans la technique de **A. Chems**a [13].

Conclusion générale et perspectives

Selon le cahier de charge exposé, notre travail concernant l'étude de l'estimation des paramètres d'un bruit α -stable à partir d'un signal reçu BPSK, a englobé deux parties : une partie théorique et l'autre une simulation numérique.

La partie théorique a pour but de dégager les fondements théoriques des lois α -stables univariées, à savoir : les définitions et les propriétés fondamentales d'une loi α -stable, la simulation d'une loi α -stable, l'existence et le calcul des moments d'une loi α -stable, la définition des moments logarithmiques d'une loi α -stable, la notion de la puissance géométrique, la résolution analytique du problème général de l'estimation des paramètres d'une variable aléatoire α -stable, la présentation des trois classes d'estimateurs des quatre paramètres α , β , γ et δ . Ces classes d'estimateurs sont basées sur les FLOS positives et négatives d'une loi α -stable asymétrique. Ce sont des généralisations des méthodes d'estimation pour une variable aléatoire α -stable symétrique *SaS*. De plus ces estimateurs nécessitent sensiblement moins de calculs [25]. Les deux premiers chapitres ont été consacrés à cette partie.

La deuxième partie ne contient que le troisième chapitre seulement. Ce chapitre était le plus intéressant dans ce mémoire. Il présente une méthode d'estimation semi-aveugle du paramètre de dispersion γ d'un bruit *SaS* à partir d'un signal reçu BPSK seulement. Cette méthode est une généralisation de la méthode originale proposée par **A. Chems**a [13] pour différentes valeurs du paramètre de forme α . Contrairement à la méthode proposée par **A. Chems**a [13] qui donne une forme implicite de la valeur estimée de γ , notre méthode permet d'exprimer la valeur estimée de γ sous une forme explicite.

La technique présentée dans ce travail permet de faire l'estimation des paramètres à partir du signal reçu uniquement, où elle n'a pas besoin de séparer le bruit au signal

utile. Pour cette raison elle est qualifiée de semi-aveugle. Cette approche est basée sur les FLOS et sur la probabilité que les deux signaux reçu et transmis soient de même signe.

Malheureusement, jusqu'à présent n'existe aucune méthode d'estimation dans la littérature qui traite le même problème que notre approche. Pour cette raison, on a utilisé la *RMSE* relative pour évaluer cette nouvelle technique. Dans ce contexte, on a montré par simulation que cette approche est très précise surtout lorsque le paramètre de forme α est petit ou le paramètre de dispersion γ est grand. En effet, numériquement la *RMSE* relative d'estimation de γ ne dépasse pas 1 % pour un bruit *SaS* très impulsif ($\alpha = 0.75$), et ne dépasse pas 5 % si $\gamma \geq 1$ pour un bruit *SaS* impulsif ($\alpha = 1.5$).

A l'issue de cette thèse, plusieurs perspectives peuvent être envisagées. Elles se résument en certains points restent à approfondir et d'autres à étudier, nous pouvons en évoquer quelques-uns

- Etendre cette approche pour estimer le paramètre de forme α pour un bruit *SaS*;
- Etendre cette approche à un bruit α –stable asymétrique pour estimer les quatre paramètres α , β , γ et δ ;
- Généraliser cette approche pour un autre type de modulation, comme le 4 –PSK, 8 –PSK, etc. Ici, il est important de signaler ici que cette approche se généralise sans peine si la taille M de la constellation de modulation vérifie l'égalité $M/2 = \log_2 M$;
- Appliquer cette approche dans un système de communication avec codage itératif qui utilise l'algorithme de maximum a posteriori MAP [13].

Bibliographie

- [1] R. J. Barton and M. Daniel, « Performance evaluation of non-Gaussian channel estimation techniques on ultra wide band impulse radio channels, » *International Journal of Communication Systems*, vol. 20, no. 6, pp. 723–741, 2007. View at Publisher · View at Google Scholar · View at Scopus.
- [2] M. Zimmermann and K. Dostert, « Analysis and modeling of impulsive noise in broad-band powerline communications, » *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility*, vol. 44, no. 1, pp. 249–258, 2002. View at Publisher · View at Google Scholar · View at Scopus.
- [3] D. B. Levey and S. McLaughlin, « The statistical nature of impulse noise interarrival times in digital subscriber loop systems, » *Signal Processing*, vol. 82, no. 3, pp. 329–351, 2002. View at Publisher · View at Google Scholar · View at Scopus.
- [4] A. Monir, *Contribution à la modélisation et à la synthèse des signaux aléatoires : signaux non gaussiens, signaux à corrélation non exponentielle*, Thèse de doctorat, Novembre 2003, université d'Angers, Angers, France.
- [5] H. Ben Maad, *Optimisation des stratégies de décodage des codes LDPC dans les environnements impulsifs : application aux réseaux de capteurs et ad hoc*, Thèse de doctorat de l'Université de Reims Champagne-Ardenne, Juin 2011.
- [6] B. Mandelbrot, « The paulLévy I knew, Lévy flights and related topics in physics, » *Lecture Notes in Phys*, Berlin, 450: pp. ix-xii, 1995.
- [7] J.L. Chambers, C.L. Mallows and B. W. Stuck, « A methode for simulating stables random variables, » *J. Amer. Stat. Assoc.*, 71: pp. 304-344, 1976.
- [8] R. Kapoor, A. Banerjee, G. A. Tsihrintzis and N. Nandhakumar, « Uwb radar detection of targets in foliage using alpha-stable clutter models, » *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 35: pp. 819-834, 1999.
- [9] S. Porcarelli, G. Procissi, R. G. Garroppo and S. Giordano, « Testing alpha-stable processes in modeling broadband teletraffic, » *Proc. of ICC 2000*, New Orleans, Louisiana, USA, pp. 18-22, 2000.

- [10] C. Nikias and M. Shao, *Signal Processing with Alpha Stable Distributions and Applications*, Wiley, New York, 1995.
- [11] J. G. Gonzalez, J. L. Paredes, and G. R. Arce, « Zero-order statistics : A mathematical framework for the processing and characterization of very impulsive signals, » IEEE Trans. Sig. Process., vol. 54, no. 10, pp. 3839–3851, Octobre 2006.
- [12] J. G. Gonzalez, *Robust techniques for wireless communications in non-Gaussian environments*, Ph.D. dissertation, Dept. Elec. Eng., Univ. of Delaware, Newark, DE, 1997.
- [13] A. Chemsas, *Modulation avec codage itératif pour un canal à bruits non-gaussiens*, Thèse de doctorat, de l'Université. Mohamed Khider de Biskra 11 Avril 2016.
- [14] C. R. Dance and E.E. Kuruoglu, *Estimation of the Parameters of Skewed α – Stable Distributions*, Xerox Research Centre Europe, Cambridge April 26, 1999
- [15] T.Y. Al-Naffouri, A. A. Quadeer and G. Caire, « Impulse Noise Estimation and Removal for OFDM Systems , » IEEE Trans. on communications, vol. 62, no. 3, pp. 976-989, March 2014.
- [16] W. Dan, « Improvement for LDPC Coded OFDM Communication System over Power Line, » Master of Science Thesis performed at the Radio Communication Systems Group, KTH. Stockholm, Sweden, May 2013.
- [17] M. Sumi and M. Prasad, « Periodic impulsive noise reduction in OFDM based power line communication, » International Journal of Research in Engineering and Technology (IJRET), vol. 03, no. 05, pp. 517-522, May 2014.
- [18] M. R. Ahadiat, P. Azmi and A. Haghbin, « Impulsive noise estimation and suppression in OFDM systems over in-home power line channels, » International Journal of Communication Systems. Published online in Wiley online Library : 9 July 2014.
- [19] M. Laurence, *Lois α – stables*, d'après Nikias et Shao, 4 mars 2010.
- [20] W. Feller, *An introduction to probability theory and its applications*, vol. II. John Wiley & Sons Inc., 2^{ed}, 1971.
- [21] A. L. D'Estampes, *Traitement statistique des processus alpha-stables: mesures de dépendance et identification des ar stables. Test séquentiels tronqués*, Mathematics. Institut National Polytechnique de Toulouse - INPT, 2003. French
- [22] P. Čížek, W. Härdle and R. Weron, « Statistical Tools for Finance and Insurance, » Springer Science & Business Media, 2005.
- [23] G. Samorodnitsky and M. S. Taqqu, *Stable Non-Gaussian Random Processes*, Chapman & Hall, New York, 1994.

- [24] B. Mandelbrot, « Sur certains prix spéculatifs : faits empiriques et modèle basé sur les processus stables additifs non gaussiens de paullévy, » Comptes-rendus à l'Académie des Sciences, vol. 254. pp. 3968–3970.
- [25] R. D. Christopher and E. E. Kuruoğlu, « Estimation of the Parameters of Skewed α –Stable Distributions, » Conference in « Applications of Heavy Tailed Distributions in Economics, Engineering and Statistics, American University, Washington, DC, 3-5 June 1999.
- [26] R. A. Gonzalo, *Nonlinear Signal Processing: A Statistical Approach*, A John Wiley & Sons, Inc. Publication, November 2004.
- [27] V.M. Zolotarev, « One-dimensional stable distributions, » volume 65 of Translations of Mathematical Monographs. American Mathematical Society, Providence, 1986.
- [28] C. J. Chambers, C. L. Mallows and B. W. Stuck, « A method for simulating stable random variables, » Journal of the American Statistical Association, vol. 71, n354, pp. 340–344, 1976.
- [29] E. F. Fama and R. Roll, « Some Properties of Symmetric Stable Distributions, » Journal of the American Statistical Association, vol. 63, no. 323 pp. 817-836, Septembre 1968.
- [30] J. H. McCulloch, « Simple consistent estimators of stable distribution parameters, » Communications on Statistics - Simulation, 15(4): pp. 1109–1136, 1986.
- [31] I. A. Koutrouvelis, « Regression-type Estimation of the Parameters of Stable Laws, » Journal of the American Statistical Association, 75 (372), pp. 918-928. 1980.
- [32] S. Kogon and D. Williams, « On the characterization of impulsive noise with alpha-stable distributions using fourier techniques, » In Proceedings of the 29th Asilomar Conference of Signals, Systems and Computing, 1995.
- [33] X. Ma and C. L. Nikias, « Parameter estimation and blind channel identification in impulsive signal environments, » IEEE Transactions on Signal Processing, 43(12): pp. 2884–2897, December 1995.
- [34] G. A. Tsihrintzis and C. L. Nikias, « Fast estimation of the parameters of alpha-stable impulsive interference, » IEEE Transactions on Signal Processing, 44(6): pp. 1492–1503, June 1996.
- [35] S. Bates and S. McLaughlin, « The estimation of stable distribution parameters from teletraffic data, » IEEE Trans. Signal Process. 48, 3, pp. 865 – 870. March 2000.
- [36] S. Chakraborty et G. Bhattacharya, *Proceedings of the International Symposium on Engineering under Uncertainty: Safety Assessment and Management (ISEUSAM - 2012)*, Springer India 2013.
- [37] X. Wang, K. Li, P. Gao and S. Meng « Research on Parameter Estimation Methods for Alpha Stable Noise in a Laser Gyroscope's Random Error », Sensors, vol. 15, pp. 18550-18564, 2015.

-
- [38] J. P. Nolan, *Numerical computation of stable densities and distribution functions*, Communication in Stat. - Stochastic Models, vol. 13, pp. 759– 774, 1997.
- [39] P. J. Nolan, « Stable Distributions : Models for Heavy Tailed Data », American University, Processed July 28, 2014.
- [40] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, *Tables of Integrals, Series and Products*, New York: Academic, 1965.
- [41] J.C. B.Duponteil, J. C.Lmbeaux, *Elements de Communications Numériques : Transmission sur Fréquence Porteuse*, Tome II, Bordas et C.E.N.T.E.N.S.T, Paris, 1986.
- [42] C. Yunfeian and C. B. Norman, « Novel low-complexity estimators for the shape parameter of the generalized gaussian distribution, » IEEE Transactions on Vehicular Technology, vol.58, no.4, pp. 2067-2071, May 2009.
- [43] M. G. Kendall, and A. Stuart, A., *The Advanced Theory of Statistics, Volume 1: Distribution Theory*, (Chapter 3), 3rd Edition, Griffin, 1969.