الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعـــــــــة الوادي
معهد العلوم والتكنولوجيا

رقم الترتيب:
رقم التسلسل:

مذكرة تخرج لنيل شهادة

ماستر أكاديمي

مجال: علوم المادة

فرع: فيزياء

تخصص: تطبيقية إشعاع و طاقة

من إعداد: الرميصاء شويرفات

الموضوع:

البنية الهندسية لنظرية النسبية الخاصة

نوقشت يوم: 30/ 2013/06

أمام لجنة المناقشة المكونة من:

بسر الزوبير	أستاذ مساعد صنف أ	رئيس
أحميم رشيد	أستاذ مساعد صنف أ	مناقش
زواري أحمد فاطمة	أستاذة مساعدة صنف أ	مناقش
ضو جمال	أستاذ تعليم عالي	مؤطر

الموسم الجامعي 2013/2012

شكر و عرفان

((قل اعملوا فسيرى الله عملكم ورسوله والمؤمنون))

إلهي لا يطيب الليل إلا بشكرك ولايطيب النهار إلى بطاعتك .. ولا تطيب اللحظات إلا بذكرك .. ولا تطيب الآخرة إلا بعفوك .. ولا تطيب الجنة إلا برؤيتك

و الشكر و الإمتنان إلى من بلَغ الرسالة وأدى الأمانة ونصح الأمة إلى نبي الرحمة ونور العالمين.. سيدنا محمد صلى الله عليه وسلم.

أما بعد :

فإني انتهز فرصة هذا العمل المتواضع لأوجه شكري الجزيل إلى كل من أمدني بيد العون حتى أصل إلى ما أنا عليه الآن, وإن كانت كلمة الشكر ليست بالكافية للتعبير عن امتناني لهم.

مستهلة بتوجيه أسمى و أعمق عبارات الشكر و العرفان إلى الذين حملوُا أقدس رسالة في الحياة إلى الذين مهدوا لنا طريق العلم والمعرفة جميع أساتذتي الكرام الذين أشرفوا على تكويني طيلة المشوار الجامعي و أخص بالذكر الأستاذ :

"ضو جمال" الذي قام بالإشراف على هذا العمل و لم يبخل علي و لو للحظة بنصائحه و توجيهاته التي كانت لي نعم السند طوال مدة إعداد هذه المذكرة.

و السادة أعضاء لجنة المناقشة لتكرمهم بتخصيص جزء من وقتهم لقراءة و مناقشة هذا العمل.

كما أخص بالشكر جميع الصديقات اللواتي شجعني و وقفن بجانبي خاصة أستاذات ثانوية النخلة.

كما لا يفوتني أن أتوجه بخالص الامتنان و التقدير لطالبات قسم السنة الثانية ماستر فيزياء .

أخيرا أشكر جميع من ساعدوني و وقفوا بجانبي و إن فاتني ذكرهم فجزاهم الله عني خير جزاء و أسال الله كما جمعنا في الدنيا على طاعته أن يجمعني الآخرة في جنته و برفقة نبيَه.

و لله الحمد من قبل ومن بعد

الرميصاء شويرفات

الإهداء

أهدي هذا العمل :

إلى منارة العلم والإمام المصطفى إلى الأمي الذي علم المتعلمين إلى سيد الخلق رسولنا الكريم سيدنا محمد صلى الله عليه وسلم.

إلى من كلله الله بالهيبة والوقار .. إلى من علمني العطاء بدون انتظار .... إلى من أحمل أسمه بكل افتخار .... أبي العزيز.

إلى من أرضعتني الحب و الحنان, إلى رمز الحب وبلسم الشفاء, إلى الينبوع الذي لا يمل العطاء, إلى من حاكت سعادتي بخيوط منسوجة من قلبها ....أمي العزيزة.

إلى إخوتي و أخوا تي و كل العائلة و ا لأقارب و كل صديقاتي....

الفهرس

الفهرس..... 01
فهرس الأشكال..... 02
معجم لبعض المصطلحات العلمية..... 04
مقدمة عامـــــة..... 07

الفصل الأول : مدخل إلى نظرية النسبية الخاصة

I.1 تحويلات غاليلو..... 11
I.2 نظرية النسبية الخاصة..... 12
I.2.1 مبدأ النسبية الخاصة 12
I.2.2 تحويلات لورانتز 13
I.2.3 التزامن, تقلص الطول و تباطؤ الزمان..... 17
I.3 التمثيل الهندسي لتحويلات لورانتز..... 19
I.3.1 التفسير الهندسي لتقلص الطول و تباطؤ الزمان 24
I.3.2 المخروط الضوئي "الماضي و المستقبل" 27

الفصل الثاني : الفضاء الرباعي – فضاء مينكوفيسكي-

II.1 الفضاء الرباعي 30
II.1.1 الأشعة في الفضاء الرباعي 31
II.1.1.1 الشعاع ذو الصفة الزمنية..... 34
II.1.1.2 الشعاع ذو الصفة الفضائية..... 34
II.1.1.3 الشعاع ذو الصفة الضوئية..... 35
II.1.2 المصفوفة اللورانتزية..... 35
II.1.3 الأشعة التغايرية "Covariant" و الأشعة اللاتغايرية"Contravariant" و الموترات..... 52
II.1.3.1 الأشعة التغايرية "Covariant" و الأشعة اللاتغايرية"Contravariant"..... 52
II.1.3.2 الموترات "Tensors" 57

الفصل الثالث : الميـــــــكانيكا النســـــــبوي

III.1 الحركية و الديناميكا..... 59
III.1.1 تحويلات السرعة و المشعاع الرباعي للسرعة..... 59
III.1.2 الشعاع الرباعي لكمية الحركة 63
III.2 الكهرومغناطيسية النسبية 66
III.2.1 معادلات ماكسويل 66
III.2.2 الصيغ اللامتغيرة للمعادلات الكهرومغناطيسية 67
III.3 خلاصة الصياغة اللامتغيرة..... 72
خلاصة عامة..... 74
قائمة المراجع..... 76

فهرس الأشكال

الفصل الأول : مدخل إلى النظرية النسبية الخاصة

شكل(I-1): مرجعين عطاليين في حركة نسبية.....14
شكل(I-2): الدوران في الفضاء الإقليدي.....20
الشكل(I-3): التمثيل الهندسي لتحويلات لورانتز.....22
الشكل (I-4) : تمثيل المنحنى المعياري في الفضاء الإقليدي.....24
الشكل(I-5): التمثيل الهندسي لتحويلات لورانتز و تمثيل المنحنى المعياري.....25
الشكل(I-6): التفسير الهندسي لتقلص الطول و تباطؤ الزمان.....26
الشكل(I-7): المخروط الضوئي.....27

الفصل الثالث: الميكانيكا النسبوي

الشكل(III-1) : مسار جسيم في الفضاء.....59

معجم قائمة المصطلحات العلمية

معجم قائمة المصطلحات العلمية
عربى -إنجليزى

(أ)

إشعاع	Radiation
أثير	Ether
اتجاه	Direction
إشارة ضوئية	Light Signal
إحداثيات	Coordinates
إحداثيات كارتيزية	Cartesian Coordinates

(ت)

تحويلات غاليلو	Galilean Transformation
تباطؤ الزمن	Time dilatation
تقلص الطول	Length Contraction
تحويلات لورانتز	Lorentz Transformation
تمثيل هندسي	Geometrical Representation
تزامن	Simultaneity

(ج)

جسيم	Particle
جداء سلمي	Dot Prodect

(ح)

حدث	Event
حركة نسبية	Relative motion

(ز)

زمن ذاتي	Proper time

(س)

سرعة	Velocity
سرعة الضوء	Velocity Of Light

(ش)

شعاع	Vector
شعاع ذو صفة زمنية	Time-like vector
شعاع ذو صفة فضائية	Space-like vector
شعاع ذو صفة ضوئية	Light-like or null vector

(ط)

Energy	طاقة
Kinetic Energy	طاقة حركية
Total Energy	طاقة كلية

(ف)

Space	فضاء
Euclidean Space	فضاء إقليدي
Four Dimensional Space	فضاء رباعي الأبعاد
Minkowski Space	فضاء مينكوفيسكي

(ك)

Mass	كتلة
Inertial Mass	كتلة عطالية

(م)

Vector	شعاع
Transformation Equations	معادلات التحويل
Four Vector	شعاع رباعي
Four Velocity	الشعاع الرباعي للسرعة
Four Momentum	الشعاع الرباعي لكمية الحركة
Lorentzian Metric	مترية لورانتز

(ن)

Relativity	نسبية
Special Relativity	نسبية خاصة

مقدمـــــة عامة

احتلت الفيزياء التقليدية مكانة مهمة في تفسير أغلب الظواهر الفيزيائية في القرون الماضية و في مطلع القرن العشرين، حيث تمكن الميكانيكا الكلاسيكي من وصف الجزء الأكبر منها. أما بالنسبة للظواهر الكهرومغناطيسية فقد نُشِرت الأفكار الأساسية لماكسويل حول الحقل الكهرومغناطيسي و ذلك عام 1862، و في السنوات الأربعين اللاحقة تطورت تدريجيا التراكيب الرياضية للقوانين الكهرومغناطيسية، و قد تم تحقيق العديد من النتائج لهذه النظرية تجريبيا، علاوة على ذلك بقي هناك عدد من المشاكل التي أربكت الفيزيائيين النظريين و خصوصا تلك التي تتعلق بالتراكيب الرياضية للقوانين الفيزيائية. بما أن كافة التجارب المتعلقة بحركة الأمواج تشير إلى أنها تتطلب وسطا لانتشارها و أن معادلات ماكسويل في الفضاء المطلق منسجمة مع معادلة الموجة، و التي تنتشر فيها الموجات بسرعة c لهذا فقد افترض العلماء وجود وسط مادي يسمى الأثير لانتقال هذه الموجات، حيث كان الإعتقاد السائد سابقا أن الضوء لا ينتقل إلا بوجود وسط مادي كما هو الحال في الموجات الصوتية حيث لمس ماكسويل الحاجة لمثل هذا الوسط، و لكن وجود الوسط أظهر مشكلة لكونه أدخل مفهوم المرجع الذي يكون فيه الوسط ساكنا. فعند إجراء الكثير من التجارب المختلفة و منها تجربة مايكولسن و مورلي ظهرت تناقضات غريبة في النتائج و قد بذلت جهود حثيثة لترميم فكرة الأثير و جعلها متوافقة مع التجربة ولكن جميع هذه الجهود باءت بالفشل، لذلك ألغيت فكرة الأثير من قبل الكثير من العلماء و بالأخص آينشتاين الذي اعتبر أن الموجات الضوئية هي اضطراب كهربائي و مغناطيسي ينتشر دون الحاجة إلى وسط مادي لانتقاله، كما وجدوا أن معادلات ماكسويل في ظل تحويلات غاليلو تكون صحيحة بالنسبة لموجة تنتشر بسرعة ثابتة بالنسبة إلى الوسط المستقر و لكن لمرجع متحرك بالنسبة للوسط فإن انتشار الموجة سيظهر أكثر تعقيدا، إضافة إلى ذلك ظهرت العديد من المشاكل في تفسير الظواهر الفيزيائية للأجسام التي تقارب سرعتها سرعة الضوء لذلك اقترح عدد من الاحتمالات قبل تفسير الموضوع من قبل" لورانتز Lorentz و بوانكاريه Poincare "و بصفة خاصة من قبل أينشتاين عام 1905[1] و هذه الاحتمالات تنص باختصار على :

- معادلات ماكسويل لا تكفي لشرح و تفسير ظواهرالكهرومغناطيسية.
- هنالك مرجع مفضل ألا و هو الأثير الساكن، و لذلك تتطلب معادلات ماكسويل تعديلات في المراجع الأخرى.
- لمعادلات ماكسويل الصيغ نفسها في كافة المراجع المتحركة بسرعة مستقيمة منتظمة بالنسبة لبعضها، و أن تحويلات غاليلو غير ملائمة لربط المراجع المختلفة عندما تتضمن حقول كهرومغناطيسية.

في عام 1904 و ضع لورانتز تحويلات متميزة وعجيبة تجعل صيغ معادلات ماكسويل غير متغيرة، بالإضافة إلى ذلك فإن تحويلات لورانتز أعطت العنصر الأساس لتطور النسبية الخاصة و لكن النتائج

الباهرة للنسبية لم تكن من وضع لورانتز حيث كان إلى ذلك الوقت يُؤمن بفرضية الأثير، حيث التطورات في النسبية الخاصة وضعت من قبل بوانكاريه و آينشتاين، ففي عام 1899 و مرة أخرى عام 1904 اقترح بوانكاريه أن النتيجة التجريبية لمايكولسن و مورلي هي إظهار لمبدأ عام : إن الحركة المطلقة لا يمكن اكتشافها بأي من التجارب المخبرية، و هذه تدل أساسا على أن قوانين الطبيعة يجب أن لا تتغير بالنسبة لمرجعين في حالة حركة مستقيمة منتظمة بالنسبة لبعضهما. و استنتج أيضا بأنه ينبغي وضع نوع جديد من الديناميكا الذي يتميز بالقاعدة التي تنص على أنه لا يمكن لسرعة أن تزيد على سرعة الضوء. في عام 1905 نشر آينشتاين بحثه " الكهربائية الديناميكية للأجسام المتحركة " الذي وضح فيه بالتفصيل النظرية النسبية الخاصة حيث وضع مبدأين لهذه النظرية اللذان يعتبران المدخل إلى النظرية النسبية الخاصة و يسميان مبدأ النسبية لآينشتاين.

الشكل التالي يوضح موقع الفيزياء النسبية، حيث يلاحظ في الشكل أن الفيزياء التقليدية تطبق على الأجسام ذات الأبعاد المنظورة و التي تتحرك بسرعة صغيرة. أما إذا قاربت سرعات هذه الأجسام سرعة الضوء، فإن قوانينها تخضع إلى النسبية الخاصة.

شكل يوضح موقع النسبية[1].

قبل ظهور النسبية الخاصة لآينشتاين لم يشك أحد في الاستقلال التام بين الزمان و المكان، فقد اعتقد نيوتن بأن الزمان شيء مطلق، و اعتقد في الوقت ذاته بالمكان المطلق ذلك الإطار المجرد الخالص من كل مادية تسبح الاجسام فيه ساكنة كانت أم متحركة، ثم جاء لورانتز فأبقى على جزء يسير من فكرة نيوتن عن الزمان وقال عند قياس الزمان في محاور مرجعية ساكنة نحصل على فترات زمنية حقيقية. بينما عند قياسه في محاور متحركة نتحصل على فترات زمنية ظاهرية[2].

ألقت نسبية آينشتاين الضوء على مفاهيم كانت تعتبر مطلقة و قلبت الكثير منها جاعلة إياها نسبية و أثبتت أنه لا توجد هناك أسس منطقية لافتراض محاور مرجعية مفضلة على غيرها للقياسات الفضائية و

الزمانية، حيث لا يمكن أن يكون هناك سكون مطلق أو حركة مطلقة، ووفقا لتحويلات لورانتز لم تعد قياسات المكان مستقلة عن الزمان، كما كان في العالم النيوتوني ذي الأبعاد المكانية الثلاث و البعد الرابع المنفصل الزمان. لأن الزمان ليس مطلقا لتأثر قياسه بالحركة النسبية في المكان، كما أن قياسات الأبعاد تتأثر بالزمن الخاص لكل مراقب. و توصلت النسبية إلى أن الزمان و المكان يمزجان بصورة عامة بمتصل يسمى بالفضاء الرباعي (فضاء مينكوفيسكي) الذي يتكون من مكان و زمان نسبيين[2].

في هذه المذكرة سوف نقدم دراسة مفصلة حول البنية الهندسية لنظرية النسبية، و التي تتضمن في طياتها ثلاث فصول حيث يتناول الفصل الأول مدخل إلى نظرية النسبية الخاصة و دراسة وافية حول تحويلات لورانتز و التمثيل الهندسي لها و أهم النتائج التي انبثقت عنها، و يحتوي الفصل الثاني على دراسة الفضاء الرباعي – فضاء مينكوفيسكي- و نتطرق فيه بشيء من التفصيل إلى تحويلات لورانتز ونقدم دراسة لزمرة لورانتز و تصنيف تحويلات لورانتز حسب خصائصها الجبرية، أما الفصل الثالث و الأخير فيدرس الميكانيكا النسبوي و معادلات ماكسويل حيث نبين كيف يمكن إعادة صياغة الميكانيكا في الفضاء الرباعي لمينكوفيسكي بما يتناسب مع مبادىء النسبية و نوضح التوافق التام لمعادلات ماكسويل مع النسبية و أن صياغتها الطبيعية تكون في فضاء مينكوفيسكي دون الحاجة لإجراء أية تعديلات عليها.

الفصل الأول

مدخل إلى نظرية النسبية الخاصة

I. مدخـــــل إلى نظرية النسبيـــــة الخاصة

نظرية النسبية الخاصة من المواضيع المهمة في الفيزياء النظرية فهي تمثل أحد الفروع الرئيسية في الفيزياء المتقدمة خلال القرن العشرين. جذور هذه النظرية قد ثبتت بواسطة ملاحظات دقيقة و عميقة في المختبر لوصف الحالة التي تسلكها الدقائق المختلفة في الطبيعة.
إن القوانين الفيزيائية التي تصف حركة جسيم تمت معالجتها بواسطة نظرية نيوتن للحركة و يمكن تطبيقها بصورة مكافئة في نظرية النسبية الخاصة حيث تتابع التطور للأفكار الأساسية نفسها التي اتبعت في الميكانيك الكلاسيكي، إذن من المفيد الآن أن نبدأ بمراجعة سريعة للنقاط الرئيسية لنظرية نيوتن ثم سوف نتطرق لمدخل إلى نظرية النسبية الخاصة لاينشتاين[1].

1.I تحويلات غاليلو

إذا كان لدينا جسيم في مرجع عطالي S ، الذي يتحرك بسرعة ثابتة بالنسبة لمرجع عطاليا آخرا S' فإنه للانتقال من إحداثيات نظام إلى نظام آخر متحرك بالنسبة إليه نتبع مايلي :

الظواهر الفيزيائية ما هي إلا أحداث تُنسب إلى مراجع عطالية و توصف بإحداثياتها و زمن حدوثها حيث يمكن استعمال الإحداثيات الكارتيزية لتحديد الموقع و الزمن المقاس بساعة مستقرة في المرجع العطالي.

نريد تحويل إحداثيات مرجع عطالي آخر يختلف عنه فقط في كونه يتحرك بالنسبة إليه بحركة مستقيمة منتظمة.

نعتبر أنه لدينا مرجعيين عطاليين S و S' (الشكل(1-I))، النظام S' يتحرك بسرعة ثابتة $\vec{v}$ على طول الاتجاه x ، $\vec{v}$ مقاسة نسبة لـ S ، نفرض أن الحدث في النقطة P بحيث ينطبق مبدأ النظامين عند الزمن $t = t' = 0$.

المراقب في النظام S يصف الحدث بالإحداثيات (x, y, z, t) في حين المراقب في S' يستعمل الإحداثيات (x', y', z', t') لوصف نفس الحدث.

وحسب نيوتن الزمن مطلق، و إذا كان حدثان متزامنان وفقا لمراقب يجب أن يكون متزامن مع حركة المراقب الآخر. لذلك نستنتج الزمنين المقاسين متماثلين أي $t = t'$ [1,3,13].

الهندسة البسيطة تؤدي إلى:

$$\begin{aligned} x' &= x - vt \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= t \end{aligned} \qquad (1\text{-}I)$$

هذه المعادلات تشكل ما يعرف بتحويلات غاليلو للإحداثيات[4,5].

انطلاقا من المعادلات أعلاه نستنتج قوانين تحويل مركبات السرعات، إذا كان لدينا جسم يتحرك بسرعة $\vec{u}$ بالنسبة للمراقب S و الذي يتحرك بالسرعة $\vec{u}'$ من وجهة نظر المراقب S' فإن العلاقة بين السرعات تكون كالتالي[3]:

$$\begin{aligned} u'_x &= \frac{dx'}{dt} = u_x - v \\ u'_y &= \frac{dy'}{dt} = u_y \\ u'_z &= \frac{dz'}{dt} = u_z \end{aligned} \qquad (2\text{-I})$$

هذه المركبات هي نتيجة تحويل الإحداثيات[4,5].

الآن إذا كان لدينا جسم كتلته العطالية m يتحرك تحت تأثير قوة $\vec{f}$ في مرجع عطالي S ، باستعمال القانون الثاني لنيوتن نكتب:

$$m\ \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{f} \qquad (3\text{-I})$$

يصبح في النظام S' :

$$m\ \frac{d^2\vec{r}'}{dt^2} = \vec{f} \qquad (4\text{-I})$$

المعادلة (4-I) لها نفس شكل المعادلة (3-I)، هذا هو المعنى الرياضي للجملة "القوانين الميكانيكية تأخذ نفس الشكل"[3,4].

2.I نظرية النسبية الخاصة

1.2.I مبدأ النسبية الخاصة

قام أينشتاين عام 1905 بوضع المبادئ الأساسية لأحد أهم النظريات التي عرفتها البشرية" نظرية النسبية الخاصة " بعد التأكد من أن الحركة المطلقة لا يمكن اكتشافها بأي من التجارب المخبرية، و هذا يدل على أن قوانين الطبيعة يجب أن لا تتغير بالنسبة لمراقبين في مرجعين عطاليين في حالة حركة مستقيمة منتظمة بالنسبة لبعضهما.

إن الفرضيات التي بنيت عليها هذه النظرية هي :

- **مبدأ النسبية:** لا توجد خصوصية لأي مرجع عطالي أو اختلافات في القوانين الفيزيائية بين مرجع عطالي و آخر فكل مراقب في أي مرجع عطالي يجب أن يكون على توافق مع مراقب في مرجع عطالي آخر بشأن وصف الواقع الفيزيائي، بعبارة أخرى تأخذ قوانين الفيزياء التعبير الرياضي نفسه

في جميع جمل المقارنة الخارجية الغاليلية، أي أن جميع جمل المقارنة الغاليلية متكافئة فيزيائيا ولا يوجد مرجع عطالي مطلق، أي لا يوجد مرجع في حالة سكون مطلق. لذا لا يمكن عن طريق أية تجربة فيزيائية (ميكانيكية، بصرية...) تجرى ضمن جملة المقارنة تحديد إذا ما كانت هذه الجملة ساكنة بالنسبة لجملة أخرى أو تتحرك بحركة مستقيمة منتظمة. تم توسيع هذا المبدأ ليشمل كل الأحداث الفيزيائية.

- **ثبات سرعة الضوء :** سرعة الضوء بالنسبة لجميع المراقبين العطاليين واحدة وفي جميع الاتجاهات ولا تعتمد على سرعة الجسم المصدر للضوء[7,6].

عند جمع هذين المبدأين يمكننا الاستنتاج أن الضوء لا يحتاج إلى وسط (أثير) ينتقل فيه كما تنص نظرية نيوتن، فهو لا يرتبط بجملة مرجعية[3,8].

2.2.I تحويلات لورانتز:

تحويلات لورانتز الشهيرة وضعت لأجل المحافظة على معادلات ماكسويل صامدة شكلا عند الانتقال من مرجع عطالي إلى آخر (تأخذ نفس الشكل). مع ذلك، لن نلجأ لاستنتاج تحويلات لورانتز باستعمال معادلات ماكسويل و لكن نستعمل فقط مبدأ النسبية و مسلمة ثبات سرعة الضوء[13].

ليكن لدينا مرجع عطالي للإحداثيات S و آخر S' يتحرك بالنسبة لـ S بسرعة ثابتة $\vec{v}$ ، لمعرفة شكل التحويل الذي يربط الإحداثيات (x, y, z, t)و (x', y', z', t') لـ Sو S' ، نعتمد على مبدأ ثبات سرعة الضوء.

قبل البدء باشتقاق مثل هذه التحويلات نضع بعض الافتراضات عن المكان و الزمان و التي تتناسق مع مبدأ النسبية.

نفترض أن الفضاء الفيزيائي متجانس و متماثل المناحي، حيث كل اتجاهات الفضاء متكافئة، و كل المواضع متكافئة.

بما أن الفضاء متجانس ومتماثل المناحي، فإن أي مكان يمكن أن يأخذ كمبدأ الإحداثيات و كيفما كانت توجيهات محور المكان تكون متكافئة.

نستعمل الإحداثيات الكارتيزية (x, y, z, t)و (x', y', z', t')على التوالي. المحور x يمكن أن يختار على امتداد اتجاه الحركة حيث S' يتحرك نسبة لـ S بسرعة $\vec{v}$ في الاتجاه الموجب للمحور x. نفترض أيضا أن المبدأين متطابقين عند لحظة البداية حيث: $x' = x = 0, y' = y = 0, z' = z = 0, t' = t = 0$.

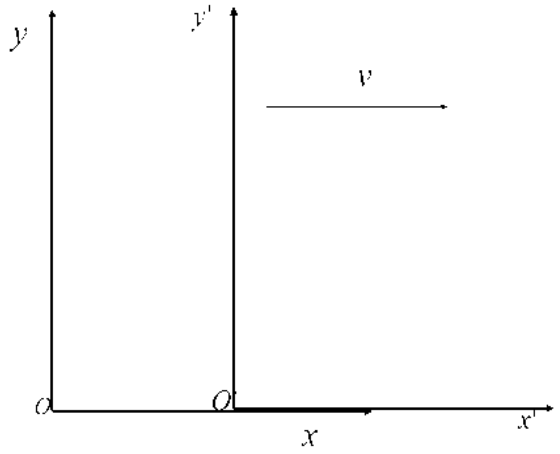
أولا بما أن كل حركة مستقيمة منتظمة في S يجب أن تبقى حركة مستقيمة منتظمة في S' (هذا هو مبدأ النسبية)، فإن التحويلات التي تربط الإحداثيات بين المرجعين يجب أن تكون خطية.

إذا أطلقنا شعاعا ضوئيا من المبدأ في اتجاه اعتباطي فإن إحداثيات الإشارة الضوئية تحقق المعادلة التالية:

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2 \qquad (5\text{-I})$$

و الآن انطلاقا من مسلمة ثبات سرعة الضوء المعادلة (I-5) تستلزم معادلة مشابهة في S' :

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2 \qquad \text{(6-I)}$$



الشكل(I-1): مرجعين عطالين في حركة نسبية[15].

بما أن التحويل خطي، فهذا لا يتأت إلا إذا كان :

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = \lambda(v)\left(x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2\right) \qquad \text{(7-I)}$$

حيث λ هي ثابت يتعلق بالسرعة.

و إذا تذكرنا أنه أية حركة موازية للمحور x يجب أن تبقى موازية أيضا بعد التحويل، بسبب التماثل (الفضاء موحد الخواص) فإن الإحداثيات z و y يجب أن تتحولا بنفس الشكل، من السهل ملاحظة أن التحويلات التي تحقق هذه الشروط لها الشكل العام التالي [3]:

$$\begin{aligned} x' &= \alpha(v)x + \beta(v)t \\ t' &= \gamma(v) + \rho(v)t \\ y' &= \lambda(v)y \\ z' &= \lambda(v)z \end{aligned} \qquad \text{(8-I)}$$

من ناحية أخرى فإن S يتحرك بالنسبة لـ S' بسرعة $-\vec{v}$ و عليه يمكن كتابة التحويلات العكسية كمايلي :

$$\begin{aligned} x &= \alpha(-v)x' + \beta(-v)t' \\ t &= \gamma(-v) + \rho(-v)t' \\ y &= \lambda(-v)y' \\ z &= \lambda(-v)z' \end{aligned} \qquad (9\text{-I})$$

حيث: $\lambda(-\vec{v})\lambda(\vec{v}) = 1$

بما أن كل الاتجاهات في الفضاء متكافئة فليس هناك اختلاف على أي حركة بسرعة $\vec{v}$ أو $-\vec{v}$ بالنسبة لـ y و z ، و عليه نستنتج أن :

$$\lambda(-\vec{v}) = \lambda(\vec{v})$$

و الذي يؤدي إلى $\lambda(\vec{v}) = \pm 1$ ولكن $\lambda(\vec{v})$ يجب أن يكون موجب (في حالة النهاية $v = 0$ يجب أخذ $\lambda(0) = 1$) فنستنتج أن $\lambda(\vec{v}) = 1$.

الآن نقوم بتحديد الثوابت $\alpha, \beta, \gamma, \rho$ كالتالي:

بما أن $\lambda(\vec{v}) = 1$ المعادلات(I-8) تصبح :

$$\begin{cases} x' = \alpha(v)x + \beta(v)t \\ t' = \gamma(v) + \rho(v)t \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \qquad (10\text{-I})$$

انطلاقا من هذه المعطيات المعادلة (I-7) تصبح :

$$x^2 - c^2t^2 = x'^2 - c^2t'^2 \qquad (11\text{-I})$$

بتعويض المعادلة الأولى والثانية من (I-10) في (I-11) نجد:

$$x^2 - c^2t^2 = (\alpha x + \beta t)^2 - c^2(\gamma x + \rho t)^2 \qquad (12\text{-I})$$

أي أن :

$$x^2 - c^2t^2 = (\alpha^2 - c^2\gamma^2)x^2 + (\beta^2 - c^2\rho^2)t^2 + (2\alpha\beta - 2c^2\gamma\rho)xt \qquad (13\text{-I})$$

بمطابقة طرفي المعادلة نجد:

$$\begin{cases} \alpha^2 - c^2\gamma^2 = 1 \\ \beta^2 - c^2\rho^2 = -c^2 \\ 2\alpha\beta - 2c^2\gamma\rho = 0 \end{cases} \qquad (14\text{-I})$$

بما أن النظام S' يتحرك بسرعة ثابتة بالنسبة للنظام S (كما في الشكل (1-I)) فإنه :

لما $x' = 0$ فإن : $x = vt$ و منه :

$$x' = \alpha x + \beta t = \alpha v t + \beta t$$

أي أن :

$$\begin{aligned} x' &= 0 \\ \alpha v t + \beta t &= 0 \end{aligned}$$

ومنه :

$$\alpha v = -\beta \qquad (15\text{-I})$$

من (14-I) و(15-I) نجد:

$$\begin{cases} \alpha^2 - c^2\gamma^2 = 1 \\ \beta^2 - c^2\rho^2 = -c^2 \\ 2\alpha\beta - 2c^2\gamma\rho = 0 \\ \alpha v = -\beta \end{cases} \qquad (16\text{-I})$$

ومنه وبعد القيام ببعض التبسيطات نحصل على :

$$\begin{aligned} \gamma^2 &= \frac{v^2}{c^2\left(c^2 - v^2\right)} \\ \alpha^2 &= \frac{c^2}{c^2 - v^2} \\ \beta^2 &= \frac{c^2 v^2}{c^2 - v^2} \\ \rho^2 &= \frac{c^2}{c^2 - v^2} \end{aligned} \qquad (17\text{-I})$$

إذن بعد تحديد الثوابت $\alpha , \beta , \gamma , \rho$ و تعويضها في المعادلات (I-10) نحصل على [15]:

$$\begin{cases} x' = \dfrac{x - vt}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} \\ t' = \dfrac{t - \left(v / c^2\right)x}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \qquad (18\text{-I})$$

هذه التحويلات تعرف بتحويلات لورانتز. واضح أنه في المعادلة (I-18) تحويلات لورانتز يكون لها معنى فقط عند $c > v$ و لذلك فإن السرعات في الفيزياء لا تفوق سرعة الضوء و هذا يتطلب مبدأ ديناميكي[3,4,5,9,15].

3.2.I التزامن، تقلص الطول، و تباطؤ الزمان

أولا :التزامن

إن أحد المفاهيم في النظرة الكلاسيكية للمكان و الزمن هو أن مفهوم التواقت أو التزامن هو مفهوم مطلق. فإذا إذا كان لدينا حدثين يقعان في مكانين مختلفين في الفضاء نقول أنهما يحدثان متزامنين إذا حدثا في نفس الزمن عند قياسهما في نفس المرجع عطالي.

إذا كان لدينا نظام عطالي S إحداثيات المكان و الزمان للحدث(1) هي (x_1, y_1, z_1, t_1)و للحدث (2)هي (x_2, y_2, z_2, t_2) ، و إذا كان $t_1 = t_2$ نقول عن الحدثين أنهما متزامنان.

لنفترض أنه لدينا مرجع آخر عطالي S' يتحرك بسرعة ثابتة في الاتجاه xيتعلق بالمرجع S ، إحداثيات المكان و الزمان للحدثين في S' تكون (x'_1, y'_1, z'_1, t'_1) و (x'_2, y'_2, z'_2, t'_2). الآن من السهل استعمال تحويلات لورانتز للتأكد من أنه حتى في حالة $t_1 = t_2$ فإن $t'_1 \neq t'_2$ ، و لا يكون $t'_1 = t'_2$ إلا في حالة $x_1 = x_2$. لذلك نستنتج أنه إذا كان لدينا حدثين متزامنين في مرجع عطالي فإنهما ليسا بالضرورة متزامنين بالنسبة لمرجع عطالي آخر.

إن سبب الحاجة للتوصل لتعريف جلي لمفهوم التواقت (التزامن) هو لاستخدامه في مفهوم كيفية قياس طول جسم يتحرك مارا بمراقب. لأنه عندما يقوم مراقبان بقياس طول جسم يلاحظان تطابق نهايته مع نقطتين على مسطرة مدرجة، عند مروه بها. لقد أثبت اينشتاين أن القياسات التي تكون متواقتة لمراقب في حالة سكون بالنسبة لجسم متحرك، هي ليست كذلك بالنسبة لمراقب يتحرك مع الجسم. الفرق بين نتيجتي المراقبين مساوية للفرق الذي نحصل عليه من تحويلات لورانتز كالآتي[3,5,10] :

دعنا الآن نهتم بقياس طول مسطرة و طول الفترات الزمنية في مرجعين عطالين مختلفين:

ثانيا: تقلص الطول

نعتبر مرجعين عطاليين S و S' حيث S' يتحرك نسبة لـ S. نأخذ مسطرة تتحرك على طول المحور x، ثابتة في S' (هذا المسطرة تتحرك بسرعة v نسبة لـ S).

الإحداثيات الموضعية لطرفي المسطرة x'_1 و x'_2 مستقلين عن t'. حيث طول المسطرة و هي ساكنة أو الطول الذاتي للمسطرة l_0 هو $l_0 = x'_2 - x'_1$ ، أما طولها بالنسبة للمرجع S فيحدد بالطريقة التالية : الطول l للمسطرة في نظام متحرك هو : $l = x_2 - x_1$.

انطلاقا من تحويلات لورانتز لدينا:

$$x'_1 = \gamma(x_1 - vt) \qquad (19\text{-I})$$

$$x'_2 = \gamma(x_2 - vt)$$

ومنه:

$$l_0 = x'_2 - x'_1 = \gamma(x_2 - x_1 - vt + vt)$$

$$l_0 = \gamma(x_2 - x_1) = \gamma l = \frac{l}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

ومنه نحصل على :

$$l = l_0\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \qquad (20\text{-I})$$

و بما أن النسبة $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ أقل من الواحد فإن طول المسطرة في النظام S يتناقص أي أن المسطرة المتحركة تبدو أقصر [3,2,8,10].

ثانيا : تباطؤ الزمن :

لنفرض أنه هناك حدثين قد وقعا في نفس الموضع x' بالنسبة للمراقب S' الذي يتحرك بسرعة منتظمة v بالنسبة للمراقب S، فعندما يقيس المراقب S' الفترة الزمنية T_0 بين زمني الحدثين t'_0 و t' يحصل على :

$$T_0 = t' - t'_0$$

وعندما يقيس المراقب O الفترة الزمنية بين نفس الحدثين يحصل على :

$$T = t - t_0$$

وحسب تحويلات لورانتز لدينا :

$$t = \gamma\left(t' - \frac{v}{c^2}x'\right)$$

$$t_0 = \gamma\left(t_0' - \frac{v}{c^2}x'\right) \qquad (21\text{-I})$$

ومنه :

$$T = t - t_0 = \gamma\left(t' - t_0' - \frac{v}{c^2}x' + \frac{v}{c^2}x'\right)$$

$$T = \gamma\left(t' - t_0'\right) = \gamma T_0 = \frac{T_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

ومنه نحصل على :

$$T_0 = T\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \qquad (22\text{-I})$$

نلاحظ أنه في السلم الزمني لـ S ، أن زمن الحركة يتباطئ مع زيادة السرعة v بالنسبة $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ [2,3,8,14].

3.I التمثيل الهندسي لتحويلات لورانتز:

من أجل مناقشة المعنى الهندسي لتحويلات لورانتز سنقتصر في دراستنا على الإحداثيات (x,t) وذلك بتمثيل المحور (ox) متعامد على محور الزمن.

قبل مناقشة التمثيل الهندسي لتحويلات لورانتز، من المفيد دراسة التمثيل الهندسي للدورنات في الفضاء الإقليدي في بعدين باستعمال الإحداثيات الكارتيزية.

ليكن لدينا مرجع (oxy)، النقطتين P_1 و P_2 إحداثياتهما في هذا المرجع على الترتيب (x_1,y_1) و (x_2,y_2).

إن مختلف الإحداثيات الكارتيزية (x',y') الناتجة عن دوران المحاور (x,y) في الفضاء الإقليدي بزاوية θ تعطى بالشكل[3,5]:

$$x' = x\cos\theta + y\sin\theta \qquad (23\text{-I})$$

$$y' = -x\sin\theta + y\cos\theta$$

لتمثيل محاور المعلم $(ox'y')$ لدينا :

بالنسبة للمحور ox' : هو مجموعة النقاط التي إحداثياتها : $y'=0$ أي أن :

$$y' = -x\ \sin\theta + y\ \cos\theta = 0$$

$$y = x\ \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = x\ \tan\theta$$

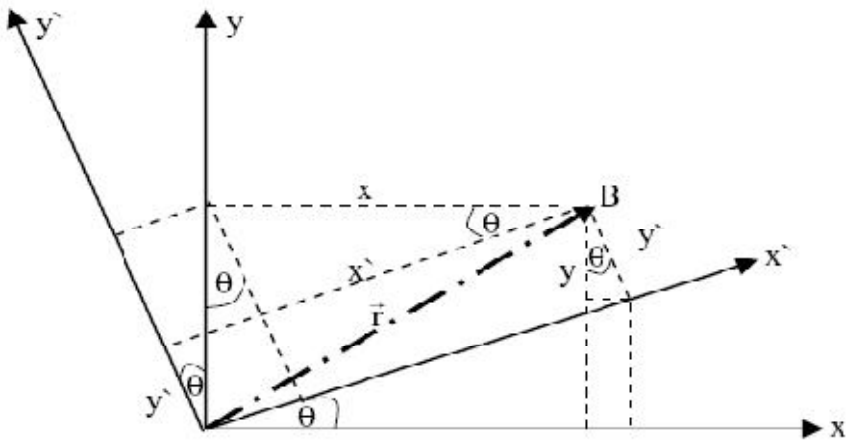
بالنسبة للمحور oy' : هو مجموعة النقاط التي إحداثياتها : $x'=0$

أي:

$$x' = x\ \cos\theta + y\ \sin\theta = 0$$

$$x = y\ \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = y\ \tan\theta$$

ومنه يكون تمثيل المحاور (x', y') كالتالي:



الشكل(I-2): الدوران في الفضاء الإقليدي[1,3].

ومنه في حالة الدوران في الفضاء الإقليدي ننتقل من محاور متعامدة إلى أخرى متعامدة أيضا.

نعتبر الآن المسافة بين النقطتين P_1 و P_2 هي ΔS^2 تعرف في الفضاء الإقليدي بالعلاقة :

$$\Delta S^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 \qquad (24\text{-I})$$

ومن السهل الحصول على :

$$\Delta S^2 = (x_1' - x_2')^2 + (y_1' - y_2')^2 \qquad (25\text{-I})$$

حيث :

$$x_1' = x_1 \cos\theta + y_1 \sin\theta$$

$$y_1' = -x_1 \sin\theta + y_1 \cos\theta$$

و

$$x_2' = x_2 \cos\theta + y_2 \sin\theta$$

$$y_2' = -x_2 \sin\theta + y_2 \cos\theta$$

بالتعويض عن y_2', x_2' ,y_1' ,x_1' في (I-25) نحصل على :

$$\Delta S^2 = (x_1' - x_2')^2 + (y_1' - y_2')^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 \qquad (26\text{-I})$$

على الرغم من أن الإحداثيات تغيرت قيمها عند الانتقال من المرجع الأصل إلى المدور، إلا أن المسافة صامدة ولم تتغير. لأجل ذلك نقول بأن المسافة ثابتة ولم تتغير مثل تغير الإحداثيات. إذن الإحداثيات ليست حقيقة الهندسة، إنما هي فقط أعداد تستعمل للتأشير بها عن أي نقطة. أما حقيقة وجوهر الهندسة أو الكميات التي في الواقع تصف الفضاء يجب أن تكون صامدة و غير متغيرة بتغير الإحداثيات.

فالمسافة مثلا في الفضاء الإقليدي تأخذ كمثال عن كمية صامدة، ولا تتعلق باختيار الإحداثيات. هنا يجب التذكير بأن الدوران الذي استعملناه لم يبقي فقط على المسافة ثابتة و لكن أبقى أيضا العلاقة بين المسافة و الإحداثيات ثابتة وغير متغيرة، حيث كلاهما يوصف بنفس المعادلة[1,3].

الآن نستعد للبحث عن التفسير الهندسي لتحويلات لورانتز.

نعتبر مرجع S المعرف بالإحداثيات الكارتيزية $(x\ ,y\ ,z\ ,t)$، التي توصف بالمكان و الزمان بواسطة الإحداثيات الكارتيزية في IR^4. و لتسهيل الدراسة نقتصر على الفضاء IR^2 أي x و t.

نعتبر أنه لدينا مرجع عطالي S. نرمز بـ(x,t)لإحداثيات المكان و الزمن في هذا المرجع، و إذا اعتبرنا مرجع عطالي آخر S' يتحرك بسرعة v نسبة لـ S، الإحداثيات(x',t') لـS' ترتبط بـ(x,t) بتحويلات لورانتز:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma\,(x - vt)$$

$$t' = \frac{t - \left(v/c^2\right)x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) \qquad (27\text{-I})$$

انطلاقا من المعادلة (I-27) نجد:

$$x' = \gamma\left(x - vt\right) = \gamma\left(x - \beta x_0\right)$$

$$t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right)$$

$$ct' = x'_0 = \gamma\left(x_0 - \beta x\right)$$

حيث $\beta = \frac{v}{c}$ و $x_0 = ct$.

دعنا الآن نجد التمثيل الهندسي لتحويلات لورانتز. نبدأ أولا بتمثيل المحاور x و t بزاوية مناسبة .

بالنسبة للمحور x' : هو مجموعة النقاط التي تكون من أجلها $x'_0 = 0$ ، و منه انطلاقا من المعادلة السابقة نجد :

$$x_0 = \beta x \qquad (28\text{-I})$$

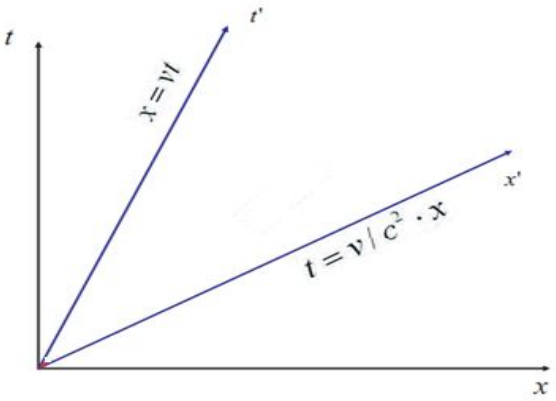
$$x = vt$$

بالنسبة للمحور t': هو مجموعة النقاط التي تكون من أجلها $x' = 0$ ، انطلاقا من المعادلة (5-6) نجد :

$$x = \beta x_0$$

$$t = \frac{v}{c^2}x \qquad (29\text{-I})$$

تمثيل المحاور مبين في الشكل(I-3):



الشكل(I-3): التمثيل الهندسي لتحويلات لورانتز[3].

تجدر الإشارة هنا إلى أنه على الرغم من أن المحاور الأصلية للمرجع S كانت متعامدة فإن محاور المرجع S' ليست كذلك، و هذا على عكس الدورانات، و هو ما يوحي بوجود اختلاف جوهري بين تحويلات لورانتز و الدورانات.

في الفضاء الإقليدي المسافات تكون ثابتة أثناء الدوران. السؤال الطبيعي الذي يجب طرحه الآن هو: ما هي الكميات الثابتة بواسطة تحويلات لورانتز؟

للإجابة عن هذا السؤال نعتبر أنه لدينا حدثين في الفضاء و الزمن توصف بالإحداثيات (x_1, y_1, z_1, t_1) و (x_2, y_2, z_2, t_2) فنكتب المسافة ΔS بالشكل:

$$\Delta S^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 - c^2 (t_1 - t_2)^2 \qquad (30\text{-I})$$

كما عرفنا سابقا أن المحاور الأصلية التي كانت متعامدة في المرجع S فإن محاور المرجع S' ليست كذلك، و الناتجة عن تحويلات لورانتز، فإذا كان لدينا نظام للإحداثيات متحصل عليه بواسطة تحويلات لورانتز. فإن الحدث (1) و (2) يأخذان الإحداثيات (x'_1, y'_1, z'_1, t'_1) و (x'_2, y'_2, z'_2, t'_2) على الترتيب. الآن من السهل عرض أنه بالرغم من أن الإحداثيات متغيرة من النظام الأصلي إلى النظام المتحصل عليه بواسطة تحويلات لورانتز فإن الفترة الزمنية الممثلة في العلاقة (30-I) تبقى صامدة حتى بعد تغير الإحداثيات أي أن:

$$\begin{aligned} \Delta S^2 &= (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 - c^2 (t_1 - t_2)^2 \\ &= (x'_1 - x'_2)^2 + (y'_1 - y'_2)^2 + (z'_1 - z'_2)^2 - c^2 (t'_1 - t'_2)^2 \end{aligned} \qquad (31\text{-I})$$

و من تحويلات لورانتز لدينا $y' = y$ و $z' = z$ و بتعويضها في (31-I) نجد :

$$(x_1 - x_2)^2 - c^2 (t_1 - t_2)^2 = (x'_1 - x'_2)^2 - c^2 (t'_1 - t'_2)^2 \qquad (32\text{-I})$$

حيث:

$$x'_1 = \gamma (x_1 - v t_1)$$

$$x'_2 = \gamma (x_2 - v t_2)$$

$$t'_1 = \gamma \left(t_1 - \frac{v}{c^2} x_1 \right)$$

$$t'_2 = \gamma \left(t_2 - \frac{v}{c^2} x_2 \right)$$

و هكذا تحصلنا على كمية صامدة، حيث الفترة بين الأحداث المعرفة بـ (30-I) تلعب دور المسافة في الهندسة الإقليدية[1,3,5].

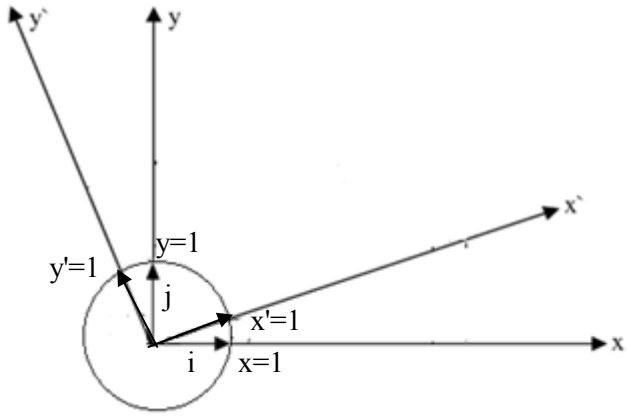
I.3. 1 التفسير الهندسي لتقلص الطول و تباطؤ الزمان

قبل التطرق للتمثيل الهندسي لتقلص الطول و تمدد الزمن، يجب أولا الكلام عن منحنى المعيار "Calibration curve" و سبب الحاجة لرسمه.

نتكلم أولا عن المنحنى المعياري في الفضاء الإقليدي. فإذا كان المستوي IR^2 مزود بأشعة الوحدة $\left(\vec{i}, \vec{j}\right)$ فإنه و كما رأينا سابقا في حالة الدوران في الفضاء الإقليدي ننتقل من محاور متعامدة إلى أخرى متعامدة أيضا حيث المسافات تبقى ثابتة و منه فإن المسافة بين المبدأ و أشعة الوحدة تبقى ثابتة أيضا بعد الدوران أي أن :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x'^2 + y'^2 = 1 \end{cases}$$

وهي عبارة عن دائرة نصف قطرها شعاع الوحدة و يساوي الواحد مهما دورنا المرجع العطالي إذا المنحنى المعياري في الفضاء الإقليدي هو عبارة عن دائرة كما هو مبين في الشكل التالي :



الشكل (I-4) : تمثيل المنحنى المعياري في الفضاء الإقليدي.

الدائرة ذات قطر الوحدة تقطع المحاور (oxy) و $(ox'y')$ عند الفاصلة 1 لهذا فإن المسافة الإقليدية المساوية للوحدة في المعالم الأصلية تكون حاوية لنفس المسافة في المحاور الجديدة.

بالنسبة لفضاء مينكوفيسكي و كما رأينا سابقا أن الدوران لا يحافظ على التعامد و بالتالي فإن الوحدة في المرجع العطالي ليست بالضرورة تساوي للوحدة في المرجع العطالي المدور أي أن المنحنى المعياري في هذه الحالة ليس دائرة كما رأينا في الفضاء الإقليدي. عملية تخمين ما يمثل المنحنى المعياري في حالة فضاء مينكوفيسكي ليست صعبة و يمكن استنتاجها من كون المقدارين التالين صامدين:

$$x^2 - (ct)^2 = 1 \quad \text{و} \quad x^2 - (ct)^2 = -1$$

نعتبر أنه لدينا مرجع عطالي S. نرمز بـ(x,t) لإحداثيات المكان و الزمن في هذا المرجع، و إذا اعتبرنا مرجعا آخرا S' يتحرك بسرعة v نسبة لـ S، الإحداثيات (x',t') لـS' ترتبط بـ(x,t) بتحويلات لورانتز:

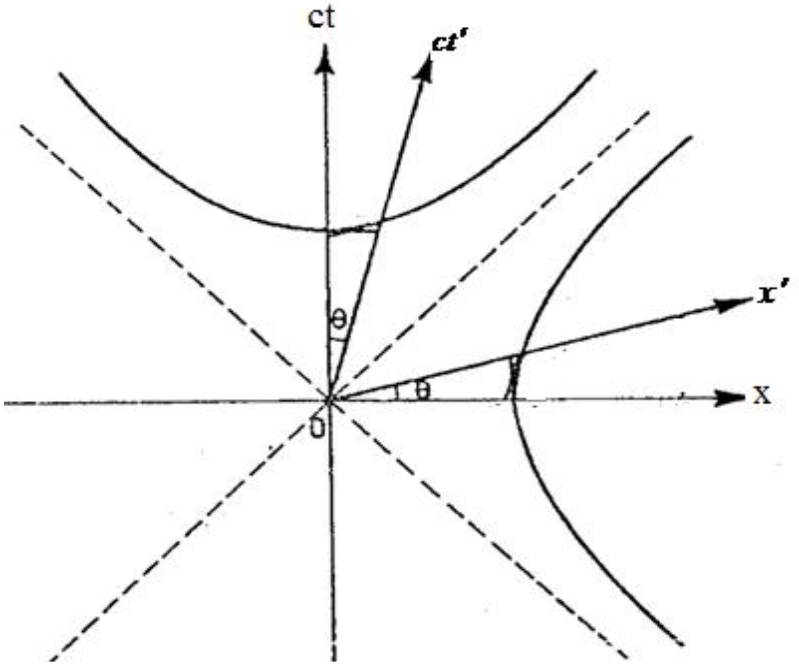
$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \gamma\left(x - vt\right)$$

$$t' = \frac{t - \left(v/c^2\right)x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) \qquad (33\text{-I})$$

تمثيل هذين المعلمين مبين في الشكل(I-3)، لنرسم القطعتين الزائدين المترافقين:

$$x^2-(ct)^2=1 \quad \text{و} \quad x^2-(ct)^2=-1$$

كما هو مبين في الشكل التالي:



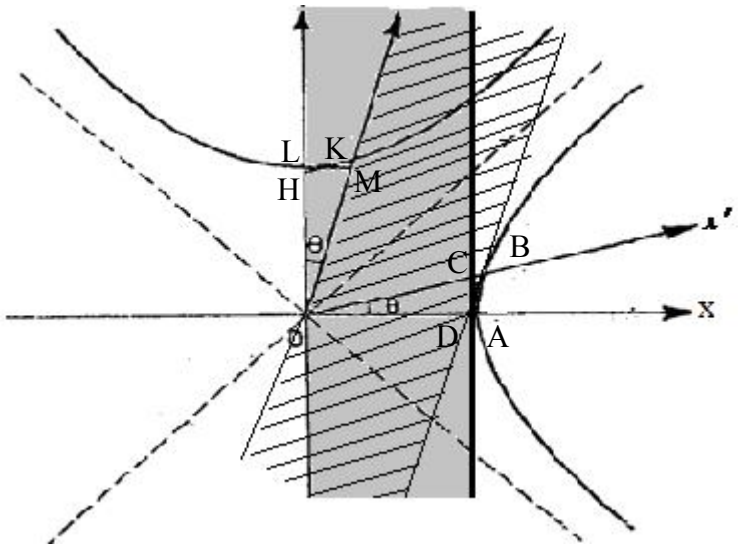
الشكل(I-5): التمثيل الهندسي لتحويلات لورانتز و تمثيل المنحنى المعياري[5].

القطع الزائد الممثل بالمقدارين $x^2-(ct)^2=-1$ و $x^2-(ct)^2=1$ يقطع المحورين (oxy) عند الفاصلة 1 و التي تمثل الوحدة في هذين المحورين، و يقطع المحورين $(ox'y')$ عند الفاصلة 1 أيضا و التي تمثل الوحدة في هذين المحورين، و لكن نلاحظ أن الوحدة في المحورين $(ox'y')$تظهر أطول من تلك التي تميز

المحورين (oxy) مما يعني أن الطول الظاهري يظهر و كأنه (هندسيا) أطول من الطول الفعلي للجسم المتحرك بالرغم من أن الطول الفعلي لم يتغير، و هذا ما سنستعمله في التفسير الهندسي لتقلص الطول و تمدد الزمن.

الآن نعود للتفسير الهندسي لتقلص الطول و تمدد الفترات الزمنية :

لنعتبر أنه لدينا مسطرة ساكنة في المرجع العطالي S طولها الذاتي $l_0 = 1$ في هذا المرجع. تمثيل هذه المسطرة في لحظات زمنية مختلفة مبين في الشريط المظلل في الشكل(I-6).



الشكل(I-6): التفسير الهندسي لتقلص الطول و تباطؤ الزمان[5].

المسطرة بوحدة الطول متمثلة بالمقطع OA و الثابتة في المرجع العطالي الأول S حيث يسلك الطرف O الخط ct و الطرف A الخط AC الموازي لـ ct. حيث يسجل المشاهد في المرجع فيجد الطول:

$$OC < OB = 1$$

حيث $OB = 1$ تمثل الوحدة في المرجع العطالي S' ، مما يعني أن المشاهد يجد أن معيار الطول المتحرك أقصر من معيار الطول الثابت في المرجع S.

عكسيا، إذا كان معيار الطول $OB = 1$ ثابت في المرجع العطالي S'، فإنه سيسلك طرفاه الخطين DB الموازي لـ ox' و الآخر سيسلك الخط ox'. فإذا سجل مشاهد في المرجع S المواقع للطرفين في الوقت ذاته في S يجد الطول:

$$OD < OA = 1$$

فيجد أن طول المعيار المتحرك أقل من طول المعيار الثابت في معلمه.

و عند تمثيل ساعة ثابتة في الموقع $x=0$ في المرجع العطالي S بنقطة تسلك المحور ct مع مرور الوقت. فإذا كانت دورة عقرب الساعة تمثل وحدة الوقت تنتقل من النقطة التي تمثل الساعة من O إلى L حيث $OL=1$. أما الساعة الثانية في المرجع العطالي S' و التي تلاصق الساعة الأولى في الوقت $OL=1$ فإنها تمثل في المرجع S' بالنقطة M من المحور ct' و التي يحددها الخط LM الموازي للمحور ox (لأن الخط LM يمثل الوقت $ct=1$ في S). و لدينا تقاطع المنحنى المعياري مع ct' يكون عند النقطة K أي أن $OK=1$ تمثل الوحدة أي دورة عقرب الساعة في المرجع العطالي S' ، فيمثل OM مدة زمنية :

$$OM<OK=1$$

مما يعني أن مشاهد S يستنتج أن ساعة S' الملاصقة لساعته في المكان لم تدر عقاربها بعد دورة كاملة بينما ساعته دارت دورة كاملة. أي أن ساعة S' تتباطأ.
وعكس ذلك تمثل ساعة ثابتة في المرجع S' بنقطة تسلك المحور ct' و تكون عقاربها قد دارت دورة كاملة (وحدة الوقت) عندما تكون في النقطة K من المعلم S بحيث أن HK موازي لـ ox' الذي يمثل الزمن $ct'=1$ في S' و لكن :

$$OH<OL=1$$

مما يعني أن عقارب ساعة S عندما تمثل بالنقطة L (حيث $OL=1$ تمثل دورة عقرب الساعة في المرجع العطالي S) لم يكمل بعد دورته. فيستنتج أيضا المشاهد المرتبط بالمرجع S' أن ساعة S تتباطأ.

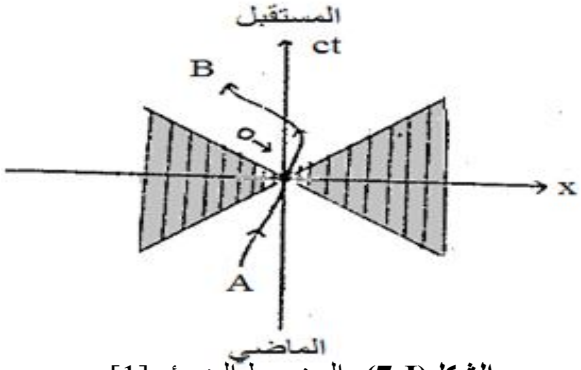
بتعبير آخر، إن الساعة المتحركة تبدو أبطأ من الساعة الثابتة مما يعني أن الحركة تسبب تمدد الفترات الزمنية.
في الواقع أن التقلص المتبادل للطول و التمدد المتبادل للفترات الزمنية يصبحان طبيعيين عند التخلي عن فكرة التطابق الزمني المطلق[2,3,5,11].

2.3.I المخروط الضوئي "الماضي و المستقبل"

يمكن تقسيم المنطقة المحيطة بمنطقة في فضاء مينكوفيسكي إلى ثلاث مناطق بواسطة مخروط سطحه يستوفي المعادلة (I-5) وهي:

$$x^2+y^2+z^2=c^2t^2$$

و لأن سرعة الضوء هي أكبر سرعة يمكن أن تتواجد في الكون لذلك نسميه بالمخروط الضوئي. و نمثله بالشكل التالي :



الشكل(I-7): المخروط الضوئي[1].

المساحة الغير مظللة أعلى المحور x تمثل تلك الأحداث التي زمنها يتناسب مع الحدث الأصلي، واضح من الشكل أن الأحداث التي تقع في هذه المساحة تحقق الشرط $|ct| > |x|$ وكما رأينا سابقا أن :

$$v = \frac{|x|}{|ct|}$$

أي أن سرعة أي حدث في هذه المنطقة ستكون أصغر من سرعة الضوء.

عند انبعاث وميض ضوئي في الزمن $t = 0$ من نقطة المبدأ O فإنها ستترك المخروط، و لكن عندما يتحرك منها جسم سرعته محدودة أصغر من سرع الضوء فإنه سيرسم خطه الكوني OB في المخروط العلوي و قد سمي بالمستقبل لأنه العالم الذي يتأثر مستقبله ابتداء من النقطة O يكون فيه الزمن أكبر من الصفر.

و كل الأحداث التي تنشأ قبل الحدث الأصلي و المبينة في المساحة الغير مظللة أسفل المبدأ تحقق الشرط $|ct| > |x|$ أيضا أي أن سرعة أي حدث في هذه المنطقة ستكون أصغر من سرعة الضوء.

فإذا كان لدينا جسم بدأ حركته من النقطة A بسرعة أقل من سرعة الضوء فإنه قد يصل إلى النقطة O متخذا المسار AO الواقع داخل المخروط السفلي. إن الأحداث التي تقع في هذه المنطقة و التي تؤثر في O تكون قادمة من الماضي لأنه عندما بدأ الجسم حركته من A كان في الماضي بالنسبة إلى O لذلك سميت هذه المنطقة بالماضي.

أما الأحداث التي تنشأ على طول الخط $45°$ فإن لها الخاصية $|ct| = |x|$ حيث هذا الخط يمثل مسارا محتملا للأشعة الضوئية.

تحتل المنطقة المظللة ما تبقى من المكان و الزمان، حيث أن أي حدث في هذه المساحة له الخاصية $|ct| < |x|$ أي أن سرعة الإشارات التي تستطيع الوصول إلى هذه المنطقة يجب أن تفوق سرعها سرعة الضوء ولكن كما عرفنا سابقا أن سرعة الضوء هي السرعة القصوى و لا يمكن لأي جسم متحرك أن تفوق سرعته هذه السرعة و بالتالي لا يمكن لأي حدث في هذه المنطقة أن يتأثر بالمبدأ أي عند حدوث شيء فيها سوف لا يتأثر به آنيا أو في نفس وقت حدوثه لأنه لا يوجد في الطبيعة شيء يتحرك أسرع من الضوء[1,2,9].

الفصل الثاني

الفـــضاء الرباعـــي

– فضاء مينكوفيسكي –

II. الفضاء الرباعي - فضاء مينكوفيسكي-

لقد كان افتراض نيوتن بالفضاء المطلق (وبالتالي فكرة الأثير) متعارضا مع مبدأ النسبية. فقام أينشتاين بصياغة النظرية النسبية الخاصة بدون اعتبار الأثير كحالة سكون مرجعية . كذلك بيَن تحويل لورانتز عدم جدوى اعتبار فضاء مطلقا (مكان في حالة سكون مطلق) أو زمن مطلق . فطور هيرمان مينكوفيسكي تلك الأفكار بإدماجه المكان والزمن فيما يسمى الفضاء الرباعي وهو يتكون من أربعة أبعاد ، ثلاثة للمكان والبعد الرابع هو الزمن، سنعرض في هذا الفصل دراسة وافية عن هذا الفضاء و ما يميز الأشعة فيه.

1.II الفضاء الرباعي

أي حدث يمكن أن يوصف بموضعه (x, y, z) و بالزمن t لحظة وقوع الحدث. هذه المتغيرات الأربعة يمكن توحيدها بتعبير واحد أو علاقة منفردة تبقى دون تغيير فيما يخص تحويلات لورانتز، أي أنها لا تتغير بالنسبة لجميع المراجع.

لنرجع مرة أخرى إلى تحويلات غاليلو فنلاحظ أن المسافة r^2 بين نقطتين (x_1, y_1, z_1) و (x_2, y_2, z_2) تبقى صامدة بالنسبة للمراجع أي أن :

$$\Delta S^2 = (x_1' - x_2')^2 + (y_1' - y_2')^2 + (z_1' - z_2')$$

$$= (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)$$

رأينا سابقا أن المسافة اللورانتزية التالية تبقى صامدة صيغة ومقدارا :

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2$$

أو

$$r^2 - c^2t^2 = r'^2 - c^2t'^2$$

فالكمية $x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2$ تبقى إذا صامدة بتحويلات لورانتز. إن هذه الخاصية في الإحداثيات الأربعة (x, y, z, t) تخضع بصورة مباشرة إلى هذا النوع من التحويلات.

و عليه فإن أية كمية تتألف من أربعة كميات تتحول بالطريقة نفسها التي تتحول بها الكميات (x, y, z, t) يطلق عليها الشعاع الرباعي[15,14,1].

إذا نتحدث عن الفضاء الرباعي (مكان- زمن) (Space-time):
المسافة التي تبقى فيه صامدة عبر تحويلات لورانتز ليست المسافة الإقليدية بل هي مسافة أخرى. فإذا كان لدينا حدثين الأول إحداثياته (x_1,y_1,z_1,t_1) و الثاني إحداثياته (x_2,y_2,z_2,t_2) باستعمال تحويلات لورانتز نتوصل إلى :

$$\Delta S^2=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2-c^2(t_1-t_2)^2$$

$$=(x_1'-x_2')^2+(y_1'-y_2')^2+(z_1'-z_2')^2-c^2(t_1'-t_2')^2$$

هذه الكمية صامدة تحت تحويلات لورانتز تحت شروط معينة. و تجدر الإشارة في هذا المجال إلى أن الفضاء ذا الأبعاد الأربعة يسمى كذلك **فضاء مينكوفيسكي** نسبة إلى العالم "مينكوفيسكي " . في هذا الفضاء نتعامل مع الكمية (x^0,x^1,x^2,x^3) بدلا من استعمال (x,y,z,ct) حيث[1,3,9]:

$$\begin{cases} x^0=ct \\ x^1=x \\ x^2=y \\ x^3=z \end{cases} \qquad (1\text{-II})$$

نقول أن الفضاء الرباعي (مكان- زمن) مزود بمترية تسمى **مترية لورانتز**، حيث أن المسافات بين الأحداث باستعمال هذه المترية تبقى صامدة.
فإذا كان لدينا حدثين P_1 إحداثياته في الفضاء الرباعي هي (x^0,x^1,x^2,x^3) و حدث آخر P_2 من نفس الفضاء إحداثياته (y^0,y^1,y^2,y^3) فإن المسافة بين الحدثين تعطى بـ[11,14]:

$$d^2(P_1,P_2)=(x^0-y^0)^2-(x^1-y^1)^2-(x^2-y^2)^2-(x^3-y^3)^2 \qquad (2\text{-II})$$

1.1.II الأشعة في الفضاء الرباعي

نعرف الأشعة في فضاء مينكوفيسكي على أنها كمية ذات أربع مركبات ويرمز لها بالرمز $\underline{A}$ حيث :

$$\underline{A}=\begin{pmatrix} A^0 \\ A^1 \\ A^2 \\ A^3 \end{pmatrix} \qquad (3\text{-II})$$

أو نكتب اختصارا A^μ حيث $\mu=0,1,2,3$ و التي تمثل مركبات الشعاع $\underline{A}$ بالنسبة لمرجع عطالي معين.

نعرف الجداء السلمي باستعمال مترية لورانتز للشعاع $\underline{A}$ مع نفسه كمايلي:

$$\underline{A}^2 = A^{0^2} - A^{1^2} - A^{2^2} - A^{3^2} \qquad (4\text{-II})$$

و إذا كان $\underline{B}$ شعاع آخر من فضاء مينكوفيسكي مركباته:

$$\underline{B} = \begin{pmatrix} B^0 \\ B^1 \\ B^2 \\ B^3 \end{pmatrix} \qquad (5\text{-II})$$

فإن الجداء السلمي باستعمال مترية لورانتز للشعاع $\underline{A}$ مع الشعاع $\underline{B}$ تكون كمايلي:

$$\underline{A}.\underline{B} = A^0B^0 - A^1B^1 - A^2B^2 - A^3B^3 \qquad (6\text{-II})$$

إذن فالشعاع في هذا الفضاء يعرف على أنه كل كمية من أربعة مركبات تتحول بتحويلات لورانتز بنفس الشكل الذي تتحول به الإحداثيات.

فإذا كان لدينا معلم عطالي S و آخر S' يتحرك بسرعة v في الاتجاه x بالنسبة لبعضهم فإن مركبات الأشعة $\underline{A}$ و $\underline{B}$ يتم تحويلها باستعمال تحويلات لورانتز كمايلي [1,3,9,14]:

A^0, B^0 تتحول بنفس طريقة ct أو x^0

A^1, B^1 تتحول بنفس طريقة x أو x^1

A^2, B^2 تتحول بنفس طريقة y أو x^2

A^3, B^3 تتحول بنفس طريقة z أو x^3

أي أن :

$$A^0 = \gamma\left(A'^0 + \beta A'^1\right) \qquad A^1 = \gamma\left(A'^1 + \beta A'^0\right)$$

$$B^0 = \gamma\left(B'^0 + \beta B'^1\right) \qquad B^1 = \gamma\left(B'^1 + \beta B'^0\right) \qquad (7\text{-II})$$

$$A^2 = A'^2 \qquad A^3 = A'^3 \qquad B^2 = B'^2 \qquad B^3 = B'^3$$

ما هي تحويلة لورانتز؟

في الفضاء الرباعي و كما ذكرنا سابقا تعرف المسافة و التي هي كمية صامدة كمايلي:

$$d^2 = \Delta x^{0^2} - \Delta\vec{r}^2 \qquad (8\text{-II})$$

أيضا عند الدوران، أي دوران محاور إحداثيات الفضاء تبقى هذه الكمية صامدة. لهذا سوف نطلق اسم **تحويلة لورانتز** على كل تحويلة تبقي على المسافات اللورانتزية صامدة.

فإذا كان لدينا حدثين P_1 و P_2 إحداثياتهما على الترتيب x^{μ} و y^{μ} حيث $\mu = 0,1,2,3$ باستعمال تحويلات لورانتز تصبح الإحداثيات السابقة x'^{μ} و y'^{μ} حيث المسافة بين الحدثين أيضا هي عبارة على كمية صامدة :

$$\begin{aligned} d^2(P_1,P_2) &= \left(x^0 - y^0\right)^2 - \left(x^1 - y^1\right)^2 - \left(x^2 - y^2\right)^2 - \left(x^3 - y^3\right)^2 \\ &= \left(x'^0 - y'^0\right)^2 - \left(x'^1 - y'^1\right)^2 - \left(x'^2 - y'^2\right)^2 - \left(x'^3 - y'^3\right)^2 \end{aligned} \qquad (9\text{-II})$$

و أيضا الجداء السلمي $\underline{A}.\underline{B}$ كمية صامدة حيث باستخدام تحويلات لورانتز لمركبات الشعاعين $\underline{A}$ و $\underline{B}$ المبينة في المعادلة (II-7) نجد[14]:

$$\underline{A}.\underline{B} = A'^0 B'^0 - A'^1 B'^1 - A'^2 B'^2 - A'^3 B'^3 \qquad (10\text{-II})$$

سوف نعيد صياغة المسافة باستعمال المترية كمايلي [3,9]:
إذا كان لدينا شعاعين $\underline{A}$ و $\underline{B}$ مركباتهما على الترتيب A^{μ} و B^{ν} فإن جداؤهما السلمي:

$$\begin{aligned} \underline{A}.\underline{B} &= A^0 B^0 - A^1 B^1 - A^2 B^2 - A^3 B^3 \\ &= \sum_{\mu,\nu=0}^{3} \eta_{\mu\nu} A^{\mu} B^{\nu} = \eta_{\mu\nu} A^{\mu} B^{\nu} = \eta_{\mu\nu} B^{\nu} A^{\mu} \end{aligned} \qquad (11\text{-II})$$

حيث $\eta_{\mu\nu}$ هي مصفوفة لورانتز:

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad (12\text{-II})$$

من الآن سوف نستعمل " اصطلاح اينشتاين " وهو [3]:
إذا كان لدينا علاقة تحتوي على دليل شعاع مكرر فإن هناك عملية جمع من 0 إلى 3 على هذا الدليل كمايلي:

$$\underline{A}.\underline{B} = \eta_{\mu\nu} A^{\mu} B^{\nu} \qquad (13\text{-II})$$

إذا كان لدينا شعاعين $\underline{A}$ و $\underline{B}$ مركباتهما على الترتيب A^{μ} و B^{ν} ومركبتهما باستعمال تحويلات لورانتز هي A'^{μ} و B'^{ν} فإن جداؤهما السلمي :

$$\underline{A}.\underline{B} = \eta_{\mu\nu} A^{\mu} B^{\nu} = \eta_{\mu\nu} A'^{\mu} B'^{\nu} \qquad (14\text{-II})$$

و على عكس الجداء السلمي في الفضاء الإقليدي و الذي يكون فيه الجداء السلمي لشعاع مع نفسه دائما موجب، فإنه في حالة فضاء مينكوفيسكي بمترية لورانتز هناك ثلاث أصناف من الأشعة و هي [3]:

* شعاع ذو صفة زمنية " Time-like vector ".
* شعاع ذو صفة فضائية " Space-like vector ".
* شعاع ذو صفة ضوئية " Light-like or null vector ".

1.1.1.II الشعاع ذو الصفة الزمنية " Time-like vector "

نعرف الشعاع $\underline{A}$ على أنه شعاع في فضاء مينكوفيسكي حيث جداءه السلمي مع نفسه يكون :

$$\underline{A}.\underline{A} = \eta_{\mu\nu} A^{\mu} A^{\nu}$$

فإذا كانت هذه الكمية موجبة أي : $\underline{A}.\underline{A} = \eta_{\mu\nu} A^{\mu} A^{\nu} > 0$ فإن هذا الشعاع ذو صفة زمنية، في هذه الحالة يمكن دائما أن نجد مرجعا عطاليا بحيث يكون فيه مركبات الشعاع مقتصرة على المركبة الزمنية فقط أي أن [3,4]:

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} A^0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2.1.1.II الشعاع ذو الصفة الفضائية " Space-like vector "

إذا كان الجداء السلمي للشعاع $\underline{A}$ مع نفسه كمية سالبة أي :

$$\underline{A}.\underline{A} = \eta_{\mu\nu} A^{\mu} A^{\nu} < 0$$

فإن هذا الشعاع ذو صفة فضائية، في هذه الحالة يمكن دائما أن نجد مرجعا عطاليا بحيث يكون فيه مركبات الشعاع مقتصرة على المركبات الفضائية فقط أي أن [3,4]:

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ A^1 \\ A^2 \\ A^3 \end{pmatrix}$$

3.1.1.II الشعاع ذو الصفة الضوئية " Light-like or null vector "

إذا كان الجداء السلمي للشعاع $\underline{A}$ مع نفسه كمية معدومة أي :

$$\underline{A}\,.\,\underline{A} = \eta_{\mu\nu}\, A^{\mu} A^{\nu} = 0$$

فإن هذا الشعاع ذو صفة ضوئية، في هذه الحالة لا يمكن إيجاد مرجعا عطاليا بحيث يلغي المركبات الزمنية أو الفضائية[3,4,11].

2.1.II المصفوفة اللورانتزية

في الفضاء الإقليدي الإحداثيات الكارتيزية المختارة تعرف بواسطة المحاور $(ox\acute{y}')$ التي تدور بالزاوية θ مع ثبات المبدأ. حيث العلاقة بين الإحداثيات في النظام الأصلي و المدور تعطى بالشكل :

$$x' = x\,\cos\theta + y\,\sin\theta$$

$$y' = -x\,\sin\theta + y\,\cos\theta$$

وكما عرفنا في الفصل الأول إذا أخذنا مرجعين عطاليين S و S' لها الإحداثيات الكارتيزية $(x\,,y\,,z\,,t\,)$ و (x',y',z',t'). حيث المحور x يمكن أن يختار على امتداد اتجاه الحركة حيث S' يتحرك نسبة لـ S بسرعة $\vec{v}$ في الاتجاه الموجب للمحور x . فإن تحويلات لورانتز تعطى من الشكل :[3]

$$\begin{aligned} x' &= \gamma\left(x - \beta t\right) \\ t' &= \gamma\left(t - \beta x\right) \end{aligned} \qquad \text{(15-II)}$$

لنعتبر سرعة الضوء هي الوحدة أي $c = 1$ فإن :

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^{2}}} \quad , \quad \beta = v \qquad \text{(16-III)}$$

أي أن $\gamma^{2} - (\beta\gamma)^{2} = 1$ هي شكل قطع زائد.

لدينا $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1 - v^{2}}} > 0$ و هي تتغير من 1 إلى ∞ ، نضع $\gamma = \cosh\varphi = \dfrac{e^{\varphi} + e^{-\varphi}}{2}$ وهي أيضا متغيرة من 1 إلى ∞. و نضع كذلك $\beta\gamma = \sinh\varphi$. أي أن :

$$\gamma = \cosh\varphi$$
$$\beta = \tanh\varphi \qquad (17\text{-II})$$
$$\varphi = \operatorname{arct} h\,\varphi$$

بتعويض (17-II) في (15-II) نجد :

$$\begin{aligned} x' &= x\cosh\varphi - t\sinh\varphi \\ t' &= -x\sinh\varphi + t\cosh\varphi \end{aligned} \qquad (18\text{-II})$$

نلاحظ من خلال ما سبق التناسبية بين تحويلات لورانتز و الدورانات في الفضاء الإقليدي.
ذكرنا سابقا أن تحويلة لورانتز هي كل تحويلة إحداثيات تبقي على الجداء السلمي اللورانتزي صامد[3,4,9].

$$x'^{\mu} = \sum_{\nu=0}^{3} \Lambda^{\mu}{}_{\nu}\, x^{\nu} \qquad (19\text{-II})$$

و باستخدام اصطلاح اينشتاين العلاقة (19-II) تصبح:

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}\, x^{\nu} \qquad (20\text{-II})$$

تحليل هذه العبارة يعطي :

$$\begin{aligned} x'^{0} &= \Lambda^{0}{}_{0}\,x^{0} + \Lambda^{0}{}_{1}\,x^{1} + \Lambda^{0}{}_{2}\,x^{2} + \Lambda^{0}{}_{3}\,x^{3} \\ x'^{1} &= \Lambda^{1}{}_{0}\,x^{0} + \Lambda^{1}{}_{1}\,x^{1} + \Lambda^{1}{}_{2}\,x^{2} + \Lambda^{1}{}_{3}\,x^{3} \\ x'^{2} &= \Lambda^{2}{}_{0}\,x^{0} + \Lambda^{2}{}_{1}\,x^{1} + \Lambda^{2}{}_{2}\,x^{2} + \Lambda^{2}{}_{3}\,x^{3} \\ x'^{3} &= \Lambda^{3}{}_{0}\,x^{0} + \Lambda^{3}{}_{1}\,x^{1} + \Lambda^{3}{}_{2}\,x^{2} + \Lambda^{3}{}_{3}\,x^{3} \end{aligned} \qquad (21\text{-II})$$

حيث العلاقة (20-II) يجب أن تبقي على الجداء السلمي صامد أي أن:

$$\eta_{\mu\nu}\, x^{\mu}.x^{\nu} = \eta_{\mu\nu}\, x'^{\mu}.x'^{\nu}$$

فإذا كان لدينا شعاعين $\underline{A}$ و $\underline{B}$ مركباتهما على الترتيب A^{μ} و B^{ν} ومركبتهما باستعمال تحويلات لورانتز هي A'^{α} و B'^{β} فإن جداؤهما السلمي صامد أي أن :

$$\eta_{\mu\nu} A^{\mu}.B^{\nu} = \eta_{\alpha\beta} A'^{\alpha}.B'^{\beta} \qquad (22\text{-II})$$

حيث :

$$A'^{\alpha} = \Lambda^{\alpha}{}_{\mu} A^{\mu} \qquad (23\text{-II})$$

و

$$B'^{\beta} = \Lambda^{\beta}{}_{\nu} B^{\nu} \qquad (24\text{-II})$$

بتعويض (23-II) و(24-II) في (22-II) نجد:

$$\eta_{\mu\nu} A^{\mu}.B^{\nu} = \eta_{\alpha\beta} \Lambda^{\alpha}{}_{\mu} \Lambda^{\beta}{}_{\nu} A^{\mu}.B^{\nu} \qquad (25\text{-II})$$

أي أن :

$$\left(\eta_{\mu\nu} - \eta_{\alpha\beta} \Lambda^{\alpha}{}_{\mu} \Lambda^{\beta}{}_{\nu} \right) A^{\mu}.B^{\nu} = 0 \qquad (26\text{-II})$$

هذه الكمية معدومة مهما يكن A و B. هذا يعني أن:

$$\eta_{\mu\nu} - \eta_{\alpha\beta} \Lambda^{\alpha}{}_{\mu} \Lambda^{\beta}{}_{\nu} = 0$$

أي أن :

$$\eta_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta} \Lambda^{\alpha}{}_{\mu} \Lambda^{\beta}{}_{\nu} \qquad (27\text{-II})$$

العلاقة (27-II) تمثل الشرط الذي يجب أن تحققه المصفوفة Λ كي تكون تحويلة لورانتز، و يمكن كتابته من الشكل:

$$\eta_{\mu\nu} = \Lambda^{\alpha}{}_{\mu} \eta_{\alpha\beta} \Lambda^{\beta}{}_{\nu} \qquad (28\text{-II})$$

تمثل العلاقة (28-II) قاعدة لضرب ثلاث مصفوفات معا لإيجاد المركبات μ و ν للمصفوفة الناتجة ويمكن كتابة هذه المعادلة بالرموز بالصيغة الآتية:

$$\eta_{\mu\nu} = \Lambda^{T\mu}{}_{\alpha} \eta_{\alpha\beta} \Lambda^{\beta}{}_{\nu}$$

أي أن كل مصفوفة Λ تحقق :

$$\eta = \Lambda^{T} \eta \Lambda \qquad (29\text{-II})$$

هي تحويلة لورانتز و هي عبارة عن مصفوفات (4×4) و التي تحقق الشرط (29-II) تدعى بمجموعة لورانتز ويرمز لها بالرمز $L(4)$ أو $O(1,3)$ [3] .

من بين المصفوفات Λ يوجد مجموعة جزئية من الشكل :

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix}$$

حيث R هي مصفوفات (3×3) و تسمى بالمصفوفات المتعامدة $O(3)$ (Orthogonal) والتي تحقق :

$$I = R^T I R \qquad \text{(30-II)}$$

حيث هذه المجموعة تشمل الدورانات و عكس اتجاه المحاور أي :

$$x \to -x$$
$$y \to -y$$
$$z \to -z$$

سندرس بشكل عام المصفوفات التي تشكل تحويلات لورانتز[3,5] .
نعلم بأن كل مصفوفة (4×4)تحتاج لـ 16عددا لتحديدها، لكن في حالتنا لدينا الشرط (II-29) و الذي يعطي لنا 16 معادلة، لكن ليست جميع هذه المعادلات مستقلة و ذلك لمايلي [3,4] :

$$\eta_{ij} = \Lambda^T_{ik}\ \eta_{kl}\ \Lambda_{lj}$$
$$= \eta_{ji} = \Lambda^T_{jl}\ \eta_{lk}\ \Lambda_{ki}$$

مما يعني أنه لدينا فقط 4 معادلات من القطر و 6 معادلات العلوية أو السفلية، إذا لدينا فقط 10 معادلات مما يعني أنه للمصفوفات Λ ست عناصر مستقلة، إذا نحتاج إلى 6 وسائط أو أعداد لتعيين تحويلات لورانتز.
نلاحظ من الشرط (II-29) مايلي :

$$\begin{aligned} \det\eta &= \det\Lambda^T \eta\, \Lambda \\ &= \det\Lambda^T\ \det\eta \det\Lambda \end{aligned} \qquad \text{(31-II)}$$

ونعلم أن : $\det\eta = -1$ ومنه المعادلة (II-31) تصبح :

$$\begin{aligned} -1 &= \det\Lambda^T\ \det\eta \det\Lambda \\ &= -\det\Lambda^T\ \det\Lambda \end{aligned}$$

أي أن :

$$\det\Lambda^T \det\Lambda = 1$$

و :

$$\det\Lambda^T = \det\Lambda$$

مما يعني :

$$\det \Lambda^{T\,2} = \det \Lambda^2 = 1$$

ومنه :

$$\det \Lambda = \begin{cases} +1 \\ -1 \end{cases}$$

أي أن هناك مجموعتين يمكن تمييزها من تحويلات لورانتز و ذلك حسب محدد التحويلة.
في الحقيقة من السهل البرهان أن فئة المصفوفات التي لها محدد 1 تشكل زمرة مستقلة. أي أنه إذا كانت لدينا تحويلة Λ_1 و أخرى Λ_2 محددهما يساوي 1 فإن :

$$\Lambda_1 \Lambda_2 = \Lambda_3$$

حيث : $\det \Lambda_3 = 1$ و تحقق الشرط (II-29). إذن نميز مجموعتين و هما : $L_-(4)$و $L_+(4)$ حيث :

- $L_+(4)$ هي مصفوفات 4×4 و تحقق الشرط (II-29)، محددها $\det \Lambda = 1$، و تشكل زمرة جزئية.
- $L_-(4)$ هي مصفوفات 4×4 و تحقق الشرط (II-29)، محددها $\det \Lambda = -1$، و لا تشكل زمرة جزئية.

حيث داخل كل مجموعة من هاتين المجموعتين يمكن أن نميز مجموعتين يحققان :

$$\Lambda_0^0 \geq 1 \qquad \text{و إما} \qquad \Lambda_0^0 \geq -1$$

وذلك انطلاقا من الشرط (II-29) :

$$\eta_{ij} = \Lambda_{ik}^T \; \eta_{kl} \; \Lambda_{lj}$$

حيث العنصر الأول من المصفوفة η_{ij} يكون :

$$\begin{aligned} \eta_{00} &= \Lambda_{0k}^T \; \eta_{kl} \; \Lambda_{l0} \\ &= \Lambda_{00}^T \; \eta_{00} \; \Lambda_{00} + \sum_{i=1}^{3} \Lambda_{0i}^T \; \eta_{ii} \; \Lambda_{i0} \end{aligned}$$

أي أن :

$$\left(\Lambda_0^0\right)^2 - \sum_{i=1}^{3} \left(\Lambda_0^i\right)^2 = 1$$

أي أن :

$$\left(\Lambda_0^0\right)^2 = 1 + \sum_{i=1}^{3} \left(\Lambda_0^i\right)^2 \qquad \text{(32-II)}$$

ومنه انطلاقا من المعادلة (II-32) نجد :

$$\Lambda_0^0 = \pm \sqrt{1+\sum_{i=1}^{3}\left(\Lambda_0^i\right)^2} \qquad \text{(II-33)}$$

ومنه :

$$\begin{cases} \Lambda_0^0 \geq 1 \\ \Lambda_0^0 \leq -1 \end{cases}$$

ومنه لا يمكن الانتقال من مجموعة $\Lambda_0^0 > 1$ إلى مجموعة $\Lambda_0^0 < -1$ بضرب مصفوفتين من نفس المجموعة، فمثلا إذا كان لدينا مصفوفتين Λ_1 و Λ_2 حيث :

$$\Lambda_1 \qquad {\Lambda_1}^0{}_0 < -1$$
$$\Lambda_2 \qquad {\Lambda_2}^0{}_0 < -1$$

فإن ضرب المصفوفة Λ_1 و Λ_2 يعطي مصفوفة Λ_3 حيث تحقق :

$$\Lambda_1\Lambda_2 = \Lambda_3$$
$${\Lambda_3}^0{}_0 < -1$$

و نفس الشيء بالنسبة $\Lambda_0^0 > 1$ ، ومنه نميز أربع حالات كمايلي [3]:

- $L_+^{\uparrow}(4)$ هي زمرة لورانتز الذاتية (زمرة جزئية).

ليست زمر جزئية

- $L_+^{\downarrow}(4)$ هي تحويلات لورانتز غير الذاتية.
- $L_-^{\uparrow}(4)$ هي تحويلات لورانتز غير الذاتية.
- $L_-^{\downarrow}(4)$ هي تحويلات لورانتز غير الذاتية.

حيث تحويلات لورانتز غير الذاتية كلها تشمل إما عكس اتجاه المحاور (P:Parity) أو في اتجاه الزمن (T) حيث :

$$P:\left(x^0,x^1,x^2,x^3 \to x^0,-x^1,-x^2,-x^3\right)$$

مع $\det\Lambda = -1$ و $\Lambda_0^0 \geq 1$.

و $$T:\left(x^0,x^1,x^2,x^3 \to -x^0,x^1,x^2,x^3\right)$$

مع $\det\Lambda=-1$ و $\Lambda_0^0\le -1$.

ومنه : $PT:\left(x^0,x^1,x^2,x^3\to -x^0,-x^1,-x^2,-x^3\right)$

مع $\det\Lambda=1$ و $\Lambda_0^0\le -1$.

في الحقيقة لدراسة جميع المجموعات الأربع يكفي دراسة الزمرة الذاتية و كذلك التحويلات P , T و PT المتقطعة لهذا سوف ندرس الزمرة الأولى الذاتية $L_+^{\uparrow}(4)$ و التي نرمز لها بالرمز $SO_0(1,3)$ أو $SO_0(3,1)$.

نعلم أن $\Lambda^T\Lambda=I$ ، نلاحظ أن التحويلة $\Lambda=I$ هي ضمن الزمرة $L_+^{\uparrow}(4)$ لأن :

$$\Lambda:\left(x^{\mu}\to x^{\mu'}=x^{\mu}\right)\qquad \mu=0,1,2,3$$

وكما أشرنا سابقا أننا نحتاج إلى أربع وسائط فقط لتحديد عناصر هذه الزمرة، نعتبر $(\alpha_6.....\alpha_2,\alpha_1)$ هي 6 وسائط حيث مرتبطة بالمصفوفة Λ كمايلي : $\Lambda(\alpha_1,\alpha_2.....\alpha_6)$ ، علما أن مجال تغير هذه الوسائط غير معلوم و لكنها أعداد حقيقية.

عناصر هذه الزمرة مرتبطة بتحويلة الوحدة، أي أن جميع التحويلات يمكن الحصول عليها انطلاقا من مصفوفة الوحدة و ذلك عبر تحويلات متتالية. لهذا سوف نختار مجال تغير الوسائط $(\alpha_6.....\alpha_2,\alpha_1)$ بحيث :

$$\Lambda(\alpha_i=0)=I\qquad i=1,2.....,6$$

نأخذ الآن تحويلة قريبة جدا من الوحدة كالتالي :

$$\Lambda(\delta\alpha_i)=I+\delta\Lambda\qquad i=1,2.....,6\qquad \text{حيث}\quad \delta\alpha_i<<1 \tag{34-II}$$

مع أن :

$$\delta\Lambda=\sum_{\alpha_i}\left.\frac{\partial\Lambda}{\partial\alpha_i}\right|_{\alpha_i=0}\delta\alpha_i\qquad i=1,2.....,6 \tag{35-II}$$

حيث :

$$\left.\frac{\partial\Lambda}{\partial\alpha_i}\right|_{\alpha_i=0}=L_i\qquad i=1,2.....,6 \tag{36-II}$$

و التي تسمى بالمولدات، و

بتعويض العلاقة (35-II)و(36-II) في (34-II) نحصل على :

$$\Lambda(\delta\alpha_i)=I+\sum_{i=1}^{6}\delta\alpha_i L_i \tag{37-II}$$

بتعويض العلاقة (II-35) في العلاقة (II-29) نحصل على :

$$\Lambda^T \eta \Lambda = \left(I + \sum_{i=1}^{6} \delta\alpha_i L_i \right)^T \eta \left(I + \sum_{i=1}^{6} \delta\alpha_i L_i \right) = \eta \qquad (38\text{-II})$$

و بنشر هذه المعادلة نجد :

$$\eta + \delta\alpha_i L_i^T \eta + \delta\alpha_i \eta L_i + \underbrace{\left(\delta\alpha_i\right)^2}_{\text{مهمل}} = \eta$$

حيث الحد $\left(\delta\alpha_i\right)^2$ مهمل لأنه من الدرجة الثانية و $\delta\alpha_i$ صغير جدا.
أي أن :

$$\delta\alpha_i L_i^T \eta + \delta\alpha_i \eta L_i = 0$$

و منه :

$$\delta\alpha_i \left(L_i^T \eta + \eta L_i \right) = 0$$

نعلم أن $\delta\alpha_i \neq 0$ هذا يعني أن :

$$L_i^T \eta + \eta L_i = 0 \qquad (39\text{-II})$$

إذا نبحث عن 6 مصفوفات 4×4 بحيث تحقق الشرط (II-39)، حيث انطلاقا منه نجد :

$$L_i^T \eta = -\eta L_i$$

و بما أن $\eta\eta = I$ فيمكننا كتابة :

$$L_i^T = -\eta L_i \eta \qquad (40\text{-II})$$

للبحث عن عناصر المصفوفة نحل المعادلة (II-40)، حيث :

$$\left(L_i^T\right)_{\mu\nu} = -\eta_{\mu\alpha} \left(L_i\right)_{\alpha\beta} \eta_{\beta\nu}$$

نأخذ أولا العناصر القطرية لهذه المصفوفة أي أن :

$$\left(L_i^T\right)_{\mu\mu} = -\eta_{\mu\alpha} \left(L_i\right)_{\alpha\beta} \eta_{\beta\mu}$$

و نعلم أن $\left(L_i^T\right)_{\mu\mu} = \left(L_i\right)_{\mu\mu}$ و منه :

$$\left(L_i\right)_{\mu\mu} = -\eta_{\mu\alpha} \left(L_i\right)_{\alpha\beta} \eta_{\beta\mu} \qquad (41\text{-II})$$

- عندما تكون $\mu \neq \alpha$ فإن $\eta_{\mu\alpha} = 0$.
- عندما تكون $\mu \neq \beta$ فإن $\eta_{\beta\mu} = 0$.

أي أن المعادلة (41-II) تصبح :

$$\begin{aligned}\left(L_i\right)_{\mu\mu} &= -\eta_{\mu\mu}\left(L_i\right)_{\mu\mu}\eta_{\mu\mu} \\ &= -\underbrace{\eta_{\mu\mu}^2}_{1}\left(L_i\right)_{\mu\mu} = -\left(L_i\right)_{\mu\mu}\end{aligned}$$

و منه : $\left(L_i\right)_{\mu\mu} = -\left(L_i\right)_{\mu\mu}$ و هذا يعني أن : $\left(L_i\right)_{\mu\mu} = 0$ ، أي المصفوفات $\left(L_i\right)_{\mu\mu}$ غير قطرية (معدومة القطر).
للبحث عن العناصر الأخرى للمصفوفة نتبع مايلي :

لدينا : $$\left(L_i^T\right)_{\mu\nu} = -\eta_{\mu\alpha}\left(L_i\right)_{\alpha\beta}\eta_{\beta\nu}$$

حيث $\nu = 0,1,2$ و نستبدل الدليل μ بـ $j = 1,2,3$ لأن عناصر القطر معدومة. و منه :
أولا :

$$\left(L_i^T\right)_{j0} = -\eta_{j\alpha}\left(L_i\right)_{\alpha\beta}\eta_{\beta 0} \qquad \nu = 0, \quad j = 1,2,3$$

- عندما تكون $j \neq \alpha$ فإن $\eta_{j\alpha} = 0$.
- عندما تكون $\beta \neq 0$ فإن $\eta_{\beta 0} = 0$.

أي أن :

$$\left(L_i^T\right)_{j0} = -\eta_{jj}\left(L_i\right)_{j0}\eta_{00}$$

و نعلم أن $\det\eta_{00} = 1$ و $\det\eta_{jj} = -1$ و منه فإن :

$$\begin{aligned}&\left(L_i^T\right)_{j0} = \left(L_i\right)_{j0} \\ &\Rightarrow \left(L_i\right)_{0j} = \left(L_i\right)_{j0}\end{aligned}$$

ثانيا :

$$\left(L_i^T\right)_{j1} = -\eta_{j\alpha}\left(L_i\right)_{\alpha\beta}\eta_{\beta 1} \qquad \nu = 1, \quad j = 2,3$$

- عندما تكون $j \neq \alpha$ فإن $\eta_{j\alpha} = 0$.

- عندما تكون $\beta \neq 1$ فإن $\eta_{\beta 1} = 0$.

أي أن :

$$\left(L_i^T\right)_{j1} = -\eta_{jj}\left(L_i\right)_{j1}\eta_{11}$$

و نعلم أن $\det\eta_{11} = -1$ و $\det\eta_{jj} = -1$ و منه فإن :

$$\left(L_i^T\right)_{j1} = -\left(L_i\right)_{j1} \quad \Rightarrow \left(L_i\right)_{1j} = -\left(L_i\right)_{j1}$$

أي أن :

$$\left(L_i\right)_{j1} = -\left(L_i\right)_{1j}$$

ثالثا :

$$\left(L_i^T\right)_{j2} = -\eta_{j\alpha}\left(L_i\right)_{\alpha\beta}\eta_{\beta 2} \qquad \nu = 2, \quad j = 2,3$$

- عندما تكون $j \neq \alpha$ فإن $\eta_{j\alpha} = 0$.
- عندما تكون $\beta \neq 2$ فإن $\eta_{\beta 2} = 0$.

أي أن :

$$\left(L_i^T\right)_{j2} = -\eta_{jj}\left(L_i\right)_{j2}\eta_{22}$$

و نعلم أن $\det\eta_{22} = -1$ و $\det\eta_{jj} = -1$ و منه فإن :

$$\left(L_i^T\right)_{j2} = -\left(L_i\right)_{j2} \quad \Rightarrow \left(L_i\right)_{2j} = -\left(L_i\right)_{j2}$$

أي أن :

$$\left(L_i\right)_{j1} = -\left(L_i\right)_{1j}$$

و بالتالي و مما سبق نستطيع كتابة المصفوفة $\left(L_i\right)_{\mu\nu}$ من الشكل التالي :

$$\left(L_i\right)_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & L_{01} & L_{02} & L_{03} \\ L_{01} & 0 & L_{12} & L_{13} \\ L_{02} & -L_{12} & 0 & L_{23} \\ L_{03} & -L_{13} & -L_{23} & 0 \end{pmatrix}$$

و بما أنه لدينا : $\Lambda\left(\delta\alpha_i\right) = I + \sum_{i=1}^{6}\delta\alpha_i L_i$ نأخذ : $\delta\Lambda = \sum_{i=1}^{6}\delta\alpha_i L_i$ حيث $\delta\Lambda$ عناصرها صغيرة جدا و هي من الشكل :

$$\delta\Lambda=\begin{pmatrix}0 & A & B & C\\ A & 0 & D & E\\ B & -D & 0 & F\\ C & -E & -F & 0\end{pmatrix}$$

نلاحظ أن $\delta\Lambda$ لها 6 عناصر مستقلة و هي (A,B,C,D,E,F) ، إذا وبما أن عناصرها صغيرة جدا لأنها تحويلة قريبة من مصفوفة الوحدة فنستطيع كتابتها من الشكل[1] :

$$\delta\Lambda=A\begin{pmatrix}0 & -1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}+B\begin{pmatrix}0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}+C\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$+D\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}+E\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\end{pmatrix}+F\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -1 & 0\end{pmatrix}$$

إذا لدينا 6 تحويلات مستقلة حيث :

$$L_{01}=\begin{pmatrix}0 & -1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\quad L_{02}=\begin{pmatrix}0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\quad L_{03}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$L_{12}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\quad L_{13}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\end{pmatrix}\quad L_{23}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -1 & 0\end{pmatrix}$$

نأخذ مثلا : $L_{12}\to(x^1,x^2)\sim(x,y)$ أي أن : $\Lambda(\delta\theta)=I+\sum_{i=1}^{6}\delta\theta L_{12}$ حيث رمزنا بـ $\delta\theta$ لوسيط صغير .

نضع $\delta\theta=\frac{\theta}{N}$ حيث N كبير جدا و θ عدد، حيث :

$$\lim_{N\to\infty}\delta\theta=\frac{\theta}{N}\to 0$$

ثم نقوم بإجراء تحويلات متتالية كمايلي :

$$\underbrace{\Lambda(\delta\theta)\times\Lambda(\delta\theta).....\times\Lambda(\delta\theta)}_{N}$$

حيث N عدد التحويلات المتتالية لكل واحدة وسيط :

$$\lim_{N\to\infty}\delta\theta=\frac{\theta}{N}\to 0$$

محصلة هذه التحويلات هي :

$$\left(\Lambda(\delta\theta)\right)^{N}=\left(I+\frac{\theta}{N}L_{12}\right)^{N}$$

حيث :

$$\lim_{N\to\infty}\left(I+\frac{\theta}{N}L_{12}\right)^{N}=e^{\theta L_{12}}$$

ومنه :

$$\Lambda(\theta)=\prod_{n=1}^{N}\Lambda(\delta\theta)=e^{\theta L_{12}} \qquad (42\text{-II})$$

أي أن :

$$\Lambda(\theta)=e^{\theta L_{12}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\theta^{n}L_{12}^{n}}{n!}$$

- نبحث الآن عن ما يميز L_{12}^{n} :

لدينا :

$$L_{12}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&-1&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

سنهتم فقط بالمصفوفة المصغرة :

$$L'_{12}=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$$

و ذلك لأن جميع العناصر الأخرى معدومة. و منه :

$$L_{12}'^{\,2}=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}=-I_{2\times2} \qquad L_{12}'^{\,3}=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}=-L'_{12}$$

$$L_{12}'^{\,4}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=I_{2\times2} \qquad L_{12}'^{\,5}=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}=L'_{12}$$

نلاحظ أن $L_{12}'^{5}$ تساوي L_{12}' أي ستعاد نفس الدورة كلما زاد الأس. و نلاحظ أنه عندما يكون الأس زوجي فإن $L_{12}'^{2n} = \pm I_{2\times2}$ و إذا كان فردي فإن : $L_{12}'^{2n+1} = \pm L_{12}'$. ومنه نكتب :

لدينا :

$$\Lambda(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\theta^n L_{12}'^{n}}{n!} = I + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\theta^n L_{12}'^{n}}{n!} \qquad (43\text{-II})$$

حيث :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\theta^n L_{12}'^{n}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\theta^{2n} L_{12}'^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\theta^{2n+1} L_{12}'^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\theta^{2n} (-1)^n I_{2\times2}}{(2n)!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\theta^{2n+1} (-1)^n L_{12}'}{(2n+1)!}$$

ونعلم أن :

$$\sin\theta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\theta^{2n+1} (-1)^n}{(2n+1)!}$$

$$\cos\theta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\theta^{2n} (-1)^n}{(2n)!}$$

و منه نستطيع كتابة المعادلة (43-II) من الشكل :

$$\Lambda(\theta) = I + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\theta^{2n} (-1)^n I_{2\times2}}{(2n)!} + L_{12}' \sin\theta$$

أي أن :

$$\Lambda(\theta)=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\theta^{2n}(-1)^n I_{2\times2}}{(2n)!}+L'_{12}\sin\theta$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\theta^{2n}(-1)^n I_{2\times2}}{(2n)!}+L'_{12}\sin\theta$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}+I_{2\times2}\cos\theta+L'_{12}\sin\theta$$

و بتعويض المصفوفة L'_{12} و $I_{2\times2}$ نجد :

$$\Lambda(\theta)=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&\cos\theta&0&0\\0&0&\cos\theta&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&\sin\theta&0\\0&-\sin\theta&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

و منه :

$$\Lambda(\theta)=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&\cos\theta&\sin\theta&0\\0&-\sin\theta&\cos\theta&0\\0&0&0&1\end{pmatrix} \qquad (44\text{-II})$$

إذا هذه التحويلات ما هي إلا دوران المحاور حول المحور oz أو ox^3. و نفس الشيء يمكن ملاحظته من أجل L_{13} ، L_{23} و التي هي مولدات دوران في الفضاء.

الآن نعتبر المولدات L_{01} ، L_{02} ،و L_{03} و سنهتم مثلا بدراسة : $L_{01}\to(x^0,x^1)\sim(t,x)$ أي أن :

$$\Lambda(\delta\varphi)=I+\sum_{i=1}^{6}\delta\varphi L_{01}$$

حيث رمزنا بـ $\delta\varphi$ لوسيط صغير .

نضع $\delta\varphi=\frac{\varphi}{N}$ حيث N كبير جدا و φ عدد، حيث :

$$\lim_{N\to\infty}\delta\varphi=\frac{\varphi}{N}\to 0$$

ثم نقوم بإجراء تحويلات متتالية كمايلي :

$$\underbrace{\Lambda(\delta\varphi)\times\Lambda(\delta\varphi).....\times\Lambda(\delta\varphi)}_{N}$$

حيث N عدد التحويلات المتتالية لكل واحدة وسيط :

$$\lim_{N\to\infty}\delta\varphi=\frac{\varphi}{N}\to 0$$

محصلة هذه التحويلات هي :

$$\left(\Lambda(\delta\varphi)\right)^N=\left(I+\frac{\varphi}{N}L_{01}\right)^N$$

حيث :

$$\lim_{N\to\infty}\left(I+\frac{\varphi}{N}L_{01}\right)^N=e^{\varphi L_{01}}$$

ومنه :

$$\Lambda(\varphi)=\prod_{n=1}^{N}\Lambda(\delta\varphi)=e^{\varphi L_{01}} \qquad (45\text{-II})$$

أي أن :

$$\Lambda(\varphi)=e^{\varphi L_{01}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varphi^n L_{01}^n}{n!}$$

- نبحث الآن عن ما يميز L_{01}^n :

لدينا :

$$L_{01}=\begin{pmatrix}0&-1&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

سنهتم فقط بالمصفوفة المصغرة :

$$L'_{01}=\begin{pmatrix}0&-1\\-1&0\end{pmatrix}$$

و ذلك لأن جميع العناصر الأخرى معدومة. و منه :

$$L_{01}'^{\,2}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=I_{2\times2}\qquad L_{01}'^{\,3}=\begin{pmatrix}0&-1\\-1&0\end{pmatrix}=L_{01}'$$

$$L_{01}'^{\,4}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=I_{2\times2}\qquad L_{01}'^{\,5}=\begin{pmatrix}0&-1\\-1&0\end{pmatrix}=L_{01}'$$

نلاحظ أن $L_{01}'^{\,5}$ تساوي L_{01}' أي ستعاد نفس الدورة كلما زاد الأس. و نلاحظ أنه عندما يكون الأس زوجي فإن $L_{01}'^{\,2n}=I_{2\times2}$ و إذا كان فردي فإن : $L_{01}'^{\,2n+1}=L_{01}'$. ومنه نكتب :
لدينا :

$$\Lambda(\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varphi^n L_{01}'^{\,n}}{n!}=I+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi^n L_{01}'^{\,n}}{n!}\qquad\text{(46-II)}$$

حيث :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi^n L_{01}'^{\,n}}{n!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi^{2n}L_{01}'^{\,2n}}{(2n)!}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi^{2n+1}L_{01}'^{\,2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi^{2n}I_{2\times2}}{(2n)!}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi^{2n+1}L_{01}'}{(2n+1)!}$$

ونعلم أن :

$$\sinh\varphi=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cosh\varphi=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varphi^{2n}}{(2n)!}$$

و منه نستطيع كتابة المعادلة (46-II) من الشكل :

$$\Lambda(\varphi)=I+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi^{2n}I_{2\times2}}{(2n)!}+L_{01}\sinh\varphi$$

أي أن :

$$\Lambda(\varphi)=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi^{2n}I_{2\times2}}{(2n)!}+L'_{01}\sinh\varphi$$

$$=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varphi^{2n}I_{2\times2}}{(2n)!}+L'_{01}\sinh\varphi$$

$$=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}+I_{2\times2}\cosh\varphi+L'_{01}\sinh\varphi$$

و بتعويض المصفوفة L'_{01} و $I_{2\times2}$ نجد :

$$\Lambda(\varphi)=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\cosh\varphi&0&0&0\\0&\cosh\varphi&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&-\sinh\varphi&0&0\\-\sinh\varphi&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

و منه :

$$\Lambda(\varphi)=\begin{pmatrix}\cosh\varphi&-\sinh\varphi&0&0\\-\sinh\varphi&\cosh\varphi&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix} \qquad (47\text{-II})$$

ومنه الشكل الجديد للإحداثيات يكون :

$$\begin{cases}x'^{0}=x^{0}\cosh\varphi-x^{1}\sinh\varphi\\x'^{1}=-x^{0}\sinh\varphi+x^{1}\cosh\varphi\\x'^{2}=x^{2}\\x'^{3}=x^{3}\end{cases}$$

و يمكن كتابته من الشكل :

$$\begin{cases} \dfrac{x'^0}{\cosh\varphi} = x^0 - x^1 \tanh\varphi \\ \dfrac{x'^1}{\cosh\varphi} = -x^0 \tanh\varphi + x^1 \\ x'^2 = x^2 \\ x'^3 = x^3 \end{cases} \qquad (48\text{-II})$$

نضع $\tanh\varphi = \dfrac{v}{c}$ ، و بتعويضها في المعادلة (48-II) نجد :

$$\begin{cases} x'^0 = \cosh\varphi\left(x^0 - \dfrac{v}{c}x^1\right) \\ x'^1 = \cosh\varphi\left(-\dfrac{v}{c}x^0 + x^1\right) \\ x'^2 = x^2 \\ x'^3 = x^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'^0 = \gamma\left(x^0 - \dfrac{v}{c}x^1\right) \\ x'^1 = \gamma\left(-\dfrac{v}{c}x^0 + x^1\right) \\ x'^2 = x^2 \\ x'^3 = x^3 \end{cases} \qquad (49\text{-II})$$

حيث : $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}$.

و لكن هذه فقط تحويلات لورانتز بين إحداثيات معلمين عطاليين، إذا تحويلات لورانتز وكأنها دوران في المستوي (oxt) ، و السرعة تتعلق بالزاوية φ من خلال العلاقة $v = c\tanh\varphi$ [3,4] .

إذا وجدنا 6 تحويلات مستقلة عن بعضها البعض بحيث يمكن توليد كل تحويلة انطلاقا من التحويلة اللامتناهية في الصغر. و الست التحويلات المستقلة مقسمة كمايلي :

- ثلاث دورانات مرتبطة بالمولدات L_{12} ، L_{13} و L_{23}.
- ثلاث تحويلات لورانتز بسرعات v_x ، v_y و v_z مرتبطة بالمولدات L_{01} ، L_{02} ،و L_{03}.

حيث جميع هذه التحويلات تحافظ على شكل المترية و كذلك مسافة لورانتز[3].

3.1.II الأشعة التغايرية "Covariant" والأشعة اللاتغايرية "Contravariant" و الموترات

1.3.1.II الأشعة التغايرية " Covariant" و الأشعة اللاتغايرية " Contravariant"

كما رأينا سابقا أن تحويلة لورانتز هي كل تحويلة إحداثيات تبقي على الجداء السلمي اللورانتزي صامد.

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}\, x^{\nu}$$

و $$A'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}\, A^{\nu}$$

يسمى بـــالأشعة التغايرية " Vectors or Covariant vector".
وباستعمال مترية لورانتز سوف نعرف كميات رباعية أخرى و هي عبارة عن أشعة تعرف باللاتغايرية .
ليكن $\underline{A}$ شعاع رباعي مركباته A^{μ} ، نعرف شعاع آخر مركباته هي :

$$A_{\mu} = \eta_{\mu\nu} A^{\nu} \qquad (50\text{-II})$$

حيث :
$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

أي أن :

$$A_0 = A^0$$
$$A_i = -A^i \quad , i = 1,2,3$$

و هذا يعني أن مركبات الشعاع اللاتغايري هي $A_{\mu} = \begin{pmatrix} A^0 \\ -\vec{A} \end{pmatrix}$ على عكس الشعاع التغايري الذي مركباته $A^{\mu} = \begin{pmatrix} A^0 \\ \vec{A} \end{pmatrix}$.

السؤال المطروح الآن هو كيف تتحول مركبات الشعاع اللاتغايري Contravariant بتحويلات لورانتز ؟
لدينا من المعادلة (50-II) نجد :

$$A'_{\mu} = \eta_{\mu\nu} A'^{\nu} \qquad (51\text{-II})$$

و لدينا $A'^{\nu} = \Lambda^{\mu}{}_{\alpha} A^{\alpha}$ و بتعويضها في (51-II) نجد :

$$A'_{\mu} = \eta_{\mu\nu} \Lambda^{\mu}{}_{\alpha} A^{\alpha} \qquad (52\text{-II})$$

و من ناحية أخرى لدينا أن العلاقة التي تربط A^{μ} بـ A_{μ} يمكن عكسها. حيث نعرف المترية $\eta^{\mu\nu}$ مع العلم أن :

$$\eta^{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

و منه العلاقة العكسية تكون من الشكل :

$$A^{\mu} = \eta^{\mu\nu} A_{\nu} \qquad (53\text{-II})$$

إذن من خلال هذه العلاقة يمكننا ملاحظة أن المترية $\eta_{\mu\nu}$ تقوم بإنزال الأدلة بينما $\eta^{\mu\nu}$ ترفعها. مع ملاحظة أن :

$$\eta^{\mu\nu}\eta_{\nu\alpha} = \delta^{\mu}_{\alpha}$$

نعود الآن إلى تحويل A_{μ}. و ذلك بالتعويض عن $A^{\alpha} = \eta^{\alpha\beta} A_{\beta}$ في العلاقة (52-II) نجد :

$$A'_{\mu} = \eta_{\mu\nu} \Lambda^{\nu}{}_{\alpha} \eta^{\alpha\beta} A_{\beta} \qquad (54\text{-II})$$

أي أن :

$$A'_{\mu} = \eta_{\mu\nu} \eta^{\alpha\beta} \Lambda^{\nu}{}_{\alpha} A_{\beta} \qquad (55\text{-II})$$

حيث :

$$\eta_{\mu\nu} \eta^{\alpha\beta} \Lambda^{\nu}{}_{\alpha} = \Lambda_{\mu}{}^{\beta}$$

و منه العلاقة (55-II) تصبح :

$$A'_{\mu} = \Lambda_{\mu}{}^{\beta} A_{\beta} \qquad (56\text{-II})$$

خاصية:

من السهل ملاحظة في كل علاقة بها جمع أدلة، فإن كل دليل عليه عملية جمع فإن الأدلة تكون في الأسفل و الأخرى في الأعلى، و لا تتغير مواضع هذين الدليلين.

مثال: برهان أن $\partial_{\mu} = \frac{\partial}{\partial x^{\mu}}$ يتحول كشعاع لاتغايري "contravariant" :

لدينا :

$$\partial_{\mu} = \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \qquad (57\text{-II})$$

و منه :

$$\partial_{\mu} = \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} = \frac{\partial}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\mu}} = \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial}{\partial x'^{\nu}}$$

أي أن :

$$\partial_{\mu} = \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\mu}} \partial'_{\nu} \qquad (58\text{-II})$$

السؤال المطروح الآن ماذا تمثل الكمية $\frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\mu}}$ ؟

لدينا من العلاقة (II-20) :

$$x'^{\nu} = \Lambda^{\nu}{}_{\alpha} x^{\alpha}$$

نستطيع كتابة :

$$\partial x'^{\nu} = \Lambda^{\nu}{}_{\alpha} \partial x^{\alpha} \qquad (59\text{-II})$$

و منه :

$$\frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\mu}} = \Lambda^{\nu}{}_{\alpha} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\mu}}$$

الكمية $\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\mu}}$ معدومة إلا إذا كان $\alpha = \mu$ أي أن :

$$\frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\mu}} = \Lambda^{\nu}{}_{\alpha} \delta^{\alpha}_{\mu}$$

أي أن :

$$\frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\mu}} = \Lambda^{\nu}{}_{\mu} \qquad (60\text{-II})$$

و بتعويضها في العلاقة (II-58) نجد :

$$\partial_{\mu} = \Lambda^{\nu}{}_{\mu} \ \partial'_{\nu} \qquad (61\text{-II})$$

و لدينا :

$$\partial'_{\mu} = \eta_{\mu\nu} \ \partial'^{\nu}$$

نبحث الآن عن العلاقة العكسية لـ ∂'^{ν} بدلالة ∂^{α} :

لدينا :

$$\partial'^{\nu} = \frac{\partial}{\partial x'_{\nu}} \qquad (62\text{-II})$$

و منه :

$$\partial'^{\nu} = \frac{\partial}{\partial x'_{\nu}} = \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \frac{\partial x_{\alpha}}{\partial x'_{\nu}} = \frac{\partial x_{\alpha}}{\partial x'_{\nu}} \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}}$$

أي أن :

$$\partial'^{\nu} = \frac{\partial x_{\alpha}}{\partial x'_{\nu}} \partial^{\alpha} \qquad (63\text{-II})$$

السؤال المطروح الآن ماذا تمثل الكمية $\frac{\partial x_{\alpha}}{\partial x'_{\nu}}$ ؟

لدينا : $x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu}$ ، نبحث عن العلاقة العكسية لـ x^{α} بدلالة x'^{ν} :

لدينا :

$$\eta_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta} \ \Lambda^{\alpha}{}_{\mu} \Lambda^{\beta}{}_{\nu}$$

أي أن :

$$\eta_{\mu\nu} = \Lambda_{\beta\mu}\Lambda^{\beta}{}_{\nu} \qquad (64\text{-II})$$

و نعلم أن : $\eta_{\mu\nu}\eta^{\nu\alpha} = \delta_{\mu}^{\alpha}$.

و بضرب طرفي المعادلة (64-II) في $\eta^{\rho\mu}$ نجد :

$$\eta^{\rho\mu}\eta_{\mu\nu} = \eta^{\rho\mu}\Lambda_{\beta\mu}\Lambda^{\beta}{}_{\nu}$$
$$\Rightarrow \delta_{\mu}^{\rho} = \Lambda_{\beta}{}^{\rho}\Lambda^{\beta}{}_{\nu}$$

و منه :

$$\Lambda^{\beta}{}_{\nu}\Lambda_{\beta}{}^{\rho} = \delta_{\mu}^{\rho} \qquad (65\text{-II})$$

و منه بضرب طرفي المعادلة $x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}x^{\nu}$ في $\Lambda_{\mu}{}^{\rho}$ نجد:

$$\Lambda_{\mu}{}^{\rho}x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}\Lambda_{\mu}{}^{\rho}x^{\nu}$$

و بتطبيق القاعدة (65-II) نجد :

$$\Lambda_{\mu}{}^{\rho}x'^{\mu} = \delta_{\nu}^{\rho}x^{\nu}$$

هذه العلاقة معدومة إلا إذا كان $\rho = \nu$ أي أن :

$$x^{\nu} = \Lambda_{\mu}{}^{\nu}x'^{\mu} \qquad (66\text{-II})$$

و منه :

$$x_{\alpha} = \Lambda^{\beta}{}_{\alpha}x'_{\beta}$$

انطلاقا من هذه العلاقة نجد :

$$\partial x_{\alpha} = \Lambda^{\beta}{}_{\alpha}\partial x'_{\beta}$$

و منه :

$$\frac{\partial x_{\alpha}}{\partial x'_{\nu}} = \Lambda^{\beta}{}_{\alpha}\frac{\partial x'_{\beta}}{\partial x'_{\nu}}$$

الكمية $\frac{\partial x'_{\beta}}{\partial x'_{\nu}}$ معدومة إلا إذا كان $\beta = \nu$ أي أن :

$$\frac{\partial x_{\alpha}}{\partial x'_{\nu}} = \Lambda^{\beta}{}_{\alpha}\delta_{\nu}^{\beta}$$

أي أن :

$$\frac{\partial x_{\alpha}}{\partial x'_{\nu}} = \Lambda^{\nu}{}_{\alpha} \qquad (67\text{-II})$$

و بتعويضها في العلاقة (II-63) نجد :

$$\partial'^{\nu} = \Lambda^{\nu}{}_{\alpha}\, \partial^{\alpha} \qquad (68\text{-II})$$

و منه نلاحظ أن العلاقة الأخيرة هي كتحويل شعاع لاتغايري.

2.3.1.II الموترات "Tensors"

تعريف الموترات :

الأشعة في الفضاء الرباعي هي عبارة عن كمية لها أربع مركبات تتحول هذه المركبات بنفس شكل الإحداثيات و هذا إذا كان الشعاع تغايري "covariant" أما إذا كان لاتغايري "contravariant" فإنه يتحول بنفس شكل x_{μ} حيث $x_{\mu} = \eta_{\mu\nu} x^{\nu}$، أما الموترات فهي كميات هندسية لها أكثر من أربع مركبات. و الموتر من الدرجة الثانية (Rank2) فهو عبارة عن كمية لها 16 مركبة و نحتاج إلى دليلين لوصفها $T^{\mu\nu}$، و تتحول مركباته بتحويلات لورانتز بنفس الشكل الذي تتحول به جداء مركبات شعاعين كمايلي :

$$T'^{\mu\nu} = \Lambda^{\mu}{}_{\alpha} \Lambda^{\nu}{}_{\beta} T^{\alpha\beta} \qquad (69\text{-II})$$

هذا الموتر هو عبارة عن موتر تغايري "covariant" ، و يمكن انطلاقا منه تعريف الموتر اللاتغايري "contravariant" $T_{\mu\nu}$ أو $T^{\mu}{}_{\nu}$ أو $T_{\mu}{}^{\nu}$ و ذلك باستعمال المترية.

ويمكن تعميم هذا الكلام إلى موتر من الدرجة n أي $T'^{\mu_1\mu_2\ldots\ldots\mu_n}$ و ذلك كمايلي :

$$T'^{\mu_1\mu_2\ldots\ldots\mu_n} = \Lambda^{\mu_1}{}_{\nu_1} \Lambda^{\mu_2}{}_{\nu_2} \ldots\ldots \Lambda^{\mu_n}{}_{\nu_n} T^{\nu_1\nu_2\ldots\ldots\nu_n} \qquad (70\text{-II})$$

الفصل الثالث

الميكانيكا النسبوي

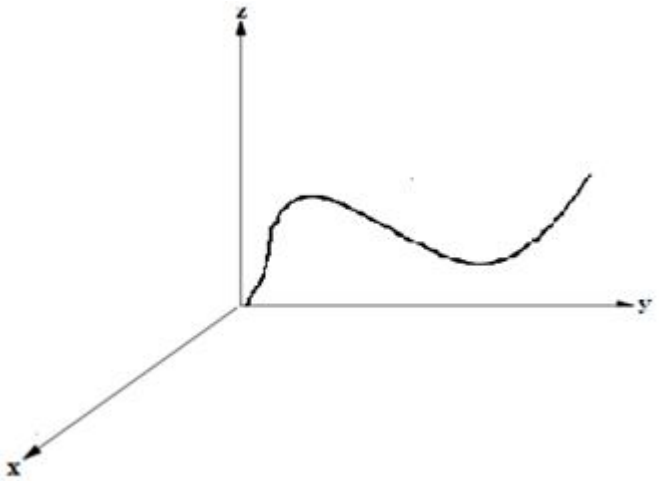
III. الميكانيكا النسبوي

إن الهدف من الميكانيك النسبوي هو إعادة صياغة علم الميكانيك بما يتناسب مع النسبية ، لأن ميكانيكا نيوتن صحيح فقط عند السرعات الصغيرة مقارنة بسرعة الضوء.

رأينا أن الفضاء الفيزيائي هو فضاء رباعي، لهذا يجب صياغة القوانين الفيزيائية بكميات معرفة من هذا الفضاء، أو كأعداد سلمية أو أشعة رباعية أو ما يسمى بالموترات. المبدأ الأساسي الذي سوف ننطلق منه هو مبدأ النسبية و الذي ينص على أن جميع القوانين الفيزيائية تأخذ نفس الشكل في جميع المعالم العطالية .

1.III الحركيـــــة و الديناميكا

رأينا سابقا أن الموضع و الزمن يشكلان شعاع رباعي $(ct, \vec{r})$. فإذا كان لدينا جسيم نقطي يتحرك في الفضاء حيث $\vec{r}(t)$ هو موضعه بالنسبة لمرجع عطالي S كما هو مبين في الشكل(III-1).



الشكل(III-1) : مسار جسيم نقطي في الفضاء.

من المؤكد أن الشعاع الذي يميز موضع و زمن هذا الجسيم $(ct, \vec{r})$يشكل شعاع رباعي. و سرعته بالنسبة للمرجع العطالي S تكون من الشكل [3]:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} \qquad \text{(1-III)}$$

السؤال الذي يطرح نفسه الآن هو، ما هو الشعاع الرباعي الذي يمثل السرعة في فضاء مينكوفيسكي ؟

1.1.III تحويلات السرعة و الشعاع الرباعي للسرعة

لا يمكن استعمال مركبات السرعة الكلاسيكية مباشرة كمركبات فضائية لشعاع رباعي لأن هذه المركبات :

$$v_x = \frac{dx}{dt} \quad ,v_y = \frac{dy}{dt} \quad ,v_z = \frac{dz}{dt}$$

لا تتحول بنفس الشكل الذي يتحول به dx, dy, dz لأن dt يتغير أيضا[3].
في الحقيقة الزمن في ميكانيكا نيوتن كان يستعمل على أساس أنه وسيط تتم بواسطته وصف الحركة، لكن في النسبية الزمن لا يمكن اعتباره وسيط لأنه ليس مطلقا بل يتغير من مرجع لآخر.
رياضيا يمكن اختيار أي وسيط لوصف الحركة، لكن سنرى أن هناك وسيط مثالي يمكن استعماله لوصف الحركة و هو الزمن الذاتي المرفق بالجسيم[3,1].
و لمعرفة ما يميز هذا الزمن، نعتبر أولا أن الجسيم يتحرك بحركة مستقيمة منتظمة بالنسبة للمرجع العطالي S في الاتجاه الموجب للمحور ox ، حيث مركبات السرعة تكون :

$$v_x = \frac{dx}{dt} = const$$
$$v_y = 0$$
$$v_z = 0$$

و نعتبر معلما آخر S^* الذي يمثل المعلم العطالي المرفق بالجسيم و يتحرك بسرعة $\vec{v}_x$ نسبة للمعلم S، حيث إحداثيات الجسيم بالنسبة لهذا المعلم هي : $\vec{r}^* = \vec{0}$ أما بالنسبة للمعلم S هي $\vec{r}$ و الزمن المقاس هو t^*, t في المعلمين S و S^* على التوالي.
الشعاع الذي يميز موضع و زمن هذا الجسيم بالنسبة للمعلم S هو $(ct, \vec{r})$ ، و بالنسبة لـ S^* هو $(ct^*, \vec{0})$ ، و باستعمال تحويلات لورانتز نجد :

$$t = \gamma t^* = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} t^* \qquad \text{(2-III)}$$

أي أن :

$$t^* = t\sqrt{1-v^2} \qquad \text{(3-III)}$$

حيث اعتبرنا $c = 1$.

من ناحية أخرى لدينا : $\vec{r}^2 - c^2 t^2$ هي كمية صامدة، و كذلك $\vec{r}^{*2} - c^2 t^{*2}$. و نعلم أن $\vec{r}^* = \vec{0}$ مما يعني أن t^* كمية صامدة أي أن dt^* أيضا كمية صامدة لا تتغير من معلم إلى آخر. حيث t^* هو الزمن المقاس في المرجع المرفق بالجسيم S^* و يسمى بالزمن الذاتي Proper time.

الآن، ماذا لو كان الجسيم يتحرك حركة غير مستقيمة و غير منتظمة ؟

في هذه الحالة نعلم أن أية حركة يمكن اعتبارها حركة مستقيمة منتظمة خلال فترة زمنية غير متناهية في الصغر أي $t \to t + dt$ ، خلال هذه الفترة الزمنية يقطع الجسيم المسافة dx, dy, dz حيث :

$$dx = v_x(t)dt$$
$$dy = v_y(t)dt$$
$$dz = v_z(t)dt$$

و لكن و بما أن الحركة غير مستقيمة و غير منتظمة فإن المرجع المرفق بالجسيم لا يمكن اعتباره مرجعا عطاليا، لكن نعتبره كذلك خلال الفترة الزمنية dt و يمكننا تطبيق ما قمنا به سابقا في حالة الحركة المستقيمة المنتظمة أي بتطبيق تحويلات لورانتز بين الإحداثيات $(dt, d\vec{r})$ في المعلم العطالي الأصلي و الإحداثيات $(dt^*, \vec{0})$ في S^* خلال الزمن t و $t+dt$ نحصل على dt^* كمايلي[3,4] :

$$dt^* = \gamma dt$$

أي أن :

$$dt^* = \frac{1}{\sqrt{1-v(t)^2}}dt \qquad \text{(4-III)}$$

و نعلم أن :

$$d\vec{r}^{\,2} - c^2 dt^2 = d\vec{r}^{\,*2} - c^2 dt^{*2}$$

و لكن : $d\vec{r}^{\,*} = \vec{0}$ مما يعني أن :

$$d\vec{r}^{\,2} - c^2 dt^2 = -c^2 dt^{*2}$$

أي أن :

$$-d\vec{r}^{\,2} + c^2 dt^2 = c^2 dt^{*2} \qquad \text{(5-III)}$$

انطلاقا من المعادلة (5-III) نجد :

$$dt^{*\,2} = dt^2 - \frac{d\vec{r}^{\,2}}{c^2}$$

و منه :

$$dt^* = \sqrt{dt^2 - \frac{d\vec{r}^{\,2}}{c^2}}$$

$$\Rightarrow dt^* = \sqrt{1 - \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)^2 \Big/ c^2}\; dt$$

و إذا أخذنا $c = 1$ فإننا نجد :

$$dt^* = \sqrt{1 - \underbrace{\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)^2}_{v^2(t)}}\, dt$$

و منه :

$$dt^* = \sqrt{1-v^2(t)}\,dt \qquad (6\text{-III})$$

و عادة ما يرمز للزمن الذاتي dt^* بالرمز $d\tau$. أي المعادلة (6-III) تصبح من الشكل[3,4] :

$$dt^* = d\tau = \sqrt{1-v^2(t)}\,dt \qquad (7\text{-III})$$

إذن العلاقة (7-III) تربط بين الزمن الذاتي المسجل في S^* و الزمن المسجل في S خلال فترة لامتناهية في الصغر. لكن بصفة عامة :

$$T^* = \int_0^{T^*} dt^* = \int_0^T \sqrt{1-v^2(t)}\,dt \qquad (8\text{-III})$$

و منه يمكن الآن استعمال t^* أو τ كوسيط لوصف حركة الجسيم لأن τ هو كمية صامدة أو سلمية.
و منه مركبات السرعة تكون من الشكل[3] :

$$\begin{aligned} U^0 &= \frac{dt}{d\tau} \\ U_x &= U^1 = \frac{dx}{d\tau} \\ U_y &= U^2 = \frac{dy}{d\tau} \\ U_z &= U^3 = \frac{dz}{d\tau} \end{aligned} \qquad (9\text{-III})$$

أي أن :

$$U^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} \qquad (10\text{-III})$$

و هذا هو شعاع رباعي حتما، لأنه يتحول بنفس شكل تحويل dx^μ لأن $d\tau$ كمية سلمية. و منه :

$$U'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu U^\nu \qquad (11\text{-III})$$

و هي تسمى بالسرعة الرباعية (four-velocity). حيث في الحالة السكونية للجسيم فإن مركباتها تكون $U = (1,0,0,0)$.
لأجل معرفة لأي سبب السرعة الرباعية تستعمل بصفة عامة، نعتبر الحالة التي يكون فيه الجسيم يتحرك بسرعة صغيرة مقارنة بسرعة الضوء أي $v << 1$. في هذه الحالة فإن[3] :

$$U^i = \frac{dx^i}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\frac{dx^i}{dt} = \frac{dx^i}{dt} + 0\left(v^2\right) \approx v^i$$

و التي تمثل مركبات السرعة الكلاسيكية.
و باستعمال المعادلة (III-10) نجد :

$$U^2 = \eta_{\mu\nu} U^{\mu} U^{\nu} = \eta_{\mu\nu} \frac{dx^{\mu}}{d\tau} \frac{dx^{\nu}}{d\tau} \qquad \text{(12-III)}$$

و من ناحية أخرى لدينا :

$$\eta_{\mu\nu} x^{\mu} x^{\nu} = dt^2 - d\vec{r}^2 = d\tau^2$$

و بتعويضه في (III-12) نجد :

$$U^2 = \eta_{\mu\nu} \frac{dx^{\mu} dx^{\nu}}{d\tau d\tau} = \frac{d\tau^2}{d\tau^2} = 1 \qquad \text{(13-III)}$$

و كما اعتبرنا سابقا أن $c = 1$: فإن :

$$U^2 = c^2$$

ومنه :

$$\eta_{\mu\nu} U^{\mu} U^{\nu} = c^2$$

و ذلك بالنسبة لجسيم يتحرك بسرعة $v(t)$ بالنسبة لمعلم عطالي.

2.1.III الشعاع الرباعي لكمية الحركة

إذا كان لدينا جسيم كتلته m يتحرك في مرجع عطالي S فإن كمية الحركة الرباعية لهذا الجسيم تعرف على أنها ضرب شعاع السرعة بكتلته كمايلي :

$$p^{\mu} = m U^{\nu}$$

السؤال المطروح الآن هو ما علاقة هذا الشعاع بكمية الحركة الكلاسيكية ؟
قبل التعرض مباشرة لهذا السؤال سوف نبين أنه يمكن الوصول إلى ما يعبر عن الطاقة و كمية الحركة النسبيتين باستعمال مبدأ النسبية و القانون الثاني لنيوتن كمايلي :
لدينا من القانون الثاني لنيوتن :

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \qquad \text{(14-III)}$$

و نعلم أيضا أن عبارة العمل تكون :

$$dw = \vec{F} . d\vec{r} \qquad \text{(15-III)}$$

و بتعويض المعادلة (III-14) في (III-15) نجد :

$$dw = \frac{d\vec{p}}{dt} d\vec{r} \qquad (16\text{-III})$$

و لدينا بالنسبة لجسيم غير خاضع لكمون فإن :

$$dw = dE$$

حيث : $T = E$ و هي تمثل الطاقة الميكانيكية. و منه :

$$dE = \frac{d\vec{p}}{dt} d\vec{r}$$

أي أن :

$$dEdt - d\vec{p}.d\vec{r} = 0 \qquad (17\text{-III})$$

حتى تكون هذه العلاقة صالحة في جميع المعالم العطالية يجب أن يشكل $d\vec{p}$ مع dE شعاع رباعي، لأن $d\vec{r}$ و dt شعاع رباعي. أي أن :

$$\begin{cases} dEdt - d\vec{p}.d\vec{r} = 0 \\ dE'dt' - d\vec{p}'.d\vec{r}' = 0 \end{cases}$$

إذن نصل إلى أن الطاقة وكمية الحركة يشكلان شعاع رباعي $(E, \vec{p}) \equiv p^{\mu}$ [3,11].

السؤال المطروح الآن هل هذا الشعاع الرباعي نفسه mU^{μ} ؟

إذا اخترنا المرجع العطالي الذي يتحرك فيه الجسيم على اعتبار أنه يتحرك حركة مستقيمة منتظمة فإن :

$$\vec{p} = \vec{0}$$
$$E = E^*$$

حيث E^* هي الطاقة في المرجع الذاتي.

ومنه قيمة الشعاع الرباعي في المعلم الذاتي S^* هي $\left(E^*, \vec{0}\right)$ ، و قيمته في المعلم الأصلي S هي $\left(E, \vec{p}\right)$.

فإذا كان الجسيم يتحرك بالنسبة لـ S بسرعة $\vec{v}$ ، و بتطبيق تحويلات لورانتز نجد :

$$\begin{aligned} E &= \gamma E^* \\ \vec{p} &= \gamma \vec{v} E^* \end{aligned} \qquad (18\text{-III})$$

حيث اعتبرنا أن : $c = 1$.نبحث الآن عن E^* :

نعلم أنه عند سرعات صغيرة أمام سرعة الضوء فإن :

$$E \sim \frac{1}{2}mv^2 \qquad (19\text{-III})$$

و نعلم أن :

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \simeq 1 + \frac{1}{2}v^2 + ...$$

و بتعويضها في المعادلة (18-III) نجد :

$$E = \gamma E^* \simeq 1 + \frac{1}{2}E^* v^2 ..... \qquad (20\text{-III})$$

بمقارنة المعادلة(20-III) بـ (19-III) نجد أن $m = E^*$ و التي تمثل كتلة الجسيم، و منه :

$$E = \gamma E^* = \frac{m}{\sqrt{1-v^2}} \qquad (21\text{-III})$$

إذن طاقة الجسيم في معلمه الذاتي ما هي إلا كتلته m ، و عند استرجاع سرعة الضوء c المعادلة (21-III) تصبح :

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} \qquad (22\text{-III})$$

و بالتعويض عن الطاقة الذاتية E^* و γ في المعادلة (18-III) نجد :

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} \qquad (23\text{-III})$$

و يمكن كتابة المعادلة (22-III) من الشكل :

$$E = Mc^2 \qquad (24\text{-III})$$

حيث : $M = \frac{m}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$ و التي تسمى كتلة الجسم في حالة الحركة و منه :

$$\begin{cases} E = Mc^2 \\ \vec{p} = M\vec{v} \end{cases} \qquad (25\text{-III})$$

لهذا نفسر عدم إمكانية بلوغ سرعة الضوء بالنسبة للأجسام المتحركة و التي لديها كتلة هي أن الكتلة تتزايد باستمرار و تقارب الملا نهاية عند الاقتراب من سرعة الضوء و هو ما يحتم وجود طاقة لانهائية لتحريك الجسيم، لأن الكتلة العطالية تصبح لا نهائية[3,4,5,11].
بتعويض المعادلة (III-25) في (III-14) نجد :

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{dM\vec{v}}{dt}$$

نعلم أن : $p^{\mu} = m\,U^{\nu}$ و $U^{\mu} = \frac{dx^{\mu}}{d\tau}$ و منه : $p^{\mu} = m\frac{dx^{\mu}}{d\tau}$ حيث :

$$p^{0} = m\frac{dx^{0}}{d\tau} = m\frac{dt}{d\tau}$$

و لدينا :

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1-v^{2}}}$$

و منه :

$$p^{0} = \frac{m}{\sqrt{1-v^{2}}} = E$$

و لدينا : $\vec{U} = \frac{d\vec{r}}{d\tau}$ و منه : $\vec{p} = m\frac{d\vec{r}}{d\tau}$ أي أن :

$$\vec{p} = m\frac{dt}{d\tau}\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{m}{\sqrt{1-v^{2}}}\vec{v} = M\vec{v}$$

أي أن : $\vec{p} = M\vec{v}$ ، إذن فعلا الشعاع الرباعي للطاقة ما هو إلا $\vec{p} = mU^{\mu}$.

2.III الكهرومغناطيسية النسبية

1.2.III معادلات ماكسويل

معادلات ماكسويل مجموعة من أربع معادلات و هي :

$$\begin{aligned}
&\nabla \times B = \mu_0 j + \frac{\partial E}{c^2 \partial t} \Leftrightarrow rot\left(H\right) = j + \frac{\partial D}{\partial t} \\
&\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t} \Leftrightarrow rot\left(E\right) = -\frac{\partial B}{\partial t} \\
&\nabla .E = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \Leftrightarrow divD = \rho \\
&\nabla .B = 0 \Leftrightarrow divB = 0
\end{aligned} \qquad \text{(26-III)}$$

حيث :

$$D = \varepsilon_0 E$$
$$H = \frac{B}{\mu_0}$$
$$\varepsilon_0 \mu_0 = 1/c^2$$

و إذا أخذنا $\mu_0 = \varepsilon_0 = c = 1$ فإن المعادلات (26-III) تصبح :

$$\begin{aligned}
&\nabla \times B = j + \frac{\partial E}{\partial t} \Leftrightarrow rot\left(H\right) = j + \frac{\partial D}{\partial t} \\
&\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t} \Leftrightarrow rot\left(E\right) = -\frac{\partial B}{\partial t} \\
&\nabla .E = \rho \Leftrightarrow divD = \rho \\
&\nabla .B = 0 \Leftrightarrow divB = 0
\end{aligned} \qquad \text{(27-III)}$$

حيث كل معادلة من هذه المعادلات تمثل تعميما لمشاهدات تجريبية محددة فالمعادلة الأولى تمثل حالة عامة لقانون أمبير و الثانية تمثل الصيغة التفاضلية لقانون فراداي و الحث الكهرومغناطيسي، و المعادلة الثالثة تمثل قانون غوص و الذي بدوره يشتق من قانون كولوم، و المعادلة الأخيرة تمثل حقيقة عدم إمكانية الحصول على قطب مغناطيسي منفرد مطلقا[11,12].

2.2.III الصيغ اللامتغيرة للمعادلات الكهرومغناطيسية

إن المعادلات الأساسية للنظرية الكهرومغناطيسية (معادلات ماكسويل) يمكن كتابتها بدلالة مشتقات الزمن و الفضاء للحقول $\vec{E}$ و $\vec{B}$. حيث في المنظومة المألوفة ذات الأبعاد الثلاثة يدخل الزمن في المعادلات باعتباره كمية لا متجه و مشتقات الفضاء الثلاث الأخرى تدخل في المعادلات على شكل تراكيب متناظرة. و يمكننا عرض التناظر بكتابة قانون غوص[9,11,12] :

$$\sum_i \frac{\partial E_i}{\partial x_i} = \rho \qquad \text{(28-III)}$$

و قانون أمبير كالآتي :

$$\frac{\partial B_j}{\partial x_i}-\frac{\partial B_i}{\partial x_j}=j_k+\frac{\partial E_k}{\partial t} \qquad (29\text{-III})$$

حيث k,j,i ترمز إلى z,y,x على الترتيب.
و كما رأينا سابقا أن تحويلات لورانتز هي مزيج بين إحداثيات الفضاء و الزمن و قد تعد كدوران للإحداثيات في الفضاء الرباعي $\left(x^0,x^1,x^2,x^3\right)$ و بهذا فإن x^0 و x^1و x^2و x^3 ينبغي أن تدخل معادلات ماكسويل بطريقة مماثلة، أي يجب أن نكون قادرين على كتابة معادلات ماكسويل بدلالة متجهات رباعية الأبعاد، حيث أثبت لورانتز أن معادلات ماكسويل لا تتغير بالنسبة إلى تحويلاته، بمعنى أنه إذا انتقلنا من مرجع عطالي إلى آخر وفق هذه العلاقات حافظت معادلات ماكسويل على شكلها.

لنبدأ بمعادلة الاستمرارية [11]:

$$div\ J+\frac{\partial \rho}{\partial t}=0 \qquad (30\text{-III})$$

و بما أن J_z,J_y,J_x ليست مستقلة عن كثافة الشحنة ρ، فإن هذه الكميات الأربعة تشكل متجها رباعيا (شعاعا رباعيا)، ومنه شعاع كثافة التيار الرباعي مركباته $\left(j^0,j^1,j^2,j^3=\rho\right)$ و منه نتمكن من كتابة معادلة الاستمرارية بصياغة لا متغيرة كالآتي [5,9,11] :

$$\sum_{\nu}\frac{\partial j_\nu}{\partial x_\nu}=0 \qquad \nu=0,1,2,3 \qquad (31\text{-III})$$

و يمكن كتابتها كالآتي :

$$div\ j=0 \qquad (32\text{-III})$$

الآن لدينا الكمون الشعاعي A و الكمون السلمي φ يحققان معادلات الموجة الغير متجانسة[5,11,12] :

$$\begin{aligned}\nabla^2 A-\frac{\partial^2 A}{\partial t^2}&=-J\\ \nabla^2\varphi-\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}&=-\rho\end{aligned} \qquad (33\text{-III})$$

و بما أن J و ρ يمثلان مركبات المتجه الرباعي، فإن المعادلة (33-III) يجب أن تمثل المركبات الأربعة لمعادلة المتجه الرباعي. حيث ينبغي دمج الكمون الشعاعي A و الكمون السلمي φ لتشكيل شعاع رباعي. فإذا عرفنا الكمون الرباعي بدلالة مركباته كمايلي [5,9,11]:

$$A_0 = \varphi\ , A_1 = A^1\ , A_2 = A^2\ , A_3 = A^3$$

فمن الممكن كتابة المعادلة (III-33) كمايلي :

$$\sum_{\nu} \frac{\partial^2 A_\lambda}{\partial x_\nu^{\,2}} = -j_\lambda$$

كما يمكن التعبير عنها كمايلي :

$$\Box A = -j$$

حيث $\Box = \nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial t^2}$ و يسمى بعامل لبلاص الرباعي الأبعاد.

إن شرط لورانتز يأخذ الصياغة الآتية :

$$div\ A + \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$$

و يمكن كتابته كمايلي :

$$\sum_{\nu} \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\nu} = 0 \qquad \text{(34-III)}$$

يمكننا دراسة مركبات المجال الكهرومغناطيسي، هذه المركبات يمكن إيجادها من المعادلات الاعتيادية ذات الأبعاد الثلاث الآتية[11] :

$$\vec{B} = r\vec{o}t\ \vec{A} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$
$$\vec{E} = -g\vec{r}ad\ \varphi - \frac{\partial}{\partial t}\vec{A} = -\vec{\nabla}\varphi - \frac{\partial}{\partial t}\vec{A} \qquad \text{(35-III)}$$

و لكن φ و A يشكلان متجها رباعيا $A\left(A\ , \varphi\right)$ ، و لهذا فإن المعادلة الأخيرة يمكن كتابتها من الشكل :

$$E_1 = \frac{\partial A_1}{\partial x_0} - \frac{\partial A_0}{\partial x_1}$$

و هكذا فإن $\vec{E}$ **و** $\vec{B}$ يشكلان معا شعاعا رباعي الأبعاد[5,9,11].

نعرف موترة المجال الكهرومغناطيسي F الناتج عن دمج مركبات الحقل الكهربائي $\vec{E}$و التحريض المغناطيسي $\vec{B}$ بالصيغة الآتية [11,12] :

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} \qquad \text{(36-III)}$$

و باستعمال المعادلة (III-35) يمكننا الحصول على تحليل الموتر $F_{\mu\nu}$ حيث :

$$F_{00} = F_{11} = F_{22} = F_{33} = 0$$
$$F_{10} = -F_{01} = -E_1$$
$$F_{20} = -F_{02} = -E_2$$
$$F_{30} = -F_{03} = -E_3$$
$$F_{12} = -F_{21} = B_3$$
$$F_{23} = -F_{32} = B_1$$
$$F_{31} = -F_{13} = B_2$$

حيث : 3,2,1 تمثل x, y, z على الترتيب.

ويمكننا كتابتها على شكل مصفوفة كمايلي[9,11,12] :

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & B_3 & -B_2 & -E_1 \\ -B_3 & 0 & B_1 & -E_2 \\ B_2 & -B_1 & 0 & -E_3 \\ E_1 & E_2 & E_3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & B_Z & -B_Y & -E_X \\ -B_Z & 0 & B_X & -E_Y \\ B_Y & -B_X & 0 & -E_Z \\ E_X & E_Y & E_Z & 0 \end{pmatrix} \qquad (37\text{-III})$$

و من المعادلة (36-III) يمكن كتابة :

$$\sum_\nu \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\mu} = \frac{\partial}{\partial x_\mu} \sum_\nu \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\nu} - \sum_\nu \frac{\partial^2 A_\mu}{\partial x_\nu^2} \qquad (38\text{-III})$$

و لدينا : $\sum_\nu \frac{\partial^2 A_\lambda}{\partial x_\nu^2} = -j_\lambda$ و $\sum_\nu \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\nu} = 0$ و منه نستطيع كتابة المعادلة (38-III) من الشكل :

$$\sum_\nu \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\mu} = j_\nu \qquad (39\text{-III})$$

أو من الشكل :

$$\vec{div}\ \vec{F} = j_\nu \qquad (40\text{-III})$$

و هذه المعادلة هي شعاع رباعي تمثل الصياغة اللامتغيرة لمعادلتين من معادلات ماكسويل و هما :

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = j + \frac{\partial E}{\partial t} \qquad \vec{\nabla}.\vec{E} = \rho \Leftrightarrow divD = \rho$$

و ذلك انطلاقا من المعادلة (39-III) و ذلك باستبدال ∂_ν بدليل ثالث تفصله عن الدليلين الأخريين فاصلة كمايلي [9,11,12]:

$$F_{\mu\nu,\nu} = j_\mu \qquad (41\text{-III})$$

و منه و باستعمال المركبات المبينة في(37-III) نجد :

$$F_{11,1} + F_{12,2} + F_{13,3} + F_{10,0} = j_1$$

أي أن :

$$0+\frac{\partial}{\partial y}B_Z-\frac{\partial}{\partial z}B_y-\frac{\partial E_X}{\partial t}=j_x$$
$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial y}B_Z-\frac{\partial}{\partial z}B_y=j_x+\frac{\partial E_X}{\partial t}$$

و هي تمثل معادلة ماكسويل الأولى:

$$\vec{\nabla}\times\vec{B}=\vec{j}+\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

أما المركبة الرابعة للعادلة (III-41) تكون :

$$F_{01,1}+F_{02,2}+F_{03,3}+F_{00,0}=j_0$$

أي أن :

$$\frac{\partial}{\partial x}E_x+\frac{\partial}{\partial y}E_y+\frac{\partial}{\partial z}E_z+0=j_0=\rho$$
$$\Rightarrow \vec{\nabla}.\vec{E}=\rho$$

و هي تمثل معادلة ماكسويل الثالثة:

$$\vec{\nabla}.\vec{E}=\rho$$

بالإضافة إلى ذلك يمكننا إيجاد المتطابقة التالية :

$$F_{\mu\nu,\lambda}+F_{\lambda\mu,\nu}+F_{\nu\lambda,\mu}=0 \qquad \text{(42-III)}$$

هذه المعادلة صحيحة من أجل كل القيم الممكنة لـ λ,ν,μ ، لكن هناك الزائدة عن الحاجة. إذا، على سبيل المثال أخذنا الدلائل المحصورة فقط في الفضاء الثلاثي $(3,2,1)$ فيمكننا الحصول على $F_{\mu\nu}$ حيث المعادلة تساوي الصفر في حالة نفس الدليلين. و عندما تكون كلها متغيرة، أي أن المركبات $(3,2,1)$ تعطي نفس المعادلة بأي طريقة توضع بها هذه المركبات. من أجل ذلك هناك فقط معادلة واحدة التي تنبثق من المعادلة (III-42) باستعمال كل المركبات الفضائية و يمكن إيجادها إذا وضعنا مثلا $\lambda=3,\nu=2,\mu=1$ فنجد:

$$F_{12,3}+F_{31,2}+F_{23,1}=0$$

و باستعمال المركبات المبينة في(III-37) نجد :

$$\frac{\partial}{\partial z}B_Z+\frac{\partial}{\partial y}B_y+\frac{\partial}{\partial x}B_x=\vec{\nabla}.\vec{B}=0$$

و هي تمثل معادلة ماكسويل الرابعة: $\nabla.B=0$.

أما معادلة ماكسويل الثانية فيمكن الحصول عليها بوضع الدلائل (λ,ν,μ) تساوي $(1,3,0)$، $(2,3,0)$و $(1,2,0)$ و ذلك لأن كل المركبات الأخرى تعطي $F_{\mu\nu}=0$ و منه إذا أخذنا مثلا $(1,2,0)$ نجد :

$$F_{12,0}+F_{01,2}+F_{20,1}=0$$

و باستعمال المركبات المبينة في (III-37) نجد :

$$\frac{\partial B_Z}{\partial t}-\frac{\partial E_x}{\partial y}+\frac{\partial E_y}{\partial x}=0$$

أي أن :

$$-\frac{\partial E_x}{\partial y}+\frac{\partial E_y}{\partial x}=-\frac{\partial B_Z}{\partial t}$$

ونفس الشيء نجده من أجل $(1,3,0)$، $(2,3,0)$، ناتج هذه المعادلة يعطي معادلة ماكسويل الثانية :

$$\nabla\times E=-\frac{\partial B}{\partial t}$$

3.III خلاصة الصياغة اللامتغيرة

- ✓ فضاء – زمن (x,y,z,ct).
- ✓ كثافة الشحنة $J=(j_x,j_y,j_z,\rho)$.
- ✓ الكمون $A=(A_x,A_y,A_z,\varphi)$.
- ✓ موتر المجال $F_{\mu\nu}=\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu}-\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}$.
- ✓ معادلات ماكسويل $F_{\mu\nu,\lambda}+F_{\lambda\mu,\nu}+F_{\nu\lambda,\mu}=0$ و $\sum_\nu\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\mu}=j_\nu$.
- ✓ معادلة الموجة للكمون $\sum_\nu\frac{\partial^2 A_\mu}{\partial x_\nu^2}=-j_\mu$.
- ✓ شرط لورانتز $\sum_\nu\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\nu}=0$.
- ✓ معادلة الاستمرارية $\sum_\nu\frac{\partial j_\nu}{\partial x_\nu}=0$.

خلاصة عامة

النسبية الخاصة من أهم النظريات التي ظهرت في القرن العشرين حيث قام آينشتاين بوضع أسسها كبديل عن نظرية نيوتن في الزمان و المكان لتحل بشكل خاص مشاكل النظرية القديمة فيما يتعلق بالأمواج الكهرومغناطيسية عامة و الضوء خاصة، و هي تعالج الحالات التي تتعلق بحركة المراجع بالنسبة لبعضها البعض بسرعة مستقيمة منتظمة.

في هذا العمل قدمنا عرضا حول البنية الهندسية لنظرية النسبية، بداية تطرقنا إلى مدخل للنظرية النسبية الخاصة حيث وجدنا أن النسبية الخاصة تعمم مبدأ النسبية لغاليلو غاليلي الذي ينص على الحركة المنتظمة و على عدم وجود حالة تكون مطلقة واضحة وكذلك تتضمن مبدأ ثبات سرعة الضوء لجميع المراقبين العطاليين مهما يكن اتجاه حركة مصدر الضوء.

انطلاقا من مبدأ النسبية و مسلمة ثبات سرعة الضوء وُجد أن تحويلات غاليلو تصبح غير صحيحة فاقترح العالم لورانتز تحويلات تدعى تحويلات لورانتز والتي تستخدم لتحويل الإحداثيات لأي متجه رباعي الأبعاد في مرجع عطالي إلى الإحداثيات الأربعة في مرجع عطالي آخر، حيث وجدنا أن تحويلات غاليلو هي تقريبية بمقارنتها بتحويلات لورانتز و لا يصح استخدامها في حالة السرعات الكبيرة. كما وجدنا أن للنسبية الخاصة العديد من النتائج منها تقلص الأطوال و الإبطاء الزمني و نسبية التزامن المناقضة للفكرة التقليدية لتساوي الفاصل الزمني بين حدثين لجميع المراقبين، كما توصلنا إلى أن تنبؤات النسبية الخاصة تتوافق مع ميكانيكا نيوتن في مجال التطبيق المشترك بينهما، و على وجه الخصوص في التجارب ذات السرعات الصغيرة مقارنة بسرعة الضوء، ثم توصلنا إلى أن النسبية الخاصة تدمج الأبعاد المكانية الثلاثة مع بعد زماني رابع فيها يسمى بالفضاء الرباعي الذي هو البناء الرياضي الذي تستند إليه نظرية النسبية الخاصة لآنشتاين حيث قدمنا دراسة وافية عن هذا الفضاء بدراستنا للأشعة الرباعية و كيفية التعامل بها كما تعرضنا إلى مصفوفات لورانتز حيث وجدنا أن المصفوفات التي تشكل تحويلات لورانتز هي عبارة عن أربع مجموعات و عرفنا كميات رباعية أخرى و هي عبارة عن أشعة تعرف بالأشعة ضد تغايرية "contravariant " وكيفية تحويل هذه الأشعة بتحويلات لورانتز ثم عرفنا الموترات على أنها كميات هندسية لها أكثر من أربع مركبات، و تتحول مركباته بتحويلات لورانتز بنفس الشكل الذي تتحول به جداء مركبات شعاعين أو أكثر.

كتطبيق للبناء الرياضي للفضاء الرباعي درسنا الديناميكا النسبوي حيث توصلنا لشكل المتجه الرباعي للسرعة، و كمية الحركة و وجدنا أنه مع الطاقة يشكلان متجها رباعيا وكذلك ألقينا لمحة عن الكهرومغناطيسية النسبية حيث درسنا المعادلات الأساسية للنظرية الكهرومغناطيسية (معادلات ماكسويل) و وجدنا أنها في ظل تحويلات غاليلو تكون صحيحة بالنسبة لموجة تنتشر بسرعة ثابتة بالنسبة إلى الوسط المستقر و لكن لمرجع متحرك بالنسبة للوسط فإن انتشار الموجة سيظهر أكثر تعقيدا وبالتالي بينا أنه يمكن كتابتها بدلالة مشتقات الزمن و الفضاء للمجالات E و B حيث في المنظومة المألوفة ذات الأبعاد الثلاثة يدخل الزمن في المعادلات باعتباره كمية لا متجه و مشتقات الفضاء الثلاث الأخرى تدخل في المعادلات على شكل تراكيب متناظرة. و كما رأينا سابقا أن تحويلات لورانتز هي مزيج بين إحداثيات الفضاء و الزمن و قد تعد كدوران للإحداثيات في الفضاء الرباعي $\left(x^0,x^1,x^2,x^3\right)$ و بهذا فإن x^0 و x^1و x^2و x^3 ينبغي أن تدخل معادلات ماكسويل بطريقة مماثلة، و بالتالي كتبنا معادلات ماكسويل بدلالة متجهات رباعية الأبعاد على أنها صيغ لامتغيرة.

فقد لاحظ علماء الرياضيات سهولة التعامل بأربعة متغيرات بما كانوا يفعلون بثلاث متغيرات و عمموا اصطلاحات الهندسة الإقليدية إلى هندسة ذات أبعاد أربعة سميت بهندسة لورانتز.

قائمة المراجع

قائمة المراجع

[1] د/ناظم أحمد حسون,د/عياد مفتاح شاحوت, د/بثينة عبد المنعم ابراهيم, النظرية النسبية الخاصة,كلية الآداب و العلوم, جامعة المرقب, ليبيا, 2004 , ص (6-22),(38-42),(135-138).

[2] د/طالب زاهي الخفاجي, النسبية بين نيوتن و اينشتاين, منشورات وزارة الثقافة و الفنون, الجمهورية العراقية,1978 , ص 4-65.

[3] Khaled Sadallah,Abdelghani Zeghib ,Géométries et Dynamiques, Cours Du CIMPA,HERMANN, UNESCO-EL-OUED ALGERIA, 2008, p169-213.

[4]J.D.JACKSON,Electrodynamique Classique, Dunod, Paris, 2001, p 540-583.

[5] ماري انطوانيت تونلا, مبادئ النظرية الكهرومغناطيسية,سلسلة الكتب العلمية, معهد الإنماء العربي, ص(123-184),(225-252).

[6] د/علي مصطفى مشرقة بك, النظرية النسبية الخاصة, مطبعة لجنة التأليف و الترجمة و النشر, القاهرة, 1945, ص 3-9.

[7] ألبرت اينشتاين, النسبية النظرية الخاصة و العامة, مكتبة الأسرة, ليبيا,2002 , ص 4-65.

[8] د/جلال الحاج عبد, نظرية النسبية العامة لأنشتاين – 2005.ص 43-53.

[9]Richard A.Mould, Basic Relativity, Springer, Italy,2002, p 18- 120.

[10] د/حازم فلاح سكيك, النظرية النسبية الخاصة لاينشتاين, إصدارات المركز العلمي للترجمة,2008, ص 13-23.

[11] ريتـز- ميلفـورد, أساسـيات النظريـة الكهرومغناطيسـية, وزارة التعلـيم العـالي جامعـة الموصـل. ص 504-521.

[12]Ch.GROSSETETE, RELATIVITE RESTREINTE ET STRUCTURE ATOMIQUE DE LA MATIERE, ellipses, Paris, 1985, p 155-160.

[13] د/هشام غصيب, الطريق إلى النسبية من كوبرنيكوس إلى آينشتاين, الجمعية العلمية الملكية, عمان, 1988 , ص 101-155.

[14]H.LUMBROSO, RELATIVISTE problème résolus , McGRAW-HILL, Paris, 1979, p 1-6.

[15]Einstein, Relativity- The special and the general theory , Three Rivers Press, New York, 1961, p 6-47.

الملخص

إن نظرية النسبية تعد من أهم النظريات التي ظهرت في القرن العشرين وفي تاريخ الفيزياء عموما، وضعها آينشتاين سنة 1905 كبديل عن نظرية نيوتن للزمان و المكان لتحل بشكل خاص مشاكل النظرية القديمة فيما يتعلق بالكهرومغناطيسية بصفة عامة و الضوء بشكل خاص. في هذه المذكرة نستعرض البنية الهندسية لنظرية النسبية، حيث نتطرق بداية إلى أهم مبادئ هذه النظرية وأسباب نشأتها مستعرضين تحويلات لورانتز و التمثيل الهندسي لها و أهم النتائج التي انبثقت عنها "تقلص الطول، الإبطاء الزمني و نسبية مفهوم التزامن "، ثم نوضح كيف تدمج النسبية الخاصة الأبعاد المكانية مع البعد الزماني الرابع فيما يسمى الفضاء الرباعي – فضاء مينكوفيسكي- . نتطرق أيضا بشيء من التفصيل إلى تحويلات لورانتز ونقدم دراسة لزمرة لورانتز وتصنيف تحويلات لورانتز حسب خصائصها الجبرية. أخيرا نقدم لمحة سريعة عن الميكانيكا النسبوي ومعادلات ماكسويل حيث نبين كيف يمكن إعادة صياغة الميكانيكا في الفضاء الرباعي لمينكوفيسكي بما يتناسب مع مبادئ النسبية ونوضح التوافق التام لمعادلات ماكسويل مع النسبية و أن صياغتها الطبيعية تكون في فضاء مينكوفيسكي دون الحاجة لإجراء أية تعديلات عليها.

الكلمات المفتاحية: نظرية النسبية الخاصة، تحويلات لورانتز، فضاء مينكوفيسكي.

Abstract

The theory of relativity is one of the most important theories that appeared during the 2th century and in the history of physics, discovered by Einstein 1905 as an alternative of Newton theory for space and time to solve the problems of the theory electromagnetism in general and light in particular . In this work we expose the geometrical structure of the relativity theory. We start by a short review of the main principles of this theory , we derive Lorentz transformations, give their geometrical representation and discuss their most important consequences, namely length contraction, time dilation and the absence of simultaneity. We show how the relativity theory unifies the three space dimensions with time in a single geometrical entity of four dimension called " Minkowski space". We study with some detail the algebraic structure of Lorentz transformations and their classifications. We finally give a short exposition of relativistic mechanics and Maxwell equations, where we show how it is possible to reformulate classical mechanics and rewrite it using the language of Minkowski space and make it compatible with the principle of relativity , we also show how Maxwell equations are found to be automatically compatible with relativity and that Minkowski space or the four dimensional space-time language is the natural mathematical language to formulate Maxwell equations and electromagnetism.

Keywords : Special Relativity theory, Lorentz Transformations, Minkowski Space.