

République l'Algérienne Démocratique et Populaire

**Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la
Recherche Scientifique**



CENTRE UNIVERSITAIRE D'EL-OUED

INSTITUT DES SCIENCES ET TECHNOLOGIE

Mémoire de fin d'étude

EN VUE DE L'OBTENTION DU DIPLOME DE

LICENCE ACADEMIQUE

Domaine : Sciences et Technologies

Spécialité : Génie mécanique

Option : Électromécanique industriels

Thème

**Asservissement de vitesse d'un moteur
électrique.**

Réalisé par :

ahmed salah zakaria
nakes mohammed lamine

Mesbahi Moussa

Encadré par :

toauti brahim ammar

PROMOTION 2013

SOMMAIRE

Dédicace	v
Remerciement	vi
INTRODUCTION GENERALE	1
I Introduction à la théorie de la commande	4
I.1 Objectif de régulation automatique	4
I.2 Théorie des systèmes et théorie de la commande.....	4
I.2.1 Notion de système.....	4
I.2.2 Théorie de la commande.....	6
I.2.3 Les autres formes de régulation.....	9
I.3 Principe général de la régulation	10
I.3.1 Comportement en régulation.....	12
I.3.2 Comportement en asservissement	13
I.4 Structure et comportement des processus	13
I.4.1 Comportement statique des processus.....	14
I.4.2 Comportement dynamique des processus.....	15
I.5 Conclusion	16
II Modélisation, analyse et régulation du système linéaire continu	17

II.1	Introduction	18
II.2	Équations d'un système linéaire	19
II.2.1	Définition d'un système linéaire	19
II.2.2	Caractéristiques	20
II.3	Fonction de transfert d'un système linéaire.	20
II.3.1	Définition.....	20
II.3.2	Mise en cascade.....	21
II.3.3	Différentes formes d'écriture de la fonction de transfert.....	21
II.4	Réponse temporelle des systèmes.	23
II.4.1	Les différentes entrées classiques.....	23
II.4.2	Réponse d'un système du premier ordre.....	25
II.4.3	Réponse d'un système du second ordre.....	28
II.5	Réponse fréquentielle d'un système.	32
II.5.1	Réponse d'un système à une sinusoïde.....	32
II.5.2	Représentation dans le plan de BODE.....	33
II.6	Systèmes bouclés.	36
II.6.1	Fonction de transfert d'un système bouclé.....	36
II.6.2	Bouclage sur un système du premier ordre.....	38
II.6.3	Bouclage sur un système de la seconde ordre.....	38
II.7	Stabilité des systèmes asservie.	39
II.7.1	Condition générale de stabilité.....	39
II.7.2	Influence du gain sur la stabilité en boucle fermée.....	40

II.8	Compensation des systèmes asservis.	41
II.8.1	Introduction.....	41
II.8.2	Placement de pôles.....	42
II.8.3	Correcteur Proportionnel Intégrateur et Dérive (PID).....	42
II.8.4	Le régulateur PI	45
II.8.5	Le régulateur PID	46
I.5	Conclusion	47
III	Régulation de niveau à l'installation trois réservoirs	48
III.1	Introduction.....	49
III.2	Modélisation du système	50
III.2.1	système à un réservoir	50
III.2.2	système à trois réservoirs	51
III.3	Conclusion.....	56
	CONCLUSIONS GENERALES	58
	RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUE	59
	ANNEXE	

INTRODUCTION GENERALE

Ce mémoire constitue une introduction l'Automatique communément et caricaturalement qualifiée de science des automatismes. Son objet au sens large est donc l'étude, l'analyse, la synthèse et la réalisation des systèmes de commande. Ce terme synthétique est souvent ambigu et ne définit pas un périmètre scientifique aussi clairement identifiable que l'équivalent anglo-saxon Automatic Control. Il s'agit pourtant bien de la même théorie de la commande fondée sur la notion centrale de contre-réaction (feedback en anglais) soit une théorie de la régulation.

Si les systèmes de commande à contre-réaction sont connus depuis l'Antiquité, le XIX^{ème} siècle pour les débuts industriels et surtout le XX^{ème} pour sa conceptualisation théorique ont réellement su utiliser l'idée fondamentale de cette structure de commande.

Comment expliquer ces siècles d'absence quand la biologie et le comportement animal offrent tant d'exemples de systèmes régulés ? Ce n'est certainement pas un hasard si la percée technologique de la rétroaction coïncide avec la révolution industrielle. Il est également peu douteux que la synthèse de la théorie de la commande et de la théorie de la communication opérée par Wiener et donnant naissance à la cybernétique soit la contribution majeure ayant permis de constituer l'Automatique comme champ scientifique par entière. Le retard dans le développement des boucles de contre-réaction provient de l'absence de définition mathématique claire de la notion d'information qui leur est indispensable.

Cela montre à l'évidence que l'Automatique n'est pas un champ scientifique fermé. Ce champ est transversal dans ses applications allant de la régulation de l'économie à celle de la machine électrique en passant par le pilotage des lanceurs, l'asservissement des têtes de lecture dans les disques durs... Il emprunte ses outils aux mathématiques pures et mathématiques appliquées. Enfin, même si le vocabulaire est parfois différent, sa parenté avec le traitement du signal ne fait aucun doute. De nombreux outils privilégiés sont communs

(calcul opérationnel, théorie des transformations...) mais plus important, le concept d'information y est également primordial.

Ce mémoire a pour objectif d'introduire les principaux concepts de l'Automatique : la notion de modèle d'un système, la structure de commande à contre-réaction et le concept de stabilité des systèmes dynamiques et le problème de stabilité, ainsi que la conception des régulateurs des différents types assurant cette stabilité et améliorant les performances du système.

Chapitre I

Introduction à la théorie de la commande

1.1. Objectif de régulation automatique:

Réguler une grandeur, c'est obtenir d'elle un comportement donné, dans un environnement susceptible de présenter des variations.

On ne peut pas parler de principe de régulation sans parler des lois de commandes. En faite, les grandeurs physiques commandées varient continûment dans le temps. Pour celles qui ne présentent que 2 états (système binaire ou « tout ou rien », tel les feux de signalisation, les commandes d'ascenseurs, de transfert de pièces par convoyeurs, etc..) en utilise une autre approche différente à la structure de boucle utilisé dans la plupart des systèmes y compris notre système (moteur électrique).

Les systèmes automatiques assurent en fait 2 types de fonctions :

- Maintenir la grandeur commandée, ou grandeur réglée, à une valeur de référence malgré les variations des conditions extérieurs ; on parle de la régulation en sens strict,
- Répondre à des changements d'objectif, ou à un objectif variable tel-que la poursuite de cible, on parle d'un fonctionnement d'asservissement.

1.2. Théorie des systèmes et théorie de la commande

1.2.1. Notion de système

Un système, agrégation d'éléments interconnectés, est constitué naturellement ou artificiellement afin d'accomplir une tâche prédéfinie. Son état est affecté par une ou plusieurs variables, les entrées du système. Le résultat de l'action des entrées est la réponse du système qui peut être caractérisée par le comportement d'une ou plusieurs variables de sorties. Le système complet ou un des éléments le composant est généralement représenté schématiquement par un schéma fonctionnel consistant en un rectangle auquel les signaux d'entrée représentés par des flèches entrantes sont appliqués. L'action des entrées produit de manière causale des effets mesurés par les signaux de sortie représentés par des flèches sortantes. Notons ainsi que la notion de système est indissociable de celle de signal.



Fig. 1.1 Schéma fonctionnel

Les entrées affectant un système peuvent être de nature différente. Les unes ont pour but d'exercer des actions entraînant le fonctionnement souhaité du système; ce sont les commandes. Les autres entrées troublent le fonctionnement désiré et sont définies comme des perturbations.

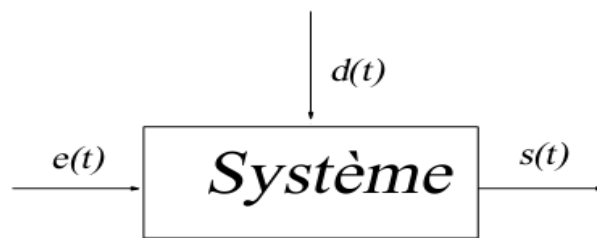


Fig. 1.2 Commandes $e(t)$ et perturbations $d(t)$

Chaque élément constitutif de l'ensemble système peut être caractérisé par un nombre fini de variables et l'interdépendance des variables caractérisant chaque élément peut être exprimé sous la forme d'une loi mathématique. Ainsi la relation entre les entrées et les sorties du système est l'expression des lois de la physique associées au système, c'est à dire la combinaison des lois mathématiques précédentes. L'ensemble des lois mathématiques régissant la causalité entre les entrées et les sorties du système constitue le modèle mathématique du système. La modélisation, étape préliminaire de l'analyse d'un système quelconque, indépendamment de sa nature physique, de sa composition et de son degré de complexité comporte donc les étapes suivantes :

- identification des variables pertinentes pour la caractérisation de chaque élément constituant le système,
- caractérisation des relations entre ces variables,
- représentation mathématique des interactions entre les éléments à travers la représentation mathématique des interactions entre les variables,
- formation d'un système de relations entre les variables caractérisant le système comme un tout,

- formation d'un système de relations entre les variables d'entrée et les variables de sortie.

Il est important de remarquer que tous ces aspects de l'analyse des systèmes ainsi que ceux développés par la suite sont abordés en théorie des systèmes d'un point de vue abstrait plutôt que d'un point de vue physique. Cela signifie qu'en théorie des systèmes, l'identité physique des variables associées à un système importe moins que les relations mathématiques entre ces mêmes variables.

I.2.1.1. Théorie de la commande

Le processus préliminaire de modélisation achevé, les performances, au sens large, d'un système peuvent être analysées et des méthodes de correction via l'action d'un système de commande peuvent être proposées si une commande active est nécessaire et possible. La commande passive doit ainsi être distinguée de la commande active qui fait l'objet essentiel de ce mémoire.

I.2.1.2. La commande passive

Le principe de la commande passive consiste à modifier structurellement le système à commander afin qu'il réalise au mieux les fonctions souhaitées. Connue également sous la dénomination de commande structurelle, cette technique s'applique principalement dans les domaines du contrôle des vibrations (acoustiques, mécaniques) affectant les structures mécaniques et dans le domaine du contrôle des écoulements laminaires et turbulents.

- Contrôle acoustique pour la réduction du bruit (isolation phonique de véhicules, pièces, optimisation structurelle de dispositifs silencieux)
- Contrôle des vibrations dans les structures (isolation sismique, atténuation des vibrations causées par le vent, le pluie le trafic routier...)
- Contrôle passif des phénomènes aérodynamiques /aéroélastiques (utilisation de diviseurs de flux, surfaces refroidies/réchauffées...)

I.2.1.3. La commande active

A la différence de la commande passive, la commande active suppose l'emploi d'un dispositif spécifique appelé système de commande afin de modifier le comportement dynamique du système étudié. Le but d'un système de commande est donc d'exercer des actions entraînant une amélioration du comportement du système et de ses performances.

L'ensemble des méthodes permettant l'analyse du comportement d'un système donné et la synthèse d'un système de commande satisfaisant des spécifications de performance précises définit la théorie de la commande.

La théorie de la commande, branche de la théorie des systèmes, est par nature un domaine interdisciplinaire d'enveloppé à partir de solides fondements mathématiques avec un objectif très concret : développer des correcteurs/régulateurs pouvant être mis en œuvre sur des systèmes technologiques réels. Empruntant ses outils et ses bases théoriques aux mathématiques, la théorie de la commande permet la conception de systèmes de commande pour des domaines aussi variés que l'aéronautique, le spatial, l'industrie chimique, l'automobile, le génie électrique...

Quelle que soit la nature du système à commander, il est toujours possible de classer les différentes structures de commande en deux grandes familles. Les structures de commande en boucle ouverte et les structures de commande à contre-réaction appelées également structures de commande en boucle fermée

1.2.1.4. La commande en boucle ouverte

En l'absence d'entrées perturbatrices et en supposant que le modèle mathématique du système est parfait, il est imaginable de générer un signal de commande produisant le signal de sortie souhaité. Cela constitue le principe de la commande en boucle ouverte qui exploite la connaissance des dynamiques du système afin de générer les entrées adéquates $e(t)$. Ces derniers ne sont donc pas influencés par la connaissance des signaux de sorties $s(t)$.

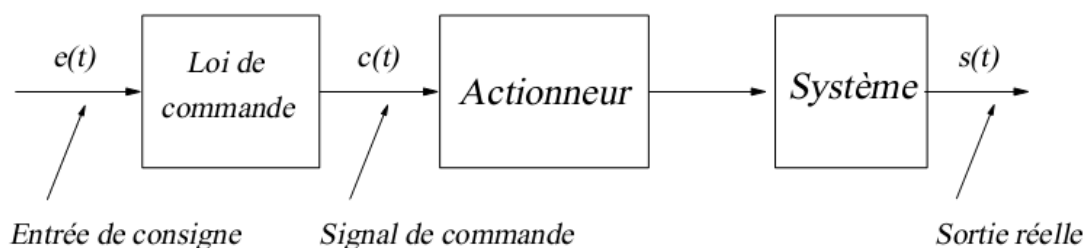


Fig. 1.4 Commande en boucle ouverte

Cette solution est envisageable dans le cas où le système est parfaitement connu et modélisé et dans le cas où l'obtention d'une mesure de la sortie n'est pas économiquement possible.

1.2.1.5. La commande en boucle fermée

Toutefois, si le système à commander n'est pas parfaitement connu ou si des perturbations l'affectent, les signaux de sortie ne seront pas ceux souhaités. L'introduction d'un retour d'information sur les sorties mesurées s'avère alors nécessaire.

Le principe de commande en boucle fermée est illustré sur la figure suivante et définit la structure de commande à contre-réaction (feedback en anglais). On parle alors de système bouclé (figure 1.5), par opposition aux systèmes en boucle ouverte

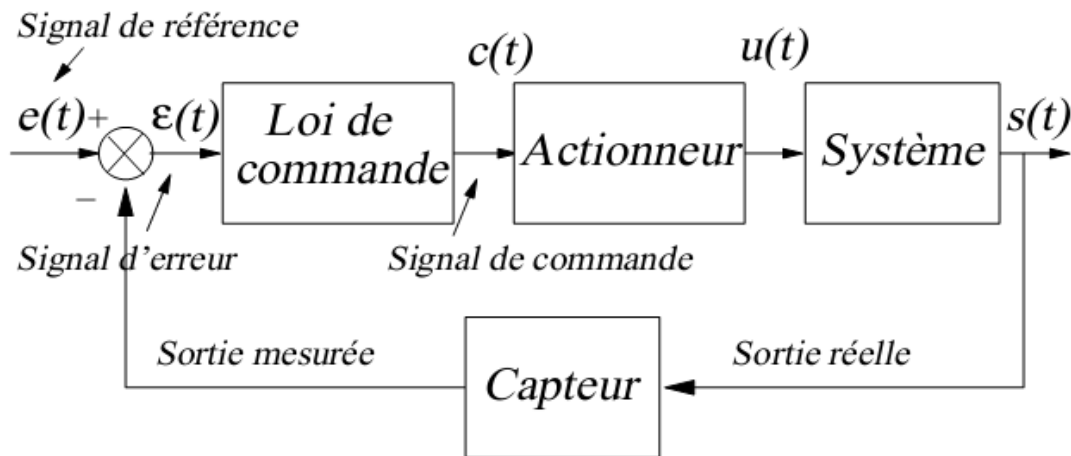


Fig. 1.5 Commande en boucle fermé

Un système bouclé vérifie en quelque sorte que la réponse du système correspond à l'entrée de référence tandis qu'un système en boucle ouverte commande sans contrôler l'effet de son action. Les systèmes de commande en boucle fermée sont ainsi préférables quand des perturbations non modélisables et/ou des variations imprévisibles des paramètres sont présentés. Cette structure de commande permet ainsi d'améliorer les performances dynamiques du système commandé (rapidité, rejet de perturbation, meilleur suivi de consignes, moindre sensibilité aux variations paramétriques du modèle, stabilisation de systèmes instables en boucle ouverte).

Il est toutefois important de remarquer que cette structure de commande ne présente pas que des avantages. Elle nécessite l'emploi de capteurs qui augmentent le coût d'une installation. D'autre part, le problème de la stabilité et de la précision des systèmes à contre-réaction se pose de manière plus complexe. Le concept de rétro-action est toutefois à la base de tous les développements théoriques de l'Automatique moderne et constituera donc le pivot central autour duquel les notions d'enveloppées dans ce cours tourneront.

1.2.2. Les autres formes de régulation

Le but d'une chaîne de régulation est de contrôler un processus. Au niveau des organes de mesure et de contrôle, il n'a pas une très grande marge de manœuvre, car ces organes, dans une certaine mesure, s'imposent souvent d'eux-mêmes.

Il reste un domaine où son savoir-faire va s'exercer pleinement : c'est au niveau de l'organe de régulation. Bien entendu, les caractéristiques de cet organe vont dépendre du processus à contrôler, des perturbations à prendre en compte, des caractéristiques des organes de mesure et de contrôle.

Bien souvent, les systèmes de régulation comportent, au lieu des chaînes linéaires ouvertes ou fermées, des ensembles de boucles imbriquées dont tout ou partie peut induire des contre-réactions à travers le processus.

1.2.2.1. Régulation en cascade

L'objectif d'une régulation en cascade est de minimiser les effets d'une ou de plusieurs grandeurs perturbatrices qui agissent soit sur la variable réglante, soit sur une grandeur intermédiaire se trouvant en amont de la variable à régler. Ce type de régulation est intéressant lorsque l'on a affaire à des processus à longs temps de réponse. En effet, quand une perturbation se manifeste, il est nécessaire d'attendre que son influence se ressente au niveau de l'organe de mesure placé en sortie de chaîne. Si les temps de réponse sont longs, la correction n'intervient donc que tardivement, parfois avec la cause qui l'a produite et dont le sens s'est inversé, provoquant oscillations, instabilité, etc.

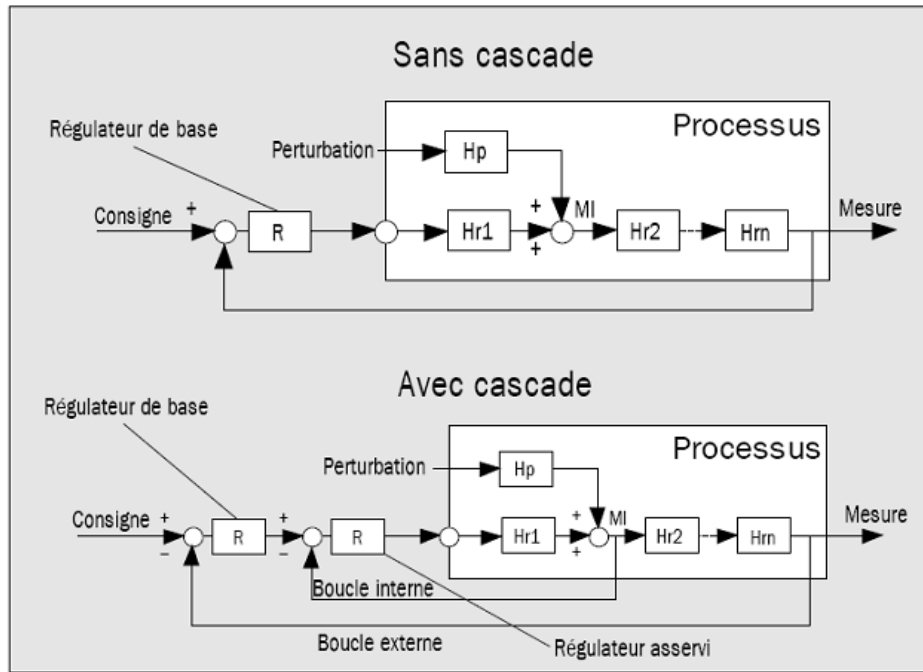


Fig. 1.6 exemple de régulation en cascade et sans cascade

Bien évidemment, la régulation en cascade n'apporte aucune amélioration si la grandeur perturbatrice se produit en aval de la mesure intermédiaire. Pour que la cascade soit justifiée, il faut que la boucle interne soit beaucoup plus rapide que la boucle externe.

I.2.2.2. Régulation mixte

Ce type de régulation est l'association d'une régulation en boucle fermée et d'une régulation en boucle ouverte. Les deux boucles sont complémentaires et elles associent leurs actions pour améliorer la stabilité globale. Ce type de régulation est à mettre en œuvre lorsqu'une perturbation affecte directement la grandeur à régler.

I.2.2.3. Régulation de rapport

Ce type de régulation a par exemple pour objectif d'asservir un débit Q_a à un autre débit libre Q_1 en imposant entre ces deux débits un facteur de proportionnalité K_d , fixé manuellement ou automatiquement.

I.3. Principe général de la régulation:

Dans la plupart des appareils et installations industrielles, tertiaires et mêmes domestiques, il est nécessaire de maintenir des grandeurs physiques à des valeurs déterminées, en dépit

des variations externes ou internes influant sur ces grandeurs. Le niveau d'un réservoir d'eau, la température d'une étuve, le débit d'une conduite de gaz, étant par nature variables, doivent donc être réglés par des actions convenables sur le processus considéré. Si les perturbations influant sur la grandeur à contrôler sont lentes ou négligeables, un simple réglage (dit en boucle ouverte) permet d'obtenir et de maintenir la valeur demandée (par exemple : action sur un robinet d'eau).

Dans la majorité des cas, cependant, ce type de réglage n'est pas suffisant, parce que trop grossier ou instable. Il faut alors comparer, en permanence, la valeur mesurée de la grandeur réglée à celle que l'on souhaite obtenir et agir en conséquence sur la grandeur d'action, dite grandeur réglant. On a, dans ce cas, constitué une boucle de régulation et plus généralement une boucle d'asservissement.

Cette boucle nécessite la mise en œuvre d'un ensemble de moyens de mesure, de traitement de signal ou de calcul, d'amplification et de commande d'actionneur, constituant une chaîne d'éléments associés : la chaîne de régulation (ou d'asservissement).

Toute chaîne de régulation (ou d'asservissement) comprend trois maillons indispensables : l'organe de mesure, l'organe de régulation et l'organe de contrôle.

Il faut donc commencer par mesurer les principales grandeurs servant à contrôler le processus. L'organe de régulation récupère ces mesures et les compare aux valeurs souhaitées, plus communément appelées valeurs de consigne. En cas de non-concordance des valeurs de mesure et des valeurs de consigne, l'organe de régulation envoie un signal de commande à l'organe de contrôle (vanne, moteur, etc.), afin que celui-ci agisse sur le processus. Les paramètres qui régissent le processus sont ainsi stabilisés en permanence à des niveaux souhaités.

Le choix des éléments de la chaîne de régulation est dicté par les caractéristiques du processus à contrôler, ce qui nécessite de bien connaître le processus en question et son comportement.

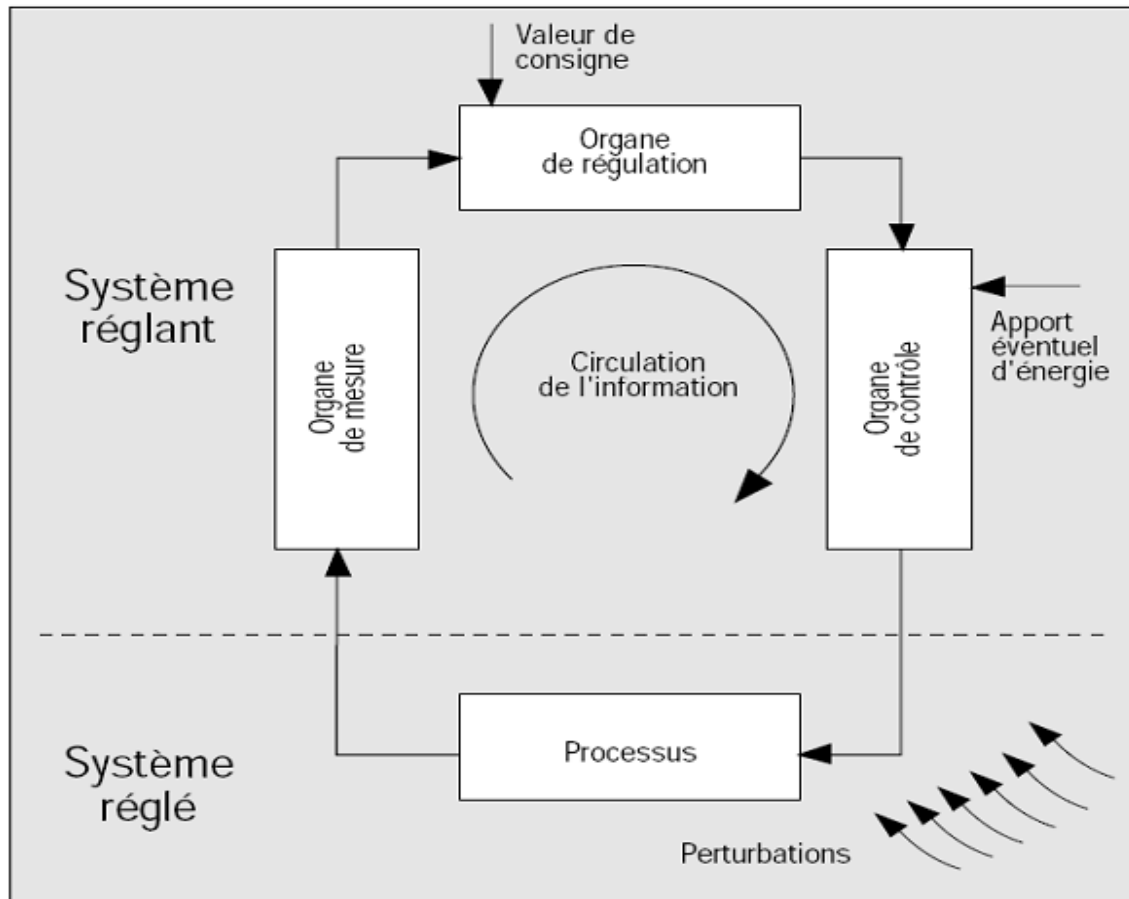


Fig. 1.7 Schéma de principe d'une chaîne de régulation

1.3.1. Comportement en régulation

La consigne est maintenue constante et il se produit sur le procédé une modification (ou une variation) d'une des entrées perturbatrices. L'aspect régulation est considéré comme le plus important dans le milieu industriel, car les valeurs des consignes sont souvent fixes. Néanmoins, pour tester les performances et la qualité d'une boucle de régulation, on s'intéresse à l'aspect asservissement.

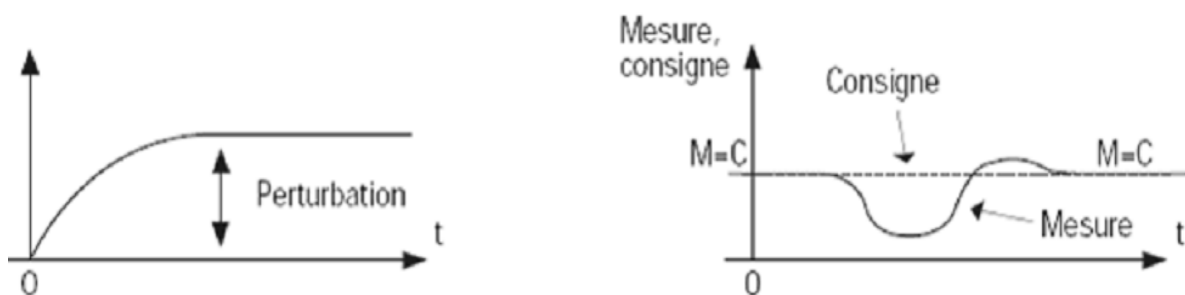


Fig. 1.8 Comportement en régulation

I.3.2. Comportement en asservissement

L'opérateur effectue un changement de la valeur de la consigne, ce qui correspond à une modification du point de fonctionnement du processus.

Si le comportement en asservissement est correct, on démontre que la boucle de régulation réagit bien, même lorsqu'une perturbation se produit.

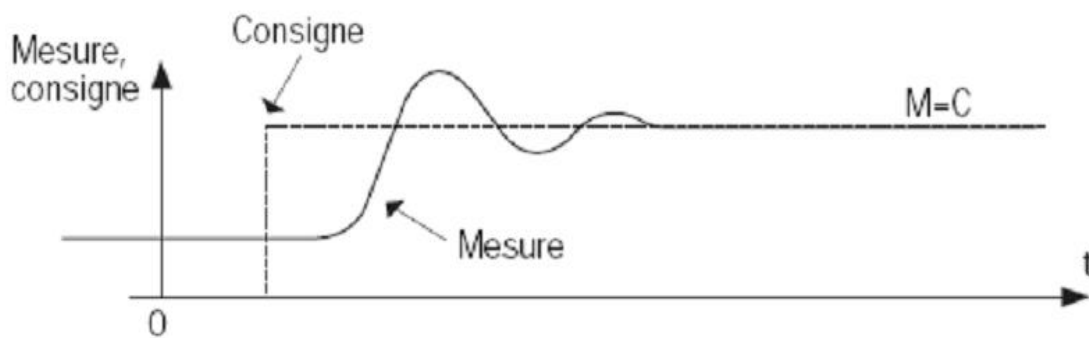


Fig. 1.9 Comportement en asservissement

I.4. Structure et comportement des processus :

Si un processus possède une grandeur réglante U et une grandeur réglée S , son comportement peut être représenté soit par une équation différentielle reliant les valeurs de S et de U en fonction du temps, soit par une représentation dite fonction de transfert déduite de la transformation de Laplace appliquée à cette équation différentielle.

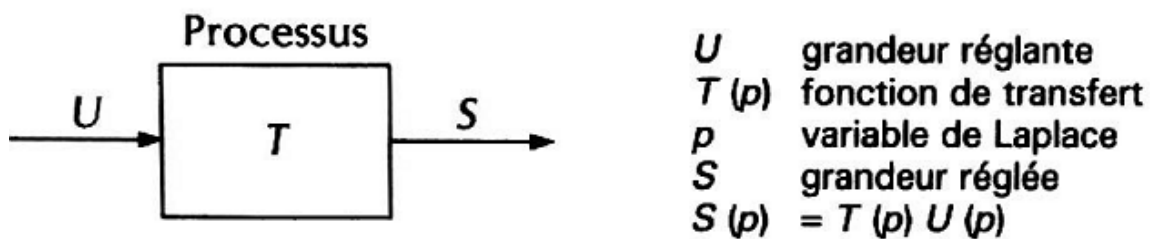


Fig. 110 Fonction de transfert

Dans ce dernier cas, le comportement du processus est décrit par la relation :

$$S(p) = T(p)U(p) \quad (1.1)$$

dans laquelle $T(p)$ est la fonction de transfert considérée, p la variable de Laplace . Toutefois, ces relations s'appliquent seulement à des systèmes dont les variables varient de manière continue, et dans lesquels une grandeur réglante U n'exerce son action que sur une seule grandeur réglée S :

il s'agit donc de processus mono variables continus.

Les processus industriels, en fait, ne sont pas toujours continus et peuvent être multi variables.

I.4.1. Comportement statique des processus

Lorsque le processus est dans un état stable, à chaque valeur U de la grandeur réglante correspond une valeur S de la grandeur réglée. Deux valeurs voisines U_1 et U_2 correspondent deux valeurs S_1 et S_2 de la grandeur réglée, telles que :

$$\frac{(S_2 - S_1)}{(U_2 - U_1)} = G_0 \quad (1.2)$$

G_0 est appelé gain statique du processus. La valeur de celui-ci peut dépendre du point de fonctionnement considéré et n'est donc pas forcément constante dans tout le domaine de variation des grandeurs du processus. On dit alors que le processus est non linéaire. La courbe caractéristique $S(u)$ peut elle-même dépendre d'autres paramètres. Sur la figure (I.6) est représenté un réseau de courbes $S(u)$ dépendant d'un paramètre α . Il arrive aussi que le gain statique dépende du sens de l'action de la grandeur réglante : on a alors affaire à un phénomène d'hystérésis.

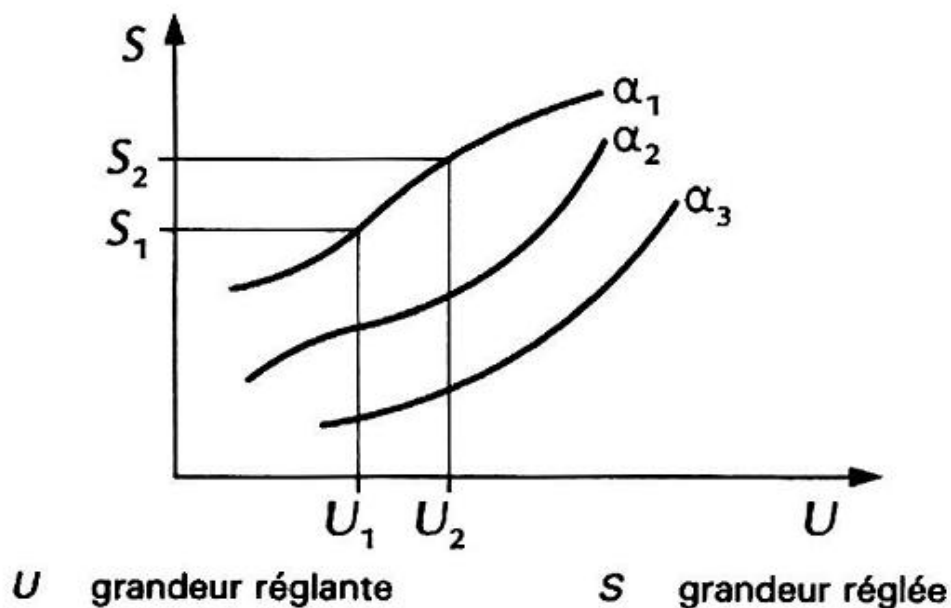


Fig. 1.11 Comportement statique de processus

I.4.2. Comportement dynamique des processus

I.4.2.1. Processus naturellement stables

La réponse naturelle d'un processus à une variation en échelon de sa grandeur réglante permet de savoir s'il est naturellement stable ou instable.

Dans le cas de procédés stables (tels que fours et étuves, par exemple), une excitation ΔU de la grandeur réglante produit, à la fin du régime transitoire correspondant, une variation limitée ΔS de la grandeur réglée

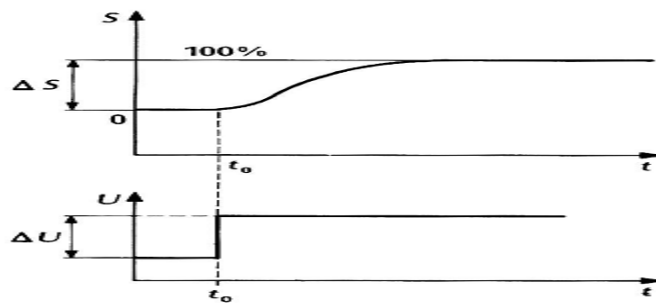


Fig. 1.12 Comportement d'un système naturellement stable

Dans la majorité des cas, les régimes transitoires associés à ce type de réponse ne comportent ni oscillation ni dépassement de la valeur finale ; ces processus sont dits **stables apériodiques**.

Il est possible de représenter ces processus par une relation mathématique générale de la forme :

$$G(p) = \frac{G_0}{(1 + \theta_0 p)(1 + \theta_2 p) \dots (1 + \theta_n p)} \quad (1.3)$$

I.4.2.2. Processus naturellement instables

Dans un processus naturellement instable, une excitation ΔU de la grandeur réglante produit une variation ΔS de la grandeur réglée dépendant continûment du temps, donc illimitée.

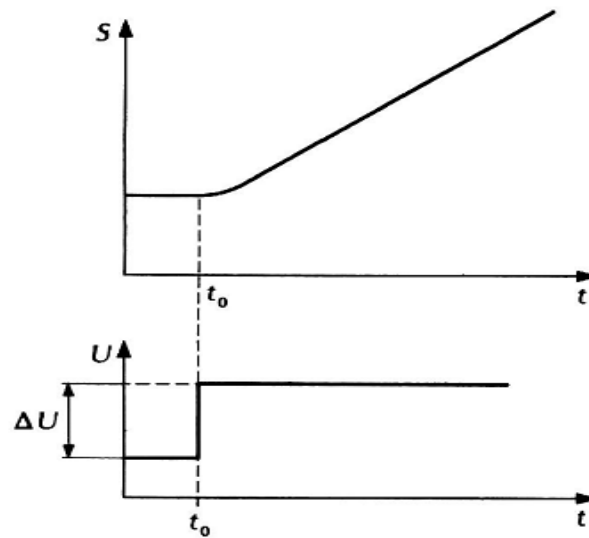


Fig. 1.13 Comportement d'un système naturellement instable

I.5. Conclusion

les définitions des différents méthodologies du système est ces composants sont illustrés. L'objectif de régulation automatique est aussi clarifié ainsi que la différence entre la régulation et l'asservissement.

Chapitre II

***Modélisation, analyse et régulation
du système linéaire continu***

II.1. Introduction

Le processus de développement d'un modèle mathématique constitue le lien entre réalité et théorie mathématique. Le modèle ne doit pas être trop simpliste au risque de ne pas représenter la réalité mais doit être suffisamment simple pour ne pas rendre inutilement complexes les étapes d'analyse des propriétés du système et de synthèse des régulateurs. La phase de modélisation est donc essentielle dans le processus d'analyse et de synthèse d'un système de commande. En Automatique, le modèle mathématique d'un système dynamique est défini comme un ensemble d'équations qui représentent le comportement dynamique du système avec la précision souhaitée. Le processus de modélisation consiste premièrement en l'identification du système et de ses composants élémentaires. Le modèle mathématique idéal est obtenu en écrivant les lois physiques régissant le comportement du système. Quelle que soit la nature physique du système à étudier, cette étape résulte en l'écriture des équations différentielles et algébriques (linéaires, non linéaires, à coefficients constants ou variant dans le temps) qui forment l'expression mathématique du comportement idéal du système. Un certain nombre d'hypothèses de travail sont ainsi formulées définissant la classe des modèles utilisés. L'ultime phase consiste alors à mettre en œuvre des méthodes d'analyse permettant le passage de ces modèles mathématiques vers des modèles particulièrement dédiés à l'Automatique.

La démarche globale peut ainsi se résumer de la manière suivante.

- 1- Définir le système à étudier et ses composants élémentaires
- 2- Formuler le modèle mathématique idéal et dresser la liste des hypothèses à retenir
- 3- Écrire les lois physiques régissant le comportement du système et les équations différentielles et algébriques associées
- 4- Définir le modèle dédié à l'Automatique

La complexité du modèle résultant va conditionner le choix des méthodes d'analyse et de synthèse qu'il sera possible de lui appliquer. Il est donc très important d'établir un bon compromis entre la précision du modèle et sa complexité. Ce chapitre a pour but de donner les principes de base de la modélisation des systèmes ainsi que les différentes méthodes utilisées pour l'étude de stabilité, ensuite on donne des stratégies utilisées en synthèses des correcteurs pour la régulation des paramètres du système linéaires.

II.2. Équations d'un système linéaire

II.2.1. Définition d'un système linéaire:

Un système est dit linéaire si l'équation liant la sortie à l'entrée est une équation différentielle linéaire à coefficients constants. La forme générale de cette équation différentielle est :

$$b_0 s(t) + b_1 \frac{ds(t)}{dt} + \dots + b_n \frac{d^n s(t)}{dt^n} = a_0 e(t) + a_1 \frac{de(t)}{dt} + \dots + a_m \frac{d^m e(t)}{dt^m} \quad (2.1)$$

Ces systèmes linéaires sont homogènes, c'est à dire $s(k.e) = k.s(e)$, et additifs, c'est à dire que l'on a $s(e_1 + e_2) = s(e_1) + s(e_2)$.

On appelle l'ordre de l'équation 2.1 (n), l'**ordre du système linéaire**.

Seuls les systèmes pour lesquels $m \leq n$ se rencontrent dans la pratique

II.2.1.1. Exemple:

Circuit RC:

soit le circuit RC en figure 2.1

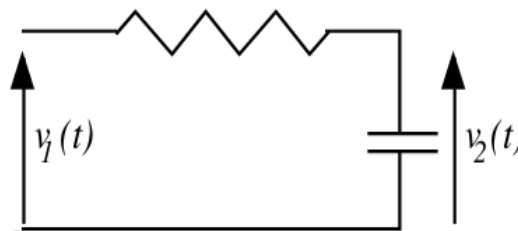


Fig. 2.1 Circuit RC

Les équations électriques sont :

- ✓ la loi de Kirchhoff donne :

$$v_1 + R.i = v_2 \quad (2.2)$$

- ✓ l'équation au borne de capacité est:

$$C. \frac{dv_2}{dt} = i \quad (2.3)$$

Nous pouvons obtenir une équation différentielle d'ordre 1 reliant la sortie v_2 et l'entrée v_1 :

$$v_1 = R.C. \frac{dv_2}{dt} + v_2 \quad (2.4)$$

II.2.2. Caractéristiques

II.2.2.1. Régime statique:

Dans l'équation (2.1), si les dérivées successives de l'entrée $e(t)$ et de la sortie $s(t)$ sont nulles, on obtient $b_0 s(t) = a_0 e(t)$. on définit le **gain statique** K du système comme étant le rapport $K = \frac{a_0}{b_0}$.

II.2.2.2. Conditions initiales:

Dans la suite du cours, on supposera souvent que les valeurs initiales de l'entrée et de la sortie sont nulles. En fait, si ce n'est pas le cas mais que l'on se trouve dans des conditions de repos du système, on peut montrer que les variations autour de ce point d'équilibre varient la même équation (2.1) que les grandeurs elles mêmes.

II.2.2.3. Linéarisation:

Les systèmes réels ne sont parfois pas linéaires mais peuvent être considérés comme tels dans certaines conditions. Nous n'étudierons dans la suite du cours que les systèmes linéaires ou intarissables.

II.2.2.4. Réponse d'un système linéaire:

Si l'on veut connaître la réponse d'un système linéaire, il faut résoudre l'équation (2.1). Dans la suite du cours, on utilisera la Transformée de Laplace (TL) pour simplifier la résolution de ces équations. Nous apprendrons également à faire un lien direct entre les réponses des systèmes et la TL de l'équation (2.1).

II.3. Fonction de transfert d'un système linéaire

II.3.1. Définition:

On appelle fonction de transfert ou transmittance d'un système linéaire le rapport entre la transformée de Laplace de la sortie sur celle de l'entrée :

$$G(p) = \frac{S(t)}{E(t)} = \frac{a_0 + a_1 \cdot p + \dots + a_m p^m}{b_0 + b_1 \cdot p + \dots + b_n p^n} \quad (2.5)$$

C'est une fonction rationnelle. L'ordre du système (qui est l'ordre de l'équation différentielle) est le degré du dénominateur de $G(p)$.

Schéma fonctionnel : Pour exprimer l'équation précédente, on utilise généralement (le schéma 2.1)

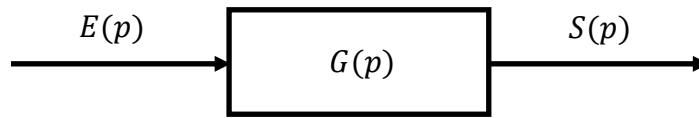


Fig. 2.2 Schéma fonctionnel

II.3.2. Mise en cascade:

La mise en cascade de deux systèmes dont les fonctions de transfert sont $G_1(p)$ et $G_2(p)$ est équivalent à un seul système dont la fonction de transfert serait $G_1(p) \cdot G_2(p)$ (voir schéma 2.3).

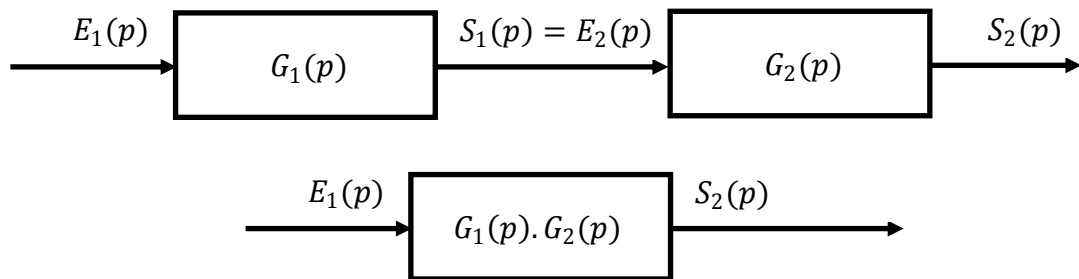


Fig. 2.3 Les fonctions de transfert en cascade se multipliant

II.3.3. Différentes formes d'écriture de la fonction de transfert

Nous avons vu précédemment la forme développée de la fonction de transfert où l'on peut lire directement les coefficients de l'équation différentielle.

$$G(p) = \frac{S(t)}{E(t)} = \frac{a_0 + a_1 \cdot p + \dots + a_m p^m}{b_0 + b_1 \cdot p + \dots + b_n p^n}$$

Il est souvent préférable de mettre en évidence le gain K du système ainsi que le nombre d'intégrateurs purs aussi appelé type du système.

$$G(p) = K \cdot \frac{1}{p^\alpha} \cdot \frac{1 + \dots + c_m p^m}{1 + \dots + d_{n-\alpha} p^{n-\alpha}} = K \cdot G(p) \quad (2.6)$$

Remarque :

✓ si $\alpha = 0$, alors $K = \frac{a_0}{b_0}$ est la gain statique du système

✓ si $\alpha \neq 0$, alors $K = \lim_{p \rightarrow 0} p^\alpha G(p)$

Cette dernière forme peut parfois se trouver sous forme factorisée :

$$G(p) = K \cdot \frac{(1 + \tau'_1 p) \dots (1 + \tau'_m p)}{p^\alpha (1 + \tau_1 p) \dots (1 + \tau_{n-\alpha} p)} \quad (2.7)$$

Dans cette formulation, les τ et τ' sont assimilés à des constantes de temps.

Nous pouvons enfin faire apparaître les pôles et les zéros de la fonction de transfert. Cela donne :

$$G(p) = k \cdot \frac{(p - z_1) \dots (p - z_m)}{p^\alpha (p - p_1) \dots (p - p_{n-\alpha})} \quad (2.7)$$

ou $k \neq K$.

II.3.4. Exemple:

- **Circuit RC:**

Nous reprenons l'exemple précédent . Nous avons vu que :

$$v_1 = R \cdot C \cdot \frac{dv_2}{dt} + v_2$$

Dans ce système, nous considérons la tension v_1 comme étant l'entrée $e(t)$, et la tension v_2 comme étant la sortie $s(t)$. En prenant la transformée de Laplace de l'équation précédente, on peut former la fonction de transfert de ce système :

$$G(p) = \frac{S(t)}{E(t)} = \frac{1}{1 + R \cdot C \cdot p} \quad (2.8)$$

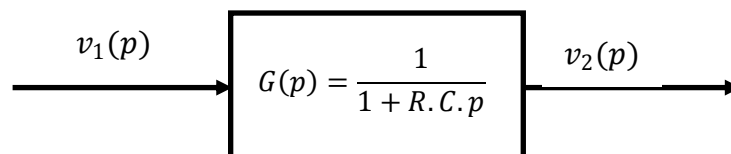


Fig. 2.4 Schéma fonctionnel d'un circuit RC

On identifiera facilement le fait que c'est un système d'ordre 1 dont la constante de temps est $\tau = R.C$ et de gain statique $K = 1$.

II.4. Réponse temporelle des systèmes

On veut caractériser les systèmes d'une part par leur fonction de transfert et, d'autre part, par leur comportement. Ce dernier peut être mis en évidence par la réponse $s(t)$ à une entrée donnée. Classiquement, on peut apprendre beaucoup des systèmes en observant la réponse aux entrées suivantes :

- l'impulsion $\rightarrow$ réponse impulsionnelle
- l'échelon $\rightarrow$ réponse indicielle
- la rampe
- la sinusoïde $\rightarrow$ réponse fréquentielle

Nous étudierons les réponses fréquentielles des systèmes. Nous allons faire le lien entre fonction de transfert et réponses temporelles (c'est à dire les réponses aux impulsion, échelon et rampe). Nous allons étudier les systèmes simples et très répandus que sont les systèmes du premier ordre et du second ordre. De plus, les méthodes d'étude de ces systèmes se généralisent facilement aux autres.

II.4.1. Les différentes entrées classiques:

II.4.1.1. L'échelon

C'est l'entrée la plus utilisée de toutes. Elle correspond à un changement brusque de consigne. Cette fonction est définie par :

$$f(t) = a \quad \forall t > 0 \quad \text{et} \quad f(t) = 0 \quad \forall t \leq 0$$

Sa transformée de Laplace est :

$$F(p) = \frac{a}{p}$$

On appelle **échelon unitaire** la fonction dont la TL est $\frac{1}{p}$ ($a = 1$). On le note souvent $u(t)$.

On appelle réponse indicielle la réponse à l'échelon unité. On rencontre également l'échelon retardé $g(t) = u(t - \tau)$.

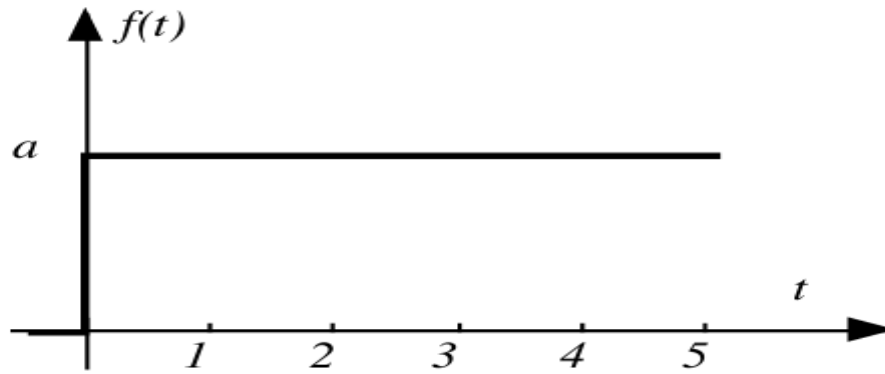


Fig. 2.5 La fonction échelon

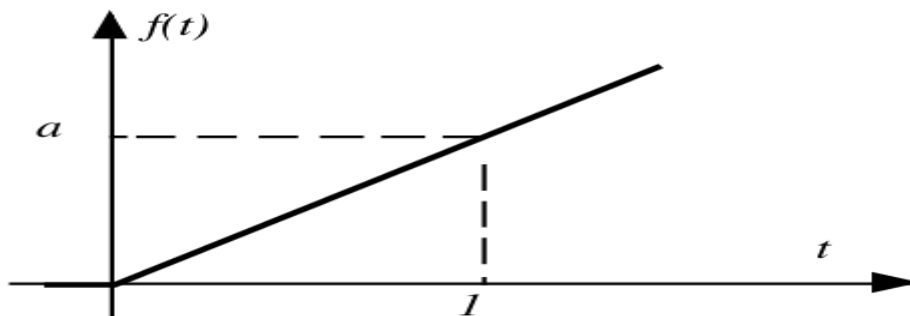
II.4.1.2. La rampe

La rampe de pente a est la primitive de l'échelon de hauteur a . Elle est définie par :

$$f(t) = at \quad \forall t > 0 \quad \text{et} \quad f(t) = 0 \quad \forall t \leq 0$$

Sa transformée de Laplace est :

$$F(p) = \frac{a}{p^2}$$

Fig. 2.6 La fonction rampe de tangente a

On peut définir également la rampe unitaire : la rampe de pente 1.

II.4.1.3. L'impulsion

L'impulsion unité est, dans l'espace des distributions, la dérivée de l'échelon unitaire. On l'appelle aussi impulsion de Dirac. On la note généralement $\delta(t)$. Sa transformée de Laplace est $TL[(\delta(t))] = 1$.

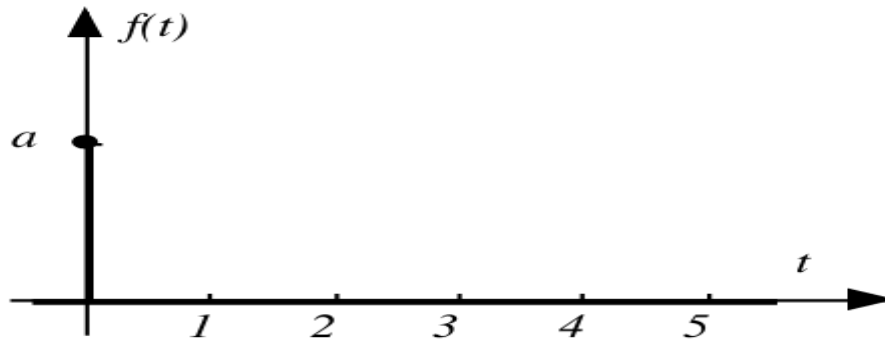


Fig. 2.7 La fonction impulsion de dirac de poids a

II.4.2. Réponse d'un système du premier ordre

II.4.2.1. Fonction de transfert

Un système du premier ordre est décrit par

$$b_0 s + b_1 \frac{ds}{dt} = a_0 e + a_1 \frac{de}{dt}$$

Nous ne traiterons, dans ce chapitre, que les systèmes pour lesquels $a_0 \neq 0$ et $a_1 = 0$. La fonction de transfert de ces systèmes est : $G(p) = \frac{a_0}{b_0 + b_1 p}$, ce que nous pouvons mettre sous la forme :

$$G(p) = \frac{K}{1 + \tau p}$$

On appelle K le gain statique et τ la constante de temps du système.

II.4.2.2. Réponse à un échelon

Pour toutes les réponses indicielles (à un échelon), on définit :

- Régime permanent : $s_p(t) = s(t) \quad \forall t \gg t_r \quad (s_p(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} s(t))$
- Temps de montée t_m : est le temps pendant lequel $s(t)$ passe de $0,1s_p(t)$ à $0,9s_p(t)$.
- Temps de réponse à 5% t_r : est le temps au bout duquel $\forall t > t_r, s_p(t) - s(t) < 0,05s_p(t)$.

On applique à l'entrée de ce système un échelon d'amplitude E_0 . $E(p)$, la TL de l'entrée est donc $E(p) = \frac{E_0}{p}$. La sortie du système est telle que :

$$S(p) = E(p).G(p) = \frac{K.E_0}{p(1 + \tau p)}$$

$$S(t) = K.E_0(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

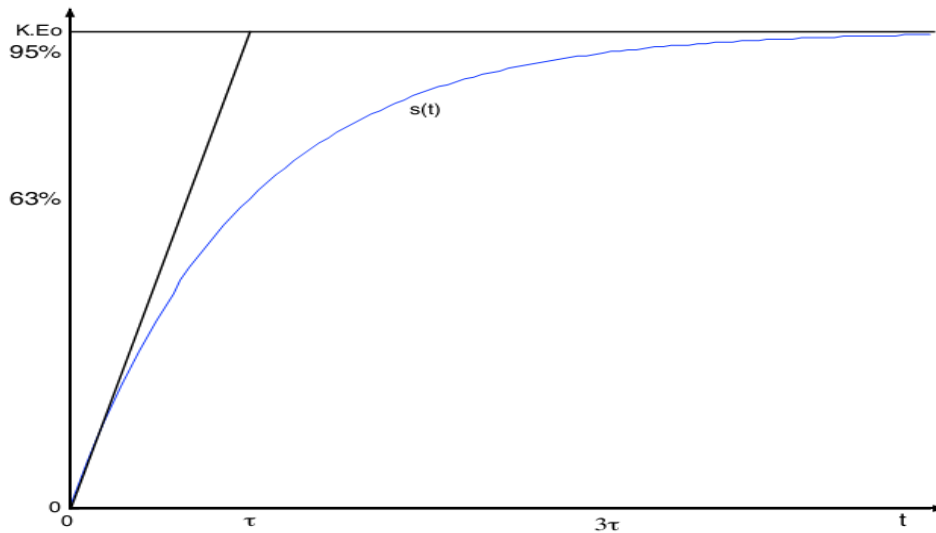


Fig. 2.8 Réponse à un échelon d'un système du premier ordre

Sur son tracé ci-dessus, on peut noter

- $S(\tau) = 0,632K.E_0$
- $\lim_{t \rightarrow \infty} s(t) = KE_0$
- la tangente à l'origine a une pente de $\frac{K.E_0}{\tau}$.
- temps de montée $\approx 2\tau$.
- temps de réponse à 5% $\approx 3\tau$.

On peut tracer la courbe en coordonnées réduites, c'est à dire le tracé de $y = \frac{s(t)}{K.E_0}$ en fonction de $x = t/\tau$ qui ne dépend plus de τ ni de K ni de l'amplitude de l'échelon d'entrée ($y = 1 - e^{-x}$).

II.4.2.3. Réponse à une rampe

L'entrée est une rampe de pente a : $e(t) = atu(t)$. Sa Transformée de Laplace est $E(p) = \frac{a}{p^2}$.

La sortie est donnée par :

$$S(p) = E(p).G(p) = \frac{K.a}{\tau} \frac{1}{p^2(p + \frac{1}{\tau})}$$

$$S(t) = K.a(t - \tau) + K.a.\tau.e^{-\frac{t}{\tau}}$$

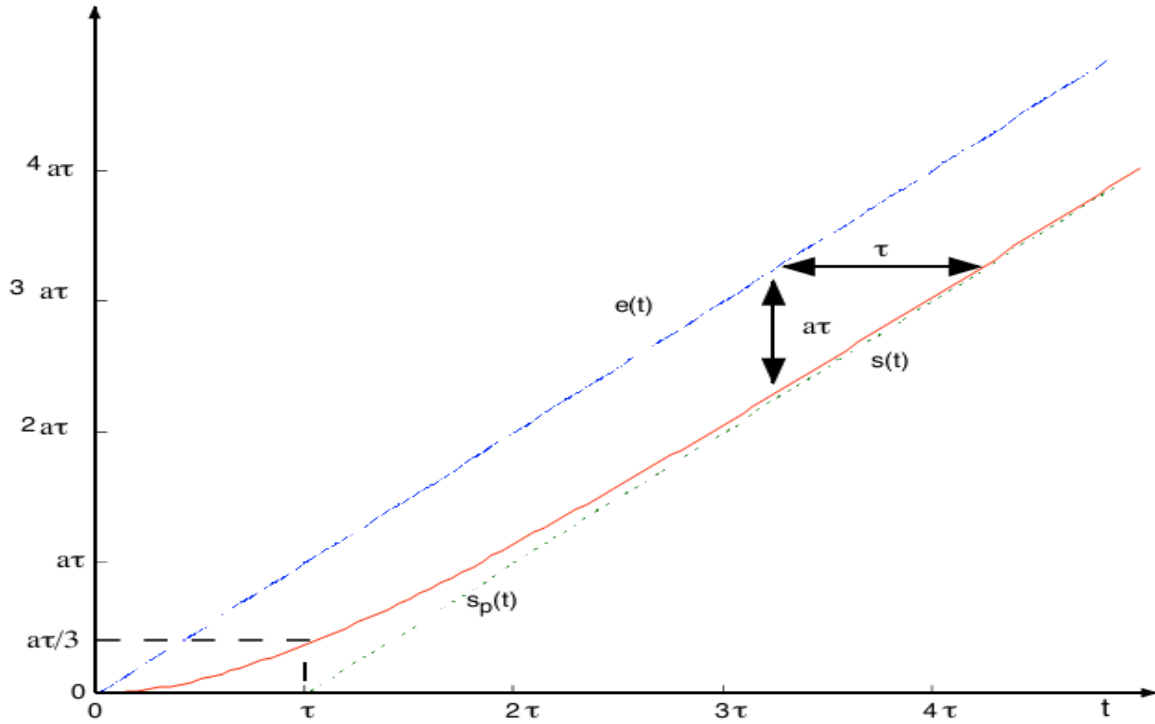


Fig. 2.9 Réponse à une rampe d'un système du premier ordre

Les caractéristiques de cette réponse sont :

- Le régime permanent est $s_p(t) = K.a.(t - \tau)$.
- Si $K = 1$, la sortie $s(t)$ suit l'entrée avec un retard constant (τ). La différence entre la sortie et l'entrée est appelée erreur de traînage et vaut $a.\tau$.
- Si $K \neq 1$, $s_p(t)$ et $e(t)$ n'ont pas la même pente. Ils divergent.

II.4.2.4. Réponse à impulsion

L'entrée est donnée par $e(t) = E_0.\delta(t)$. En Laplace : $E(p) = E_0$. La sortie est donnée par

$$S(p) = E(p).G(p) = \frac{K.E_0}{(1 + \tau p)}$$

$$S(t) = \frac{K.E_0}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

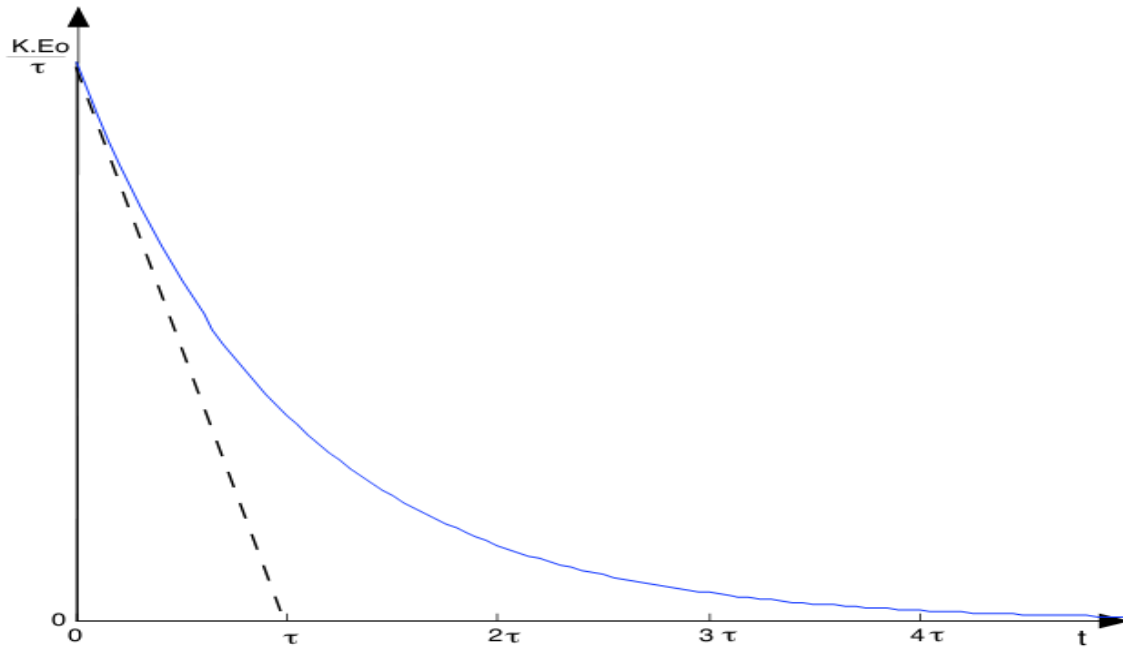


Fig. 2.10 Réponse à une impulsion d'un système du premier ordre

II.4.3. Réponse d'un système du second ordre

II.4.3.1. Fonction de transfert

Un système du premier ordre est décrit par

$$b_0 s + b_1 \frac{ds}{dt} + b_2 \frac{d^2 s}{dt^2} = a_0 e + a_1 \frac{de}{dt} + a_2 \frac{d^2 e}{dt^2}$$

Nous ne traiterons, dans ce chapitre, que les systèmes pour lesquels $(a_1 = a_2 = 0)$. La fonction de transfert de ces systèmes est écrit sous la forme :

$$G(p) = \frac{K}{1 + \frac{2zp}{w_n} + \frac{p^2}{w_n^2}}$$

avec :

K : est le gain statique du système.

w_n : est la pulsation naturelle en (rad/sec). On pourra poser $\tau_n = \frac{1}{w_n}$.

z : est la fonction d'amortissement.

Si on cherche les pôles de la fonction de transfert (les racines du dénominateur), on distingue 3 cas possibles :

$z > 1$ dans ce cas, les pôles sont réels : $-zw_n \mp \sqrt{z^2 - 1}$

$z = 1$ les deux pôles sont égaux et réels. Ils valent $-w_n$.

$z < 1$ les deux pôles sont des complexes conjugués. Ils sont à partie réelle négative si $z > 0$

II.4.3.2. Réponse à un échelon pour $z > 1$

On parle de système à fort amortissement. Les deux pôles réels p_1 et p_2 donnent une réponse qui sera la somme de deux exponentielles. Pour une entrée $e(t) = E_0 u(t) \rightarrow E(p) = \frac{E_0}{p}$, la sortie est donnée par

$$S(p) = E(p).G(p) = \frac{K.E_0.w_n^2}{p(p-p_1)(p-p_2)}$$

$$S(t) = K.E_0 \left[1 - \frac{\tau_1}{\tau_1 - \tau_2} e^{-\frac{t}{\tau_1}} + \frac{\tau_2}{\tau_1 - \tau_2} e^{-\frac{t}{\tau_2}} \right] u(t).$$

avec $p_1 = \frac{1}{\tau_1}$ et $p_2 = \frac{1}{\tau_2}$

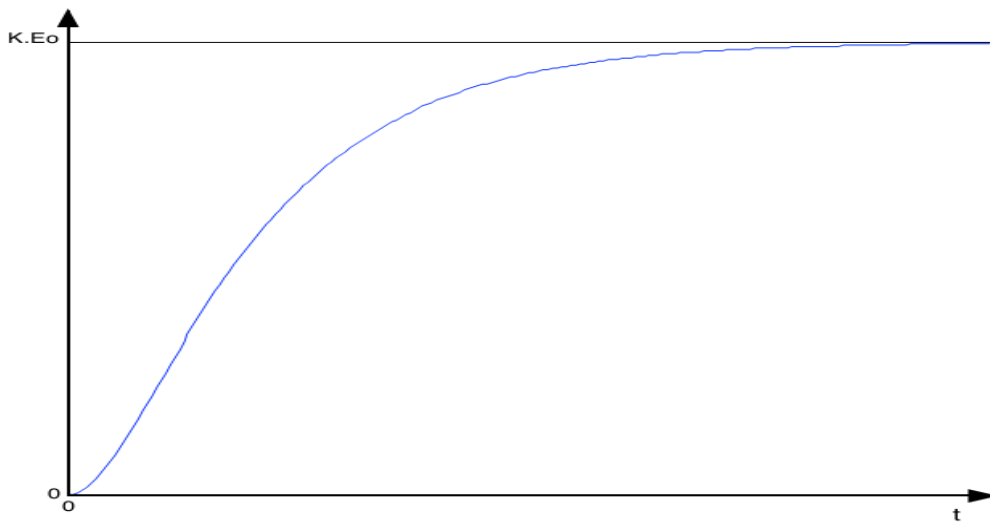


Fig. 2.11 Réponse indicielle d'un second ordre à forte amortissement

Les caractéristiques de cette réponse sont :

- le régime permanent est $s_p(t) = KE_0$
- à l'origine, la tangente est horizontale

II.4.3.3. Réponse à un échelon pour $z = 1$

Par rapport au paragraphe précédent, les pôles sont confondus.

$$S(p) = E(p).G(p) = \frac{K.w_n^2}{(p + w_n^2)^2}$$

$$S(t) = K.E_0 \left[1 - (1 + w_n t) e^{-\frac{t}{\tau_n}} \right] u(t).$$

La courbe de réponse ressemble à la courbe obtenue au paragraphe précédent, mais la croissance est plus rapide.

II.4.3.4. Réponse à un échelon pour $z < 1$

On parle de système à faible amortissement. Les pôles sont complexes conjugués. La réponse temporelle est :

$$S(t) = K.E_0 \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} e^{-zw_n t} \sin \left(w_n \sqrt{1-z^2} t + \varphi \right) \right] u(t).$$

avec $\tan \varphi = \frac{\sqrt{1-z^2}}{z}$

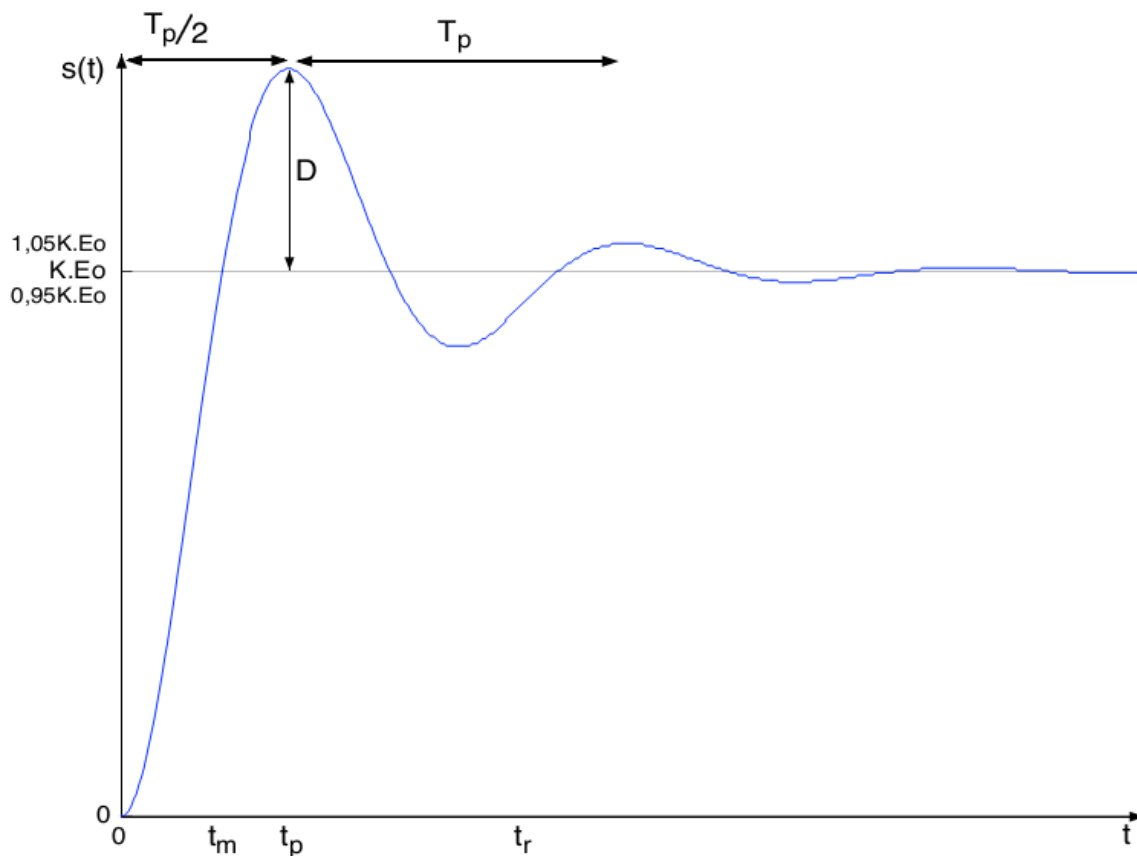


Fig. 2.12 Réponse indicielle d'un second ordre à faible amortissement

Les caractéristiques de cette réponse sont :

- le régime permanent est $s_p(t) = KE_0$

- à l'origine, la tangente est horizontale
- pulsation propre amortie

$$w_p = w_n \sqrt{1 - z^2}$$

- pseudo-période des oscillations

$$T_p = \frac{2\pi}{w_p}$$

- temps de montée (temps au bout duquel $s(t)$ atteint pour la première fois $s_p(t)$.

$$t_m = \frac{T_p}{2} \left(1 - \frac{\varphi}{\pi}\right)$$

- temps de pic

$$t_p = \frac{T_p}{2} = \frac{\pi}{w_n}$$

- temps de réponse à 5% : C'est le temps au bout duquel la sortie atteint le régime permanent à 5% près et y reste. L'abaque ci-joint donne ce temps en fonction des caractéristiques de la fonction de transfert. Une approximation pour $z \ll 1$ est

$$t_r = 3 \frac{\tau_n}{z} = \frac{3}{zw_n}$$

qui est le temps de réponse de l'enveloppe exponentielle.

- le dépassement $D = s_p(t) - KE_0$. Le calcul donne

$$D = KE_0 e^{-\frac{z\pi}{\sqrt{1-z^2}}}$$

- On peut aussi définir le dépassement relatif (sans unité) $D_r = \frac{D}{KE_0} = e^{-\frac{z\pi}{\sqrt{1-z^2}}}$
- dépassements successifs : le rapport entre deux dépassements successifs de même signe peut permettre d'identifier l'amortissement z .

$$\ln \frac{D_2}{D_1} = -\frac{z\pi}{\sqrt{1-z^2}}$$

II.4.3.5. Réponse d'un système du second ordre à une rampe

L'entrée est une rampe de pente a . $E(p) = \frac{a}{p^2}$. On en déduit la sortie

$$S(p) = E(p) \cdot G(p) = \frac{K \cdot a}{p^2(p^2 + 2zw_n p + w_n^2)}$$

pour $z > 0$

$$S(t) = K.a \left[t - \tau_1 - \tau_2 + \frac{\tau_1^2}{\tau_1 - \tau_2} e^{-\frac{t}{\tau_1}} + \frac{\tau_2^2}{\tau_1 - \tau_2} e^{-\frac{t}{\tau_2}} \right] u(t).$$

pour $z < 0$

$$S(t) = K.a \left[t - \frac{2z}{w_n} + \frac{e^{-\frac{zt}{\tau_n}}}{w_p} \cdot \sin(w_p t - \psi) \right] u(t).$$

avec $\psi = -2 \arctan \frac{\sqrt{1-z^2}}{z}$

Dans les deux cas, le régime stationnaire est une droite de pente Ka . Dans le cas $z < 1$, le régime transitoire est oscillant.

II.5. Réponse fréquentielle d'un système

II.5.1. Réponse d'un système à une sinusoïde

Considérons un système linéaire d'ordre quelconque avec une entrée et une sortie. Si l'entrée est sinusoïdale ($e(t) = E_0 \sin(wt)$), la propriété linéaire du système fait que la sortie sera également une sinusoïde, de même pulsation que l'entrée. On aura : $s(t) = S_0 \sin(wt + \varphi)$. Dans une analyse harmonique d'un système, on va faire le lien entre la fonction de transfert et la réponse de ce système à une sinusoïde. Cette réponse sera caractérisée par deux paramètres :

$$\text{Gain} = \frac{S_0}{E_0} \qquad \text{déphasage : } \varphi$$

Ces deux paramètres dépendent de la pulsation w de l'entrée. On peut montrer que :

$$\frac{S_0}{E_0} = |G(jw)| \qquad \varphi = \arg(G(jw))$$

où $G(jw)$ est l'expression de la fonction de transfert du système dans laquelle on remplace la variable de Laplace p par jw .

L'intérêt de connaître les réponses fréquentielles vient du fait que, d'après Fourier, tout signal peut être décomposé en une somme de fonctions sinus ou cosinus. La réponse à un signal quelconque sera la somme des réponses aux sinusoïdes qui composent ce signal.

L'expression analytique du gain et du déphasage en fonction de w ne sont pas 'parlantes'. On préférera avoir une représentation graphique de ces deux paramètres en fonction de la pulsation. Il existe trois types de représentations graphiques :

BODE se présente sous la forme de deux courbes :

- $|G(jw)|_{dB}$ en fonction de w (abscisses logarithmiques)
- $\varphi = \arg(G(jw))$ en fonction de w (abscisses logarithmiques)

BLACK aussi appelé NICHOLS représente $|G(jw)|_{dB}$ en fonction de φ . La courbe est graduée en w .

NYQUIST représente $G(jw)$ dans le plan complexe. La courbe est graduée en w .

II.5.2. Représentation dans le plan de BODE

II.5.2.1. Définition:

Cette représentation s'appelle également Lieu de Bode. Le gain est représenté en décibels (dB):

$$|G(jw)|_{dB} = 20 \log(|G(jw)|)$$

La construction pratique consiste en la recherche des asymptotes, leur point de concours et le calcul de quelques points particuliers. Le déphasage est souvent représenté en degrés. A part quelques rares exceptions, ce déphasage est négatif (la sortie est en retard par rapport à l'entrée).

II.5.2.2. Systèmes du premier ordre:

La fonction de transfert d'un système du premier ordre est donnée par :

$$G(p) = \frac{K}{1 + \tau p} \quad \Rightarrow \quad G(jw) = \frac{K}{1 + \tau jw}$$

Pour pouvoir tracer ce lieu dans le cas général (nous n'avons pas de valeur numérique pour K et τ , on posera $u = \tau w$ et $K = 1$. (Si $K \neq 1$, il suffira de décaler la courbe de gain de $20 \log(K)$.)

$$|G(jw)|_{dB} = 20 \log(K) - 10 \log(1 + u^2) \quad \arg(G(ju)) = -\arctan(u)$$

asymptotes :

$$|G(jw)|_{dB} = 20 \log(K) - 10 \log(1 + u^2) \quad \arg(G(ju)) = -\arctan(u)$$

- pour $u \rightarrow 0, |G(jw)|_{dB} \rightarrow 0, \arg(G(ju)) \rightarrow 0$

- pour $u \rightarrow \infty, |G(jw)|_{dB} \rightarrow -20 \log(u), \arg(G(ju)) \rightarrow -90^\circ$ Comme l'axe des abscisses est logarithmique, l'asymptote de gain est une droite de pente $-20dB/decade(u)$ et coupe l'axe pour $u = 1 (w = 1/\tau)$.
- règle des 10% : pour $u < 0.1$ ou $u > 10$, la courbe se confond avec les asymptotes.
- Pour $u = 1, |G(jw)|_{dB} = -3dB$, et $\varphi = -45^\circ$. On dira que la pulsation $u = 1 \Leftrightarrow w = 1/\tau$ est la pulsation de coupure à $-3dB$.
- Pour $u = 1, |G(jw)|_{dB} = -1dB$, et $\varphi = -26,5^\circ$.
- Pour $u = 2, |G(jw)|_{dB} = -7dB$, et $\varphi = -63,5^\circ$.

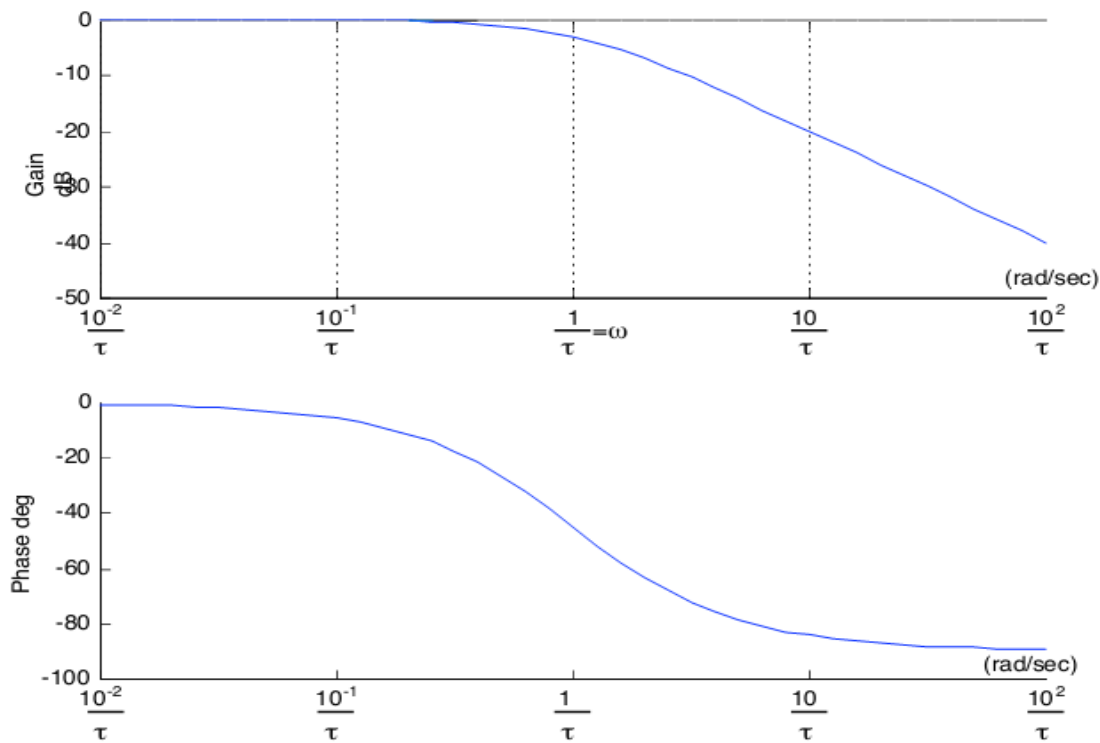


Fig. 2.13 Lieu de Bode d'un système du premier ordre

II.5.2.3. Systèmes du seconde ordre:

Un système du deuxième ordre est défini par sa fonction de transfert $G(p)$:

$$G(p) = \frac{K}{1 + \frac{2\zeta p}{w_n} + \frac{p^2}{w_n^2}} \quad \Rightarrow \quad G(jw) = \frac{K}{1 + j \frac{2\zeta w}{w_n} - (\frac{w}{w_n})^2}$$

Pour pouvoir tracer ce lieu dans le cas général (nous n'avons pas de valeur numérique pour K et w_n), on posera $u = \frac{w}{w_n}$ et $K = 1$. Si $K \neq 1$, il suffira de décaler la courbe de gain de $20 \log(K)$.

$$G(j\omega) = \frac{K}{1 + 2jz\omega - \omega^2} \Rightarrow |G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(1 - \omega^2)^2 + (2z\omega)^2}}$$

$$\arg(G(j\omega)) = -\arctan\left(\frac{2z\omega}{1 - \omega^2}\right)$$

- La recherche d'un extremum sur la courbe de gain donne :

Si $z > 0,7$ la courbe ne présente pas d'extremum. Elle reste en dessous de 0dB.

Si $z < 0,7$ la courbe a un maximum en $\omega = \sqrt{1 - 2z^2}$ c à d pour

$$\omega_R = \omega_n \sqrt{1 - 2z^2}$$

On appelle cette pulsation la pulsation de résonance. C'est en mettant en entrée une sinusoïde à cette pulsation que le gain du système sera maximal. On définit le facteur de résonance Q par :

$$Q = \frac{|G|_{\omega_R}}{|G|_{\omega \rightarrow 0}} \quad |G|_{\omega_R} = \frac{1}{2z\sqrt{1 - 2z^2}}$$

Dans les feuilles jointes, vous trouverez un réseau de courbes de Bode, pour plusieurs valeurs de z . La courbe 4.2 représenté le lieu de Bode en coordonnées réduites pour $z = 0,3$.

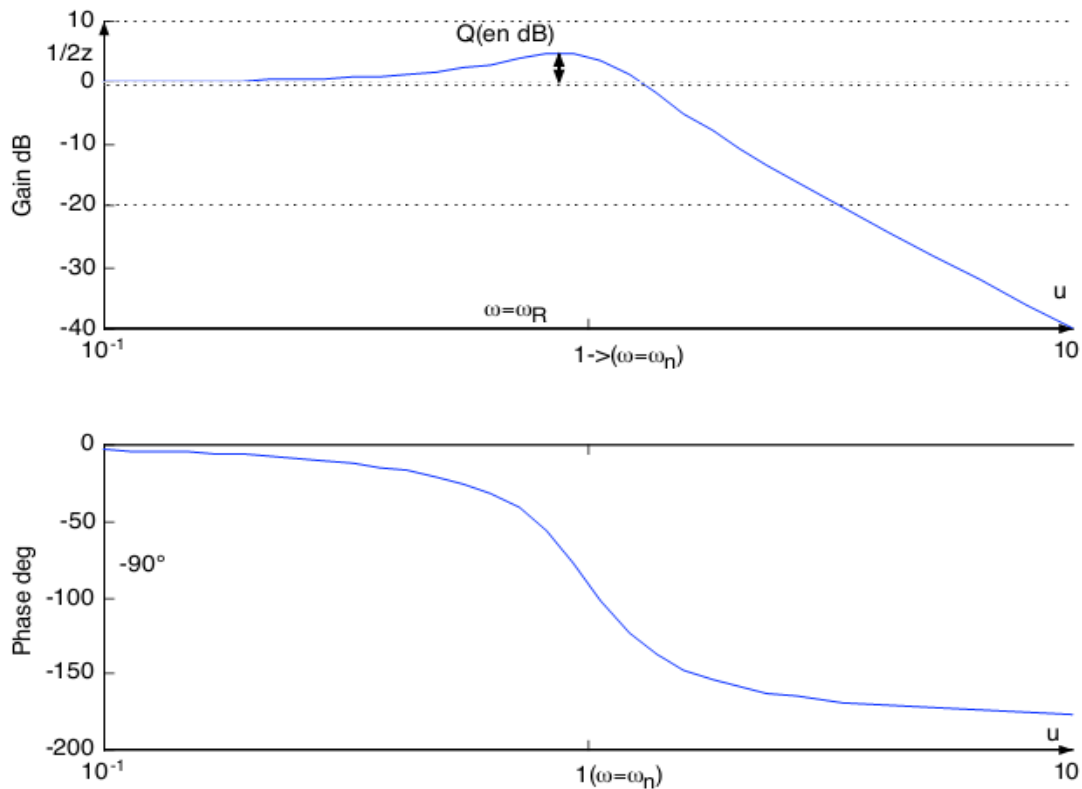


Fig. 2.14 Lieu de Bode d'un système du second ordre

II.6. Systèmes bouclés

II.6.1. Fonction de transfert d'un système bouclé

II.6.1.1. Introduction

Nous rappelons qu'en automatique, le principe fondamental est d'utiliser le feedback. La commande (ce qui est appliqué au système) est élaborée en fonction de la consigne (ce que l'on veut) et de la sortie, ce qui peut se représenter par la figure 5.1.

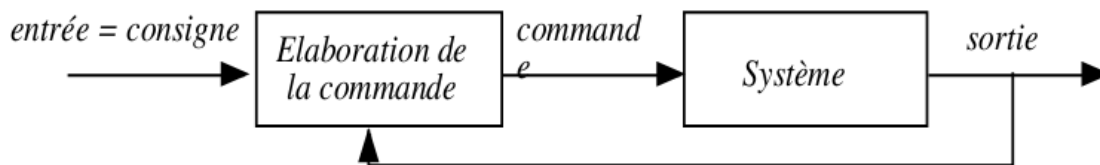


Fig. 2.15 Principe de feedback

En général, l'élaboration de la commande est basée sur

- un capteur pour mesurer la sortie
- un comparateur entre la consigne et la sortie
- un correcteur qui élabore la commande en fonction de la comparaison précédente, ce qui peut se représenter par la figure 2.16.

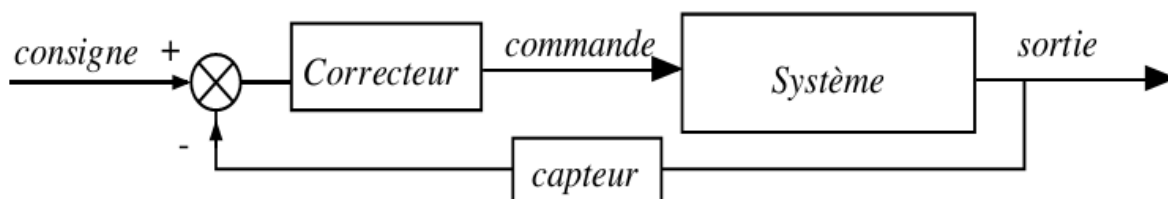


Fig. 2.16 Le correcteur est généralement placé en amont du système

Chaque boîte est représentée par une fonction de transfert. Avant d'étudier les correcteurs (comment les choisir, les régler, les mettre en place), nous allons étudier les systèmes bouclés dans leur généralité. En particulier, à partir des fonctions de transfert de la chaîne directe et de la chaîne de retour, comment trouver la fonction de transfert équivalente de l'ensemble (voir figure 2.17).

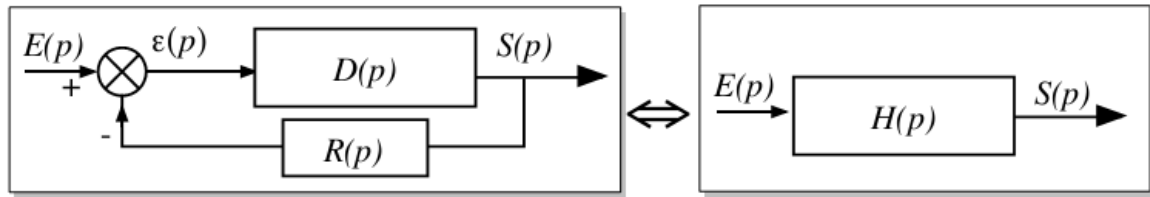


Fig. 2.17 Schéma d'un asservissement avec boucle de retour

II.6.1.2. Cas du retour unitaire

Il s'agit d'un cas particulier que l'on rencontrera souvent puisque même dans le cas où le retour n'est pas unitaire, on peut se ramener au cas d'un retour unitaire (voir plus loin). La représentation de ce système est identique à 5.3 avec $R(p) = 1$.

Pour trouver la fonction de transfert $H(p)$ de l'ensemble, il faut former $\frac{S(p)}{E(p)}$. On a

$$S(p) = D \cdot \varepsilon(p) = D(E(p) - S(p)) \Rightarrow \frac{S(p)}{E(p)} = H(p) = \frac{D(p)}{1 + D(p)}$$

II.6.1.3. Cas du retour non unitaire

Dans ce cas, $R(p) \neq 1$, ce qui donne :

$$\frac{S(p)}{E(p)} = H(p) = \frac{D(p)}{1 + R(p) \cdot D(p)}$$

On appellera Fonction de Transfert en Boucle Ouverte (FTBO), noté $G(p)$ (par convention dans ce cours), le produit :

$$G(p) = R(p) \cdot D(p)$$

Par convention également, on notera $H(p)$ la Fonction de Transfert en Boucle Fermée (FTBF). On retiendra :

$$H(p) = \frac{G(p)}{1 + G(p)} \frac{1}{R(p)}$$

Cette relation montre qu'un retour non unitaire est équivalent à un retour unitaire suivi (en cascade) d'une fonction de transfert $1/R(p)$. C'est pourquoi, dans ce mémoire, on s'intéressera surtout aux retours unitaires.

II.6.2. Bouclage sur un système du premier ordre

Un système du premier ordre est caractérisé par sa fonction de transfert en BO :

$$G(p) = \frac{K}{1 + \tau p}$$

En boucle fermée, ce système sera équivalent à un système dont la fonction de transfert est :

$$H(p) = \frac{G(p)}{1 + G(p)} = \frac{K}{K + 1} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\tau}{K+1} p} = \frac{K'}{1 + \tau' p}$$

avec $K' = \frac{K}{K+1}$ et $\tau' = \frac{\tau}{K+1}$. On en conclut qu'un premier ordre en BO reste un premier ordre en BF dont les caractéristiques (gain et constante de temps) sont divisées par $1 + K$. Il est donc plus rapide et son gain est toujours plus petit que 1. Si $K \gg 1$, le gain K' tend vers 1 et sa constante de temps est fortement diminuée.

II.6.3. Bouclage sur un système du second ordre

Un système du second ordre est caractérisé par sa fonction de transfert en BO :

$$G(p) = \frac{K}{1 + \frac{2z p}{w_n} + \frac{p^2}{w_n^2}}$$

La fonction de transfert de ce système en boucle fermée est :

$$H(p) = \frac{G(p)}{1 + G(p)} = \frac{K}{K + 1} \cdot \frac{1}{1 + \frac{2z}{w_n(K+1)} p + \frac{p^2}{w_n^2(K+1)}} = \frac{K'}{1 + \frac{2z'}{w_n} p + \frac{p^2}{w_n'^2}}$$

avec $K' = \frac{K}{K+1}$, $z' = \frac{z}{w_n(K+1)}$ et $w_n' = w_n \sqrt{1 + K}$

On en déduit que le gain est plus faible et inférieur à 1, que l'amortissement est plus faible et que la pulsation naturelle est plus grande qu'en BO. Il est important de noter que le système est toujours un deuxième ordre. La diminution de l'amortissement peut avoir comme conséquence que la réponse à l'échelon peut être oscillante en BF et pas en BO.

II.7. Stabilité des systèmes asservie

II.7.1. Condition générale de stabilité

II.7.1.1. Définition

Un système est stable si et seulement si à tout signal borné en entrée, correspond un signal borné en sortie. En automatique, on définira la stabilité par une des propositions suivantes :

Un système linéaire est stable

- lorsque sa réponse à un échelon prend une valeur finie en régime permanent,
- lorsque sa réponse à une impulsion tend vers 0,
- lorsque sa réponse à une sinusoïde est une sinusoïde d'amplitude

II.7.1.2. Condition sur la fonction de transfert.

Un système est défini par sa fonction de transfert

$$G(p) = \frac{k(p - z_1) \dots (p - z_m)}{p^\alpha (p - p_1) \dots (p - p_{n-\alpha})}$$

Sa réponse à l'échelon est de la forme :

$$s(t) = A_1 + A_1 t + A_1 t^2 + \dots + A_{\alpha+1} t^\alpha + B_1 e^{p_1 t} + \dots + B_{n-\alpha} t^{p_{n-\alpha} t}$$

Pour que $s(t)$ tende vers une valeur définie, il faut que :

- le polynôme soit de degré 0 (terme constant) donc que $\alpha = 0$.
- les exponentielles $e^{p_i t}$ soient amorties donc que les pôles p_i de la fonction de transfert soient à partie réelles négatives (strictement).

Ces conditions sont équivalentes à : *Un système linéaire est stable si et seulement si les pôles de sa fonction de transfert sont à partie réelles strictement négatives.*

II.7.1.3. Condition de stabilité d'un système bouclé

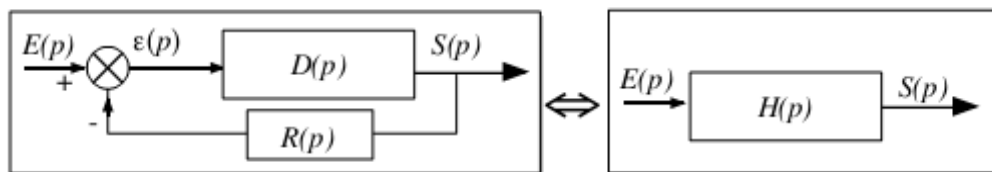


Fig. 2.18 Système bouclé

La fonction de transfert équivalente à un système boucle comme représenté en figure 1.18 est :

$$H(p) = \frac{D(p)}{1 + R(p).D(p)} = \frac{D(p)}{1 + G(p)}$$

Comme nous venons de le voir la stabilité de cette fonction de transfert est fonction de ses pôles donc des racines de son dénominateur ($1 + G(p)$). On en déduit :

Un système dont la fonction de transfert en boucle ouverte est $G(p)$ sera stable en boucle fermée si les racines de l'équation

$$1 + G(p) = 0$$

sont toutes à partie réelles négatives.

Remarques :

- si la partie réelle d'un des pôles de la fonction de transfert en BF (donc des racines de $1 + T(p)$) est nulle on parlera de limite de stabilité (réponse en oscillations entretenues).
- Un système peut être stable en BO et instable en BF - si par exemple le gain est élevé
- Réciproquement, un système peut être instable en BO et stable en BF - si par exemple il y a un intégrateur en BO.

II.7.2. Influence du gain sur la stabilité en boucle fermée

Cette influence est illustrée sur l'exemple suivant : Soit la fonction de transfert en boucle ouverte

$$G(p) = \frac{K(1 - 2p)}{p(1 + p)} = \frac{D(p)}{1 + G(p)}$$

Ce système est de type 1 donc instable en boucle ouverte. La fonction de transfert en boucle fermée est

$$H(p) = \frac{G(p)}{1 + G(p)} = \frac{K(1 - 2p)}{p(1 + p) + K(1 - 2p)}$$

La stabilité en boucle fermée dépend des pôles de $H(p)$ qui sont les solutions de l'équation :

$$p(1 + p) + K(1 - 2p) = 0$$

$$p^2 + (1 - 2K)p + K = 0$$

- Pour $K = 0,2$, les racines de l'équation seront $0,3 \mp 0,33j$ à parties réelles négatives donc le système sera stable en BF
- Pour $K = 0,6$, les racines de l'équation seront $0,1 \mp 0,77j$ à parties réelles positives donc le système sera instable en BF
- La limite de stabilité sera obtenue pour des solutions de l'équation à parties réelles nulles donc pour $K = 0,5$.

En règle général, augmenter le gain de la boucle ouverte se fait aux dépends de la stabilité en boucle fermée.

II.8. Compensation des systèmes asservis

II.8.1. Introduction

Le gain de la boucle ouverte a une action sur l'asservissement, on parle d'un correcteur proportionnel. Un correcteur est un système qui va élaborer la commande d'un système en fonction de l'erreur mesurée entre sortie et consigne (voir figure 10.1). Un correcteur proportionnel est un système qui donne une commande proportionnelle à l'erreur mesurée. Beaucoup de systèmes peuvent être commandés par ces types de correcteurs simples à mettre en œuvre. Le réglage du gain va consister à obtenir un bon compromis stabilité précision. En général, on choisira le gain qui permettra d'avoir un facteur de résonance de 2,3dB ($Q=1,3$).

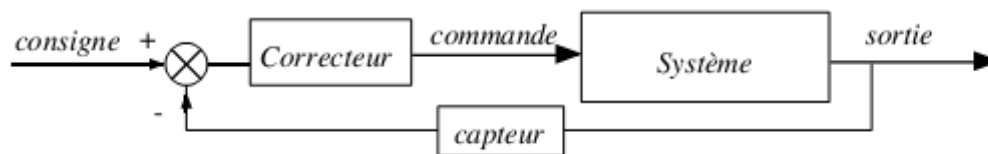


Fig. 2.19 Schéma d'un correcteur

Ces correcteurs ne sont pas toujours possibles ou suffisant. Des correcteurs plus sophistiqués peuvent permettre de

- rendre stable un système qui ne l'est pas
- augmenter la stabilité sans réduire le gain K donc la précision
- réduire ou annuler les erreurs statiques sans nuire à la stabilité

Cette partie présente le principe général des correcteurs puis présente les correcteurs les plus connus : avance de phase, retard de phase et PID.

II.8.2. Placement de pôles

Une approche mathématique du correcteur consiste à choisir la fonction de transfert "souhaitable" soit en boucle ouverte soit en boucle fermée et on en déduit mathématiquement le correcteur nécessaire. Par exemple, avec un système dont la fonction de transfert est $G(p)$,

le correcteur $C(p)$ qui permet d'avoir une fonction de transfert en BO choisie de $T(p)$ est :

$$C(p) = \frac{T(p)}{G(p)}$$

L'approche choix de la fonction de transfert en boucle fermée $H(p)$ donnerait :

$$H(p) = \frac{C(p) \cdot G(p)}{1 + C(p) \cdot G(p)} \quad \Rightarrow \quad C(p) = \frac{H(p)}{(1 - H(p)) \cdot G(p)}$$

Cependant, derrière cette approche mathématique, il faut prendre en compte plusieurs contraintes bien physiques :

Le correcteur ainsi calculé doit être causal, c'est à dire que sa sortie ne peut précéder son entrée. Cette propriété se traduit dans le fait que la fonction de transfert de $C(p)$ doit avoir un numérateur de degré inférieur à son dénominateur et qu'il ne doit pas présenter de "retard négatif "

- Le correcteur doit être stable. Ses pôles doivent donc tous être à partie réelle négatives.
- Choisir une fonction de transfert en BO ou en BF réalisable. Par exemple, en partant d'un système très lent, il est illusoire de penser le rendre très rapide ainsi car les commandes nécessaires seront sans doute irréalistes.
- La réalisation pratique d'un correcteur quelconque n'est pas toujours possible. La plupart des correcteurs du marché ne proposent qu'un choix limité de nature de correcteurs (souvent, des PID -voir plus loin)

II.8.3. Correcteur Proportionnel Intégrateur et Dérive (PID)

Le régulateur standard le plus utilisé dans l'industrie est le régulateur PID (proportionnel intégral dérivé), car il permet de régler à l'aide de ses trois paramètres les performances (amortissement, temps de réponse, ...) d'un processus modélisé par un deuxième ordre. Nombreux sont les systèmes physiques qui, même en étant complexes, ont un comportement voisin de celui d'un deuxième ordre. Par conséquent, le régulateur PID est bien adapté à la plupart des processus de type industriel et est relativement robuste par rapport aux variations des paramètres du procédé, quand on n'est pas trop exigeant sur les performances de la boucle fermée par rapport à celles de la boucle ouverte (par exemple, accélération très importante de la réponse ou augmentation très importante de l'amortissement en boucle fermée).

Si la dynamique dominante du système est supérieure à un deuxième ordre, ou si le système contient un retard important ou plusieurs modes oscillants, le régulateur PID n'est plus adéquat et un régulateur plus complexe (avec plus de paramètres) doit être utilisé, au dépend de la sensibilité aux variations des paramètres du procédé.

II.8.3.1. Les actions PID

En pratique, à une catégorie donnée de systèmes à asservir correspond un type de correcteur adopté. Pour effectuer un choix judicieux, il faut connaître les effets des différentes actions : proportionnelle, intégrale et dérivée.



Fig. 2.20 Schéma synoptique d'un régulateur PID

Un régulateur PID est obtenu par l'association de ces trois actions et il remplit essentiellement les trois fonctions suivantes :

1. Il fournit un signal de commande en tenant compte de l'évolution du signal de sortie par rapport à la consigne
2. Il élimine l'erreur statique grâce au terme intégrateur
3. Il anticipe les variations de la sortie grâce au terme dérivateur.

La commande $U(t)$ donnée par le régulateur PID, dans sa forme Classique est décrite par :

$$U(t) = K_p \left[\varepsilon(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t \varepsilon(\tau) d\tau + T_d \frac{d\varepsilon}{dt} \right]$$

Elle est la somme de trois termes :

- le terme proportionnel $P = K_p \varepsilon(t)$
- le terme intégral $I = K_p \frac{1}{T_i} \int_0^t \varepsilon(\tau) d\tau$
- le terme dérivatif $D = K_p T_d \frac{d\varepsilon}{dt}$

Les paramètres du régulateur PID sont le gain proportionnel K_p , le temps intégral T_i et le temps dérivatif T_d , les temps étant exprimés en secondes.

II.8.3.2. L'action proportionnelle

La sortie $U(t)$ du régulateur proportionnel est donnée en fonction de son entrée $\varepsilon(t)$ qui représente l'écart entre la consigne et la mesure par la relation :

$$U(t) = K_p \varepsilon(t)$$

Le rôle de l'action proportionnelle est de minimiser l'écart ε entre la consigne et la mesure et elle réduit le temps de monter et le temps de réponse. On constate qu'une augmentation du gain K_p du régulateur entraîne une diminution de l'erreur statique et permet d'accélérer le comportement global de la boucle fermée. On serait tenté de prendre des valeurs de gain élevées pour accélérer la réponse du procédé mais on est limité par la stabilité de la boucle fermée. En effet, une valeur trop élevée du gain augmente l'instabilité du système et donne lieu à des oscillations.

II.8.3.3. L'action dérivée

Elle est une action qui tient compte de la vitesse de variation de l'écart entre la consigne et la mesure, elle joue aussi un rôle stabilisateur, contrairement à l'action intégrale.

En effet, elle délivre une sortie variant proportionnellement à la vitesse de variation de l'écart ε :

$$U(t) = T_d \frac{d\varepsilon}{dt}$$

avec T_d le dosage de l'action dérivée, exprimé en minutes ou en secondes. L'action dérivée va ainsi intervenir uniquement sur la variation de l'erreur ce qui augmente la rapidité du système (diminution des temps de réponses). L'action dérivée permet aussi d'augmenter la stabilité du système par apport de phase ($+\frac{\pi}{2}$ ce qui augmente la marge de phase). L'annulation de cette action en régime statique impose donc de ne jamais l'utiliser seule : l'action dérivée n'exerce qu'un complément à l'action proportionnelle.

En pratique, il est souhaitable de limiter l'action dérivée afin de ne pas amplifier les bruits haute fréquence et de limiter l'amplitude des impulsions dues aux discontinuités de l'écart. Lorsque la période d'échantillonnage T_e est petite, la différence vers l'arrière (Approximation d'Euler rétrograde) nous permet d'approcher la dérivée d'un signal à temps continu par :

$$\frac{df}{dt} = \frac{f(t) - f(t - T_e)}{T_e}$$

II.8.3.4. L'action intégrale

L'action intégrale agit proportionnellement à la surface de l'écart entre la consigne et la mesure, et elle poursuit son action tant que cet écart n'est pas nul. On dit que l'action intégrale

donne la précision statique (Elle annule l'erreur statique). L'action intégrale est conditionnée par le temps d'intégrale T_i .

$$I = \frac{1}{T_i} \int_0^t \varepsilon(\tau) d\tau$$

Comme dans le cas de l'action proportionnelle, un dosage trop important de l'action intégrale engendre une instabilité de la boucle de régulation. Pour son réglage, il faut là aussi trouver un compromis entre la stabilité et la rapidité.

L'ajout du terme intégral permet d'améliorer la précision mais en contrepartie, il introduit malheureusement un déphasage de $-\frac{\pi}{2}$ ce qui risque de rendre le système instable du fait de la diminution de la marge de phase.

Enfin, le correcteur intégral présente le défaut de saturer facilement si l'écart ne s'annule pas rapidement ce qui est le cas des systèmes lents. En effet, tout actionneur est limité : un moteur est limité en vitesse, une vanne ne peut pas être plus que totalement ouverte ou totalement fermée. Il se peut que la variable de commande amène l'actionneur à sa limite ce qui suspend la boucle de retour et le système aura une configuration assimilable à une boucle ouverte puisque l'actionneur demeurera saturé indépendamment de la sortie du système.

Quand l'erreur est réduite (action intégrale non saturée), il se peut qu'il faille un temps important pour que les valeurs des variables ne soient correctes de nouveau : on appelle ce phénomène l'emballement du terme intégral.

Pour l'éviter, on peut :

- ❖ soit suspendre l'action intégrale quand la commande est saturée ;
- ❖ soit appliquer une méthode d'anti-saturation, qui consiste à recalculer le terme intégral pour ne pas saturer.

II.8.4. Le régulateur PI

Le correcteur intégral est en général associé au correcteur proportionnel, il élabore alors une commande qui peut être donnée par la relation suivante :

$$U(t) = K_p \left[\varepsilon(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t \varepsilon(\tau) d\tau \right]$$

La fonction de transfert du correcteur est alors donnée par :

$$C(p) = K_p \frac{1 + T_i p}{T_i p}$$

Pour un régulateur intégral pur, le régime dynamique est relativement long. D'un autre côté, le régulateur proportionnel réagit immédiatement aux écarts de réglage mais il n'est pas en mesure de supprimer totalement l'erreur statique. La combinaison des actions proportionnelle et intégrale permet d'associer l'avantage du régulateur P, c'est-à-dire la réaction rapide à un écart de réglage, à l'avantage du régulateur I qui est la compensation exacte de la grandeur pilote.

II.8.5. Le régulateur PID

L'action conjuguée PID permet une régulation optimale en associant les avantages de chaque action : la composante P réagit à l'apparition d'un écart de réglage la composante D s'oppose

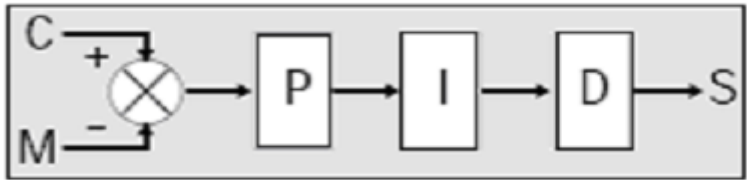
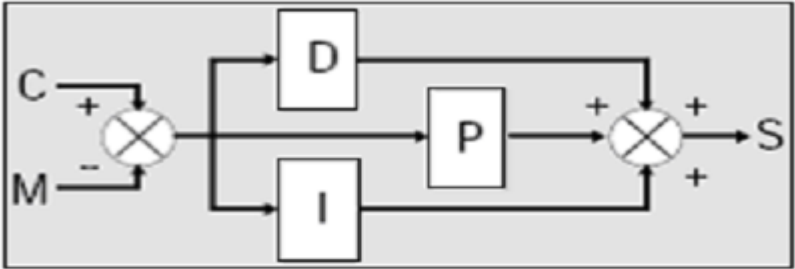
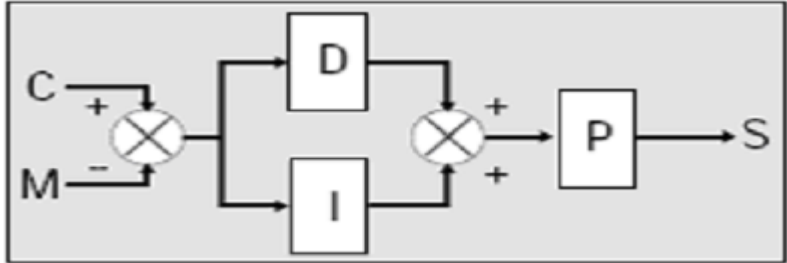
Structure du régulateur PID	Schéma et fonction de transfert
Série	 $U(t) = K_p \left[\varepsilon(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t \varepsilon(\tau) d\tau + T_d \frac{d\varepsilon}{dt} \right]$
Parallèle	 $U(t) = K_p \left[\varepsilon(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t \varepsilon(\tau) d\tau + T_d \frac{d\varepsilon}{dt} \right]$
Mixte	 $U(t) = K_p \left[\varepsilon(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t \varepsilon(\tau) d\tau + T_d \frac{d\varepsilon}{dt} \right]$

Tableau II.1 Différentes structures du régulateur PID

aux variations de la grandeur réglée et stabilise la boucle de régulation et la composante I élimine l'erreur statique. Et c'est pour cela que ce type de correcteur est le plus utilisé en milieu industriel.

Dans un régulateur PID, il existe plusieurs façons d'associer les paramètres P, I et D. en effet, le correcteur PID peut avoir une structure série, parallèle ou mixte :

II.9. Conclusion

Dans ce chapitre les différents concepts de modélisation et représentation des systèmes physiques sont présentés en détaille avec les outils mathématiques requis , ensuite, nous avons illustrés quelques méthodes d'analyse (mathématique et graphique) de la stabilité des systèmes linéaire invariant dans le temps (LTI). La fin de ce chapitre est consacré aux méthodes de régulation qui garantie la stabilité de ces systèmes avec des performances raisonnables. Ces théories exhibées ici doivent utiliser sur un système réel, qui fait l'objet du prochain chapitre.

Chapitre III

Asservissement de vitesse d'un moteur électrique

III.1. Introduction

Étant donné que l'asservissement d'un moteur utilise une boucle fermée, il est nécessaire de disposer d'un capteur de position angulaire ou de vitesse angulaire. L'information retournée pourra être utilisée directement (cas d'une boucle à retour unitaire) ou retraitée par calculs pour en déduire une information plus exploitable, comme la vitesse de déplacement d'un robot ou sa position, l'angle en sortie d'un réducteur, ...

Pour ce faire, plusieurs dispositifs existent, parmi lesquels :

- Encodeurs rotatifs incrémentaux (avec ou sans quadrature de phase, optique ou à effet hall) : capteurs équipés d'un dispositif optique ou magnétique émettant N impulsions par tour. Les plus élaborés permettent de déterminer le sens de rotation (deux signaux en quadrature, le déphasage donne le sens de rotation), voire même une position absolue.
- Tachogénératrices : capteurs renvoyant une tension analogique proportionnelle à la vitesse de rotation.
- Règles optiques : utilisent l'interférométrie optique pour obtenir une très haute résolution (supérieure à $1\mu\text{m}$).
- Resolvers : utilisent des bobines en mouvement relatif produisant des signaux déphasés renseignant sur l'angle de l'arbre.

III.2. Modélisation du système

III.2.1. système physique

Considérant un DC moteur à la quel sa circuit électrique d'induit et le diagramme à corps libre de rotor sont identifié au Fig.3.1

Le rotor et l'axe sont supposés rigides, considérant les valeurs des paramètres physiques suivants:

Moment d'inertie rapporté au rotor	$J = 0,01 \text{ kg. m}^2$
Résistance aux bornes	$R = 1 \Omega$
Inductance	$L = 0,5 \text{ H}$
Constante de couple	$K = 0,01 \text{ Nm/A}$
Force de frottement	$b = 0,1 \text{ Nms}$

L'entrée est le voltage d'inductance V en Volts (géré par le voltage source). Les valeurs mesurées sont la vitesse angulaire de l'axe en radian par seconde et la position angulaire θ en radian.

Le couple moteur, T , est lié à le courant de bobinage, i , par le facteur constant K

$$T = Ki \quad (1)$$

La force électromotrice (fem), V_b , est reliée a la vitesse angulaire par:

$$V_b = Kw = K \frac{d\theta}{dt} \quad (2)$$

À partir de la première équation on peut écrire les équations suivantes basant sur la loi de Newton combinée avec la loi de Kirchhoff

$$J \frac{d^2\theta}{dt^2} + b \frac{d\theta}{dt} = Ki \quad (3)$$

$$L \frac{di}{dt} + Ri = V - K \frac{d\theta}{dt} \quad (4)$$

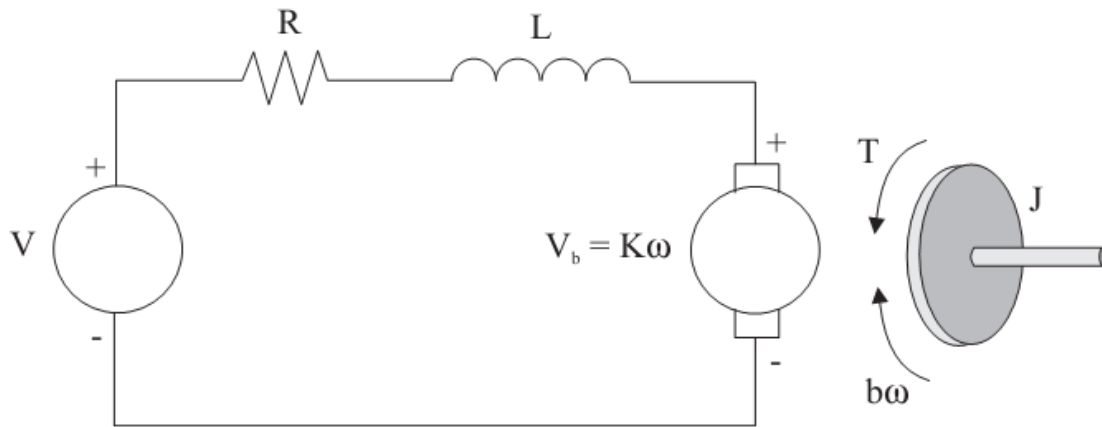


Fig. 3.1 Schematic representation of the considered DC motor.

Dans ce travail, on propose un désigne fréquemment utilisé dans la différente installation industrielle comme les processus chimique et pétrochimique et aussi dans l'industrie des produits pharmaceutique qui est l'utilisation des plusieurs réservoirs en série, dans cela on va commencer par la description du système (le système choisi ici est les trois réservoirs), ensuite la construction d'un modèle linéaire qui peut reflet bien son dynamique. Une fois la fonction du transfert est tenue la tache de régulation est fait pour cela on va utiliser un contrôleur PID avec des différentes considérations. Pour clarifier l'importance des trois gains K_p , T_i et T_d , on va les choisir arbitrairement dans la première considération ensuite

optimisation sera prendre une place à l'aide d'un outil d'optimisation (PID tuner) pour avoir des coefficients de PID avec des performances acceptables.

III.2.1. Fonction de transfert

Utilisant la transformation de Laplace, les équations (3) et (4) sont écrites:

$$Jp^2\theta(s) + bp\theta(s) = KI(s) \quad (5)$$

$$LsI(s) + RI(s) = V(s) - Ks\theta(s) \quad (6)$$

où s représente l'opérateur de Laplace. De (6), on peut écrire $I(s)$:

$$I(s) = \frac{V(s) - Ks\theta(s)}{Ls + R}$$

on substitue dans (5) pour obtenir:

$$Jp^2\theta(s) + bp\theta(s) = K \frac{V(s) - Ks\theta(s)}{Ls + R} \quad (7)$$

cet équation de moteur DC est représenté en bloc diagramme comme suit Fig.3.2

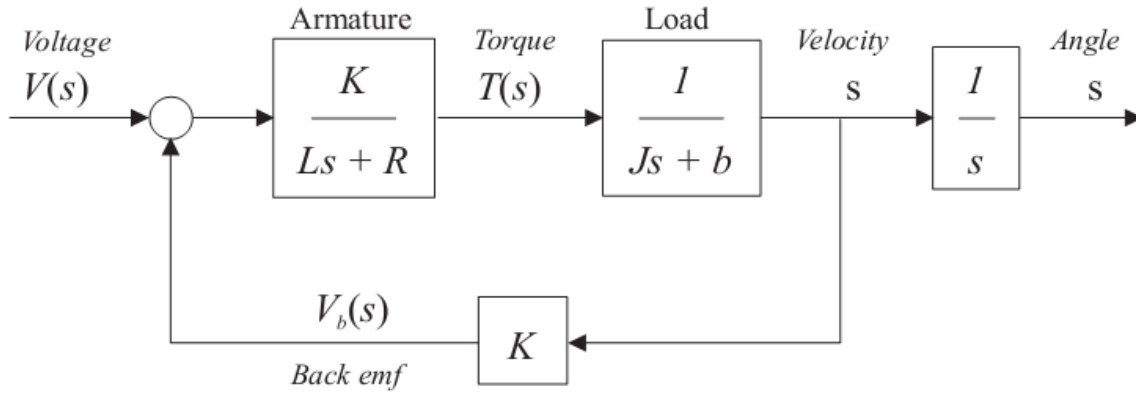


Fig. 3.2 Schéma fonctionnelle d'un moteur électrique

La fonction de transfert de $V(s)$ d'après l'équation (8) par rapport à θ est:

$$G_a(p) = \frac{\theta(p)}{V(p)} = \frac{K}{p[(Lp + R)(Jp + b) + K^2]} \quad (9)$$

D'après le bloc diagramme en Fig.3.2, on peut facilement voir que la fonction de transfert liée l'entrée $V(s)$ à la vitesse angulaire w est:

$$G_v(p) = \frac{w(p)}{V(p)} = \frac{K}{(Lp + R)(Jp + b) + K^2} \quad (10)$$

III.2.1.1. Étude de stabilité

Pour vérifier la stabilité du système on calcule tout d'abord sa fonction de transfert en boucle fermé comme suite :

$$G_{BF}(p) = \frac{G_{BO}(p)}{1 + G_{BO}(p)}$$

D'ou

$$G_{BF}(p) = \frac{K}{(Lp + R)(Jp + b) + K^2} = \frac{0,001}{0,005p^2 + 0,06p + 0,1001} = \frac{N(p)}{D(p)}$$

Les racines du dénominateur $D(p)$ sont

$$r_1 = -9.9975, r_2 = -2.0025.$$

Le système présente deux racines ont des parties réelles négatives ; donc le système est stable.

III.2.1.2. La réponse indicielle

La fonction du transfert du système avec une entrée échelon unitaire est :

$$S(p) = E(p).G(p) = \frac{0,001}{p(0,005p^2 + 0,06p + 0,1001)}$$

La réponse est indiquée dans la figure suivante :

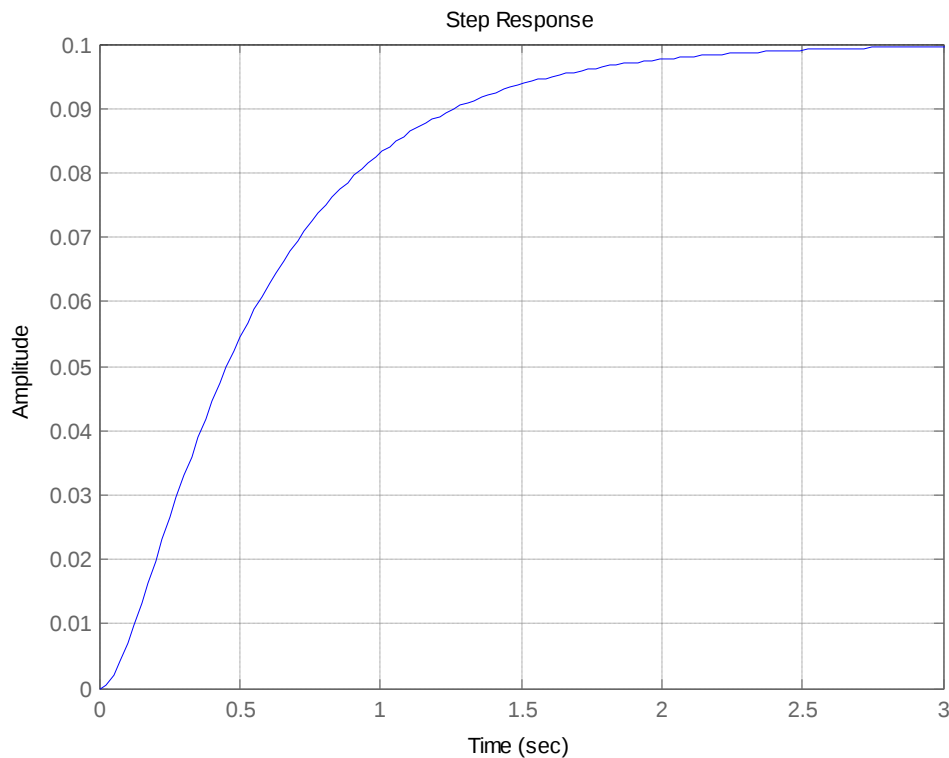


Fig. 3.3 Réponse à échelon du système libre

La figure 3.3 représente la réponse du système à une entrée échelon où on remarque que le système est stable et converge à le point de fonctionnement. La réponse de système est un peu lente, cela peut influencer sur les performances demandées au cahier des charges. Pour cela un contrôleur doit prendre une place afin d'améliorer les performances de réponse.

III.2.1.3. Un régulateur P

Le Simulink bloc du système avec un contrôleur P est représenté dans figure 3.5

La fonction du transfert d'un régulateur P est

$$C_P(p) = K_p$$

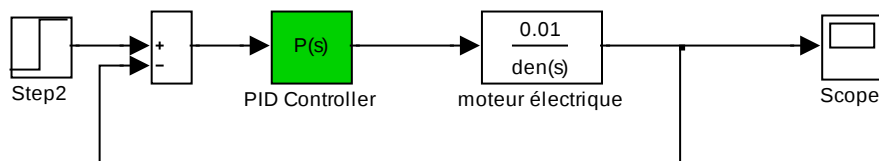


Fig. 3.4 Bloc Simulink du système avec un contrôleur P

Les paramètres du contrôleur sont choisis arbitrairement $K_p = 100$.

La réponse est indiquée dans la figure suivante :

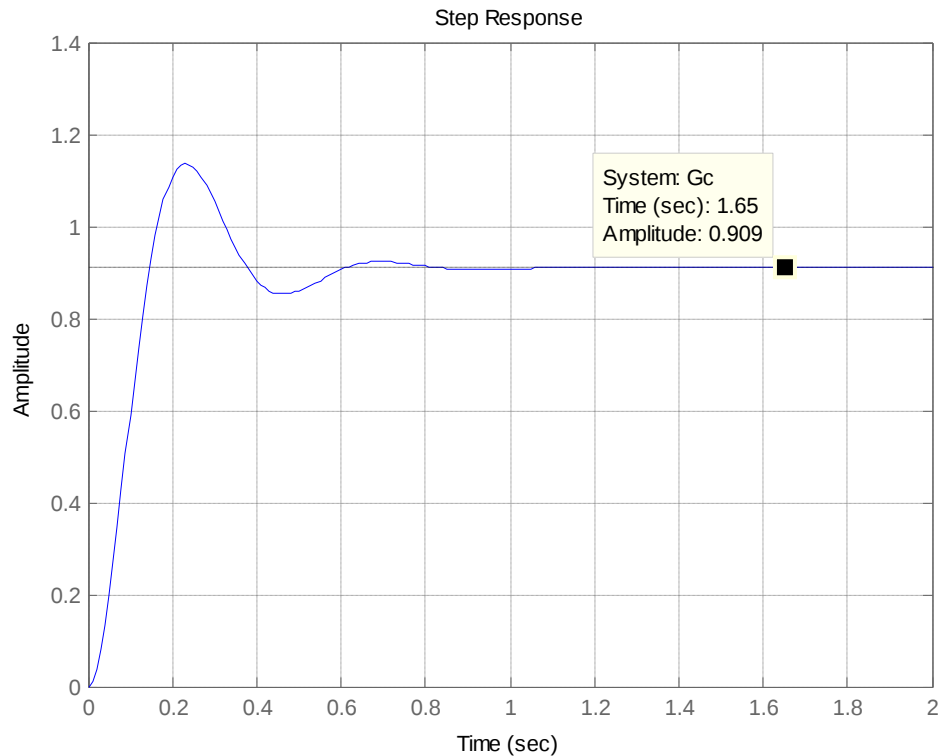


Fig. 3.5 Réponse indicielle du système avec un P

Le système est devenu plus rapide mais il présente un écart statique où il se stabilise à l'amplitude de 0,909 comme la figure indique, ce écart due à l'absence d'une action intégrale qui assure l'annulation de l'erreur statique. Le dépassement est important (environ de 1,15) et ça peut aussi dégrader les performances. L'action dérivée (D) peut être utilisée à diminuer ce problème. Le choix des valeurs des paramètres du contrôleur joue un rôle important dans l'amélioration des performances. Les valeurs choisies sont les suivantes: $K_p = 100$, $K_i = 50$, $K_d = 20$.

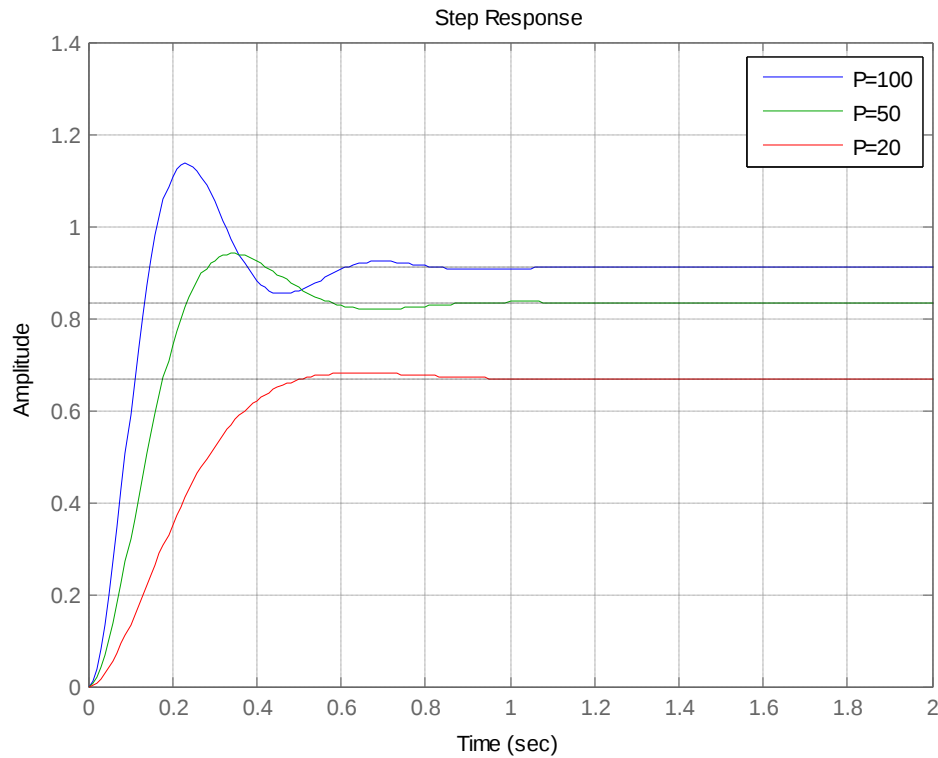


Fig. 3.6 Réponse indicielle du système avec et sans optimisation des paramètres du PI

On voit clairement dans la figure 3.6 que le changement des paramètres du contrôleur influe sur la réponse.

III.2.1.4. Un régulateur PID

Le schéma fonctionnel du système avec un contrôleur PID est

la fonction du transfert d'un régulateur PID en parallèle (schéma réel) est

$$C_{PID}(p) = K_p \left(1 + \frac{1 + T_i p}{T_i p} + T_d p \right)$$

Les paramètres du contrôleur sont choisis $K_p = 0,1$, $T_i = 0,2$, $T_d = 0,5$.

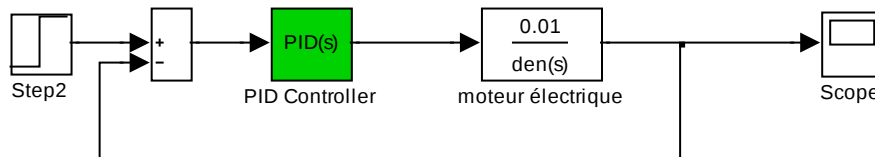


Fig. 3.7 Bloc Simulink du système avec un contrôleur PID

La réponse est indiquée dans la figure suivante :

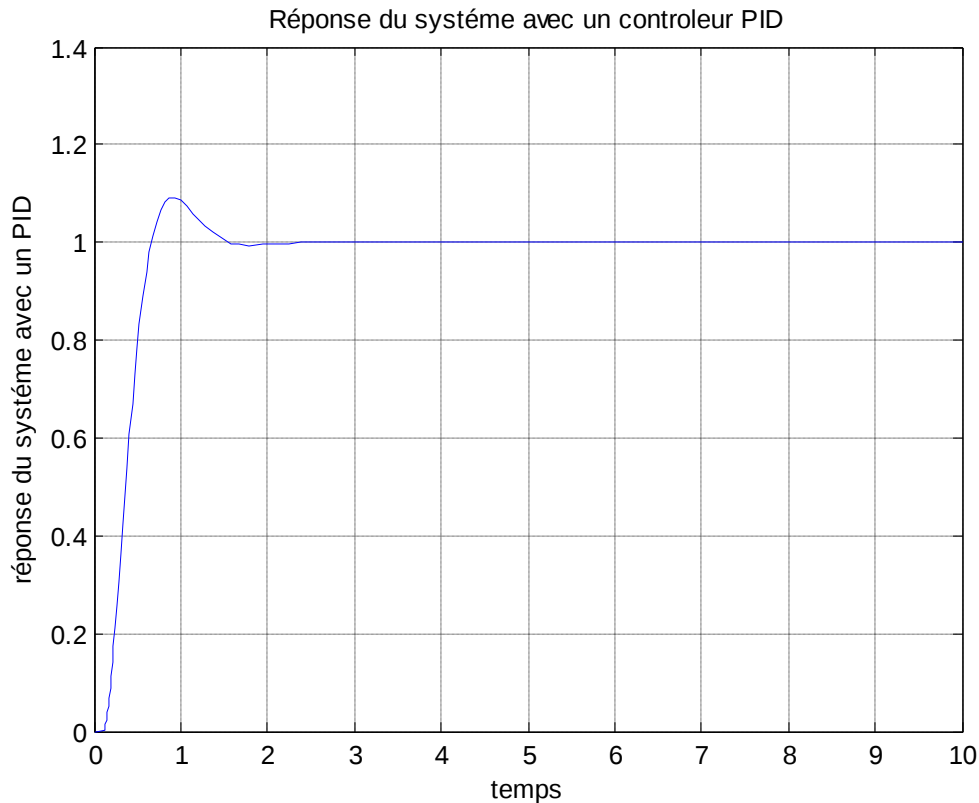


Fig. 3.8 Réponse indicielle du système avec un PID non optimisé

Le système est devenu stable après l'introduction d'un contrôleur à son boucle directe. Les performances sont améliorées par l'utilisation de ce contrôleur (La figure ci-dessus) où le temps de réponse est fini et aussi le dépassement. La fonction intégrale élimine l'erreur statique. Le choix des valeurs des paramètres du contrôleur joue un rôle important dans l'amélioration des performances. C'est pour cela le programme Matlab-Simulink offre un outil pour choisir les valeurs optimales de ces paramètres qui s'appelle (PID tuner). Les valeurs optimisées sont les suivantes:

$$K_p = 17.93, T_i = 43.4, T_d = -0.07$$

III.3. Conclusion

Nous avons vu que le PID appliqué aux moteurs électriques à courant continu était un régulateur qui pouvait offrir de bonnes performances, que ce soit au niveau de la précision, du temps de réaction, du dépassement, ou de la stabilité. Diverses méthodes permettent d'optimiser les coefficients du PID. Mais le régulateur idéal n'existe pas : chaque

optimisation d'un paramètre (précision, ...) se fait aux dépens d'un autre. Il convient alors de trouver le meilleur compromis en fonction des exigences initiales du cahier des charges.

Divers éléments, tels que le choix de la méthode d'implantation du PID, peuvent aussi avoir des conséquences sur les performances. L'essentiel est alors de s'éloigner le moins possible du modèle théorique pour qu'il reste valable.

CONCLUSIONS GENERALES

Dans ce mémoire on a introduit les principaux concepts de l'Automatique : la notion de modèle d'un système, la structure de commande à contre-réaction et le concept de stabilité des systèmes dynamiques et le problème de stabilité, ainsi que la conception des régulateurs des différents types assurant cette stabilité et améliorant les performances du système.

Quand l'implantation du PID conventionnel est mise en place dans le système, il génère un dépassement importante, et sa ce n'est pas la performance désirée. D'ou après l'implantation du contrôleur PID auto-tuner, on peut remarquer que le dépassement est diminue considérablement comparant par le premier cas (PID conventionnel). Finalement l'optimisation est encore amélioré par l'utilisation d'un contrôleur PID étendue où la marge de la phase et du gain et ajustable et sa pour amélioré aussi la sensibilité du contrôleur.

Le control de vitesse des moteur électrique est demandé partout dans le domaine du l'industrie compris l'industrie l'électrique et de pétrole, sites de développement, l'industrie du papier...ect. Donc le contrôle et la stabilisation de ces opérations attire des intérêts de recherche, et reste toujours garder des futures possibilités sur lui.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUE

- [1] Daniel; R. Etienne; D. Mickaël; C.:” Asservissement par PID “. In: Proceedings of the 28th IEEE Conference on Decision and Control, vol. 2, pp. 1047–1052 (1989)
- [2] Farhad ,A, Mohd. Zeeshan ; H.: An Implementation and Comparative Analysis of PID Controller and their Auto Tuning Method for Three Tank Liquid Level Control". International Journal of Computer Applications 0975 – 8887 (2011)
- [3] J.Baillou, J.P.Chemla, B. Gasnier, M.Lethiecq.: "Cours de Systèmes Asservis". Polytech"Tours.
- [4] Nikolov, E., Stanislav, E.: “Asservissement et régulation continue ”. université technique de Sofia (2009)
- [5] Sakli, M.:” Système de Régulation de Niveau d'eau". Projets de fin détude École Nationale d' Ingénieurs de GABÈS TUNISIE (2007)
- [6] Le PID utilisé en régulation de position et/ou de vitesse de moteurs électriques, Christophe Le Lann 2007,

Sites Internet:

The Michigan Open Control and Process Textbook :

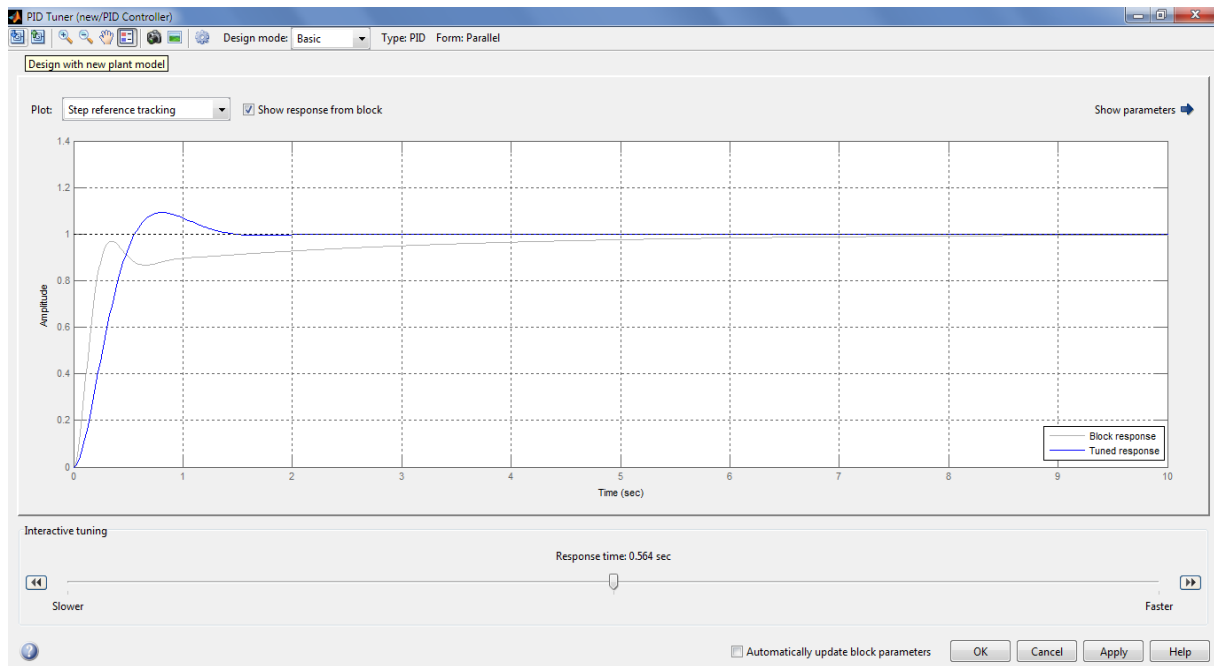
[http ://controls.engin.umic h.edu/wiki/index.php/PIDTuningClassical](http://controls.engin.umic h.edu/wiki/index.php/PIDTuningClassical)

L'asservissement PID

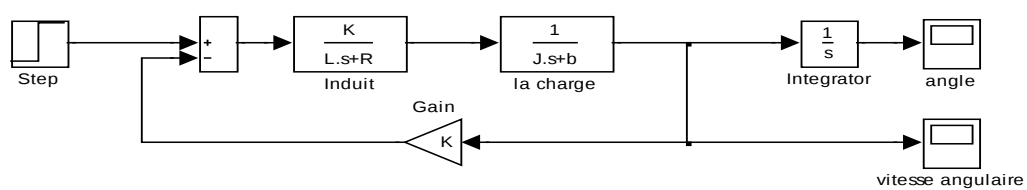
[http ://ancrobot .free.fr/ches/pdf/index\(2\).pdf](http://ancrobot .free.fr/ches/pdf/index(2).pdf)

ANNEXE

1. Interface du Matlab/Simulink de PID tuner



2. Bloc Simulink d'un moteur électrique



model Simulink d'un moteur electrique DC