

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche
Scientifique



UNIVERSITÉ D'EL-OUED

FACULTÉ DES SCIENCES ET DE TECHNOLOGIE

Mémoire de fin d'étude

LICENCE ACADEMIQUE

Domaine: Mathématiques et Informatique

Filière: Mathématiques

Spécialité: Modélisation mathématiques & simulation
numérique

Présenté par : **BECHIRI Mohammed Bachir**

BELLILA Yahia

HABITA Adnane

Thème

**Etude algébrique et topologique des espaces
fonctionnels**

Soutenu le 05 juin 2014

Devant le jury composé de:

Mr. MESAÏ AOUN Mohammed Salah
Mr. GHAMEM HAMED El aid
Mr. HABITA Khaled

MA (A) Univ. El Oued Président
MC (B) Univ. ElOued examinateur
MA (A) Univ. ElOued Rapporteur

إهداء:

بسم الله و الصلاة و السلام على حبيبنا و قرّة العيننا محمد بن عبد الله، أبدأ
بشكري لمن سجدت له الجباه و تغنّت باسمه الشفاه، خالق البشر و كاتب
القدر ومنبت الشجر ومخرج الماء من الحجر ربي جل جلاله.

نهدي ثمرة جهدنا و عملنا المتواضع إلى من قال الله تعالى فيهم:

"وأخفض لهما جناح الذل من الرحمة وقل رب أرحمهما كما ربياني صغيراً"

الآية 24 من سورة الإسراء

إلى من كانوا سببا في وجودنا وأوصى عليهما جل جلاله
الوالدان العزيزان أطال الله عمرهما بالصحة والهناء.
إلى كل الأقارب من إخوة وأخوات و عمات و خالات وأعمام
وأخوال وأولادهم كل باسمه.
إلى كل من ساعدنا و لو بكلمة تشجيعية و إلى أصدقائنا و
أحبائنا كل باسمه . و كل أساتذتنا الكرام ونخص بالذكر
أستاذنا الفاضل هبيته خالد الذي لم ييخلنا وقته وكان وراء كل
كبيرة وصغيرة.

والى كل من علمنا حرفا من الابتدائي حتى الجامعي وإلى كل
من ساعدنا في هذا العمل من قريب أو من بعيد.

يحي- محمد البشير- عدنان

Table des matières

Introduction générale	2
1 Structures algébriques des espaces fonctionnels	3
1.1 Notions algébriques générales	3
1.2 Structures algébriques des espace fonctionnels	5
2 Structure topologique des espaces fonctionnels	10
2.1 Structure métrique des espaces fonctionels	10
2.2 Convergence simple et convergence uniforme	18
3 Théorèmes fondamentaux	22
3.1 Etude topologique de l' espace $C([a, b])$	22
3.2 Continuité d'une limite uniforme locale de fonctions continues	24
3.3 Le théorème du double passage à la limite	26
Bibliographie	28

Introduction générale

Les espaces fonctionnels sont les espaces dont les éléments sont des fonctions ou plus précisément des applications.

Ils apparaissent dans différents domaines des mathématiques : en théorie des ensembles, en algèbre linéaire, en analyse et surtout en analyse fonctionnelle ils sont d'une importance capitale dans diverses branches des mathématiques et de la physique mathématique en particulier dans le domaine très vaste des équations aux dérivées partielles (EDP).

D'une façon générale "on peut dire que la résolution technique de tout problème d'analyse, même ceux qui sont posés par les questions les plus pratiques, reviendra toujours à introduire un certain espace fonctionnel convenablement lié au problème".(voir [1], p.184).

On peut citer ici quelques exemples de ces espaces :

1) En théorie des ensembles, l'ensemble des parties d'un ensemble X peut être identifié avec l'ensemble des applications de X à valeurs dans $\{0, 1\}$, noté $\{0, 1\}^X$. Plus généralement, l'ensemble des applications de E dans F est noté F^E .

2) En algèbre linéaire, l'ensemble des applications linéaires d'un espace vectoriel E vers un autre F sur un même corps commutatif $\mathbb{k}$ est lui-même un $\mathbb{k}$ -espace vectoriel qu'on le note : $L(E, F)$.

3) En analyse fonctionnelle, on a la même construction avec les applications linéaires continues, sur des espaces vectoriels normés ou topologiques, typiquement : des espaces de fonctions à valeurs réelles ou complexes, munis d'une certaine topologie ; les exemples les plus connus sont les *espaces hilbertiens* et les *espaces de Banach*. Par exemple :

L'ensemble des applications de l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ dans un ensemble quelconque X est appelé espace de suites. Il est formé de l'ensemble des suites d'éléments de X .

$K(\Omega)$: espace des fonctions continues à support compact muni de la norme de la convergence uniforme.

$C^\infty(\Omega)$: espace des fonctions de classe C^∞ .

$C_0^\infty(\Omega) = D(\Omega)$: espace des fonctions C^∞ à support compact, muni d'une certaine topologie limite inductive.

$W^{m,p}(\Omega)$: espaces de **Sobolev**.

En fin, cette mémoire est organisée comme suit :

Dans le premier chapitre on présente les structures algébriques des espaces fonctionnels qui sont directement liés aux structures algébriques de l'ensemble F .

Dans le second chapitre on étudie la nature topologique de ces espaces et on présente un théorème qui donne un critère pour qu'un tel espace soit complet ce qui permet de trouver les espaces de **Banach** usuels. On introduit et distingue, dans ce chapitre, les deux notions de convergence simple et uniforme d'une suite de fonctions à valeurs dans un espace métrique. De nombreux exemples sont données.

Dans le troisième chapitre on a premièrement étudié la nature topologique d'un espace vectoriel normé de **dimension infini** : $C[a, b]$ où on a montré qu'il existe deux normes qui ne sont pas équivalentes et qu'il est complet par rapport à l'une et non complet par rapport à l'autre.

On présente quelques théorèmes importants en analyse et en particulier le théorème fondamental : toute limite uniforme d'une suite de fonctions continues (à valeurs dans un espace métrique) est encore continue. On en déduit de nouveaux espaces de **Banach** usuels.

En fin on expose, dans ce chapitre, un théorème qui est un raffinement du théorème précédant appelé souvent **théorème du double passage à la limite**.

Il est intéressant mais d'un usage un peu limité par rapport aux autres théorèmes.

Chapitre 1

Structures algébriques des espaces fonctionnels

Dans ce premier chapitre on présente les structures algébriques des espaces fonctionnels et on montre qu'ils sont directement liés aux structures algébriques de l'ensemble F et que l'ensemble E n'a aucune trace algébrique sur ces espaces.

La totalité des notions de ce chapitre est bien connue et leurs démonstrations ne demandent pas beaucoup de bagages.

1.1 Notions algébriques générales

Définition 1.1.1 *On entend par espace fonctionnel un espace dont les éléments sont des fonctions, c'est-à-dire des applications d'un ensemble dans un autre.*

Soit E et F deux ensembles, nous avons vu plus haut, qu'on appelle F^E l'ensemble des applications de E dans F , s'il se trouve que F possède certaines structures (espace vectoriel, espace métrique, etc...) alors il est en général possible d'introduire sur F^E une structure analogue.

Définition 1.1.2 *On appelle groupe tout ensemble E muni d'une loi de composition interne noté par exemple " $+$ " qui vérifie.*

1) $\forall x, y, z \in E :$

$$x + (y + z) = (x + y) + z.$$

2) $\exists e \in E, \forall x \in E :$

$$x + e = e + x = x.$$

3) $\forall x \in E, \exists x' \in E$

$$x + x' = x' + x = e.$$

Si de plus la $+$ loi est commutative, le groupe est dit commutatif ou abélien .

Exemple 1.1.1 $(M_{m,n}(\mathbb{C}), +)$ un groupe commutatif.

Définition 1.1.3 On appelle anneau tout ensemble E muni de deux lois de composition internes " $+$ " et " $\cdot$ " tel que :

1) $(E, +)$ est un groupe commutatif.

2) " $\cdot$ " est associative et distributive par rapport à " $+$ ".

• Si de plus " $\cdot$ " est commutative on dit que $(E, +, \cdot)$ est un anneau commutatif.

• Si " $\cdot$ " possède un élément neutre, on le noter 1 ou 1_E et on dit que l'anneau est unitaire .

Exemple 1.1.2 $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ est un anneau commutatif unitaire .

Exemple 1.1.3 $(M_{m,n}(\mathbb{C}), +, \cdot)$ est un anneau unitaire non commutatif.

Définition 1.1.4 Soit E un ensemble muni de deux lois internes " $+$ " et " $\cdot$ " E est un corps Si :

1) $(E, +)$ est un group commutatif.

2) $(E^*, \cdot)$ est un groupe où $E^* = E - \{0_E\}$.

3) la loi " $\cdot$ " est distributive par rapporte à la loi " $+$ ".

Exemple 1.1.4 $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ est un corps parce que:

1) $(\mathbb{R}, +)$ group commutatif.

2) $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ est un groupe.

3) " $\cdot$ " est distributive par rapport à " $+$ " dans $\mathbb{R}$.

Exemple 1.1.5 $(M_{m,n}(\mathbb{C}), +, \cdot)$ n'est pas un corps car $(M_{m,n}(\mathbb{C}), \cdot)$ n'est pas un groupe.

Définition 1.1.5 $(E, +, \cdot)$ est un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$.

$$\iff \left\{ \begin{array}{l} (E, +) \text{ est un group commutatif} \\ \left\{ \begin{array}{l} \forall x, y \in E \\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y \\ (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x \\ \alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x \\ 1_{\mathbb{K}}.x = x \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Exemple 1.1.6 $(M_{m,n}(\mathbb{C}), +, \cdot)$ est un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

Définition 1.1.6 Une algèbre est un ensemble E muni de trois lois, les deux premières lois confèrent la structure d'espace vectoriel $(E, +, \cdot)$.

La troisième loi " $\times$ " est une loi composition interne appelée "produit" cette loi est associative possède un élément neutre, et distributive par rapport à l'addition.

Enfin, les deux produits sont compatibles.

Exemple 1.1.7 $(M_n(\mathbb{R}), +, \cdot, \times)$ est un algèbre sur le corps $\mathbb{R}$.

Définition 1.1.7 Soit $f : E \mapsto F$ une application.

On appelle image de E par f l'ensemble noté $f(E)$ définie par

$$f(E) = \{y = f(x) : x \in E\}.$$

Exemple 1.1.8 $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} / f(x) = x^2$

$$f(\mathbb{R}) = [0, +\infty[$$

1.2 Structures algébriques des espace fonctionnels

Proposition 1.2.1 $(F, +)$ groupe commutatif $\implies (F^E, +)$ groupe commutatif.

Démonstration. Comme F est muni d'une loi de composition interne " $+$ " on peut introduire une autre loi de composition interne sur l'ensemble F^E noté aussi " $+$ ".

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad , \quad \forall x \in E \quad (1.2.1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall f(x), g(x), h(x) \in F \quad \forall x \in E \\ \forall f, h, g \in F^E \end{array} \right.$$

1) $f + g \stackrel{?}{=} g + f$

$$\begin{aligned} (f + g)(x) &= f(x) + g(x) , & \forall x \in E \\ &= g(x) + f(x) , & \forall x \in E \\ &= (g + f)(x) , & \forall x \in E \end{aligned}$$

donc $f + g = g + f$.

2) $(f + g) + h \stackrel{?}{=} f + (g + h)$

$$\begin{aligned} [(f + g) + h](x) &= (f + g)(x) + h(x) & \forall x \in E \\ &= f(x) + g(x) + h(x) & \forall x \in E \\ &= f(x) + (g(x) + h(x)) & \forall x \in E \\ &= f(x) + (g + h)(x) & \forall x \in E \\ &= [f + (g + h)](x) , & \forall x \in E \end{aligned}$$

donc : $(f + g) + h = f + (g + h)$.

3) $f + e \stackrel{?}{=} f$

$$\begin{aligned} \Longleftrightarrow (f + e)(x) &= f(x) , & \forall x \in E \\ \Longleftrightarrow f(x) + e(x) &= f(x) , & \forall x \in E \\ \Longleftrightarrow e(x) &= 0, & \forall x \in E \end{aligned}$$

4) $f + f^{-1} = f^{-1} + f = e = 0 \quad \forall f \in F^E, \exists f^{-1} \in F^E, \forall x \in E$

$$\begin{aligned} \Longleftrightarrow (f + f^{-1})(x) &= f(x) + f^{-1}(x) , & \forall x \in E \\ \Longleftrightarrow f^{-1}(x) + f(x) &= e(x) , & \forall x \in E \\ \Longleftrightarrow f^{-1}(x) + f(x) &= 0 , & \forall x \in E \\ \Longleftrightarrow f^{-1}(x) &= -f(x) , & \forall x \in E \end{aligned}$$

donc $(F^E, +)$ groupe commutatif. ■

Proposition 1.2.2 $(F, +, \cdot)$ anneau $\implies (F^E, +, \cdot)$ anneau.

Démonstration. On a :

1) $(F, +)$ groupe commutatif $\implies (F^E, +)$ groupe commutatif .

2) $(f \cdot g) \cdot h \stackrel{?}{=} f \cdot (g \cdot h)$

$$\begin{aligned}
 [(f \cdot g) \cdot h](x) &= (f \cdot g)(x) \cdot h(x), & \forall x \in E \\
 &= [f(x) \cdot g(x)] \cdot h(x), & \forall x \in E \\
 &= f(x) \cdot [g(x) \cdot h(x)], & \forall x \in E \text{ (D'après l'associativité de " } \cdot \text{ " dans } F) \\
 &= f(x) \cdot (g \cdot h)(x), & \forall x \in E \\
 &= f \cdot [(g \cdot h)](x), & \forall x \in E
 \end{aligned}$$

donc : $f \cdot (g \cdot h) = f \cdot (g \cdot h)$.

3) $(f + g) \cdot h = f \cdot h + g \cdot h$

$$\begin{aligned}
 [h \cdot (f + g)](x) &= h(x) \cdot (f + g)(x), & \forall x \in E \\
 &= h(x) \cdot (f(x) + g(x)), & \forall x \in E \\
 &= h(x) \cdot f(x) + h(x) \cdot g(x), & \forall x \in E \\
 &= (h \cdot f)(x) + (h \cdot g)(x), & \forall x \in E
 \end{aligned}$$

donc : $(f + g) \cdot h = f \cdot h + g \cdot h$.

4) $1 \cdot f = f$

$$\begin{aligned}
 \iff (1 \cdot f)(x) &= f(x), & \forall x \in E \\
 \iff 1(x) \cdot f(x) &= f(x), & \forall x \in E \\
 \iff 1(x) &= 1, & \forall x \in E
 \end{aligned}$$

Donc $(F^E, +, \cdot)$ anneau . ■

Proposition 1.2.3 $(F, +, \cdot)$ espace vectoriel $\implies (F^E, +, \cdot)$ espace vectoriel .

Démonstration. Comme F est muni d'une loi de composition interne " $\cdot$ " on peut introduire une autre loi de composition interne sur l'ensemble F^E noté aussi " $\cdot$ ".

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x), \quad \forall x \in E. \quad (1.2.2)$$

Soit $\mathbb{k}$ un corps commutatif

On a : $(F, +)$ est un group commutatif

$\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{k}, \forall (f, g) \in F^E$

$$1) \quad (\lambda + \mu) \cdot f \stackrel{?}{=} \lambda \cdot f + \mu \cdot f$$

$$\begin{aligned} [(\lambda + \mu) f](x) &= (\lambda + \mu) \cdot f(x), & \forall x \in E \\ &= \lambda \cdot f(x) + \mu \cdot f(x), & \forall x \in E \\ &= (\lambda \cdot f)(x) + (\mu \cdot f)(x), & \forall x \in E \end{aligned}$$

Donc $(\lambda + \mu) \cdot f = \lambda \cdot f + \mu \cdot f$.

$$2) \quad \lambda \cdot (f + g) \stackrel{?}{=} \lambda \cdot f + \lambda \cdot g$$

$$\begin{aligned} [\lambda \cdot (f + g)](x) &= \lambda \cdot (f + g)(x), & \forall x \in E \\ &= \lambda \cdot (f(x) + g(x)), & \forall x \in E \\ &= \lambda \cdot f(x) + \lambda \cdot g(x), & \forall x \in E \\ &= (\lambda \cdot f)(x) + (\lambda \cdot g)(x), & \forall x \in E \end{aligned}$$

Donc : $\lambda \cdot (f + g) = \lambda \cdot f + \lambda \cdot g$.

$$3) \quad (\lambda \cdot \mu) \cdot f \stackrel{?}{=} \lambda \cdot (\mu \cdot f)$$

$$\begin{aligned} [(\lambda \cdot \mu) \cdot f](x) &= (\lambda \cdot \mu) \cdot f(x), & \forall x \in E \\ &= \lambda \cdot (\mu \cdot f(x)), & \forall x \in E \\ &= \lambda \cdot (\mu \cdot f)(x), & \forall x \in E \end{aligned}$$

Donc : $(\lambda \cdot \mu) \cdot f = \lambda \cdot (\mu \cdot f)$.

$$4) \quad 1_{\mathbb{k}} \cdot f \stackrel{?}{=} f$$

$$\begin{aligned} \iff (1_{\mathbb{k}} \cdot f)(x) &= f(x), & \forall x \in E \\ \iff 1_{\mathbb{k}} \cdot f(x) &= f(x), & \forall x \in E \\ \iff 1_{\mathbb{k}} &= 1 \\ \iff 1_{\mathbb{k}} \cdot f(x) &= f(x), & \forall x \in E \end{aligned}$$

Donc $(F^E, +, \cdot)$ espace vectoriel. ■

Chapitre 2

Structure topologique des espaces fonctionnels

Dans ce chapitre on étudie la nature topologique de ces espaces et on présente un théorème qui donne un critère pour qu'un tel espace soit complet ce qui permet de trouver les espaces de **Banach** usuels.

On introduit et distingue les deux notions de convergence simple et uniforme d'une suite de fonctions à valeurs dans un espace métrique.

De nombreux exemples sont donnés et étudiés pour bien distinguer ces deux notions.

2.1 Structure métrique des espaces fonctionnels

Définition 2.1.1 Soit E un ensemble non vide quelconque .

Une distance sur E est une application $d : E \times E \mapsto \mathbb{R}_+$, définie sur le produit cartésien $E \times E$, à valeur dans l'ensemble $\mathbb{R}_+$ des nombres réels positives, vérifiant les trois propriétés suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{ll} 1) & \forall x, y \in E \quad d(x, y) = 0 \iff x = y \\ 2) & \forall x, y \in E \quad d(x, y) = d(y, x) \\ 3) & \forall x, y, z \in E \quad d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \end{array} \right. \quad (2.1.1)$$

Exemple 2.1.1 1) La distance usuelle sur la droite réel $\mathbb{R}$ est, par définition :

$$d(x, y) = |x - y|.$$

2) De même, la distance usuelle sur le plan complexe $\mathbb{C}$ est :

$$d(z, z') = |z - z'|.$$

3) Soit $d(x, y)$ une distance sur E , pour tout couple $(y, x) \in E^2$ on pose :

$$\delta_1(x, y) = \inf(d(x, y), 1)$$

$$\delta_2(x, y) = \frac{d(x, y)}{(1 + d(x, y))}$$

δ_1, δ_2 sont des distances sur E .

Définition 2.1.2 Soit E un espace vectoriel sur le corps $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ une norme sur E est une application de E dans $\mathbb{R}_+$, notée $x \mapsto \|x\|$, vérifiant les propriétés suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} 1) \text{ pour tout } x \in E, \lambda \in \mathbb{K}, \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|. \\ 2) \text{ pour tout } x, y \in E, \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|. \\ 3) \quad \quad \quad \forall x \in E : \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0. \end{array} \right. \quad (2.1.2)$$

Exemple 2.1.2 $N: \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}_+$

$$N(x, y) = \sup_{t \in \mathbb{R}} \frac{|x + ty|}{\sqrt{1 + t^2}}.$$

est une norme .

Définition 2.1.3 Une application $x \mapsto \|x\|$ de E dans $\mathbb{R}_+$ vérifiant les propriétés de (1) et (2), mais pas nécessairement la propriété (3) de (2.1.2) dans la définition précédant, est appelée une semi - norme sur E .

Exemple 2.1.3 Soit f une fonction de $\mathcal{L}^1(\Omega)$

On pose :

$$\|f\|_1 = \int_{\Omega} |f| d\mu.$$

$$\|\cdot\|_1 : \mathcal{L}^1(\Omega) \longmapsto \mathbb{R}_+$$

$$f \longmapsto \|f\|_1$$

est semi-norme sur $\mathcal{L}^1(\Omega)$ parceque

$$\|f\|_1 = 0 \nRightarrow f = 0.$$

Définition 2.1.4 Soit $A \subset E$, on dit que A est borné s'il existe $r > 0$ tels que :

$$\forall x, y \in A : d(x, y) \leq r.$$

Remarque 2.1.1 A est borné par rapport à $d \iff \exists a \in E, r > 0 : A \subset B(a, r)$

$$B(a, r) = \{x \in E : d(x, a) \leq r\}.$$

Exemple 2.1.4 Tout ensemble est borné par rapport à d_0 (la distance discrète sur E).

En effet :

$$\forall A \subset E, \forall x, y \in A : d_0(x, y) \leq 1$$

$$\text{car } \exists a \in A, r = 1 > 0 : A \subset B(a, 1) = \{x \in E : d_0(x, a) \leq 1\}.$$

Définition 2.1.5 Soit $f : E \mapsto (F, d)$ une application.

$$f \text{ est bornée} \iff f(E) \text{ est borné dans } (F, d_F).$$

Exemple 2.1.5 1) $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} / f(x) = 3x - 2$

f est pas borné car $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ qui est non borné dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.

2) $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} / f(x) = \sin x$

f est borné car $f(\mathbb{R}) = [-1, 1] \subset B(0, 2) =]-2, 2[$.

Proposition 2.1.1 La fonction $d : F^E \times F^E \longrightarrow \mathbb{R}_+ \setminus$

$$d(f, g) = \sup_{x \in E} [d_F(f(x), g(x))] \quad (2.1.3)$$

vérifie les trois conditions de la distance mais n'est pas en générale une distance.

Démonstration. 1) $d(f, g) = 0 \iff f = g \quad \forall f, g \in F^E$

$$\begin{aligned} d(f, g) &= 0 \iff \sup_{x \in E} [d_F(f(x), g(x))] = 0 & \forall x \in E \\ &\iff d_F(f(x), g(x)) = 0 & \forall x \in E \\ d_F \text{ distance} &\iff f(x) = g(x) & \forall x \in E \\ &\iff f = g. \end{aligned}$$

2) $d(f, g) = d(g, f)$

$$\begin{aligned} d(f, g) &= \sup_{x \in E} [d_F(f(x), g(x))] \\ &= \sup_{x \in E} [d_F(g(x), f(x))] & (d_F \text{ distance}). \end{aligned}$$

3) $d(f, h) \leq d(f, g) + d(g, h) \quad \forall f, g, h \in F^E; \forall x \in E$ on a :

$$\begin{aligned} d_F(f(x), h(x)) &\leq d_F(f(x), g(x)) + d_F(g(x), h(x)) & \forall x \in E \\ \sup_{x \in E} [d_F(f(x), h(x))] &\leq \sup_{x \in E} [d_F(f(x), g(x)) + d_F(g(x), h(x))] \\ &= \sup_{x \in E} [d_F(f(x), g(x))] + \sup_{x \in E} [d_F(g(x), h(x))] \\ &= d(f, g) + d(g, h) \end{aligned}$$

$$\implies d(f, h) \leq d(f, g) + d(g, h).$$

Donc vérifie les trois conditions en (2.1.1) . ■

Mais d n'est pas, en générale, une distance car

$$\exists (f; g) \in F^E \times F^E / d(f, g) \notin \mathbb{R}_+.$$

Exemple 2.1.6 En effet si $E = F = \mathbb{R}$ et $f(x) = 3x$; $g(x) = 2x$.

On a :

$$\begin{aligned} d(f, g) &= \sup_{x \in E} d_F[f(x), g(x)] \\ &= \sup_{x \in E} |f(x) - g(x)| \quad (d_F \text{ la distance normal ser } \mathbb{R}) \\ &= \sup_{x \in E} |3x - 2x| \\ &= \sup_{x \in E} |x| \\ &= +\infty \notin \mathbb{R}_+. \end{aligned}$$

Définition 2.1.6 F^E ensemble des application de E dans F . On note $(F^E)_b \subset F^E$ l'ensemble des applications bornées de E dans F . Donc

$$(F^E)_b = \{f \in F^E : f \text{ est bornée}\}.$$

Proposition 2.1.2 $[(F^E)_b, d]$ est un espace metrique.

Démonstration. Les conditions (1), (2) et (3) sont vérifiés (voir 2.1.1).

Il nous suffit maintenant de montrer que

$$\begin{aligned} &\forall f, g \in (F^E)_b : d(f, g) < +\infty \\ \iff &\forall f, g \in (F^E)_b : \sup_{x \in E} [d_F(f(x), g(x))] < +\infty. \end{aligned}$$

On a:

$$\begin{aligned}
 f \text{ et } g &\in (F^E)_b \implies f(E) \text{ et } g(E) \text{ sont bornés dans } (F, d_F) \\
 \implies \exists a, b \in F, \exists r, R \in \mathbb{R}_+^* : &\begin{cases} f(E) \subset B(a, r), \\ g(E) \subset B(b, R) \end{cases} \\
 \implies \forall x \in E : &\begin{cases} d_F(f(x), a) < r \\ d_F(g(x), b) < R \end{cases}.
 \end{aligned}$$

On a, d'autre part :

$$\begin{aligned}
 \forall x \in E : d_F[f(x), g(x)] &\leq d_F[f(x), a] + d_F[a, b] + d_F[b, g(x)] \\
 \implies \forall x \in E : d_F[f(x), g(x)] &\leq r + d_F[a, b] + R < +\infty.
 \end{aligned}$$

Donc $r + d_F[a, b] + R$ est un majorant des nombres $d_F[f(x), g(x)]$, $x \in E$

$$\begin{aligned}
 \text{ce qui montre que : } \sup_{x \in E} [d_F(f(x), g(x))] &\leq r + d_F[a, b] + R < +\infty \\
 \implies d(f, g) &< +\infty.
 \end{aligned}$$

Donc $d(f, g)$ est borné . ■

Théorème 2.1.1 (Voir [1]) Si F est un espace métrique complet, l'espace métrique $(F^E)_b$ des applications bornées de E dans F est lui aussi complet.

Démonstration. Soit $f_0, f_1, \dots, f_n$ une suite de **Cauchy** de $(F^E)_b$.

$$\begin{aligned}
 \iff \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, p \geq q \geq n_0 : &d(f_p, f_q) < \varepsilon \\
 \implies \sup_{x \in E} d_F[f_p(x), f_q(x)] &< \varepsilon \\
 \implies d_F[f_p(x), f_q(x)] < \varepsilon, &\forall x \in E.
 \end{aligned}$$

Donc $\forall x \in E (f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de **Cauchy** qui converge vers $f(x)$ dans F (comme F est complet).

$$f_n(x) \longrightarrow f(x), \forall x \in E$$

donc on a construit une nouvelle application :

$$\begin{aligned} f & : E \longrightarrow F \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) & = f(x) \end{aligned}$$

On montre que :

$$1) f_n \longrightarrow f, ; [(F^E)_b, d]$$

$$2) f \in ((F^E)_b, d).$$

$$1) \text{ On a } d_F[f_p(x), f_q(x)] < \varepsilon, \forall x \in E$$

$$\implies \lim_{p \rightarrow +\infty} d_F[f_p(x), f_q(x)] < \varepsilon, \forall x \in E$$

$$\implies d_F[f(x), f_q(x)] < \varepsilon, \forall x \in E$$

$$\implies \sup_{x \in E} d_F[f(x), f_q(x)] < \varepsilon, \forall x \in E \text{ alors}$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, q \geq n_0 : d(f, f_q) < \varepsilon$$

$$\implies f_n \longrightarrow f.$$

$$2) f \in ((F^E)_b, d) \iff f(E) \subset B(a, r) \text{ tels que } a \in F, r > 0$$

on montre que $f(E) \subset B(a, r)$.

On a:

$$f_q \in (F^E)_b \iff \exists b \in F, \exists \alpha > 0 : f_q(E) \subset B(b, \alpha)$$

$$\iff d_F[f_q(x), b] < \alpha, \forall x \in E.$$

On utilise l'inégalité triangulaire:

$$d_F[f(x), b] \leq d_F[f(x), f_q(x)] + d_F[f_q(x), b], \quad \forall x \in E$$

$$\implies d_F[f(x), b] \leq \alpha + \varepsilon, \quad \forall x \in E, \alpha > 0$$

$$\iff f(E) \subset B(b, \alpha + \varepsilon), \quad \forall x \in E, \alpha > 0$$

$$\iff f \in ((F^E)_b, d).$$

Enfin il résulte que $((F^E)_b, d)$ est un espace métrique complet. ■

Proposition 2.1.3 *Supposons que F ait une structure d'espace vectoriel normé, alors on peut mettre sur l'espace $(F^E)_b$ une structure d'espace vectoriel normé en posant :*

$$\|f\| = \sup_{x \in E} \|f(x)\|. \quad (2.1.4)$$

Démonstration. 1) $\|\alpha f\| = |\alpha| \|f\| \quad \forall f \in (F^E)_b, \alpha \in \mathbb{K}$

$$\begin{aligned} \|\alpha f\| &= \sup_{x \in E} \|\alpha f(x)\| = \sup_{x \in E} |\alpha| \|f(x)\|, & \forall x \in E, \alpha > 0 \\ &= |\alpha| \sup_{x \in E} \|f(x)\|, & \forall x \in E, \alpha > 0 \\ &= |\alpha| \sup_{x \in E} \|f(x)\|, & \forall x \in E, \alpha > 0 \\ &= |\alpha| \|f\|. \end{aligned}$$

$$2) \quad \|f + g\| \leq \|f\| + \|g\| \quad \forall f, g \in (F^E)_b$$

$$\begin{aligned} \|f(x) + g(x)\| &\leq \|f(x)\| + \|g(x)\|, & \forall x \in E \\ \implies \sup_{x \in E} \|f(x) + g(x)\| &\leq \sup_{x \in E} [\|f(x)\| + \|g(x)\|], & \forall x \in E \\ \implies \sup_{x \in E} \|f(x) + g(x)\| &\leq \sup_{x \in E} \|f(x)\| + \sup_{x \in E} \|g(x)\|, & \forall x \in E \\ \implies \|f + g\| &\leq \|f\| + \|g\|. \end{aligned}$$

$$3) \quad \|f\| = 0 \iff f = 0$$

$$\begin{aligned} \|f\| = 0 &\iff \sup_{x \in E} \|f(x)\| = 0, & \forall x \in E \\ \iff \|f(x)\| &= 0, & \forall x \in E \\ \iff f(x) &= 0, & \forall x \in E \\ \iff f &= 0. \end{aligned}$$

Donc $\|f\|$ est une norme sur $(F^E)_b$. ■

Corollaire 2.1.1 *Si F est un espace de **Banach**, l'espace vectoriel normé $(F^E)_b$ est lui aussi un espace de **Banach**, en particulier l'espace $(F^E)_b$ des fonctions, à valeurs réelles ou complexes bornées, sur un ensemble E , est un espace de **Banach**.*

2.2 Convergence simple et convergence uniforme

Définition 2.2.1 On dit qu'une suite de fonction f_n , c'est - a - dire d'application d'un ensemble E dans un espace métrique F , converge simplement, pour n tendant vers $+\infty$, vers fonction limite f , si pour tout x de E , la suite des points $f_n(x)$, de F converge, pour n tendant vers $+\infty$, vers le point $f(x)$ de cela s'écrit sous logique suivant :

$$\forall x \in E, \forall \varepsilon > 0, \exists m \in \mathbb{N}, \forall n \geq m : d(f_n(x), f(x)) \leq \varepsilon. \quad (2.2.1)$$

On notera comme nous l'avons vu plus haut, que l'entier m , que nous venons de déterminer, dépend en fait à la fois de ε et de x .

Définition 2.2.2 On dit que la suite des fonction f_n converge uniforme vers la fonction f , pour n tendant vers $+\infty$, si l'entier m détermine dans (2.2.1) peut être choisi indépendamment de x , c'est -à-dire seulement en fonction de ε , autrement dit, si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists m \in \mathbb{N}, \forall x \in E, \forall n \geq m : d(f_n(x), f(x)) \leq \varepsilon. \quad (2.2.2)$$

Cela s'écrit encore

$$\forall \varepsilon > 0, \exists m \in \mathbb{N}, \forall n \geq m : d(f_n, f) \leq \varepsilon. \quad (2.2.3)$$

Cela veut simplement dire que la distance f_n à f tend vers 0 pour n tendant vers $+\infty$.

Il est bien évident que la *converge uniforme entraîne la convergence simple*, mais, comme nous allons le voir, la *réci-proque n'est pas vraie*; la *convergence uniforme est une propriété beaucoup plus forte que la convergence simple*.

Remarque 2.2.1

$$\begin{aligned} (2.2.1) &\iff \forall x \in E, \lim_{n \rightarrow +\infty} d(f_n(x), f(x)) = 0 \\ (2.2.2) &\iff \lim_{n \rightarrow +\infty} d(f_n, f) = 0 \\ &\iff \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in E} d_F[f_n(x), f(x)] = 0 \end{aligned}$$

donc :

$$(converge\ simple) \not\Rightarrow (converge\ uniforme)$$

Exemple 2.2.1 Soit $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \setminus f_n(x) = \frac{1}{1+(x+n)^2}$, $n \in \mathbb{N}$ et $f(x) = 0$, $\forall x \in E$

On a :

$$d(f_n(x), f(x)) \leq \varepsilon \iff \lim_{n \rightarrow +\infty} |f_n(x) - f(x)| = 0, \quad \forall x \in E$$

$$\iff \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{1}{1+(x+n)^2} - 0 \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{1}{1+(x+n)^2} \right| = 0, \quad \forall x \in E$$

$$f_n \longrightarrow f \quad (converge\ simple) .$$

On étudier la convergence uniformément de f_n .

On a :

$$d(f_p, f_q) \leq \varepsilon \iff \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \frac{1}{1+(x+n)^2} - 0 \right| = 1 \neq 0$$

alors :

$$f_n \not\rightarrow f \quad (converge\ uniforme)$$

Exemple 2.2.2 Soit $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \setminus f_n(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$ et $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$

on a :

$$d(f_m(x), f(x)) \leq \varepsilon \iff \lim_{n \rightarrow +\infty} |f_n(x) - f(x)| = 0 \quad \forall x \in E$$

Si $0 \leq x < 1$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |x^n - 0| = \lim_{n \rightarrow +\infty} |x^n| = 0.$$

Si $x = 1$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |x^n - 1| = \lim_{n \rightarrow +\infty} |1^n - 1| = 0.$$

Donc:

$$f_n \longrightarrow f \quad (\text{converge simple}).$$

On étudier la convergence uniformément de f_n .

On a:

$$\begin{aligned} d(f_n, f) &\leq \varepsilon \iff \sup_{x \in E} d_F[f_n(x), f(x)] \leq \varepsilon \\ &\iff \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| = 0. \end{aligned}$$

Si $x = 1$:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in [1,1]} |x^n - 1| &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in [1,1]} |1^n - 1| \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} |0| = 0. \end{aligned}$$

Si $0 \leq x < 1$:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in [0,1[} |x^n - 0| &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in [0,1[} |x^n| \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} |1| = 1. \end{aligned}$$

donc:

$$f_n \not\rightarrow f \quad (\text{converge uniforme}).$$

Exemple 2.2.3 Soit $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \setminus f_n(x) = \frac{nx^2}{n+1}$ et $f(x) = x^2, \forall x \in E$.

On a :

$$\begin{aligned} d(f_n, f) &\leq \varepsilon \iff \sup_{x \in E} d_F[f_n(x), f(x)] \leq \varepsilon \\ &\iff \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| = 0. \end{aligned}$$

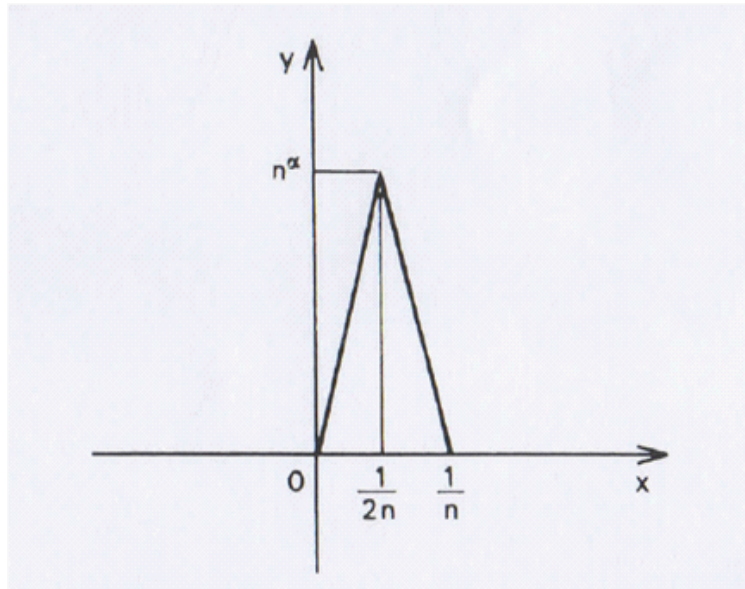
$$\iff \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in [0,1]} \left| \frac{nx^2}{n+1} - x^2 \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in [0,1]} \left| \frac{-x^2}{n+1} \right| = 0.$$

Alors

$$f_n \rightarrow f \quad (\text{converge uniforme}) \implies f_n \rightarrow f \quad (\text{converge simple}).$$

Exemple 2.2.4 Considérons la fonction f_n ($n \geq 1$) réelle, d'une variable réelle, définie comme suit : elle est égale à 0, pour $x \leq 0$ et $x \geq \frac{1}{n}$, elle est égale à n^α , $\alpha > 0$, pour $x = \frac{1}{2n}$, et dans chacun des intervalles $[0, \frac{1}{2n}]$, $[\frac{1}{2n}, \frac{1}{n}]$, elle est affine ⁽¹⁾.

Elle est représentée par le graphique suivant :



Malgré les apparences, la suite des fonctions f_n converge simplement vers la fonction 0 pour n tendant vers $+\infty$. En effet, quel que soit $x > 0$, pour n suffisamment grand, on a $\frac{1}{n} > x$, et par conséquent, pour n suffisamment grand, on a $f_n(x) = 0$; par ailleurs, pour $x \leq 0$, on a toujours $f_n(x) = 0$, d'où résulte bien ce que nous avons annoncé. Cependant, la distance de f_n et de 0 est égale à n^α , qui tend vers l'infini, donc f_n ne converge pas uniformément vers 0 pour n tendant vers $+\infty$.

⁽¹⁾La fonction $y = ax + b$ est dite affine, le mot linéaire devant être réservé, conformément aux définitions générales relatives aux espaces vectoriels, à la fonction $y = ax$.

Chapitre 3

Théorèmes fondamentaux

Dans ce troisième chapitre on a premièrement étudié la nature topologique d'un espace vectoriel normé de **dimension infinie** : $C([a, b])$ où on a montré qu'il existe deux normes qui ne sont pas équivalentes et qu'il est complet par rapport à l'une et non complet par rapport à l'autre.

On présente quelques théorèmes importants en analyse et en particulier le théorème fondamental : toute limite uniforme d'une suite de fonctions continues (à valeurs dans un espace métrique) est encore continue. On en déduit de nouveaux espaces de **Banach** usuels.

En fin on expose, dans ce chapitre, un théorème qui est un raffinement du théorème précédant appelé souvent **théorème du double passage à la limite**.

Il est intéressant mais d'un usage un peu limité par rapport aux autres théorèmes.

3.1 Etude topologique de l'espace $C([a, b])$

Définition 3.1.1 *Appelons $C([a, b])$ l'espace vectoriel (de dimension infinie) des fonctions réelles ou complexes continues sur l'intervalle fermé, borné $[a, b]$, $a < b$, de $\mathbb{R}$.*

Nous allons montrer comment, sur cet espace, il est possible de définir plusieurs normes qui ne sont pas équivalentes.

Proposition 3.1.1 *Les deux normes $\|f\| = \sup_{x \in E} \|f(x)\|$ et $N(f) = \int_a^b |f(x)| dx$ ne sont pas équivalentes.*

Démonstration. Ces deux normes ne sont pas équivalentes. On a la majoration :

$$N(f) \leq (b-a) \|f\|.$$

Par contre, il n'existe évidemment aucune majoration du type $\|f\| \leq kN(f)$, ou k serait une constante, indépendante de la fonction continue f . Considérons en effet le cas $[a, b] = [0, 1]$, et la suite des fonctions f_n indiquée dans l'exemple (2, 2, 4) de (2, 2). Pour ces fonctions, on a les normes suivantes :

$$\|f_n\| = n^\alpha, \quad N(f_n) = \frac{1}{2}n^{\alpha-1}, \quad \frac{\|f_n\|}{N(f_n)} = 2n.$$

ce qui prouve notre assertion. Si par exemple $0 < \alpha < 1$, f_n tend vers 0 pour n tendant vers $+\infty$, pour la norme N , mais non pour la norme $\|\cdot\|$. ■

Proposition 3.1.2 *L'espace $C([0, 1])$, muni de la norme N , n'est pas complet.*

Démonstration. Montrons enfin que l'espace $C([0, 1])$, muni de la norme N , n'est pas complet, c'est-à-dire n'est pas un **Banach** (alors qu'il l'est pour $\|\cdot\|$; cela montrera à nouveau que ces deux normes sont inéquivalentes). Considérons en effet les fonctions suivantes $f_n \in N$: f_n vaut 0 dans l'intervalle $[0, \frac{1}{2}]$, 1 dans l'intervalle $[\frac{1}{2} + \frac{1}{n}, 1]$, et est linéaire dans l'intervalle $[\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n}]$.

Pour $n \geq m$, la différence $|f_n - f_m|$ vaut partout 0, sauf dans l'intervalle $[\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n}]$, où elle est majorée par 1, de sorte que $N(f_n - f_m) \leq \frac{1}{m}$.

Donc nous avons là une suite de Cauchy. Supposons qu'elle ait une limite f .

L'intégrale $\int_0^{\frac{1}{2}} |f - f_n|$ tendrait vers 0 pour n infini; cela implique que f soit nulle dans $[0, \frac{1}{2}]$ (si en effet il existait un point $a \in [0, \frac{1}{2}]$ tel que $f(a) \neq 0$, il existerait, par suite de la continuité de f , tout un intervalle contenant a , de longueur $l > 0$, où f serait supérieur à un nombre $\delta > 0$; alors $\int_0^{\frac{1}{2}} |f - f_n|$ serait toujours $\geq l\delta$, ce qui contredit le fait que $\int_0^{\frac{1}{2}} |f - f_n|$ tend vers 0. Pour la même raison, dans tout intervalle $[\frac{1}{2} + \frac{1}{m}, 1]$, f_n est identique à 1 pour

$n \geq m$, donc f aussi devrait être identique à 1. Finalement f devrait valoir 0 dans $[0, \frac{1}{2}]$ et 1 dans $[\frac{1}{2}, 1]$. Mais elle ne saurait être continue (car sa limite à gauche au point $\frac{1}{2}$ serait 0 et sa limite à droite 1), ce qui est absurde. Donc la suite de Cauchy des f_n n'a pas de limite, et l'espace vectoriel normé $C([0, 1])$, pour la norme N , n'est pas complet. ■

3.2 Continuité d'une limite uniforme locale de fonctions continues

Définition 3.2.1 *On dira que la suite des f_n converge vers f localement uniformément sur E , si tout point a de E admet un voisinage ϑ_a sur lequel les f_n convergent uniformément vers f . Cela se traduira par la formule suivante :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall a \in E, \exists \vartheta, \text{ voisinage de } a \quad \forall \varepsilon > 0, \exists m \in \mathbb{N} \\ \forall x \in \vartheta, \forall n \geq m : d(f_n(x), f(x)) \leq \varepsilon \end{array} \right. \quad (3.2.1)$$

Théorème 3.2.1 (Voir [1]) *Soient E une espace topologique, F un espace métrique et $f_0, f_1, \dots, f_n, \dots$ une suite d'application de E dans F , qui converge localement uniformément vers f , on suppose en outre toutes les f_n sont continues en un point a de E , alors la limite f est elle aussi continue au point a , si toutes les f_n sont partout continues, alors f est partout continue, si la convergence est uniforme sur E , si E est métrique et si tout les f_n sont uniformément continue sur E , alors f est uniformément continue sur E .*

Démonstration. Soit ϑ_a un voisinage de a , sur lequel la convergence est uniforme. D'après l'hypothèse de convergence uniforme, ε étant donné, il existe un entier m tel que l'on ait, pour tout x de ϑ_a l'inégalité:

$$d(f_m(x), f(x)) \leq \frac{\varepsilon}{3} \quad (3.2.2)$$

Le nombre m étant ainsi choisi, la fonction f_m est supposée continue au point a ; il existe donc un voisinage $\vartheta \subset \vartheta_a$ de a tel que pour x dans ϑ on ait :

$$d(f_m(x), f_m(a)) \leq \frac{\varepsilon}{3} \quad (3.2.3)$$

Dans ces conditions, pour x dans ϑ , on aura :

$$d(f(x), f(a)) \leq d(f(x), f_m(x)) + d(f_m(x), f_m(a)) + d(f_m(a), f(a)) \leq \varepsilon \quad (3.2.4)$$

Ce qui prouve bien la continuité de f au point a . Si les f_n sont partout continues, alors cette démonstration montre que f est partout continue.

Supposons maintenant E métrique, les f_n uniformément continue, et la convergence uniforme sur E . Alors, ε étant donné, et l'entier m ayant été choisi de manière que (3.2.1) soit vrai pour tout x de E , la fonction f_m est uniformément continue; il existe alors un nombre $\eta > 0$ tel que pour $d(x', x'') \leq \eta$ on ait $d(f_m(x'), f_m(x'')) \leq \frac{\varepsilon}{3}$.

On aura alors, pour $d(x', x'') \leq \eta$:

$$d(f(x'), f(x'')) \leq d(f(x'), f_m(x')) + d(f_m(x'), f_m(x'')) + d(f_m(x''), f(x')) \leq \varepsilon \quad (3.2.5)$$

ce qui prouve l'uniforme continuité de f . ■

Remarque 3.2.1 *Au contraire, une suite de fonctions continues f_n peut très bien converger simplement vers une fonction discontinue f .*

Ainsi, si nous posons $f_n(x) = x^n$ pour $0 \leq x \leq 1$, f_n est continue pour tout n , et converge simplement, pour n tendant vers $+\infty$, vers la fonction discontinue f égale à 0 pour $0 \leq x < 1$, à 1 pour $x = 1$.

Corollaire 3.2.1 *Dans l'espace $(F^E)_b$, des applications bornées de E dans F , muni de la métrique définie par (2.1.3), le sous-espace $(F^E)_{bc}$ des applications bornées continues de E dans F est fermé.*

Ceci n'est pas autre chose qu'une autre forme de l'énoncé du théorème (comme $(F^E)_b$ est métrique, l'énoncé utilisant les suites est suffisant).

Corollaire 3.2.2 *Si F est complet l'espace $(F^E)_{bc}$ des applications bornées continues de E dans F , muni de la métrique (2.1.3), est un espace métrique complet.*

En effet il est fermé dans l'espace métrique complet $(F^E)_b$ théorème (2.1.1), et il suffit d'appliquer alors le théorème ⁽¹⁾.

⁽¹⁾On sait le théorème suivant :

Si E est espace métrique complet, tout partie fermée F de E est, elle aussi, complet.

Corollaire 3.2.3 Si F est un espace de **Banach**, l'espace $(F^E)_{bc}$ des applications continues bornées de E dans F , muni de la norme définie à la formule (2.1.4), est un espace de **Banach**.

Un cas particulièrement important est le suivant : Prenons pour F le corps des scalaires $\mathbb{K}$, alors l'espace des fonctions réelles ou complexes, continues et bornées sur un espace métrique E , est un espace de **Banach**.

En particulier, l'espace des fonctions réelles ou complexes continues et bornées, d'une variable réelle, est un espace de **Banach**.

Si E est un compact (qui , dans de nombreuses applications pratiques, sera un intervalle ferme, borné, de la droite réelle) , on sait, d'après le corollaire 0 du théorème (2.1.1), que toute fonction continue sur E à valeurs dans un espace métrique F , est nécessairement bornée; alors l'espace $(F^E)_c$ des fonctions continues sur un espace compact E , à valeurs dans l'espace de **Banach** F , muni de la norme (2.1.4) est un espace de **Banach**.

3.3 Le théorème du double passage à la limite

Théorème 3.3.1 (Voir [1])

Soient E et F deux espaces métriques, A une partie de E et $f_0, f_1, f_2, \dots, f_n$ une suite d'applications de A dans F , convergeant uniformément vers f . Soit a un point de E adhérent à A .

Si, pour chaque n , $f_n(x)$ a une limite quand x tend vers a par valeurs dans A , et si F est complet, alors $f(x)$ a une limite quand x tend vers a par valeurs dans A , et en outre

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in A}} f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in A}} f_n(x) \right]. \quad (3.3.1)$$

Démonstration.

Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $\tilde{f}_n$ définie sur $A \cup \{a\}$ Par la formule

$$\begin{aligned} \tilde{f}_n(x) &= f_n(x), & \text{pour } x \neq a, \\ \tilde{f}_n(a) &= \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in A}} f_n(x). \end{aligned}$$

D'après sa définition même, $\tilde{f}_n$ est continue au point a .

D'autre part on a :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists p \in \mathbb{N} \text{ tel que : } m \geq p \text{ et } n \geq p \implies \begin{cases} d(f_m(x), f_n(x)) \leq \varepsilon, \\ d(f(x), f_n(x)) \leq \varepsilon \end{cases}, \quad \forall x \in A - \{a\}.$$

En faisant tendre x vers a on a, à la limite

$$d(\tilde{f}_m(a), \tilde{f}_n(a)) \leq \varepsilon.$$

Cela prouve que les $\tilde{f}_n(a)$ forment une suite de Cauchy dans F .

Comme F est supposé complet, ils ont une limite, que nous appellerons $\tilde{f}(a)$.

Alors l'application $\tilde{f}$ définie par

$$\tilde{f}(x) = f(x), \quad x \in A, x \neq a,$$

et prenant la valeur $\tilde{f}(a)$, que nous venons de définir, au point a , est une fonction sur $A \cup \{a\}$, à valeurs dans F .

Lorsque n tend vers $+\infty$, $f_n(x)$ tend vers $f(x)$ pour $x \neq a$, mais $\tilde{f}_n(a)$ tend vers $\tilde{f}(a)$, par définition de $\tilde{f}(a)$; donc $\tilde{f}_n$ converge simplement vers $\tilde{f}$. Mais elle converge en outre uniformément; car, pour $m \geq p, n \geq p$, on a, pour $x \neq a$,

$$d(f_m(x), \tilde{f}_n(x)) = d(f_m(x), f_n(x)) \leq \varepsilon \tag{3.3.2}$$

mais aussi $d(f_m(a), \tilde{f}_n(a)) \leq \varepsilon$ donc, en faisant tendre m vers $+\infty$ et passant à la limite, $d(\tilde{f}(x), \tilde{f}_n(x)) \leq \varepsilon$ et $d(\tilde{f}(a), \tilde{f}_n(a)) \leq \varepsilon$, donc finalement $d(\tilde{f}, \tilde{f}_n) \leq \varepsilon$.

Comme alors les $\tilde{f}_n$ sont continues au point a , le théorème (3.1.1) montre que $\tilde{f}$ aussi est continue au point a , c'est-à-dire que $f(x)$ a une limite quand x tend vers a en restant dans A , et que cette limite est

$$\tilde{f}(a) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \tilde{f}_n(a) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in A}} f_n(x) \right]$$

ce qui prouve le théorème énoncé. ■

Exemple 3.3.1 *Si les f_n et f sont des fonctions réelles continues sur la droite réelle $\mathbb{R}$, si les f_n convergent uniformément vers f pour n tendant vers $+\infty$, et si, pour tout n , $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = \iota_n$ existe, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \iota$ existe aussi, et les ι_n convergent vers ι pour n tendant vers $+\infty$.*

Bibliographie

- [1] **Laurent Schwartz**, Analyse : Topologie générale et analyse fonctionnelle. Collection Enseignement des sciences, 11. HERMANN ÉDITEURS 1980.
- [2] **Gilles Christol, Anne Cot, Charles-Michel Marle**; Topologie. ellipses/édition marketing S.A.1997. 32 rue Bague, Paris (15^e).
- [3] **Christophe Caignaert**, Mathématiques – Lycée Colbert 59200 Tourcoing, 2002 - 2003.
- [4] **ZITOUNI Mohamed**, Algèbre :Office Des Publications Universitaires, 1993.

ملخص

في هذا العمل درسنا فضاء التوابع كبنى جبرية في الفصل الأول و كبنى توبولوجية في الفصل الثاني حيث عممنا هناك مفهومي التقارب المنتظم والبسيط إلى الفضاءات المترية الكيفية.

في الفصل الثالث قدمنا نظريتين أساسيتين: استمرارية كل تقارب منتظم لمتتالية توابع مستمرة ونظرية المرور المزدوج إلى النهاية.

Résumé

Dans ce travail on a étudié les espaces fonctionnels en tant que des structures algébriques, dans le premier chapitre, et en tant que des structures topologiques dans le second chapitre où on a généralisé les notions de convergence uniforme et simple aux espaces métriques quelconques.

Dans le troisième chapitre on a présenté deux théorèmes fondamentaux : la continuité de toute limite uniforme d'une suite de fonctions continues et le théorème du double passage à la limite.

Summary

In this work we studied the functional spaces as algebraic structures, in the first chapter, and as topological structures in the second chapter where we generalized the notions of uniform and simple convergence to arbitrary metric spaces. In the third chapter we presented two fundamental theorems : continuity of any uniform limit of a sequence of continuous functions and the theorem of double passage to the limit.