



République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère De L'enseignement Supérieur et De

La Recherche Scientifique



University of Echahid Hamma Lakhdar, El-oued

FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES

Mémoire de fin d'étude

MASTER ACADEMIQUE

Domaine : Mathématiques et informatique

Filière : Mathématiques

Spécialité : Mathématiques fondamentales et application

Thème

**Méthode des différences finis pour la résolution de l'équation
de la réaction-diffusion**

Présenté par: Kehili Chaima et Tercha Raoua

Soutenue devant le jury :

Président	M:Mohammed Said Ferhat	Univ El-Oued
Rapporteur	M:Mohammed Baggas	Univ El-Oued
Examineur	M:Mohammed Moumen Bekkouche	Univ El-Oued

Année universitaire : 2023/2024

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



مصداقاً لقوله تعالى: ﴿وَإِذْ تَأَذَّنَ رَبُّكُمْ لَئِن شَكَرْتُمْ لَأَزِيدَنَّكُمْ ۖ وَلَئِن كَفَرْتُمْ إِنَّ عَذَابِي لَشَدِيدٌ﴾ [إبراهيم: 07].

أحمد لله عزوجل الذي أنار لنا درب العلم و المعرفة وأعاننا على أداء هذا الواجب ووقفنا إلى إنجاز هذا العمل المتواضع. وعمل بقوله صل الله عليه وسلم: «مَنْ لَمْ يَشْكُرْ النَّاسَ لَمْ يَشْكُرِ اللَّهَ» (رواه الترميذي).

نتوجه بجزيل الشكر والإمتنان إلى كل من ساعدنا من قريب أو من بعيد في إنجاز هذا العمل وما واجهنا من صعوبات، ونخص بالذكر الأستاذ المشرف "بِقاص محمد" الذي لم يبخل علينا بتوجيهاته ونصائحه القيمة التي كانت عوناً لنا في اتمام هذه المذكرة، فجزاه الله خيراً. كما نتقدم بالشكر لأساتذتنا بقسم الرياضيات، وأعضاء اللجنة التي تكرمت بمناقشة هذا العمل المتواضع.





أهدي هذا العمل القيم والنافع:

إلى والدين الكريمين: أبي الغالي حفظه الله الذي أحمل اسمه بكل فخر،
وأمي التي هي ينبوع للعطاء والحب، وأسأل الله أن يبارك فيها وأن
يمدها بالصحة والعافية.

وإلى من يلهم بذكرهم فؤادي، إخوتي وأخواتي، وإلى كل أقاربي
حفظهم الله جميعًا.

وإلى المعلمين والأساتذة الذين درسوني في جميع أطوار حياتي العلمية.

وإلى كل الزملاء في الدراسة الذين ساعدوني في إنجاز المذكرة
حفظهم الله جميعًا.

الشياء كحيلي





الإهداء

إلى من تتسابق الكلمات لتخرج معبرة عن مكنون ذاتها من علمتي وعانت
الصعاب لأصل إلى ما أنا فيه
التي لم تألُ جهداً في تربيتي وتوجيهي
إلى القلب الناصع بالبياض . . . والدني الغالية.
إلى سبب وجودي في الحياة . . . والدي.

إلى من كانوا يضيئون لي الطريق ويساندوني ويتنازلون عن حقوقهم لإرضائي
والعيش في هناء . . . إخوتي.

الآن تفتح الأشرعة وترفع المرساة لتنطلق السفينة في عرض بحر واسع مظلم
هو بحر الحياة وفي هذه الظلمة لا يضيء إلا قنديل الذكريات ذكريات الأخوة
البعيدة إلى الذين أحببتهم وأحبوني (أصدقائي).

روعة ترشه



NOTATIONS

$C^k(\Omega)$: L'espace des fonctions continûment dérivables jusqu'à l'ordre k .

$L^p(\Omega)$: Espaces de Lebesgue.

∇ : Gradient.

Δ : Laplacien.

$\mathcal{M}_{(n,m)}(\mathbb{K})$: Ensemble des matrices de type (n,m) .

$J_F(x)$: Matrice jacobienne.

I_n : Matrice identité d'ordre n .

$\rho(A)$: Rayon spectrale de A .

λ : Valeur propre.

$E.D.P$: Équation aux dérivées partielles.

$C.I$: Condition initiale.

$C.L$: Conditions aux limites.

Δx : Le pas en espace.

Δt : Le pas en temps.

R_i^n : Erreur de consistance.

C.F.L : La condition de Courant-Friedrichs-Lewy.

e_i^n : L'erreur globale.

Contents

Notations	v
Introduction	x
1 Préliminaires	1
1.1 Espace fonctionnels	1
1.1.1 Espace $C^k(\Omega)$ ($0 \leq k < \infty$)	1
1.1.2 Espaces des lebesgue $L^p(\Omega)$	2
1.1.3 Espace $H^1(\Omega)$	2
1.1.4 Espace $H_0^1(\Omega)$	3
1.2 Opérateurs différentiels	3
1.2.1 Gradient d'un vecteur	3
1.2.2 Divergence d'un vecteur	3
1.2.3 Laplacien	3
1.3 Combinaison convexe	3
1.4 Formules de Taylor et développements limités	4
1.4.1 Formule de Taylor Lagrange	4
1.4.2 Développements limités Yonge	4
1.5 Rappel sur les matrices	4
1.5.1 Propriété d'une matrice carrée	5
1.5.2 Matrice particuliere	6
1.5.3 Matrice jacobienne	7
1.5.4 Les valeurs propres et le rayon spectrale	7
1.5.5 Les valeurs propres de matrice tridiagonale symétrique	8
1.5.6 Norme matricielle	9
2 Les équations Partielle Paraboliques	10
2.1 Généralités	11

2.1.1	EDP linéaire du 1 ^{er} ordre en dimension 2	12
2.1.2	EDP linéaire du seconde ordre en dimension 2	12
2.1.3	EDP linéaire du second ordre en dimension n	13
2.1.4	Classification d'une EDP linéaire d'ordre 2 en dimension n	13
2.1.5	classification d'une EDP (2.2)	13
2.1.6	Conditions aux limites (C.L):	14
2.1.7	Condition initiale (C.I):	14
2.1.8	Le problème aux limite	14
2.1.9	Problème bien posé	14
2.2	Problèmes paraboliques	15
2.2.1	L'équation de la chaleur :	15
2.3	l'équation de réaction-diffusion	17
2.3.1	L'équations de réaction-diffusion linéaire	18
2.3.2	L'équations de réaction-diffusion non linéaire	18
3	Approximation par différences finis de l'équation de la réaction-diffusion linéaire	20
3.1	Présentation de la méthode de DF	20
3.1.1	Différences finies en dimension 1	20
3.1.2	Différences finies en dimension 2	24
3.1.3	Le principe de la méthode des différences finies	26
3.2	Équation de la réaction-diffusion	29
3.2.1	Le problème continu D1 :	29
3.2.2	Problème Discrété :	30
3.2.3	Schéma d'Euler implicite de la réaction-diffusion linéaire :	30
3.2.4	Forme matricielle:	30
3.2.5	Consistance :	33
3.2.6	Stabilité en norm L^∞	34
3.2.7	Convergence :	36
3.2.8	Estimation d'erreur :	36
4	Approximation par différences finis de l'équation de la réaction-diffusion non linéaire	37
4.1	le problème discret	37
4.1.1	Schéma d'Euler explicite de la réaction-diffusion non linéaire	38
4.2	Forme matricielle:	38
4.3	Consistance:	41
4.4	Stabilité:	42

4.5	Convergence:	44
4.6	Estimation d'erreur:	44
5	Application	47
5.1	Èquation de la réaction-diffusion linéaire:	47
5.2	Èquation de la réaction-diffusion non linéaire:	49
	Conclusion	51
	Bibliography	52

Introduction

Les équations aux dérivées partielles sont un outil de modélisation de base, ont été étudiées par les mathématiciens depuis le dix-huitième siècle, de nombreux phénomènes physiques, mécaniques, biologiques et technologiques modernes ont été conçus à travers eux. Ces équations s'accordent avec la traduction mathématique des lois de la physique comme l'équation de la chaleur.

Au dix-huitième siècle la méthode des différences finies faisait partie des travaux de nombreux mathématiciens. Le principe fondamental de la méthode consiste à la compensation des dérivées dans le problème continu aux différences finies sur des points finis et précisés nous n'abordons que les principes pratiques de cette méthode, c'est-à-dire la construction de ce qu'on appelle schémas numériques.

L'objectif de ce travail est d'étudier l'EDP parabolique non linéaire en choisissant l'équation de réaction-diffusion du type :

$$u_t = \Delta u + f(u) \quad \text{sur } \mathbb{R}^N \quad (1)$$

ont été introduites à la fin des années 30 dans des travaux de Fisher (1937) [7] et Kolmogorov, Petrovsky et Piskunov (1938) [10], pour des modèles de génétique des populations. Les non-linéarités f considérées alors étaient du type $f(u) = u(1 - u)$ (loi logistique) ou ses extensions. Ce type de modèle a été introduit par Shigesada, Kawasaki et Teramoto [13] pour étudier des phénomènes d'invasion biologique dans des environnements périodiques. Nous nous intéressons ici aux modèles plus simples, représentés par les équations de réaction-diffusion

$$u_t - \Delta u = au^2 + bu + c \quad (2)$$

ou $f(u)$ est polynôme de seconde degré.

Dans cette mémoire, nous avons adopté un plan qui se divise en une introduction et cinq chapitres:

Chapitre 1:

Dans le premier chapitre, intitulé : **préliminaires**, nous avons cité quelques définitions, propriétés, et un rappel sur les matrices.

Chapitre 2:

Quant au deuxième chapitre, intitulé : *EDP* **parabolique linéaire**, ce chapitre est consacré à l'étude des équations aux dérivées partielles et de leurs propriétés.

Chapitre 3:

Dans ce chapitre, nous allons mettre en évidence l'étude mathématique de l'équation de la réaction-diffusion, dans le cas linéaire et non linéaire.

Chapitre 4:

Après avoir présenté le principe de la méthode des différences finies, nous avons appliqué cette méthode à l'approximation de l'équation de réaction-diffusion linéaire à l'aide du schéma d'Euler implicite.

Chapitre 5:

Enfin, nous étudierons l'équation de la réaction-diffusion non linéaire par la méthode des différences finies à l'aide du schéma d'Euler explicite, pour l'approximation de la solution numérique.

Chapter 1

Préliminaires

dans ce chapitre, nous mentionnons les espaces fonctionnels, les opérateurs différentiels la formule de Taylor et les matrices et combinaison convexe.

1.1 Espace fonctionnels

1.1.1 Espace $C^k(\Omega)$ ($0 \leq k < \infty$)

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sera toujours un sous-ensemble ouvert et non vide $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ on pose $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$.longueur de α .

L'espace $C^k(\Omega)$ est un espace des fonctions dérivables jusqu'à l'ordre k , ses dérivées d'ordre k sont continues:

$$f \in C^k(\Omega) \Leftrightarrow \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leq k$$

et $D^\alpha f$ existe et continue .

L'espace $C^\infty(\Omega)$ est un espace de fonctions indéfiniment continument dérivables :

$$f \in C^\infty(\Omega) \Leftrightarrow \forall \alpha \in \mathbb{N}^n$$

et $D^\alpha f$ existe et continue.

1.1.2 Espaces des lebesgue $L^p(\Omega)$

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n .

Définition 1.1 L'espace des fonctions $L^p(\Omega)$ est de la classe des fonctions mesurables $1 \leq p < \infty$ sont définie comme suite:

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ mesurable et } \int_{\Omega} |f(x)|^p dx < +\infty \right\}$$

muni de la norme :

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

• pour $p = +\infty$:

$$L^\infty = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable tel que } \exists C > 0 |f(x)| < C \text{ p.p sur } \Omega\}$$

muni de la norme:

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf \{C; |f(x)| < C \text{ p.p sur } \Omega\} = \supess f$$

Définition 1.2 Fonction lipschitzienne

Soit I un intervalle de \mathbb{R} , $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une application. On dite que f est **lipschitzienne**, si $\exists k > 0$, tel que

$\forall x, y \in I$

$$|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$$

Définition 1.3 Support de fonction

Soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une application telle que $\text{Support } f = \overline{\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}}$.

Définition 1.4 Fonction test $D(\Omega)$

Si Ω est un ouvert non vide de \mathbb{R}^n , l'espace des fonction C^∞ à support compact de Ω dans \mathbb{R} est noté $D(\Omega)$.

1.1.3 Espace $H^1(\Omega)$

$$H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega); D^\alpha u \in L^2(\Omega) : |\alpha| \leq 1\}$$

1.1.4 Espace $H_0^1(\Omega)$

On note $H_0^1(\Omega)$ l'adhérence de $D(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$.

$$H_0^1(\Omega) = \overline{D(\Omega)}^{H^1(\Omega)}$$

1.2 Opérateurs différentiels

1.2.1 Gradient d'un vecteur

Soit f une fonction scalaire $f = f(x, y, z)$

$$\overrightarrow{\text{grad}}(f) = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k}$$

ou

$$\overrightarrow{\text{grad}}(f) = \nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}$$

1.2.2 Divergence d'un vecteur

On appelle divergence du vecteur f et on note $\text{div}(f)$ ou $\nabla \cdot f$ le scalaire :

Soit $f = f(x, y, z)$ et à valeurs f_1, f_2, f_3

$$\text{div}(f) = \nabla \cdot f = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}$$

1.2.3 Laplacien

Soit fonction $f = f(x, y, z)$

On appelle laplacien de f et on note Δf le scalaire :

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

1.3 Combinaison convexe

On dit que $x = \sum_{j=1}^k \lambda_j x_j$ est une combinaison convexe des points x_1, x_2, \dots, x_k un nombre fini si

- 1) $\lambda_j \geq 0 \quad \forall j = 1, \dots, k.$
- 2) $\sum_{j=1}^k \lambda_j = 1.$

1.4 Formules de Taylor et développements limités

1.4.1 Formule de Taylor Lagrange

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ un fonction de classe C^{n+1} .

Alors il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!}f''(a) + \dots + \frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)$$

Cette égalité peut encore s'écrire avec $h = b - a$

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2!}f''(a) + \dots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a+\theta h)$$

avec $0 < \theta < 1$.

1.4.2 Développements limités Yonge

Une fonction $f(x)$ définie au voisinage de $x = x_0$

- On dit que f admet un développement limité d'ordre n , s'il existe des nombres a_0, a_1, \dots, a_n

$$f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + \dots + a_n(x-x_0)^n + (x-x_0)^n\epsilon(x-x_0) \text{ et } \lim_{x \rightarrow x_0} \epsilon(x-x_0) = 0$$

Le polynôme $a_0 + a_1(x-x_0) + \dots + a_n(x-x_0)^n$ s'appelle partie principale du développement limité et le terme $(x-x_0)^n\epsilon(x-x_0)$ s'appelle le rest.

1.5 Rappel sur les matrices

Définition 1.5 Soit \mathbb{K} et $n, m \in \mathbb{N}^*$

On appelle une matrice de type (n, m) dans \mathbb{K}

$$A : \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, m\} \longrightarrow \mathbb{K}$$

$$(i, j) \longrightarrow A(i, j) = a_{ij}$$

On note a_{ij} l'élément qui se trouve à la ligne numéro i et la colonne j et on note la matrice A par

$$A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m}$$

On écrit A sous la forme d'un tableau rectangulaire à n lignes et m colonnes

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

L'ensemble des matrices de type (n, m) et noté $\mathcal{M}_{(n,m)}(\mathbb{K})$.

- $n = m$, on dit que A est une matrice carrée avec n lignes et n colonnes dont les éléments sont \mathbb{K} est notée $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, la suite des éléments $\{a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{nn}\}$ est appelé la diagonale principale de A .
- Éléments de séquence $\{a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{nn}\}$, Dans une matrice carrée, on l'appelle la diagonale principale de A .
- On dit que la matrice $\mathcal{M}_{(n,m)}(\mathbb{K})$ est réelle si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

1.5.1 Propriété d'une matrice carrée

La matrice $A = (a_{ij})$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

- **Transposé d'une matrice**

On appelle la transposée de la matrice A de type n, m la matrice A^t de type m, n , que l'on note $A^t = (a'_{ij})$ et dont les éléments sont définis sous la forme $a'_{ij} = a_{ji}$, dont les lignes sont formées des colonnes de A .

- **Matrice symétrique**

Une matrice est symétrique si et seulement si $A = A^t$.

- **Inverse d'une matrice**

on dit d'une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n$ qu'elle est inversible si l'on trouve une matrice $A^{-1} \in \mathcal{M}_n$ qui satisfait

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I_n$$

I_n est la matrice identité.

A^{-1} est appelée inverse de A .

- **Matrice définie positive**

La matrice A est une matrice carrée symétrique, on dit que A est définie positive si et seulement si :

$$\forall X \neq 0, X^t A X > 0$$

Théorème 1.1 [6] Une matrice carrée A symétrique définie positive est inversible et son inverse est symétrique définie positive.

1.5.2 Matrice particulière

• Matrice unité

On dit que A est une matrice unitaire si

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

La matrice unité noté I_n

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

• Matrice diagonale

C'est une matrice carrée telle que :

$$\forall i, j \in \{1, \dots, n\} \ i \neq j \Rightarrow a_{ij} = 0$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

• Matrice Tridiagonale

Soit A une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On dit A est tridiagonale si les seuls éléments non nuls se trouvent sur la diagonale ou adjacents à ,c'est-à-dire $a_{ij} = 0; |i - j| > 1$.

Schématiquement A est de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & 0 \\ a_{21} & & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & & \cdots & a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

1.5.3 Matrice jacobienne

Soit $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ une fonction, dont les composantes sont $F = (f_1, \dots, f_p)$

Définition 1.6 la matrice jacobienne de F en $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

$$J(x) = \nabla F(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}$$

1.5.4 Les valeurs propres et le rayon spectrale

• Les valeurs propres

soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ Alors :

$$\lambda \text{ est une valeur propre de } A \Leftrightarrow \det(A - \lambda I_n) = 0$$

• le rayon spectrale

de A est le plus grand des modules des valeurs propres de A

$$\rho(A) = \max_{i=1, \dots, n} |\lambda_i|$$

λ_i est une valeur propre de A .

1.5.5 Les valeurs propres de matrice tridiagonale symétrique

Lemma 1.1 [II]

soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, telle que :

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 \\ b & a & b & 0 & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & b & a & b \\ 0 & \cdots & \cdots & b & a \end{pmatrix}$$

Les valeurs propre de A sont données par :

$$\lambda_k = a + 2b \cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)$$

et $k = 1, \dots, n$.

Exemple 1.1 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{M})$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & \cdots & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de A est:

$$\begin{aligned} \lambda_k &= 2 - 2 \cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right) = 2 - 2 \left(\cos^2\left(\frac{k\pi}{2(n+1)}\right) - \sin^2\left(\frac{k\pi}{2(n+1)}\right) \right) \\ &= 2 - 2 \left(1 - 2 \sin^2\left(\frac{k\pi}{2(n+1)}\right) \right) \\ &= 4 \sin^2\left(\frac{k\pi}{2(n+1)}\right) \end{aligned}$$

1.5.6 Norme matricielle

On appelle norme matricielle $\|\cdot\|$ définie de $M_n(\mathbb{K})$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}) vérifiant les propriétés suivantes, $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

1. $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$.
2. $\|\alpha A\| = |\alpha| \|A\| \forall \alpha \in \mathbb{K}$.
3. $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|, \forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$. (inégalité triangulaire)
4. $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|, \forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$.

Par exemple:

$$\|A\|_1 = \max_{j=1, \dots, n} \sum_{i=1}^m |a_{i,j}|$$

$$\|A\|_\infty = \max_{i=1, \dots, n} \sum_{j=1}^m |a_{i,j}|$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^t A)}.$$

Remarque 1.1 Si la matrice A symétrique alors:

$$\|A\|_2 = \rho(A).$$

Chapter 2

Les équations Partielle Paraboliques

Les équations aux dérivées partielles (EDP) interviennent dans la description de très nombreux problèmes de l'électronique, physique, chimie, sciences de la terre, biologie...etc.

Dans ce chapitre, on va citer quelques définitions qui concerne les équations aux dérivées partielles paraboliques linéaires.

Définition 2.1 *Une équation aux dérivées partielles*

est une équation qui a une fonction de deux ou plusieurs variables indépendantes et contient les dérivées partielles de cette fonction. Nous appelons l'ordre de la plus grande dérivée partielle contenue dans l'équation aux dérivées partielles l'ordre de l'équation aux dérivées partielles.

Certaines équations aux dérivées partielles célèbres en physique peuvent être données :

L'équation des ondes unidimensionnelle

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

L'équation de la chaleur unidimensionnelle

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

L'équation de Laplace en deux dimensions

$$\Delta u(x, y) = 0$$

L'équation des ondes en deux dimensions

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \Delta u(x, y)$$

L'équation de Laplace en trois dimensions

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

2.1 Généralités

Ω ouvert $\subset \mathbb{R}^n$. une fonction u :

$$\begin{aligned} u : \Omega \subset \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, x_2, \dots, x_n) &\mapsto u(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned}$$

et (x_1, x_2, \dots, x_n) variables.

Définition 2.2 Une équation aux dérivées partielles est une relation entre une fonction de plusieurs variables u et ses dérivées partielles et Les variables indépendantes (x_1, x_2, \dots, x_n)

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 x_2}, \dots) = 0 \quad (2.1)$$

1. L'équation (2.1) est considérée dans un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.
2. Les solution de l'EDP(2.1) sont les fonctions qui vérifient cette équation dans Ω .
3. l'ordre de dérivation le plus élevé est est appelé l'ordre de l'EDP.
4. La dimension d'une équation aux dérivées partielles est le nombre des variable indépendantes de la fonction inconnue u .l'équation (2.1) est donc de dimension n .

Définition 2.3

1. une équation aux dérivées partielles est linéaire si et seulement si:
L'équation peut s'écrire comme:

$$L(u) = f$$

L est un opérateur linéaire par rapport à u et ses dérivées partielles.

2. Si f est nulle, on dit que l'équation est homogène.

Exemple 2.1 1. $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0$

1^{er} ordre linéaire et homogène.

2. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0$

2^{eme} ordre linéaire et homogène.

3. $\frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y)$

2^{eme} ordre, non linéaire et non homogène.

2.1.1 EDP linéaire du 1^{er} ordre en dimension 2

La forme la plus générale pour une EDP linéaire du 1^{er} ordre est:

on a:

$$\begin{aligned} u : \Omega \subset \mathbb{R}^2 &\mapsto \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto u(x, y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} + c(x, y)u &= d(x, y) \\ a, b, c, d &\in C^1(\Omega) \end{aligned}$$

$a^2 + b^2 \neq 0$ (au moins un des coefficients a ou b ne s'annule pas sur Ω).

2.1.2 EDP linéaire du seconde ordre en dimension 2

On a:

$$\begin{aligned} u : \Omega \subset \mathbb{R}^2 &\mapsto \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto u(x, y) \end{aligned}$$

$$a(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + e(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} + f(x, y)u = g(x, y) \quad (2.2)$$

$$a, b, c, d, e, f, g \in C^2(\Omega) \quad / \quad a^2 + b^2 + c^2 \neq 0 \text{ sur } \Omega$$

2.1.3 EDP linéaire du second ordre en dimension n

Une EDP linéaire du second ordre dans \mathbb{R}^n , s'écrit sous la forme générale suivant :

$$u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$$

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto u(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(X) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(X) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(X)u = f(X) \quad (2.3)$$

$a_{ij}(X) = a_{ji}(X)$ donc $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ matrice symétrique

2.1.4 Classification d'une EDP linéaire d'ordre 2 en dimension n

L'EDP (2.3) linéaire d'ordre 2 en dimension n . Notons que $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ une matrice symétrique elle est donc diagonalisable et $(\lambda_i(X))_{i=1}^n / X = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ les valeurs propres de A . On dit que:

1. L'EDP (2.3) est elliptique si et seulement si toutes les valeurs propres de A sont non nulles et de même signe
2. L'EDP (2.3) est hyperbolique si et seulement si toutes les valeurs propres de A sont non nulles et de même signe sauf une valeur de signe opposé.
3. L'EDP (2.3) est parabolique si et seulement si toutes les valeurs propres de A sont non nulles et de même signe et une valeur est nulle.

2.1.5 classification d'une EDP (2.2)

1. $b^2 - ac < 0$, L'EDP est elliptique.
2. $b^2 - ac > 0$, L'EDP est hyperbolique.
3. $b^2 - ac = 0$, L'EDP est parabolique.

2.1.6 Conditions aux limites (C.L):

- On appelle condition de **Dirichlet** une condition ou on impose la valeur de la fonction recherchée (u) sur le bord $\partial\Omega$. (condition du type 1).
- On appelle condition de **Neumann** une condition ou on impose la valeur de la dérivée normale de la fonction recherchée (u) sur le bord $\partial\Omega$ (condition du type 2).
- On appelle condition de **Fourier-Robin** une condition ou on impose une relation entre la valeur de la dérivée normale de la fonction recherchée (u) et sa valeur sur le bord $\partial\Omega$ (condition du type 3).

2.1.7 Condition initiale (C.I):

Si l'EDP modélise un problème d'évolution, on ajoute la condition initiale qui dépende du temps.

2.1.8 Le problème aux limite

(EDP+ condition aux limite) \implies problème aux limite

2.1.9 Problème bien posé

Soit (P) un problème aux limite.

Proposition 2.1 [2]

On dit que (P) bien posé si :

1. Il existe une solution de (P) satisfaisant les conditions aux frontières.
2. La solution doit-être unique.
3. La solution doit-être stable par rapport aux conditions aux frontières imposées.

Remarque 2.1

Un problème qui n'est pas bien posé est dit mal posé.

Exemple 2.2

$$\begin{cases} -u''(x) = 1, \text{ sur }]0, 1[. \\ u'(0) = u'(1) = 0. \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 -u''(x) = 1 &\implies -u''(x) = x + c_1 \implies -u(x) = \frac{1}{2}x^2 + c_1x + c_2 \\
 \implies u(x) &= -\frac{1}{2}x^2 - c_1x - c_2 \implies u'(0) = -c_1 \implies c_1 = 0 \\
 u'(1) &= -1 - c_1 = 0 \implies c_1 = -1.
 \end{aligned}$$

Alors c'est problème est mal posé .

2.2 Problèmes paraboliques

2.2.1 L'équation de la chaleur :

La diffusion de la chaleur le long d'une barre métallique longueur L est l'équation aux dérivées partielles d'ordre 2:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \gamma \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) &= f(x, t) : x \in [0, L], t \in [0, T] \\
 \gamma > 0 \text{ avec } \gamma &= \frac{\lambda}{\rho C}
 \end{aligned}$$

ρ : la masse volumique.

λ : le coefficient de conductivité thermique.

C :est une coefficient de chaleur massique .

l'une des extrémités de la barre est reliée à une source de température

$u(x, t)$ presente la température de la barre au point d'abscisse x au temps t .

Remarque 3.1:

C'est une équation de la chaleur dans un domaine borné.

Modélisation L'équation de la chaleur :

Nous allons raisonner sur une petite tranche de la barre d'épaisseur Δx (de section S) et situé à la position x .

Une extrémité est initialement à la température $u(x)$,l'autre à la température $u(x + \Delta x)$.sur ce petit élément de la barre on va avoir une certaine quantité de chaleur qui va entrer appelée Q_1 et une chaleur qui va sortir notée Q_2 .

Maintenant on peut évaluer la chaleur qui entre et la chaleur qui sort à partir de la loi de Fourier :

$$\frac{\partial Q_1}{\partial t}(x, t) = -\lambda S \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial Q_2}{\partial t}(x, t) = -\lambda S \frac{\partial u}{\partial x}(x + \Delta x, t) \quad (2.5)$$

D'après les deux équations

$$\partial Q_1(x, t) = -\lambda S \partial t \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \quad (2.6)$$

$$\partial Q_2(x, t) = -\lambda S \partial t \frac{\partial u}{\partial x}(x + \Delta x, t) \quad (2.7)$$

On constate ue ces quantités de chaleur sont différentes puisqu'on évalue la température à des coordonnées différentes.

Et ce qui est intéressant c'est d'évaluer la différence entre la chaleur qui entre et la chaleur qui sort pour un temps fixé:

$$\begin{aligned} dQ &= dQ_1 - dQ_2 \\ &= -\lambda S \partial t \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) + \lambda S \partial t \frac{\partial u}{\partial x}(x + \Delta x, t) \\ &= \lambda S \partial t \left[\frac{\partial u}{\partial x}(x + \Delta x, t) - \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right] \end{aligned} \quad (2.8)$$

Un développement limité d'ordre 1 au point $x + \Delta x$ donne :

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x + \Delta x, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) + \Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + R_2(\Delta x) \quad (2.9)$$

avec

$$(\Delta x) \longrightarrow 0 \text{ alors } : R_2(\Delta x) \longrightarrow 0$$

On introduit dans l'équation (2.8) le développement trouvé en (2.9)

$$\begin{aligned} \partial Q &\simeq \lambda S \partial t \left[\frac{\partial u}{\partial x}(x, t) + \Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) - \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right] \\ &\simeq \lambda S \partial t \Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \end{aligned} \quad (2.10)$$

cette chaleur sert à chauffer un petit morceau de masse élémentaire dm :

$$dQ = C du dm$$

Or $dm = \rho dV = \rho S \Delta x$ donc on a:

$$dQ = \rho C S \Delta x du \quad (2.11)$$

d'après (2.10) et (2.11) on peut faire le bilan thermique suivant:

$$\begin{aligned}
 C\rho S\Delta x du &= \lambda S\partial t\Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\
 C\rho du &= \lambda\partial t \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\
 \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\lambda}{\rho C} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}
 \end{aligned} \tag{2.12}$$

Généralement on préfère noter la relation (2.12) de la manière suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \gamma \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{avec} \quad \gamma = \frac{\lambda}{\rho C}$$

2.2.1.1 l'équation de la chaleur (D1)

s'écrit:

$$\begin{cases}
 \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \gamma \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = f(x, t) & x \in]0, 1[, t \in]0, T[\\
 u(x, 0) = u_0(x), \dots & C.I x \in]0, 1[\\
 u(0, t) = u(1, t) = 0, \dots & C.L t \in]0, T[
 \end{cases}$$

2.2.1.2 l'équation de la chaleur en (D2)

$$\begin{cases}
 \frac{\partial u}{\partial t}(x, y, t) - \gamma \Delta u(x, y, t) = f(x, y, t) & (x, y) \in \Omega, t \in]0, T[\\
 u(x, y, 0) = u_0(x, y), & \text{pour } (x, y) \in \Omega \\
 u(0, y, t) = u(1, y, t) = 0, & \text{pour } t \in [0, T] \\
 u(x, 0, t) = u(x, 1, t) = 0, & \text{pour } t \in [0, T]
 \end{cases}$$

2.3 l'équation de réaction-diffusion

l'équation de réaction-diffusion est une classe de l'équation de la chaleur , ou le second membre f dépend de la solution , on a deux types de réaction- diffusion :

- 1 l'équation de réaction-diffusion linéaire dans le cas où f est linéaire par rapport à u .
- 2 l'équation de réaction-diffusion non linéaire dans le cas où f est non linéaire par rapport à u .

2.3.1 L'équations de réaction-diffusion linéaire

s'écrit:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \gamma \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = f(u) & x \in]0, 1[, t \in]0, T[\\ u(x, 0) = u_0(x), \dots & C.I x \in]0, 1[\\ u(0, t) = u(1, t) = 0, \dots & C.L t \in]0, T[\end{cases}$$

où $f(u)$ est une fonction linéaire .

Etude mathématiques de l'équation de réaction-diffusion linéaire

On prend comme modèle l'équation suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \gamma \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = bu(x, t) & x \in]0, 1[, t \in]0, T[, b \in \mathbb{R}^* \\ u(x, 0) = u_0(x), \dots & C.I x \in]0, 1[\\ u(0, t) = u(1, t) = 0, \dots & C.L t \in]0, T[\end{cases} \quad (2.13)$$

ou $f(u) = bu(x, t)$, il est claire que f est linéaire .

Résultat d'existence et unicité

Théorème 2.1 [9]: Si $u_0 \in \mathcal{C}([0; 1[, \mathbb{R})$ alors il existe une unique fonction $u \in \mathcal{C}^2(]0; 1[\times]0, T[, \mathbb{R}) \cap \mathcal{C}([0; 1[\times]0, T[, \mathbb{R})$ qui vérifie (2.13)

On a même $u \in \mathcal{C}^\infty(]0; 1[\times]0, T[, \mathbb{R})$: c'est l'effet régularisant de l'équation de la chaleur.

Principe du maximum

Proposition 2.2 [9]: Sous les hypothèses du théorème 2.1 ,soit u la solution du problème (2.13):

1. si $u_0(x) \geq 0$ pour tout $x \in [0; 1]$, alors $u(x, t) \geq 0$, pour tout $t \geq 0$, pour tout $x \in]0; 1[$.

2. $\| u \|_{L^\infty([0; 1[\times]0, T])} \leq \| u_0 \|_{L^\infty([0; 1])}$.

2.3.2 L'équations de réaction-diffusion non linéaire

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \gamma \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = f(u) & x \in]0, 1[, t \in]0, T[\\ u(x, 0) = u_0(x), \dots & C.I x \in]0, 1[\\ u(0, t) = u(1, t) = 0, \dots & C.L t \in]0, T[\end{cases}$$

Où $f(u)$ est une polynôme de seconde degré $f(u) = au^2 + bu + c$.

Exemple 2.3 On prend comme modèle l'équation suivant (le problème de Fisher):

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \gamma \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = u(1 - u) & x \in]0, 1[, t \in]0, T[\\ u(x, 0) = u_0(x), \dots & C.I x \in]0, 1[\\ u(0, t) = u(1, t) = 0, \dots & C.L t \in]0, T[\end{cases}$$

Etude mathématiques de l'équation de réaction-diffusion non linéaire

Soit le problème non linéaire suivant:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \gamma \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = f(u) \text{ où } f(u) = u(1 - u) & x \in]0, 1[, t \in]0, T[\\ u(x, 0) = u_0(x), \dots & C.I x \in]0, 1[\\ u(0, t) = u(1, t) = 0, \dots & C.L t \in]0, T[\end{cases} \quad (2.14)$$

ou f est une fonction non linéaire et lipschitizienne tel que :

$$|f(u) - f(v)| \leq c|u - v| \quad c > 0$$

$$f \in (L^\infty \cap C^1); \frac{\partial f}{\partial u} \geq 0 \text{ dans } \Omega$$

Théorème 2.2 [4]: le problème (2.14) admet une solution unique u , tel que: $u \in L^2([0, T], H_0^1(\Omega))$

Chapter 3

Approximation par différences finis de l'équation de la réaction-diffusion linéaire

Après avoir présenté le principe de la méthode des différences finies, nous avons appliqué cette méthode à l'approximation de l'équation de réaction-diffusion linéaire à l'aide de Schéma d'Euler implicite.

3.1 Présentation de la méthode de DF

La méthode des différences finies (DF) est une technique de recherche de solution approchée pour les équations aux dérivées partielles qui consiste à résoudre un système de relations (schéma numérique) liant les valeurs des fonctions inconnues en certains points suffisamment proches les uns des autres. Le principe fondamental de la méthode consiste à la compensation des dérivées dans le problème continu au différences finies sur des points finis et précisés. Cette méthode fait partie de plusieurs travaux des mathématiciens du dix-huitième siècle.

3.1.1 Différences finies en dimension 1

1. Discrétisation de domaine

$\Omega = [a, b]$ $\partial\Omega = \{a, b\}$ La maillage: $x_i = a + i\Delta x$.

Notation :

On note u_i la valeur discrète de $u(x)$ au point x_i , soit $u_i = u(x_i)$. De même pour la dérivée de $u(x)$ au noeud x_i on note :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=x_i} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i = u'_i$$

Cette notation s'utilise de façon équivalente pour toutes les dérivées d'ordre successif de la grandeur u .

2. Approximation des dérivés premières

La fonction u est connue aux points x_i du domaine d'analyse .

• Différences finies en avant:

A l'aide de la formule de Taylor on développe la fonction u jusqu'à l'ordre 2

$$u(x_i + \Delta x) = u(x_i) + \Delta x u'(x_i) + \frac{(\Delta x)^2}{2!} u''(\xi)$$

ξ abscisse d'un point se trouvant dans le voisinage de x_i .Avec $x_i < \xi < x_i + \Delta x$.

La forme résolu est

$$u'(x_i) = \frac{u(x_i + \Delta x) - u(x_i)}{\Delta x} - \frac{\Delta x}{2} u''(\xi)$$

$$= \frac{u(x_i + \Delta x) - u(x_i)}{\Delta x} + O(\Delta x)$$

$$u'(x_i) \simeq \frac{u(x_i + \Delta x) - u(x_i)}{\Delta x}$$

$$u'_i = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i \simeq \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x}$$

• Différences finies en arrière :

A l'aide de la formule de Taylor on développe la fonction u jusqu'à l'ordre 2

$$u(x_i - \Delta x) = u(x_i) - \Delta x u'(x_i) + \frac{(\Delta x)^2}{2!} u''(\xi)$$

$x_i - \Delta x < \xi < x_i$

$$u'(x_i) = \frac{u(x_i) - u(x_i - \Delta x)}{\Delta x} - \frac{\Delta x}{2} u''(\xi)$$

$$= \frac{u(x_i) - u(x_i - \Delta x)}{\Delta x} + O(\Delta x)$$

$$u'(x_i) \simeq \frac{u(x_i) - u(x_i - \Delta x)}{\Delta x}$$

$$u'_i = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_i \simeq \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta x}$$

• **Différences finies centrées:**

A l'aide de la formule de Taylor on développe la fonction u jusqu'à l'ordre 3

$$u(x_i + \Delta x) = u(x_i) + \Delta x u'(x_i) + \frac{(\Delta x)^2}{2!} u''(x_i) + \frac{(\Delta x)^3}{3!} u^{(3)}(\xi_1)$$

$$x_i < \xi_1 < x_i + \Delta x$$

Et

$$u(x_i - \Delta x) = u(x_i) - \Delta x u'(x_i) + \frac{(\Delta x)^2}{2!} u''(x_i) - \frac{(\Delta x)^3}{3!} u^{(3)}(\xi_2)$$

$$x_i - \Delta x < \xi_2 < x_i$$

$$u'(x_i) = \frac{u(x_i + \Delta x) - u(x_i - \Delta x)}{2\Delta x} + O((\Delta x)^2)$$

Donc

$$u'_i = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_i \simeq \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta x}$$

3. Approximation des dérivées secondes

• **Différences finies en avant :**

On écrit le développement de Taylor de $u(x_i + \Delta x)$ et $u(x_i + 2\Delta x)$:

$$u(x_i + \Delta x) = u(x_i) + \Delta x u'(x_i) + \frac{(\Delta x)^2}{2!} u''(x_i) + \frac{(\Delta x)^3}{3!} u^{(3)}(\xi_1)$$

$$x_i < \xi_1 < x_i + \Delta x$$

Et

$$u(x_i + 2\Delta x) = u(x_i) + 2\Delta x u'(x_i) + \frac{4(\Delta x)^2}{2!} u''(x_i) + \frac{8(\Delta x)^3}{3!} u^{(3)}(\xi_2)$$

$$x_i < \xi_2 < x_i + 2\Delta x$$

$$u(x_i + 2\Delta x) - 2u(x_i + \Delta x) = -u(x_i) + \Delta x^2 u''(x_i) + O((\Delta x)^3)$$

$$u''(x_i) = \frac{u(x_i + 2\Delta x) - 2u(x_i + \Delta x) + u(x_i)}{\Delta x^2} + O(\Delta x)$$

Alors

$$u''(x_i) \simeq \frac{u(x_i + 2\Delta x) - 2u(x_i + \Delta x) + u(x_i)}{(\Delta x)^2}$$

Donc

$$u''_i = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \simeq \frac{u_{i+2} - u_{i+1} + u_i}{(\Delta x)^2}$$

• **Différences finies en arrière:**

On écrit le développement de Taylor de $u(x_i - \Delta x)$ et $u(x_i - 2\Delta x)$:

$$u(x_i - \Delta x) = u(x_i) - \Delta x u'(x_i) + \frac{(\Delta x)^2}{2!} u''(x_i) - \frac{(\Delta x)^3}{3!} u^{(3)}(\xi_1)$$

$$x_i - \Delta x < \xi_1 < x_i$$

Et

$$u(x_i - 2\Delta x) = u(x_i) - 2\Delta x u'(x_i) + \frac{4(\Delta x)^2}{2!} u''(x_i) - \frac{8(\Delta x)^3}{3!} u^{(3)}(\xi_2)$$

$$x_i - 2\Delta x < \xi_2 < x_i$$

$$2u(x_i - \Delta x) - u(x_i - 2\Delta x) = u(x_i) - (\Delta x)^2 u''(x_i) + O((\Delta x)^3)$$

$$u''(x_i) = \frac{u(x_i + 2\Delta x) - 2u(x_i + \Delta x) + u(x_i)}{(\Delta x)^2} + O(\Delta x)$$

Alors

$$u''(x_i) \simeq \frac{u(x_i) - 2u(x_i - \Delta x) + u(x_i - 2\Delta x)}{(\Delta x)^2}$$

Donc

$$u''_i = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \simeq \frac{u_{i-2} - u_{i-1} + u_i}{(\Delta x)^2}$$

• **Différences finies en centrée :**

On écrit le développement de Taylor de $u(x_i + \Delta x)$ et $u(x_i - \Delta x)$:

$$u(x_i + \Delta x) = u(x_i) + \Delta x u'(x_i) + \frac{(\Delta x)^2}{2!} u''(x_i) + \frac{(\Delta x)^3}{3!} u^{(3)}(x_i) + \frac{(\Delta x)^4}{4!} u^{(4)}(\xi_1)$$

$$x_i < \xi_1 < x_i + \Delta x$$

Et

$$u(x_i - \Delta x) = u(x_i) - \Delta x u'(x_i) + \frac{(\Delta x)^2}{2!} u''(x_i) - \frac{(\Delta x)^3}{3!} u^{(3)}(x_i) + \frac{(\Delta x)^4}{4!} u^{(4)}(\xi_2)$$

$$x_i - \Delta x < \xi_2 < x_i$$

$$u(x_i + \Delta x) - u(x_i - \Delta x) = 2u(x_i) + (\Delta x)^2 u''(x_i) + O((\Delta x)^4)$$

$$u''(x_i) = \frac{u(x_i + \Delta x) + u(x_i - \Delta x) + 2u(x_i)}{(\Delta x)^2} + O((\Delta x)^2)$$

Alors

$$u''(x_i) \simeq \frac{u(x_i - \Delta x) + u(x_i + \Delta x) - 2u(x_i)}{(\Delta x)^2}$$

Donc

$$u''_i = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \simeq \frac{u_{i+1} + u_{i-1} - 2u_i}{(\Delta x)^2}$$

3.1.2 Différences finies en dimension 2

4.1.2.1 Discrétisation de domaine

Dans ce cas on discrétise le domaine rectangulaire par des maillages formés de grilles perpendiculaires $\Omega = [a, b] \times [c, d]$ / soit $(x, y) \in [a, b] \times [c, d]$

On prend Δx et Δt les pas discrétisation des intervalles $[a, b] \times [c, d]$ respectivement .

•Discrétisation d'intervalle[a,b]:

$$\Delta x = \frac{b - a}{n_x} \text{ (} n_x \text{ étant le nombre d'intervalle sur [a,b]).}$$

$$x_i = a + i\Delta x \quad , \quad i \in \{1, 2, \dots, n_x\}$$

•Discrétisation d'intervalle [c,d]:

$$\Delta y = \frac{d - c}{n_y} \text{ (} n_y \text{ étant le nombre d'intervalle sur [c,d])}$$

$$y_j = c + j\Delta y \quad , \quad j \in \{1, 2, \dots, n_y\}$$

1. Approximation des dérivés premières

De la même manière que dans le cas en dimension 1 .

On obtient dimension 2 les approximations suivantes :

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_i, y_j) \simeq \begin{cases} \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta x} & \text{en avant.} \\ \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{\Delta x} & \text{en arrière.} \\ \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2\Delta x} & \text{centrée.} \end{cases}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x_i, y_j) \simeq \begin{cases} \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\Delta y} & \text{en avant.} \\ \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{\Delta y} & \text{en arrière.} \\ \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2\Delta y} & \text{centrée.} \end{cases}$$

2. Approximation des dérivés secondes

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j) \simeq \begin{cases} \frac{u_{i+2,j} + u_{i,j} - 2u_{i+1,j}}{(\Delta x)^2} & \text{en avant} \\ \frac{u_{i,j} + u_{i-2,j} - 2u_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} & \text{en arrière} \\ \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} & \text{centrée} \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i, y_j) \simeq \begin{cases} \frac{u_{i,j+2} + u_{i,j} - 2u_{i,j+1}}{(\Delta y)^2} & \text{en avant} \\ \frac{u_{i,j} + u_{i,j-2} - 2u_{i,j-1}}{(\Delta y)^2} & \text{en arrière} \\ \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{(\Delta y)^2} & \text{centrée} \end{cases}$$

4.1.2.2 Discrétisation de temps

La discrétisation consiste à donner un ensemble de points t^n , $n = 0, \dots, N + 1$ de l'intervalle $]0, T[$ et un ensemble de points x_i , $i = 0, \dots, M + 1$ de l'intervalle $[a, b]$.

$$\Delta x = \frac{b - a}{M + 1} \text{ (le pas de discrétisation en espace)}$$

$$x_i = a + i\Delta x, i = 0, \dots, M + 1 / x_0 = a \text{ et } x_{M+1} = b.$$

$$\Delta t = \frac{T - 0}{N + 1} = \frac{T}{N + 1} \text{ (le pas de discrétisation en temps).}$$

$t^n = 0 + n\Delta t = n\Delta t, n = 0, \dots, N + 1 / t^0 = 0$ et $t^{N+1} = T$.

Les inconnues discrètes sont notées : u_i^n .

1. Approximation des les d'erivées par rapport au temps

•Schéma d'Euler explicite :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t^n) \simeq \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t}$$

•Schéma d'Euler implicite :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t^n) \simeq \frac{u_i^n - u_i^{n-1}}{\Delta t}$$

•Schéma d'Euler centrée :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t^n) \simeq \frac{u_i^{n+1} - u_i^{n-1}}{2\Delta t}$$

3.1.3 Le principe de la méthode des différences finies

La méthode des différences finies est basé sur le trois axes suivant :

4.1.3.1 Consistance du schéma numérique

1. Erreur de consistance

On appelle erreur de consistance est la différence entre le problème exacte et le problème discrétisée

$$R_i^n = Lu - L_h u$$

L c'est l'opérateur différentiel du (Pc) .

L_h c'est l'opérateur différentiel du (Ph) .

2. Consistance de schéma numérique

On dit que le schéma est consistant si :

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \max_{i=0, \dots, M} |R_i^n| = 0$$

3. Ordre de consistance du schéma

On dit qu'un schéma numérique à M points de discrétisation est d'ordre $p \in \mathbb{N}$ s'il existe une constante $c \in \mathbb{R}$ indépendante de la solution exacte telle que l'erreur de consistance vérifie :

$$\max_{i=0,\dots,M} |R_i^n| \leq c(\Delta x)^p$$

Remarque 3.1 Le schéma est d'ordre p en espace et d'ordre q en temps si l'erreur de consistance vérifie :

$$R_i^n = O((\Delta x)^p) + O((\Delta t)^q)$$

4.1.3.2 Stabilité du schéma numérique

1. Stabilité en norme L^∞

La stabilité en norme L^∞ est très liée avec le principe du maximum discret.

Définition 3.1 Un schéma aux différences finies vérifie le principe du maximum discret si pour tout $n \geq 0$ et tout $1 \leq i \leq M$ on a :

$$\min_{0 \leq i \leq M} (u_i^0) \leq u_i^n \leq \max_{1 \leq i \leq M} (u_i^0)$$

quelle que soit la donnée initiale u^0 .

Proposition 3.1 Stabilité L^∞ pour Euler implicite [9]

Si $(u_i^{(n)})_{i=1,\dots,M}$ solution du schéma, alors :

$$\max_{i=1,\dots,M} u_i^{(n+1)} \leq \max_{i=1,\dots,M} u_i^{(n)} \leq \max_{i=1,\dots,M} u_i^{(0)}$$

de même

$$\min_{i=1,\dots,M} u_i^{(n+1)} \geq \min_{i=1,\dots,M} u_i^{(n)} \geq \min_{i=1,\dots,M} u_i^{(0)}$$

Le schéma est donc L^∞ stable.

2. Stabilité en norme L^2 ($p = 2$) (au sens Von Neumann)

La norme L^2 se prête bien à l'étude de la stabilité grâce à l'outil très puissant de l'analyse de Fourier

Dans le cas des conditions aux limites périodiques on peut utiliser une méthode d'analyse de Fourier, plutôt que de d'écrire en détails cette méthode, on rappelle une condition nécessaire très simple, dite de Von Neumann.

•Condition de stabilité de von Neumann

On considère une solution discrète particulière sous la forme d'un mode de Fourier. pour $k \in \mathbb{Z}$,

$$u_j^n = A(K)^n \exp(2i\pi K x_j), \text{ avec } x_j = j\Delta x$$

En injectant cette solution dans la définition du schéma on trouve une formule pour le coefficient d'amplification $A(k) \in \mathbb{C}$.

On appelle condition de stabilité de Von Neumann l'inégalité:

$$|A(K)| \leq 1 \text{ pour tout mode } K \in \mathbb{Z}$$

Si la condition de stabilité de Von Neumann est satisfaite (avec éventuellement des restrictions sur Δx et Δt), alors le schéma est stable pour la norme L^2 , si non il est instable.

3. Stabilité en norme L^2 (Stabilité matricielle)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Pour la forme matricielle de schéma des différences finies est comme ceci:

$$u^{n+1} = Au^n$$

On dit que c'est stable en norme matricielle L^2 si :

$$\|A\|_2 \leq 1$$

4. La condition de Courant-Friedrichs-Lewy (C.F.L)

La condition C.F.L porte le nom de trois mathématiciens allemands (Richard Courant, Kurt Friedrichs et Hans Lewy) qui ont publié en 1928 un article concernant l'analyse d'équations aux dérivées partielles et leur approximation numérique. Cet article mettait en évidence une condition nécessaire pour qu'un algorithme de calcul produise une solution cohérente. Cet article très en avance sur son temps a trouvé un intérêt majeur avec le développement des ordinateurs permettant la mise en oeuvre de différentes méthodes numériques de résolution consistant à discrétiser le domaine de travail en pas de temps Δt et en pas d'espace Δx .

4.1.3.3 La convergence

$u(x_i, t^n)$ la solution exacte .

u_i^n la solution numérique.

- L'erreur globale est définie par :

$$e_i^n = \sup_{i,n} |u_i^n - u(x_i, t^n)|$$

- Un schéma est convergent si l'erreur globale tend vers 0 (ou si la solution numérique u_i^n tend vers la solution exacte $u(x_i, t^n)$) quand les pas de discrétisation tendent vers 0 .

Théorème 3.1 (Théorème de Lax) [2]

Dans un problème au limite linéaire bien posé un schéma numérique consistante, la stabilité est une condition nécessaire et suffisante pour la convergence.

3.2 Équation de la réaction-diffusion

3.2.1 Le problème continu D1 :

Soit u_0 une fonction donnée de $[0, 1]$ dans \mathbb{R}

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \gamma \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = bu(x, t) & x \in]0, 1[, t \in]0, T[\\ u(x, 0) = u_0(x) & x \in]0, 1[\\ u(0, t) = u(1, t) = 0 & t \in]0, T[\end{cases} \quad (3.1)$$

ou $f(u) = bu(x, t)$ est une application linéaire .

pour l'existence et l'unicité de la solution voir Théorème 2.1.

3.2.2 Problème Discrété :

- *Discrétisation en temps:*

$$t^n = n\Delta t, n \in [0, N + 1]/t^0 = 0 \text{ et } t^{N+1} = T$$

- *Discrétisation en espace:*

$$x_i = i\Delta x, i \in [0, M + 1]/x_0 = 0 \text{ et } x_{M+1} = 1$$

En utilisant le Schéma d'Euler explicite pour le temps et le Schéma d'Euler centrée pour le espace :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_i^n = \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + O(\Delta t)$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i^{n+1} = \frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{(\Delta x)^2} + O((\Delta x)^2)$$

3.2.3 Schéma d'Euler implicite de la réaction-diffusion linéaire :

$$\begin{cases} \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} - \gamma \frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{(\Delta x)^2} = bu_i^n \\ u_i^0 = u_0(x_i) \quad \forall i = 0, \dots, M + 1 \\ u_0^n = u_{M+1}^n = 0 \quad \forall n = 0, \dots, N + 1 \end{cases} \quad (3.2)$$

Nous remplaçons les dérivées partielles par leurs approximations d'ejà établies tenant compte au conditions au borde et initiales.pour avoir le problème discrété.

3.2.4 Forme matricielle:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = \gamma \frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{(\Delta x)^2} + bu_i^n$$

$$\implies u_i^{n+1} - u_i^n = \gamma \frac{\Delta t}{\Delta x^2} (u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}) + b\Delta t u_i^n$$

Posons

$r = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$ on trouve l'équation:

$$-\gamma r u_{i-1}^{n+1} + (1 + 2\gamma r)u_i^{n+1} - \gamma r u_{i+1}^{n+1} = (1 + b\Delta t)u_i^n \quad (3.3)$$

Ceci est le schéma numérique de la réaction-diffusion . Lorsque nous fixons j et faisons varier i , nous obtenons le système linéaire suivant:

$$\begin{cases} \frac{1}{(1+b\Delta t)}[-\gamma r u_0^{n+1} + (1+2\gamma r)u_1^{n+1} - \gamma r u_2^{n+1}] = u_1^n \\ \frac{1}{(1+b\Delta t)}[-\gamma r u_1^{n+1} + (1+2\gamma r)u_2^{n+1} - \gamma r u_3^{n+1}] = u_2^n \\ \frac{1}{(1+b\Delta t)}[-\gamma r u_2^{n+1} + (1+2\gamma r)u_3^{n+1} - \gamma r u_4^{n+1}] = u_3^n \\ \vdots \\ \vdots \\ \frac{1}{(1+b\Delta t)}[-\gamma r u_{M-1}^{n+1} + (1+2\gamma r)u_M^{n+1} - \gamma r u_{M+1}^{n+1}] = u_M^n \end{cases}$$

Avec $u_0^{n+1} = u_{M+1}^{n+1} = 0$.

Form matricielle

$$AU^{n+1} = U^n$$

$$\frac{1}{(1+b\Delta t)} \begin{pmatrix} (1+2\gamma r) & -\gamma r & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -\gamma r & (1+2\gamma r) & -\gamma r & \ddots & & \vdots \\ 0 & -\gamma r & (1+2\gamma r) & -\gamma r & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & -\gamma r & (1+2\gamma r) & -\gamma r \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -\gamma r & (1+2\gamma r) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^{n+1} \\ u_2^{n+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{M-1}^{n+1} \\ u_M^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1^n \\ u_2^n \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{M-1}^n \\ u_M^n \end{pmatrix}$$

Avec:

$$A = \frac{1}{(1+b\Delta t)} \begin{pmatrix} (1+2\gamma r) & -\gamma r & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -\gamma r & (1+2\gamma r) & -\gamma r & \ddots & & \vdots \\ 0 & -\gamma r & (1+2\gamma r) & -\gamma r & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & -\gamma r & (1+2\gamma r) & -\gamma r \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -\gamma r & (1+2\gamma r) \end{pmatrix}$$

$$A_h = \frac{\gamma r}{(1 + b\Delta t)} \begin{pmatrix} \frac{1}{\gamma r} + 2 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & \frac{1}{\gamma r} + 2 & -1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & -1 & \frac{1}{\gamma r} + 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & -1 & \frac{1}{\gamma r} + 2 & -1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 & \frac{1}{\gamma r} + 2 \end{pmatrix}$$

prouver que A_h est définie positive .

• *Calculons le produit vA_hv^t*

soit $v = (v_1, v_2, \dots, v_M)$,on pose $v_0 = v_{M+1} = 0$ et $c_i = \frac{1}{\gamma r}$.

$$vA_hv^t = \frac{\gamma r}{(1 + b\Delta t)} [v_1, v_2, \dots, v_M] \begin{bmatrix} c_1 + 2 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & c_2 + 2 & -1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & -1 & c_3 + 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & -1 & c_{M-1} + 2 & -1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 & c_M + 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ v_{M-1} \\ v_M \end{bmatrix}$$

$$= \frac{\gamma r}{(1 + b\Delta t)} (v_1, v_2, \dots, v_M) \begin{bmatrix} (2 + c_1) v_1 - v_2 \\ -v_1 + (2 + c_2) v_2 - v_3 \\ -v_2 + (2 + c_3) v_3 - v_4 \\ -v_3 + (2 + c_4) v_4 - v_5 \\ \vdots \\ -v_{M-2} + (2 + c_{M-1}) v_{M-1} - v_M \\ -v_{M-1} + (2 + c_M) v_M \end{bmatrix}$$

$$= \frac{\gamma r}{(1 + b\Delta t)} [(2 + c_1) v_1^2 - v_1 v_2 \\ -v_1 v_2 + (2 + c_2) v_2^2 - v_2 v_3 \\ -v_2 v_3 + (2 + c_3) v_3^2 - v_3 v_4 \\ \vdots \\ -v_{M-2} v_{M-1} + (2 + c_{M-1}) v_{M-1}^2 - v_{M-1} v_M \\ -v_{M-1} v_M + (2 + c_M) v_M^2]$$

$$-v_{M-2}v_{M-1} + (2 + c_{M-1})v_{M-1}^2 - v_{M-1}v_M \\ -v_{M-1}v_M + (2 + c_M)v_M^2]$$

c'est-à-dire

$$vA_h v^t = \frac{\gamma r}{(1 + b\Delta t)} \sum_{i=1}^{i=M} v_i(-v_{i-1} + (2 + c_i)v_i - v_{i+1}) \\ = \frac{\gamma r}{(1 + b\Delta t)} \sum_{i=1}^{i=M} (-v_i v_{i-1}) + \frac{\gamma r}{(1 + b\Delta t)} \sum_{i=1}^{i=M} (2 + c_i)v_i^2 + \frac{\gamma r}{(1 + b\Delta t)} \sum_{i=1}^{i=M} (-v_i v_{i+1})$$

On a donc, par un changement d'indice

$$vA_h v^t = \left[\frac{\gamma r}{(1 + b\Delta t)} \sum_{i=1}^{i=M} (-v_i v_{i-1}) + \frac{\gamma r}{(1 + b\Delta t)} \sum_{i=1}^{i=M} (2 + c_i)v_i^2 + \frac{\gamma r}{(1 + b\Delta t)} \sum_{i=1}^{i=M+1} (-v_{i-1}v_i) \right]$$

et comme on a posé $v_0 = 0$ et $v_{M+1} = 0$, on peut écrire

$$vA_h v = \frac{\gamma r}{(1 + b\Delta t)} \sum_{i=1}^{i=M} (2 + c_i)v_i^2 - \frac{2\gamma r}{(1 + b\Delta t)} \sum_{i=1}^{i=M} (v_{i-1}v_i) \\ = \frac{\gamma r}{(1 + b\Delta t)} \sum_{i=1}^{i=M} v_i^2 + \frac{\gamma r}{(1 + b\Delta t)} \sum_{i=1}^{i=M} v_i^2 + \frac{\gamma r}{(1 + b\Delta t)} \sum_{i=1}^{i=M} c_i v_i^2 - \frac{2\gamma r}{(1 + b\Delta t)} \sum_{i=1}^{i=M} (v_{i-1}v_i) \\ = \frac{\gamma r}{(1 + b\Delta t)} \sum_{i=1}^{i=M} v_i^2 + \frac{\gamma r}{(1 + b\Delta t)} \sum_{i=1}^{i=M+1} v_{i-1}^2 + \frac{\gamma r}{(1 + b\Delta t)} \sum_{i=1}^{i=M} c_i v_i^2 - \frac{2\gamma r}{(1 + b\Delta t)} \sum_{i=1}^{i=M} (v_{i-1}v_i) \\ = \frac{\gamma r}{(1 + b\Delta t)} \sum_{i=1}^{i=M} c_i v_i^2 + \frac{\gamma r}{(1 + b\Delta t)} \sum_{i=1}^{i=M} v_i^2 + \frac{\gamma r}{(1 + b\Delta t)} \sum_{i=1}^{i=M} v_{i-1}^2 - \frac{2\gamma r}{(1 + b\Delta t)} \sum_{i=1}^{i=M} (v_{i-1}v_i) + v_M^2 \\ = \frac{\gamma r}{(1 + b\Delta t)} \sum_{i=1}^{i=M} c_i v_i^2 + \frac{\gamma r}{(1 + b\Delta t)} \sum_{i=1}^{i=M} [v_i^2 + v_{i-1}^2 - 2(v_{i-1}v_i)] + v_M^2 \\ = \frac{\gamma r}{(1 + b\Delta t)} \sum_{i=1}^{i=M} c_i v_i^2 + \frac{\gamma r}{(1 + b\Delta t)} \sum_{i=1}^{i=M} (v_i - v_{i-1})^2 + v_M^2 \geq 0, \forall v = (v_1, v_2, \dots, v_M)$$

A_h est symétrique définie positive donc le problème discrète admet une solution unique .

3.2.5 Consistance :

Proposition 3.2 *Le schéma(3.2) pour la discrétisation du problème (3.1) est d'ordre 2 en espace. Il est d'ordre 1 en temps.*

Démonstration :

soit $\bar{u}_i^n = u(x_i, t^n)$, la valeur de la solution exacte en x_i et t^n .

Notons R_i^n l'erreur de consistance en (x_i, t^n) . Pour le schéma (3.2), on a donc par définition :

$$R_i^n = \frac{\bar{u}_i^{n+1} - \bar{u}_i^n}{\Delta t} + \gamma \frac{1}{(\Delta x)^2} (2\bar{u}_i^{n+1} - \bar{u}_{i-1}^{n+1} - \bar{u}_{i+1}^{n+1}) - b\bar{u}_i^n = \tilde{R}_i^n + \hat{R}_i^n$$

où

$$\frac{\bar{u}_i^{n+1} - \bar{u}_i^n}{\Delta t} - \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t^n) = \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, \xi_1) \text{ avec } \xi_1 \in [t^n, t^{n+1}]$$

$$\tilde{R}_i^n = \frac{\bar{u}_i^{n+1} - \bar{u}_i^n}{\Delta t} - \frac{\partial u}{\partial t}u(x_i, t^n)$$

$$|\tilde{R}_i^n| \leq \frac{\Delta t}{2} \max_{[0, T]} \left| \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, \cdot) \right|$$

est l'erreur de consistance en temps et

$$\frac{\bar{u}_{i-1}^{n+1} - 2\bar{u}_i^{n+1} + \bar{u}_{i+1}^{n+1}}{(\Delta x)^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t^{n+1}) = \frac{(\Delta x)^2}{24} \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\theta_1, t^{n+1}) + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\theta_2, t^{n+1}) \right)$$

avec $(\theta_1 \text{ et } \theta_2) \in [x_i, x_{i+1}]$

$$\hat{R}_i^n = \gamma \frac{1}{(\Delta x)^2} (2\bar{u}_i^{n+1} - \bar{u}_{i-1}^{n+1} - \bar{u}_{i+1}^{n+1}) - \gamma \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t^{n+1}) \right)$$

$$|\hat{R}_i^n| \leq \gamma \frac{(\Delta x)^2}{12} \sup_{[0, 1]} \left| \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\cdot, t^n) \right| \quad \forall i \in \{1, \dots, M\}$$

est l'erreur de consistance en espace.

Par conséquent,

$$|R_i^n| = |\tilde{R}_i^n + \hat{R}_i^n| \leq |\tilde{R}_i^n| + |\hat{R}_i^n| \leq \frac{\Delta t}{2} \max_{[0, T]} \left| \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, \cdot) \right| + \gamma \frac{(\Delta x)^2}{12} \max_{[0, 1]} \left| \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\cdot, t^{n+1}) \right|$$

Donc $|R_i^n| \leq C(\Delta t + (\Delta x)^2)$ avec

$$C = \frac{1}{2} \max \left(\left\| \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right\|_{L^\infty([0, 1] \times [0, T])} ; \gamma \frac{1}{6} \left\| \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right\|_{L^\infty([0, 1] \times [0, T])} \right)$$

3.2.6 Stabilité en norm L^∞

soit:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = \gamma \frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{(\Delta x)^2} + bu_i^n$$

$$\implies u_i^{n+1} - u_i^n = \gamma \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} (u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}) + b\Delta t u_i^n$$

$$(1 + b\Delta t)u_i^n = u_i^{n+1} + \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} (2u_i^{n+1} - u_{i-1}^{n+1} - u_{i+1}^{n+1})$$

on pose $r = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$

$$(1 + b\Delta t)u_i^n = u_i^{n+1} + r(2u_i^{n+1} - u_{i-1}^{n+1} - u_{i+1}^{n+1})$$

$$(1 + b\Delta t)u_i^n = (1 + 2\gamma r)u_i^{n+1} - \gamma r u_{i+1}^{n+1} - \gamma r u_{i-1}^{n+1}$$

• $r = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \geq 0$

• $1 + 2\gamma r - \gamma r - \gamma r = 1$

Soit i_0 tel que $u_{i_0}^{n+1} = \max_{i=1, \dots, M} u_i^{n+1}$. Par définition du schéma d'Euler implicite (3.3), on a :

$$(1 + b\Delta t)u_{i_0}^n = u_{i_0}^{n+1} + \gamma r (u_{i_0}^{n+1} - u_{i_0+1}^{n+1}) + \gamma r (u_{i_0}^{n+1} - u_{i_0-1}^{n+1})$$

Par utilisation la proposition (4.1)

$$\max_{i_0}(u_{i_0}^{n+1}) \leq (1 + b\Delta t) \max_{i_0}(u_{i_0}^n)$$

Par récurrence ,

$$\begin{aligned} \max_{i_0} |u_{i_0}^{n+1}| &\leq (1 + b\Delta t) \max_{i_0} |u_{i_0}^n| \\ \|u^{n+1}\|_\infty &\leq (1 + b\Delta t) \|u^n\|_\infty \\ &\leq (1 + b\Delta t)^2 \|u^{n-1}\|_\infty \\ &\vdots \\ &\leq (1 + b\Delta t)^n \|u^1\|_\infty \\ &\leq (1 + b\Delta t)^{n+1} \|u^0\|_\infty \end{aligned}$$

Donc

$$(1 + b\Delta t) \|u^n\|_\infty \leq (1 + b\Delta t)^{n+1} \|u^0\|_\infty$$

$$\|u^n\|_\infty \leq (1 + b\Delta t)^n \|u^0\|_\infty$$

or $(1 + b\Delta t)^n \leq (1 + b\Delta t)^{\frac{T}{\Delta t}}$ car $n\Delta t \leq T$

on pose $k = b\Delta t$

$$(1 + b\Delta t)^{\frac{T}{\Delta t}} = (1 + k)^{\frac{T}{\Delta t}} = \exp\left(\frac{T}{\Delta t} \ln(1 + k)\right) \leq \exp\left(\frac{T}{\Delta t} k\right) = \exp\left(\frac{T}{\Delta t} b\Delta t\right) = \exp(bT)$$

$C_1(T) = \exp(bT)$ Donc

$$\|u^n\|_\infty = C_1(T) \|u^0\|_\infty$$

3.2.7 Convergence :

Le schéma de la réaction-diffusion linéaire consistance et stable.

Donc le schéma convergente pour le norme $\| \cdot \|_{\infty}$.

3.2.8 Estimation d'erreur :

Soient:

u_i^n : *solution approximative.*

$u(x_i, t^n)$: *solution exacte.*

$$e_i^n = u(x_i, t^n) - u_i^n$$

$$\begin{aligned} \frac{u(x_i, t^{n+1}) - u(x_i, t^n)}{\Delta t} - \gamma \frac{u(x_{i+1}, t^{n+1}) - 2u(x_i, t^{n+1}) + u(x_{i-1}, t^{n+1})}{\Delta x^2} \\ - bu(x_i, t^n) = R_i \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} - \gamma \frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2} = bu_i^n \quad (3.5)$$

$$(3.4)-(3.5) \Leftrightarrow \frac{e_i^{n+1} - e_i^n}{\Delta t} - \gamma \frac{e_{i+1}^{n+1} - 2e_i^{n+1} + e_{i-1}^{n+1}}{(\Delta x)^2} - be_i^n = R_i$$

$$\text{on pose } r = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$$

$$e_i^{n+1} + 2\gamma r e_i^{n+1} - \gamma r e_{i+1}^{n+1} - \gamma r e_{i-1}^{n+1} = (1 + b\Delta t)e_i^n + \Delta t R_i$$

Soit $t > 0$, $n\Delta t \leq T$

$$\|e^n\|_{\infty} \leq (1 + b\Delta t)^n \|e^0\|_{\infty} + \frac{1}{(1 + b\Delta t)} \Delta t c (\Delta t + (\Delta x)^2)$$

d'où

$$\|e^n\|_{\infty} \leq (1 + b\Delta t)^n \|e^0\|_{\infty} + C_1 \Delta t c (\Delta t + (\Delta x)^2)$$

On sait que: $u(0, x) = u_0(x)$ donné.

donc:

$$e^0 = u^0 - u_0 = 0.$$

Alors:

$$\|e^n\|_{\infty} \leq C_1 \Delta t c (\Delta t + (\Delta x)^2)$$

$$\text{avec } C_1 = \frac{1}{(1 + b\Delta t)}$$

Chapter 4

Approximation par différences finis de l'équation de la réaction-diffusion non linéaire

Dans ce chapitre on va étudier l'approximation par différences finis de l'équation de la réaction-diffusion non linéaire.

Cette problème est de type suivant:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \gamma \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(u) \text{ où } f(u) = u(1 - u) & x \in]0, 1[, t \in]0, T[\\ u(0, t) = u(1, t) = 0 & \forall t \in]0, T[\\ u(x, 0) = u_0(x) & \forall x \in]0, 1[\end{cases} \quad (4.1)$$

Où f est une application non linéaire.

4.1 le problème discret

- **Discrétisation en temps:**

$$t^n = n\Delta t, n \in [0, N + 1]/t^0 = 0 \text{ et } t^{N+1} = T$$

- **Discrétisation en espace:**

$$x_i = i\Delta x, i \in [0, M + 1]/x_0 = 0 \text{ et } x_{M+1} = 1$$

En utilisant le Schéma d'Euler explicite pour le temps et le Schéma d'Euler centrée pour le espace :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_i^n = \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + O(\Delta t)$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i^n = \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{(\Delta x)^2} + O((\Delta x)^2)$$

4.1.1 Schéma d'Euler explicite de la réaction-diffusion non linéaire

$$\begin{cases} \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} - \gamma \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{(\Delta x)^2} = u_i^n(x, t) - (u_i^n(x, t))^2 \\ u_i^0 = u_0(x_i) \quad \forall i = 0, \dots, M + 1 \\ u_0^n = u_{M+1}^n = 0 \quad \forall n = 0, \dots, N + 1 \end{cases} \quad (4.2)$$

4.2 Forme matricielle:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} - \gamma \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{(\Delta x)^2} = u_i^n - (u_i^n)^2$$

posons $r = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$

$$u_i^{n+1} = \gamma r u_{i+1}^n + (1 - 2\gamma r + \Delta t)u_i^n - \Delta t(u_i^n)^2 + \gamma r u_{i-1}^n$$

Ceci est le schéma numérique de la réaction-diffusion . Lorsque nous fixons j et faisons varier i .

Soit G_i la fonction

$$\begin{aligned} \vec{G}_i : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ \vec{u} &\rightarrow \vec{G}_i(\vec{u}) \end{aligned}$$

et $\vec{u} = \begin{bmatrix} u_1^n \\ u_2^n \\ \vdots \\ u_M^n \end{bmatrix}$

$$u_i^{n+1} = G_i(u_1^n, \dots, u_M^n)$$

$$\begin{cases} u_1^{n+1} = \gamma r u_0^n + (1 - 2\gamma r + \Delta t)u_1^n - \Delta t(u_1^n)^2 + \gamma r u_2^n \\ u_2^{n+1} = \gamma r u_1^n + (1 - 2\gamma r + \Delta t)u_2^n - \Delta t(u_2^n)^2 + \gamma r u_3^n \\ u_3^{n+1} = \gamma r u_2^n + (1 - 2\gamma r + \Delta t)u_3^n - \Delta t(u_3^n)^2 + \gamma r u_4^n \\ \vdots \\ \vdots \\ u_M^{n+1} = \gamma r u_{M-1}^n + (1 - 2\gamma r + \Delta t)u_M^n - \Delta t(u_M^n)^2 + \gamma r u_{M+1}^n \end{cases}$$

Avec $u_0^n = u_{M+1}^n = 0$.

Forme matricielle

$$U^{n+1} = JU^n$$

$$\begin{bmatrix} u_1^{n+1} \\ u_2^{n+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{M-1}^{n+1} \\ u_M^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & c_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ b_2 & a_2 & c_2 & \ddots & & \vdots \\ 0 & b_3 & a_3 & c_3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & b_{M-1} & a_{M-1} & c_{M-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & b_M & a_M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^n \\ u_2^n \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{M-1}^n \\ u_M^n \end{bmatrix}$$

La matrice jacobienne J de G est la matrice tridiagonale et symétrique .

$$J = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ c_2 & a_2 & b_2 & \ddots & & \vdots \\ 0 & c_3 & a_3 & b_3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & c_{M-1} & a_{M-1} & b_{M-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & c_M & a_M \end{pmatrix}$$

avec

$$a_i = (1 - 2\gamma r + \Delta t) - 2\Delta t u_i^n$$

$$b_i = \gamma r$$

$$c_i = \gamma r$$

$$\begin{aligned}
 J &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} - \gamma r \begin{pmatrix} 2 & -1 & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & \cdots & -1 & 2 \end{pmatrix} \\
 +\Delta t &\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} - 2\Delta t \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} u_1^n \\ u_2^n \\ \vdots \\ u_{M-1}^n \\ u_M^n \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$J = I_M - \gamma r A + \Delta t I_M - 2\Delta t I_M u_i^n$$

$$\| J \|_2 = 1 - \gamma r \| A \|_2 + \Delta t - 2\Delta t \| u^n \|_2$$

tel que

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & \cdots & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

et $\| A \|_2 = \rho(A) = \max_{i=1, \dots, M} |\lambda_i|$

Les valeurs propres de A est:

$$\lambda_i = 4 \sin^2 \left(\frac{k\pi}{2(n+1)} \right) \quad (\text{Exemple(1.1)})$$

$$\| J \|_2 = 1 - \gamma r \lambda_i + \Delta t - 2\Delta t \| u^n \|_2$$

$$= 1 - 4\gamma r \sin^2 \left(\frac{k\pi}{2(n+1)} \right) + \Delta t - 2\Delta t \| u^n \|_2$$

$$= 1 - 4\gamma r \sin^2 \left(\frac{k\pi}{2(n+1)} \right) + \Delta t - 2\Delta t \|u^n\|_2 < 1 \quad \left(\text{car } r = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \geq 0 \text{ et } \Delta t \geq 0 \right)$$

Puisque $\|J\|_2 < 1$, alors la suite $(u^n)_{n \geq 1}$ converge vers la solution unique.

4.3 Consistance:

Proposition 4.1 Le schéma (4.2) pour la discrétisation du problème (4.1) est d'ordre 2 en espace. Il est d'ordre 1 en temps.

Démonstration :

soit $\bar{u}_i^n = u(x_i, t^n)$, la valeur de la solution exacte en x_i et t^n .

Notons $R_i^{(n)}$ l'erreur de consistance en (x_i, t^n) . Pour le schéma (4.2), on a donc par définition :

$$R_i^n = \frac{\bar{u}_i^{n+1} - \bar{u}_i^n}{\Delta t} + \gamma \frac{1}{(\Delta x)^2} (2\bar{u}_i^n - \bar{u}_{i-1}^n - \bar{u}_{i+1}^n) - \Delta t (\bar{u}_i^n - (\bar{u}_i^n)^2) = \tilde{R}_i^n + \hat{R}_i^n$$

où

$$\frac{\bar{u}_i^{n+1} - \bar{u}_i^n}{\Delta t} - \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t^n) = \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, \xi_1) \text{ avec } \xi_1 \in [t^n, t^{n+1}]$$

$$\tilde{R}_i^n = \frac{\bar{u}_i^{n+1} - \bar{u}_i^n}{\Delta t} - \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t^n)$$

$$|\tilde{R}_i^n| \leq \frac{\Delta t}{2} \max_{[0, T]} \left| \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, \cdot) \right|$$

est l'erreur de consistance en temps et

$$\frac{\bar{u}_{i-1}^n - 2\bar{u}_i^n + \bar{u}_{i+1}^n}{(\Delta x)^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t^n) = \frac{(\Delta x)^2}{24} \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\theta_1, t^n) + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\theta_2, t^n) \right)$$

avec $(\theta_1 \text{ et } \theta_2) \in [x_i, x_{i+1}]$

$$\hat{R}_i^n = \gamma \frac{1}{(\Delta x)^2} (2\bar{u}_i^n - \bar{u}_{i-1}^n - \bar{u}_{i+1}^n) - \gamma \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t^n) \right)$$

$$|\hat{R}_i^n| \leq \gamma \frac{(\Delta x)^2}{12} \sup_{[0, 1]} \left| \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\cdot, t^n) \right| \quad \forall i \in \{1, \dots, M\}$$

est l'erreur de consistance en espace.

Par conséquent,

$$|R_i^n| = |\tilde{R}_i^n + \hat{R}_i^n| \leq |\tilde{R}_i^n| + |\hat{R}_i^n| \leq \frac{\Delta t}{2} \max_{[0,T]} \left| \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, \cdot) \right| + \gamma \frac{(\Delta x)^2}{12} \max_{[0,1]} \left| \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\cdot, t_{n+1}) \right|$$

Donc $|R_i^n| \leq C(\Delta t + (\Delta x)^2)$ avec

$$C = \frac{1}{2} \max \left(\left\| \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right\|_{L^\infty([0,1] \times [0,T])}; \gamma \frac{1}{6} \left\| \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right\|_{L^\infty([0,1] \times [0,T])} \right)$$

4.4 Stabilité:

Théorème 4.1 [5] On a la fonction $f(u) = au^2 + bu + c$.

hypothèse : on suppose que $a \leq 0, c \geq 0$ et $b \leq -(a + c)$.

on suppose que $0 \leq f(x) \leq 1$ avec la condition de stabilité $r \leq \frac{1}{2 - (\Delta x)^2(2a + b)}$ alors

$$0 \leq u_i^n \leq 1$$

$[0, 1]$ s'appelle la région d'invariance.

Preuve : par récurrence

pour $n = 0$

on a $0 \leq u_i^0 = f(x_i) \leq 1$ vrai pour $n = 0$

supposons que

$$0 \leq u_i^n \leq 1 \quad \forall i = 1, \dots, M$$

et montrons pour u_i^{n+1}

on a d'après l'approximation qu'on a fait par le schéma explicite donné par la méthode de différence finie :

$$u_i^{n+1} = ru_{i-1}^n + (1 + 2r)u_i^n + ru_{i+1}^n + \Delta t (a(u_i^n)^2 + bu_i^n + c)$$

soit

$$\phi(u) = 2r + (1 - 2r)u + \Delta t (au^2 + bu + c)$$

et

$$\psi(u) = (1 - 2r)u + \Delta t (au^2 + bu + c)$$

d'après le schéma

$$u_i^{n+1} \leq 2r + (1 - 2r)u_i^n + \Delta t (a(u_i^n)^2 + bu_i^n + c) \text{ car } u_i^n \leq 1$$

et

$$u_i^{n+1} \geq (1 - 2r)u_i^n + \Delta t(a(u_i^n)^2 + bu_i^n + c) \text{ car } u_i^n \leq 1$$

Or on a

$$\phi'(u) = \psi'(u) = 1 - 2r + \Delta t(2au + b)$$

puisque $a \leq 0$ on a

$$2au + b \geq 2a + b$$

c'est à dire

$$\phi'(u) = \psi'(u) = 1 - 2r + \Delta t(2au + b) \geq (1 - 2r) + (2a + b)\Delta t$$

mais on a

$$r \leq \frac{1}{2 - (\Delta x)^2(2a + b)}$$

$$2r - (2a + b)r(\Delta x)^2 \leq 1$$

$$2r - (2a + b)\Delta t \leq 1$$

$$1 - 2r + (2a + b)\Delta t \geq 0$$

et par conséquent

$$\phi'(u) = \psi'(u) \geq 0$$

d'où ϕ et ψ sont croissante, donc

$$u_i^{n+1} \leq \phi(u_i^n) \leq \phi(1)$$

et

$$u_i^{n+1} \geq \psi(u_i^n) \geq \psi(0)$$

$$\psi(u_i^n) \leq u_i^{n+1} \leq \phi(u_i^n)$$

on a

$$\begin{aligned}\phi(1) &= 2r + 1 - 2r + \Delta t(a + b + c) \\ &= 1 + \Delta t(a + b + c) \text{ or } a + b + c \leq 0 \\ \phi(1) &\leq 1\end{aligned}$$

et on a

$$\psi(0) = c\Delta t \text{ or } c \geq 0$$

d'où $0 \leq u_i^{n+1} \leq 1$ ce qui conclue la démonstration.

Il faut noter que le principe de maximum et la région d'invariance sont pas tout a fait les mêmes. Généralement, le principe du maximum implique l'existence d'une région d'invariance, mais tout les deux garantie la stabilité du schéma.

Stabilité du schéma (4.2):

$$\begin{aligned}\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} &= \gamma \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{(\Delta x)^2} + (u_i^n - (u_i^n)^2) \\ \implies u_i^{n+1} - u_i^n &= \gamma \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} (u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n) + \Delta t (u_i^n - (u_i^n)^2)\end{aligned}$$

Posons

$$r = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \text{ on trouve l'équation:}$$

$$u_i^{n+1} = (1 - 2\gamma r)u_i^n + \gamma r u_{i+1}^n + \gamma r u_{i-1}^n + \Delta t (u_i^n - (u_i^n)^2)$$

• On pose $a = -1, b = 1, c = 0, \gamma = 1$

En la problème (4.1), les condition de stabilité sont vérifier, avec $r \leq \frac{1}{2 + (\Delta x)^2}$

4.5 Convergence:

Le schéma de la réaction-diffusion non linéaire consistance et stable.

Donc le schéma converge sous la condition $r \leq \frac{1}{2 + (\Delta x)^2}$.

4.6 Estimation d'erreur:

Soient:

u_i^n : solution approximative.

$u(x_i, t^n)$: solution exacte.

$$e_i^n = u(x_i, t^n) - u_i^n$$

$$\frac{u(x_i, t^{n+1}) - u(x_i, t^n)}{\Delta t} - \gamma \frac{u(x_{i+1}, t^n) - 2u(x_i, t^n) + u(x_{i-1}, t^n)}{(\Delta x)^2} - (u(x_i, t^n) - u_i^n)^2 = R_i \quad (4.3)$$

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} - \gamma \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{(\Delta x)^2} = (u_i^n - u_i^n)^2 \quad (4.4)$$

(4.3)-(4.4) \Leftrightarrow

$$\frac{u(x_i, t^{n+1}) - u_i^{n+1} + u(x_i, t^n) - u_i^n}{\Delta t} - \gamma \frac{[u(x_{i+1}, t^n) - u_{i+1}^n - 2(u(x_i, t^n) - u_i^n) + u(x_{i-1}, t^n) - u_{i-1}^n]}{(\Delta x)^2} + (u(x_i, t^n)^2 - (u_i^n)^2 - u(x_i, t^n) + u_i^n) = R_i$$

$$\Leftrightarrow \frac{u(x_i, t^{n+1}) - u_i^{n+1} + u(x_i, t^n) - u_i^n}{\Delta t} - \gamma \frac{[u(x_{i+1}, t^n) - u_{i+1}^n - 2(u(x_i, t^n) - u_i^n) + u(x_{i-1}, t^n) - u_{i-1}^n]}{(\Delta x)^2} + (u(x_i, t^n) - u_i^n)(u(x_i, t^n) + u_i^n) - (u(x_i, t^n) - u_i^n) = R_i$$

$$\Leftrightarrow \frac{u(x_i, t^{n+1}) - u_i^{n+1} + u(x_i, t^n) - u_i^n}{\Delta t} - \gamma \frac{[u(x_{i+1}, t^n) - u_{i+1}^n - 2(u(x_i, t^n) - u_i^n) + u(x_{i-1}, t^n) - u_{i-1}^n]}{(\Delta x)^2} + (u(x_i, t^n) - u_i^n)[u(x_i, t^n) + u_i^n - 1] = R_i$$

$$\Leftrightarrow \frac{e_i^{n+1} - e_i^n}{\Delta t} - \gamma \frac{e_{i+1}^n - 2e_i^n + e_{i-1}^n}{(\Delta x)^2} - e_i^n [u(x_i, t^n) + u_i^n - 1] = R_i$$

on pose $r = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$

$$\Rightarrow e_i^{n+1} = \gamma r e_{i+1}^n + (1 - 2\gamma r) e_i^n + \gamma r e_{i-1}^n + \Delta t e_i^n [u(x_i, t^n) + u_i^n - 1] + \Delta t R_i$$

$$\leq \gamma r e_{i+1}^n + (1 - 2\gamma r) e_i^n + \gamma r e_{i-1}^n + \Delta t e_i^n (u(x_i, t^n)) + \Delta t R_i \quad (\text{car } u_i^n \leq 1)$$

$$|e_i^{n+1}| \leq (1 + \Delta t u_0) \|e^n\|_\infty + \Delta t c (\Delta t + (\Delta x)^2) \quad (\text{car } \|u(x_i, t^n)\| \leq u_0)$$

$$\begin{aligned} &\leq (1 + \Delta t u_0)^2 \| e^{n-1} \|_\infty + \Delta t c (\Delta t + (\Delta x)^2) \\ &\quad \vdots \\ &\quad \vdots \\ &\leq \| e^0 \|_\infty (1 + \Delta t u_0)^{n+1} + \Delta t c (\Delta t + (\Delta x)^2) \end{aligned}$$

Et donc en sommant ces inégalités:

$$(1 + \Delta t u_0) \| e^n \|_\infty \leq \| e^0 \|_\infty (1 + \Delta t u_0)^{n+1} + \Delta t c (\Delta t + (\Delta x)^2)$$

$$\| e^n \|_\infty \leq \| e^0 \|_\infty (1 + \Delta t u_0)^n + K \Delta t c (\Delta t + (\Delta x)^2)$$

Si à $t = 0$ on a $\| e^0 \|_\infty = 0$ alors:

$$\| e^n \|_\infty \leq K \Delta t c (\Delta t + (\Delta x)^2)$$

$$\text{avec } K = \frac{1}{(1 + \Delta t u_0)}$$

Chapter 5

Application

5.1 Équation de la réaction-diffusion linéaire:

Soit le problème suivant

$$(*) \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = bu(x, t) \\ u(0, t) = u(1, t) = 0 & \forall t \in [0, T] \\ u(x, 0) = \sin(\pi x) & \forall x \in [0, 1] \end{cases}$$

le schéma équivalent à (*) est

$$(*)_{quiv} \begin{cases} \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} - k \frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{(\Delta x)^2} = bu_i^n \\ u_0^n = u_{M+1}^n = 0 & \forall n = 0 \dots N \\ u_i^0 = \sin(\pi x_i) & \forall i = 0 \dots M \end{cases}$$

$xmin=0$;

$xmax=1$;

$N=21$;

$dt=0.00105$;

$t=0$;

$tmax=1$;

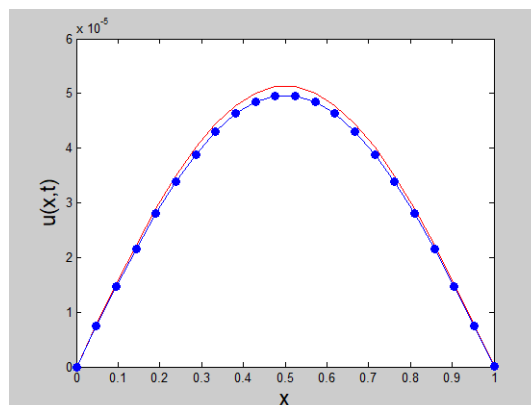
$dx=(xmax-xmin)/N$;

$x=xmin :dx :xmax$;

```

r = dt=(dx)2 ;
b=0;
k=1;
u0=sin(pi.*x) ;
u=u0 ;
unpun=u0 ;
netaps=tmax/dt ;
for n=0 :netaps
u(1)=0 ;
u(N+1)=0 ;
for i=2 :N
(1+b*dt)unpun(i)=-k*r*u(i+1)+(1+2*k*r)*u(i)-k*r*u(i-1) ;
end
t=t+dt ;
u=unpun ;
*solution exacte*
exacte = sin(pi.*x) * exp(-(pi)2 * t);
plot(x,exacte,'r-') ;
hold on
plot(x,u,'bo-','markerfacecolor','b') ;
hold off
xlabel('x','fontsize',16)
ylabel('u(x,t)','fontsize',16)
shg
pause(0.01*dt) ;
end

```



5.2 Équation de la réaction-diffusion non linéaire:

Soit le problème suivant

$$(*) \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \gamma \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(u) & \text{où } f(u) = au^2 + bu + c \\ u(0, t) = u(1, t) = 0 & \forall t \in [0, T] \\ u(x, 0) = u_0(x) & \forall x \in [0, 1] \end{cases}$$

le schéma équivalent à (*) est

$$(*)_{\text{qui}} \begin{cases} u_i^{n+1} = kru_{i-1}^n + (1 + 2kr)u_i^n + kru_{i+1}^n + \Delta t (a (u_i^n)^2 + bu_i^n + c) \\ u_0^n = u_{M+1}^n = 0 \\ u_i^0 = u_0(x_i) \end{cases} \quad \begin{array}{l} \forall n = 0 \dots N \\ \forall i = 0 \dots M \end{array}$$

pour écrire un programme il faut fixer a, b et c

programmation de l'équation de la réaction-diffusion :

On fixe $a = -1, b = 1$, et $c = 0$ donc f devient :

$$f(u) = u(u - 1)$$

Donc d'après le théorème (4.1) la condition de stabilité doit être comme :

$$r \leq \frac{1}{2 + (\Delta x)^2}$$

on prend

$$u_0(x) = \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

il est clair que

$$0 \leq u_0(x) = \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \leq 1$$

donc le schéma devrait être stable. le programme s'écrit comme

$x_{\min}=0$;

$x_{\max}=1$;

$a=-1$;

$b=1$;

$c=0$;

$k=1$;

$N=20$;

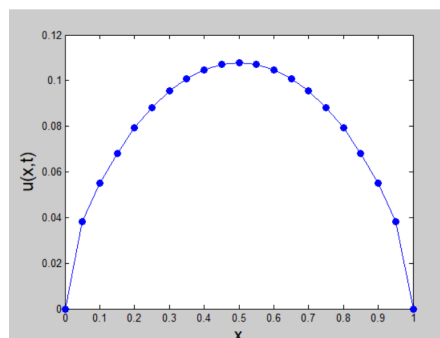
$dt=0.001$;

$t=0$;

```

tmax=1 ;
dx=((xmax)-(xmin))/N ;
x=xmin :dx :xmax
r = dt=(dx) 2 ;
u0 = exp(-(x).(2)/2);
u0(1)=0 ;
u0(N+1)=0;
u=u0 ;
unpun=u0 ;
dp=2*tmax/N ;
p=0 :dp :tmax ;
netaps=tmax/dt
for n=0 :netaps
u(1)=0 ;
u(N+1)=0 ;
for i=2 :N
unpun(i) = k*r * u(i + 1) + (1 - 2 *k * r) * u(i) + k* r * u(i - 1) + dt * (a * (u(i))2 + b * u(i) + c);
end
t=t+dt ;
u=unpun ;
plot(x,u,'bo-','markerfacecolor','b') ;
hold on
xlabel('x','fontsize',16)
ylabel('u(x,t)','fontsize',16)
shg
hold off
pause(0.01*dt) ;
end

```



Conclusion

Dans ce travail, nous avons étudié l'équation de la réaction-diffusion, dans des cas linéaires et non linéaires, après une étude mathématique nous avons abordé l'approximation de la solution numérique par la méthode des différences finies. Dans l'état linéaire, nous avons obtenu l'approximation suivante :

$$\|e^n\|_\infty \leq C_1 \Delta t c (\Delta t + (\Delta x)^2)$$

avec $C_1 = \frac{1}{1 + b\Delta t}$

Dans le cas non linéaire, nous obtenons ce qui suit :

$$\|e^n\|_\infty \leq K \Delta t c (\Delta t + (\Delta x)^2)$$

avec $K = \frac{1}{1 + \Delta t u_0}$, et les condition de stabilité sont vérifier, avec $r \leq \frac{1}{2 + (\Delta x)^2}$.

Bibliography

- [1] Allaire, G., Kaber, S. M. (2002). *Algebre linéaire numérique*. Ellipses.
- [2] Beggas, M.(2019). *Cours Méthode des différences finis pour les équations aux dérivées partielles M1*.
- [3] Bierlaire, M. (2006). *Introduction à l'optimisation différentiable*. PPUR presses polytechniques.
- [4] Brézis, H. (2011). *Analyse Fonctionnelle, Théorie et Applications*, Masson, Paris, 1983. (English Translation) < em> Functional Analysis
- [5] Echcherki, A., Elkhomssi, P. M. *MÉMOIRE DE FIN D'ÉTUDES*.
- [6] Erhel, J. (2019). *Cours d'optimisation ENSAI Rennes*.
- [7] Fisher, R. A. (1937). *The wave of advance of advantageous genes*. *Annals of eugenics*, 7(4), 355-369.
- [8] <https://perso.univ-lyon1.fr/marc.buffat/COURS/COU RSD F_H TML/node29.html>
- [9] Gallouët, T., Herbin, R. (2011). *Analyse numérique des équations aux dérivées partielles*.
- [10] Kolmogorov, A. (1937). *Étude de l'équation de la diffusion avec croissance de la quantité de matière et son application à un problème biologique*. *Moscow Univ. Bull. Ser. Internat. Sect. A*, 1, 1.
- [11] Lucquin, B. (2004). *Équations aux dérivées partielles et leurs approximations: niveau M1*. Ellipses Éd. Marketing.
- [12] Roques L. (2004). *Equations de réaction-diffusion non-linéaires et modélisation en écologie (Doctoral dissertation, Thèse, Université Pierre et Marie Curie, Paris 6, Paris, France)*.
- [13] Shigesada, N., Kawasaki, K., Teramoto, E. (1986). *Traveling periodic waves in heterogeneous environments*. *Theoretical Population Biology*, 30(1), .143-160
- [14] http://exo7.emath.fr/cours/ch_7acob.pdf
- [15] آيت محيوت, ل. (2021). *تمارين في نظرية التوزيعات وتحليل فوري مع ملخصات للدروس*.

Résumé

Dans ce travail, nous avons étudié l'équation mathématique et numérique de la réaction-diffusion linéaire et non linéaire, en nous appuyant sur la méthode des différences finies pour l'approximation.

les mots clés: *Les équations aux dérivées partielles -équation de la chaleur - l'équation de la réaction-diffusion - différences finies.*

ملخص

في هذا العمل قمنا بالدراسة الرياضية والعددية لمعادلة التفاعل والانتشار الخطية والغير خطية معتمدين في التقريب على طريقة الفروق المنتهية.

الكلمات المفتاحية: المعادلات التفاضلية الجزئية-معادلة الحرارة-معادلة التفاعل والانتشار-الفروق المنتهية

Abstract

In this work, we carried a numerical mathematical study of the linear and nonlinear reaction-diffusion equations, relying on the finite difference method for the approximation.

Keywords: *partial differential equation linear - heat equation - finite difference - reaction-diffusion equation .*