



République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de
la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ HAMMA LAKHDAR EL OUED
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES

Mémoire de fin d'étude

MASTER ACADEMIQUE

Domaine: Mathématiques et Informatique
Filière: Mathématiques
Spécialité: Mathématiques fondamentales

Thème

**Etude d'un problème de contact élastique
avec contrainte unilatérale et frottement**

Présenté par: Mayata Sara

Mesbahi Zahra

Soutenu publiquement devant le jury composé de

Douib Bachir	MAA	Président	Univ. El Oued
Azeb Ahmed Abdelaziz	MMA	Rapporteur	Univ. El Oued
Mesai Aoun Med Salah	MAA	Examineur	Univ. El Oued

Remerciements

Nous remercions \preccurlyeq Allah \succcurlyeq qui nous a donné la volonté pour la réalisation de ce modeste mémoire.

*Nous remercions Monsieur **Dr. Azeb Ahmed Abdelaziz** : Professeur à **Univ. d'El Oued**, qui nous a encadré ce mémoire avec beaucoup de patience et de gentillesse. Il a su nous motiver chaque étape de notre travail par des remarques pertinentes. Nous le remercions très sincèrement pour sa disponibilité.*

*Comme je tiens à remercier vivement **Dr. Douïb Bachir** pour l'honneur qu'il me fait en présidant le jury de ce mémoire.*

*Mes remerciements vont également à **Dr. Mesai Aoun Med Salah** d'avoir accepté de juger mon travail.*

Ainsi que tous nos professeurs qui nous ont enseigné durant nos études à la faculté des sciences exactes.

*Nous remercions également tous nos collègues d'études, particulièrement notre promotion de master mathématique, 2020/2021 à l'université de **Hamma Lakhdar El_ Oued**.*

Et à toute nos familles : Mesbahi et Mayata.

Enfin, nous ne voudrions pas oublier nos famille qui nos soutenu moralement, sans les nommer explicitement, nous les remercions pour leur encouragement.

Notations

Si Ω est un domaine de \mathbb{R}^d ($d = 1, 2, 3$), on note par.

$\bar{\Omega}$	l'adhérence de Ω .
Γ	la frontière de Ω , supposée souvent régulière.
Γ_i ($i = \overline{1, 4}$)	une partie de la frontière Γ .
$mes \Gamma_1$	la mesure de Lebesgue (d-1) dimensionnelle de Γ_1 .
ν	la normale unitaire sortante à Γ .
v_ν, v_τ	les composantes normale et tangentielle du champ vectoriel v définies sur $\bar{\Omega}$.
$C^1(\bar{\Omega})$	l'espace des fonctions réelles continument différentiables sur $\bar{\Omega}$.
$D(\Omega)$	l'espace des fonctions réelles indéfiniment différentiables et à support compact contenu dans Ω .
$D'(\Omega)$	l'espace des distributions sur Ω .
H	l'espace $L^2(\Omega)^d$.
Q	l'espace $L^2_s(\Omega)^{d \times d}$.
H_1	l'espace $H^1(\Omega)^d$.
Q_1	l'espace $\{\sigma \in Q / \text{Div } \sigma = (\sigma_{ij,j}) \in H\}$.

$H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$	l'espace de Sobolev d'ordre $\frac{1}{2}$ sur Γ
H_Γ	l'espace $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^d$.
$H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$	l'espace dual de $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$.
H'_Γ	l'espace dual de $H_\Gamma = H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)^d$.
$\gamma : H_1 \rightarrow H_\Gamma$	l'application trace pour les fonctions vectorielles .

Si H est un espace de Hilbert réel, on utilise les notations suivantes :

H^d	l'espace $\{x = x_i/x_i \in H\}$.
$H^{d \times d}$	l'espace $\{x = x_{ij}/x_{ij} = x_{ji} \in H\}$.
$\mathcal{L}(H)$	l'espace des applications linéaires et continues de H dans H .
$(\cdot, \cdot)_H$	le produit scalaire de X .
$\ \cdot\ _H$	la norme de X .
X'	l'espace dual de X .

Pour une fonction f , on note par .

∇f	le gradient de f .
$Div f$	la divergence de f .
$\varepsilon(f)$	la partie symétrique de gradient de f $\varepsilon(f) = \frac{1}{2}(\nabla f + \nabla f^T)$
\mathbb{S}^d	l'espace des tenseurs symétriques du second ordre sur \mathbb{R}^d .
I_d	le tenseur identité du second ordre sur \mathbb{R}^d .

Λ^p puissance p de l'opérateur Λ .

c des constantes génériques strictement positives .

$p.p.$ presque partout .

Table des matières

Introduction	1
I Préliminaires et Modélisation	3
1 Préliminaires	4
1.1 Rappels et complément	4
1.2 Espaces fonctionnels	5
1.2.1 Espaces des fonctions continues et continûments différentiables	6
1.2.2 Espaces de Lebesgue L^p	7
1.3 Éléments d'analyse non linéaire	7
1.3.1 Opérateurs non linéaires	7
1.3.2 Inéquations variationnelles elliptiques	10
1.4 Espaces de Sobolev	12
1.5 Espaces fonctionnels pour la mécanique	13
2 Modélisation	16
2.1 Cadre physique - Modèle mathématique	16
2.2 Lois de comportement	18
2.3 Lois de frottement	19
2.4 Conditions de contact	20
II Problème du contact élastique avec contrainte unilatérale et frottement	25
3 Étude variationnelle du problème	26
3.1 Formulation mécanique et variationnelle du problème	26
3.2 Existence et unicité de la solution	29

4 Résultats de convergence	31
Bibliographie	39

Introduction

Des processus de contact entre corps déformables apparaissent dans l'industrie et la vie quotidienne. Leur modélisation mathématique conduit à des problèmes elliptiques fortement ou problèmes d'évolution aux limites non linéaires, et par conséquent, leur étude est réalisée en utilisant des arguments d'analyse non lisse. Référence dans le domaine est les livres [6-10,16,17] et, plus récemment, [5,14,18]. Là, divers modèles de contact avec des matériaux élastiques, viscoélastiques et viscoplastiques ont été considéré, associé à un grand nombre de conditions aux limites de contact.

Les résultats d'existence et d'unicité ont été prouvés, en utilisant des arguments de variation et les inégalités hémivariationnelles. Dans une partie de ces références, l'analyse numérique des modèles a également été fournie, ainsi que des estimations d'erreur et les résultats de convergence. De plus, les simulations numériques qui représentent une preuve des résultats théoriques ont été présentées, ainsi que leurs interprétations mécaniques. Des résultats sur le contrôle optimal pour divers contacts des problèmes avec les matériaux élastiques ont peut être trouvés dans [1,5,11-13,20,21] et les références qui se trouvent.

Dans [3], les auteurs ont considéré un modèle mathématique qui décrit le contact entre un corps élastique et une fondation qui est composé de matériau rigide couvert de matériau rigide-plastique, d'épaisseur g et de seuil critique F .

La formulation variationnelle du modèle conduit à une inégalité variationnelle elliptique avec des contraintes unilatérales pour le champ de déplacement, régies par le paramètre g . Ils ont fourni la solvabilité unique du modèle, la dépendance de la solution par rapport aux données, et ils ont discuté des problèmes de contact optimal associé.

Ce mémoire se compose de deux parties la première partie, ce compose de deux chapitres, dans le premier chapitre nous présentons les outils nécessaire pour une bonne compréhension du problème traité le modèle mathématique utilisé. Nous rappelons les espaces fonctionnels et les principales notations utilisées. Ensuite, nous passons en revue à quelques résultats concernant les inéquations variationnelles, quelques théorèmes qui seront d'une grande utilité pour les démonstrations et des hypothèses fondamentales pour le problème à étudier, et on cite des

espaces fonctionnelles pour la mécanique nécessaire pour les chapitre 3 et 4. Dans le deuxième chapitre on définit le cadre physique, la loi de comportement, la loi de frottement et conditions de contact. Dans le deuxième partie, on a les dernier chapitres 3 et 4 qui sont présentés une formulation variationnelle du problème et démontrent l'existence et l'unicité d'une solution faible en utilisant des techniques des inéquations quasi-variationnelles elliptiques.

Première partie

Préliminaires et Modélisation

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Rappels et complément

Dans cette section, nous présentons quelques outils mathématique de l'analyse fonctionnelle qui seront utilisés partout dans ce mémoire. Il nous est paru utile de donner quelques rappels sur les espaces normés, les espaces fonctionnels. Finalement, nous passons en revue quelques résultats fondamentaux de l'analyse fonctionnelle non linéaire dans les espaces de Hilbert.

Soit X un espace vectoriel sur \mathbb{R} .

Définition 1.1. Une application $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$ est appelée *normée* si, et seulement si

1. $|u|_X \geq 0 \quad \forall u \in X$ et $|u|_X = 0 \iff u = 0_X$. (*Positivité et séparation*)
2. $|\alpha u|_X = |\alpha| |u|_X \quad \forall u \in X, \forall \alpha \in \mathbb{R}$. (*Homogénéité*)
3. $|u + v|_X \leq |u|_X + |v|_X \quad \forall u, v \in X$. (*Inégalité triangulaire*)

Définition 1.2. On appelle *espace vectoriel normé* un espace X muni d'une norme $|\cdot|_X$.

Passons maintenant à la notion d'espace vectoriel normé complet.

Définition 1.3. Un espace normé E est dit *complet* si toutes les suites de Cauchy de E convergent dans E . Un espace de Banach est un espace normé complet.

Nous présentons dans ce qui suit un type particulier d'espace normé, dans lequel la norme est définie d'une manière spéciale.

Définition 1.4. Soit X un espace vectoriel réel, on appelle *produit scalaire* sur X toute forme bilinéaire symétrique définie positive autrement dit, toute application $(\cdot, \cdot)_X$ de $X \times X$ dans \mathbb{R} vérifiant :

1. $(u, u)_X \geq 0$ et si $(u, u)_X = 0$ ssi $u = 0_X \quad \forall u \in X$.
2. $(u, v)_X = (v, u)_X \quad \forall u, v \in X$.
3. $(\alpha u + \beta v, w)_X = \alpha(u, w)_X + \beta(v, w)_X \quad \forall u, v, w \in X, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Définition 1.5. On appelle espace préhilbertien réel un espace vectoriel X muni d'un produit scalaire $(\cdot, \cdot)_X$.

Il est bien connu qu'un produit scalaire $(\cdot, \cdot)_X$ permet de définir une norme par la relation

$$|u|_X = \sqrt{(u, u)_X} \quad \forall u \in X.$$

Rappelons qu'un produit scalaire vérifie l'inégalité de Cauchy-Schwartz

$$|(u, v)_X| \leq |u|_X |v|_X \quad \forall u, v \in X.$$

De plus, l'égalité du parallélogramme est satisfaite

$$|u + v|_X^2 + |u - v|_X^2 = 2(|u|_X^2 + |v|_X^2) \quad \forall u, v \in X.$$

Parmi les espaces de produits scalaire, il y a une importance particulière pour les espaces de Hilbert.

Définition 1.6. Un espace de Hilbert est un espace préhilbertien complet pour la norme associée à son produit scalaire.

Théorème 1.1. (Représentation de Riesz). Soit H un espace de Hilbert et soit $f \in H'$. Alors il existe un et un seul élément $T_f \in H$ tel que

$$(f, g)_{H' \times H} = (T_f, g)_H \quad \forall g \in H.$$

De plus on a

$$|f|_{H'} = |T_f|_H.$$

1.2 Espaces fonctionnels

Dans cette section nous donnons quelques rappels sur les espaces fonctionnels à valeurs réelles qui nous aident à comprendre les propriétés des espaces appropriés à la mécanique. Nous allons aborder les espaces des fonctions continues, continûment différentiables, les espaces de

Lebesgue.

Étant donné un ouvert Ω de \mathbb{R}^d . Soit $x = (x_1, \dots, x_d)$ un élément de \mathbb{R}^d et soit $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$ un multi-indice tel que $|\alpha| = \sum_{i=1}^d \alpha_i$, nous posons :

$$D^\alpha v(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} v(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_d^{\alpha_d}}.$$

1.2.1 Espaces des fonctions continues et continûments différentiables

soit Ω une ensemble bornée, on note par $C(\bar{\Omega})$ l'espace des fonctions continues sur $\bar{\Omega}$. $C(\bar{\Omega})$ est un espace de Banach dont la norme est la suivante

$$|v|_{C(\bar{\Omega})} = \sup\{|v(x)| : x \in \bar{\Omega}\} = \max\{|v(x)| : x \in \bar{\Omega}\}. \quad (1.1)$$

Pour $m \geq 0$, l'espace $C^m(\bar{\Omega})$ défini par

$$C^m(\bar{\Omega}) = \{v \in C(\bar{\Omega}) : D^\alpha v \in C(\bar{\Omega}) \text{ pour tout } \alpha \text{ tel que } |\alpha| \leq m\}. \quad (1.2)$$

Il est l'espace des fonctions continues sur $\bar{\Omega}$ dont les dérivées d'ordre au plus m sont également continues sur $\bar{\Omega}$.

L'espace $C^m(\bar{\Omega})$ est un espace de Banach dont la norme est donnée par

$$|v|_{C^m(\bar{\Omega})} = \sum_{|\alpha| \leq m} |D^\alpha v|_{C(\bar{\Omega})}.$$

Par ailleurs, $C^\infty(\bar{\Omega})$ désigne l'espace des fonctions indéfiniment différentiables

$$C^\infty(\bar{\Omega}) = \bigcap_{m=0}^{\infty} C^m(\bar{\Omega}) = \{v \in C^m(\bar{\Omega}) : v \in C^m(\bar{\Omega}) \forall m = 1, 2, \dots\}. \quad (1.3)$$

soit v une fonction sur Ω le support de v est défini par

$$\text{supp } v = \overline{\{v \in \Omega : v(x) \neq 0\}}.$$

Si $\text{supp } v$ est un sous-ensemble propre de Ω , on dit que v est une fonction à support compact dans Ω .

L'espace des fonctions indéfiniment différentiables à support compact est donnée par

$$C_0^\infty(\Omega) = \{v \in C^\infty(\bar{\Omega}) : \text{supp } v \subset \Omega\}.$$

1.2.2 Espaces de Lebesgue L^p

Pour $p \in [1, \infty[$, $L^p(\Omega)$ désigne l'espace des fonctions mesurables au sens de Lebesgue définies sur Ω à valeurs dans \mathbb{R} .

$L^p(\Omega)$ est un espace de Banach, dont la norme est donnée par

$$|v|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |v(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (1.4)$$

Si $p = \infty$ et $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est mesurable, alors

$$|v|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{x \in \Omega} \text{ess} |v(x)| = \inf \{c : |v(x)| \leq c\}.$$

L'espace $L^\infty(\Omega)$ est aussi un espace de Banach.

1.3 Éléments d'analyse non linéaire

Dans cette section nous allons rappeler quelques notions d'analyse non linéaire qui seront d'une grande utilité pour la réalisation de ce travail. En particulier des résultats sur les opérateurs monotones, les fonctions convexes et semi-continues inférieurement, la différentiabilité et sous différentiabilité.

1.3.1 Opérateurs non linéaires

Définition 1.7. Soit X un espace de Hilbert muni du produit scalaire $(\cdot, \cdot)_X$ et de la norme $|\cdot|_X$ et soit $A : X \rightarrow X$ un opérateur.

– L'opérateur A est dit monotone si

$$(Au - Av, u - v)_X \geq 0 \quad \forall u, v \in X. \quad (1.5)$$

– L'opérateur A est strictement monotone si

$$(Au - Av, u - v)_X > 0 \quad \forall u, v \in X, u \neq v. \quad (1.6)$$

– L'opérateur A est dit fortement monotone s'il existe $m > 0$ tel que

$$(Au - Av, u - v)_X \geq m \|u - v\|_X^2 \quad \forall u, v \in X. \quad (1.7)$$

– L'opérateur A est de Lipschitz s'il existe $M > 0$ tel que

$$|Au - Av|_X \leq M |u - v|_X \quad \forall u, v \in X. \quad (1.8)$$

- L'opérateur $A : X \rightarrow X$ est dit hémicontinu si l'application $t \mapsto \langle A(u + tv), w \rangle$ est continue sur $[0, 1]$ pour tout $u, v, w \in X$.

Proposition 1.1. Soient $(X, (\cdot, \cdot)_X)$ un espace de Hilbert et $A : X \rightarrow X$ un opérateur monotone et hémicontinu. Supposons que la suite $\{u_n\} \subset X$ converge faiblement vers l'élément $u \in X$, c'est-à-dire

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{dans } X \text{ lorsque } n \rightarrow +\infty. \quad (1.9)$$

En outre, supposons que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (Au_n, u_n - u)_X \leq 0. \quad (1.10)$$

Alors, pour tout $v \in X$, l'inégalité suivante est satisfaite

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} (Au_n, u_n - v)_X \geq (Au, u - v)_X. \quad (1.11)$$

Démonstration. Nous utilisons la propriété (1.5) de l'opérateur A pour voir que

$$(Au_n, u_n - u)_X \geq (Au, u_n - u)_X \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

En procédant au passage à la limite inférieure dans cette inégalité lorsque $n \rightarrow +\infty$ et en utilisant la convergence (1.9), nous obtenons

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} (Au_n, u_n - u)_X \geq 0.$$

Ensuite, en combinant cette inégalité et l'hypothèse (1.10), nous trouvons que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (Au_n, u_n - u)_X = 0. \quad (1.12)$$

Prenons maintenant $v \in X, \theta > 0$ et notons $w = (1 - \theta)u + \theta v$. Nous utilisons la propriété (1.5) pour voir que

$$(Au_n - Aw, u_n - w)_X \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

ce qui implique que

$$(Au_n - Aw, u_n - u + \theta(u - v))_X \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (1.13)$$

Nous écrivons (1.13) sous la forme

$$\begin{aligned} & (Au_n, u_n - u)_X + \theta(Au_n, u - v)_X \\ & \geq (Aw, u_n - u)_X + \theta(Aw, u - v)_X \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

En passant à la limite inférieure dans cette inégalité lorsque $n \rightarrow \infty$, en utilisant la convergence (1.12) et en divisant l'inégalité obtenue par θ , nous trouvons que

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} (Au_n, u - v)_X \geq (Aw, u - v)_X.$$

et, par conséquent

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} (Au_n, u - v)_X \geq (A(u + \theta(v - u)), u - v)_X. \quad (1.14)$$

Ensuite, nous passons à la limite dans (1.14) lorsque $\theta \rightarrow 0$ et nous utilisons la propriété

$$(A(u + \alpha_n v), w)_X \rightarrow (A(u + \alpha v), w)_X \quad \forall u, v, w \in X,$$

pour voir que

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} (Au_n, u - v)_X \geq (Au, u - v)_X. \quad (1.15)$$

En outre, nous écrivons

$$(Au_n, u_n - v)_X = (Au_n, u_n - u)_X + (Au_n, u - v)_X \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Puis, nous passons à limite inférieure lorsque $n \rightarrow +\infty$ dans cette égalité et nous utilisons la convergence (1.12) pour obtenir que

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} (Au_n, u_n - v)_X = \liminf_{n \rightarrow \infty} (Au_n, u - v)_X$$

Enfin, nous combinons cette égalité et l'inégalité (1.15) afin d'obtenir que

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} (Au_n, u_n - v)_X \geq (Au, u - v)_X \quad \forall v \in X.$$

Alors

$$u_n \rightarrow u \quad \text{dans } X \text{ lorsque } n \rightarrow +\infty. \quad (1.16)$$

Théorème 1.2. *Soit X un espace de Hilbert. Alors, toute suite bornée de X admet une sous suite faiblement convergente.*

Théorème 1.3. *Soit X un espace de Hilbert et $\{u_n\}$ une suite bornée de X telle que toute sous suite faiblement convergente de $\{u_n\}$ converge vers le même élément $u \in X$.*

Définition 1.8. *Soient $(X, \|\cdot\|_X)$ un espace vectoriel normé. Un sous ensemble $K \subset X$ est dit (i) (fortement) fermé si la limite de toute suite convergente d'éléments de K appartient à K , i.e.*

$$\{u_n\} \subset K, \quad u_n \rightarrow u \quad \text{dans } X \implies u \in K.$$

(ii) (faiblement) fermé si la limite faible de toute suite faiblement convergente d'éléments de K appartient à K , i.e.

$$\{u_n\} \subset K, \quad u_n \rightharpoonup u \text{ dans } X \implies u \in K.$$

Notons que tout sous ensemble faiblement fermé de X est fortement fermé, mais la réciproque n'est pas vraie. Ceci étant dit, nous avons le résultat suivant.

Théorème 1.4. (Théorème de Mazur) *Un sous ensemble convexe d'un espace de Banach est (fortement) fermé si et seulement s'il est faiblement fermé.*

Soit maintenant $a : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire.

Définition 1.9. *La forme bilinéaire $a\langle \cdot, \cdot \rangle$ est dite*

– *continue s'il existe un réel $M > 0$ tel que*

$$a\langle u, v \rangle \leq M|u|_X|v|_X \quad \forall u, v \in X.$$

– *X-elliptique s'il existe une constante $m > 0$ telle que*

$$a\langle v, v \rangle \geq m|v|_X^2 \quad \forall v \in X.$$

– *symétrique si*

$$a\langle u, v \rangle = a\langle v, u \rangle \quad \forall u, v \in X.$$

1.3.2 Inéquations variationnelles elliptiques

Inéquations variationnelles de première espèce

Étant donné un opérateur $A : X \rightarrow X$, un sous-ensemble $K \subset X$ et un élément $f \in X$, nous considérons le problème de trouver un élément u tel que

$$u \in K, (Au, v - u)_X \geq (f, v - u)_X \quad \forall v \in K. \quad (1.17)$$

Une inéquation de la forme (1.17) s'appelle inéquation variationnelle elliptique de première espèce.

Nous avons le résultat standard suivant d'existence et d'unicité de la solution.

Théorème 1.5. *Soit X un espace de Hilbert et soit $K \subset X$ un sous-ensemble fermé non vide et convexe.*

Supposons que $A : K \rightarrow X$ est un opérateur fortement monotone et de Lipschitz.

Alors, pour tout $f \in X$ l'inéquation variationnelle (1.17) admet une solution unique.

Supposons maintenant que $K = X$. Puis, en prenant $v = u \pm w$, il est facile de voir que l'inéquation variationnelle (1.17) est équivalente à l'équation variationnelle

$$(Au, w)_X = (f, w)_X \quad \forall w \in X.$$

Nous avons le résultat d'existence et d'unicité suivant dans l'étude de équations non linéaires impliquant des opérateurs monotones.

Théorème 1.6. *Soit X un espace de Hilbert et soit $A : X \rightarrow X$ un opérateur fortement monotone et de Lipschitz. Alors pour tout $f \in X$ il existe un élément unique $u \in X$ tel que $Au = f$.*

Inéquations variationnelles de deuxième espèce

Étant donné un ensemble $K \subset X$, un opérateur $A : K \rightarrow X$, une fonction $j : K \rightarrow \mathbb{R}$ et un élément $f \in X$, nous considérons le problème de trouver un élément u tel que :

$$u \in K, (Au, v - u)_X + j(v) - j(u) \geq (f, v - u)_X \forall v \in K. \quad (1.18)$$

Une inéquation variationnelle de la forme (1.18) est appelée inéquation variationnelle elliptique de deuxième espèce. Dans le cas particulier lorsque $j \equiv 0$, l'inéquation variationnelle (1.18) représente une inéquation variationnelle de la forme (1.17), c'est-à-dire :

une inéquation variationnelle elliptique de première espèce

Dans l'étude de (1.18) nous supposons les hypothèses suivantes

$$K \text{ est un sous-ensemble convexe non vide de } X, \quad (1.19)$$

$A : K \rightarrow X$ est un opérateur fortement monotone et de Lipschitz, c'est-à-dire

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{a) Il existe une constante } m > 0 \text{ telle que} \\ (Au - Av, u - v)_X \geq m|u - v|^2 \quad \forall u, v \in X. \\ \text{b) Il existe une constante } M > 0 \text{ telle que} \\ |Au - Av|_X \leq M|u - v|_X \quad \forall u, v \in X. \end{array} \right. \quad (1.20)$$

$$j : K \rightarrow \mathbb{R} \text{ est une fonction convexe et semi-continue inférieurement.} \quad (1.21)$$

Le résultat principal de cette sous-section est le suivant.

Théorème 1.7. *Soit X un espace de Hilbert et supposons que les hypothèses ((1.19)-(1.21)) sont vérifiées. Alors pour tout $f \in X$ l'inéquation variationnelle elliptique (1.18) admet une solution unique.*

Inéquations quasi-variationnelles

Pour les inéquations variationnelles étudiées dans cette sous-section nous considérons que la fonction j dépend de la solution elle-même. Par conséquent, étant donné un sous-ensemble $K \subset X$, un opérateur $A : K \rightarrow X$, une fonction $j : K \times K \rightarrow \mathbb{R}$ et un élément $f \in X$, nous considérons le problème de trouver un élément u tel que

$$u \in K, (Au, v - u)_X + j(u, v) - j(u, u) \geq (f, v - u)_X \quad \forall v \in K. \quad (1.22)$$

Une inéquation de la forme (1.22) est appelée inéquation quasi-variationnelle elliptique.

Dans l'étude de (1.22), en plus de (1.19) et de (1.20), nous considérons l'hypothèse suivante sur

la fonction j .

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{a) Pour tout } \eta \in K, j(\eta, \cdot) : K \rightarrow \mathbb{R} \text{ est convexe et s.c.i.} \\ \text{b) Il existe } \alpha > 0 \text{ tel que} \\ j(\eta_1, v_2) - j(\eta_1, v_1) + j(\eta_2, v_1) - j(\eta_2, v_2) \leq \alpha |\eta_1 - \eta_2|_X |v_1 - v_2|_X \\ \forall \eta_1, \eta_2, v_1, v_2 \in K \end{array} \right. \quad (1.23)$$

$$m_A > \alpha \quad (1.24)$$

Théorème 1.8. *d'après les condition ((1.19) - (1.24))sauf (1.22) le problème ci-dessus admet une solution unique.*

Nous donnons par la suite un résultat d'existence et d'unicité pour le problème (1.22)

Théorème 1.9. *Soit X un espace de Hilbert et supposons que les hypothèses (1.19),(1.20) et (1.23) sont satisfaites .De plus ,supposons que $m > a$ où $m > 0$.*

Alors ,pour tout $f \in X$ l'inéquation quasi-variationnelle (1.22) admet une solution unique

1.4 Espaces de Sobolev

Une bonne partie de l'analyse des équations aux dérivées partielles se déroule dans les espaces de Sobolev .

Soient $k \in \mathbb{N}$ et $p \in [1, \infty]$. Nous définissons les espaces de Sobolev par

$$W^{k,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) \text{ tel que } D^\alpha u \in L^p(\Omega) \text{ avec } |\alpha| \leq k\}.$$

La norme sur l'espace $W^{k,p}(\Omega)$ est définie par

$$|u|_{W^{k,p}(\Omega)} = \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha| \leq k} |D^\alpha u|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}} & \text{si } 1 \leq p < +\infty. \\ \max_{|\alpha| \leq k} |D^\alpha u|_{L^\infty(\Omega)} & \text{si } p = \infty. \end{cases}$$

L'espace de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ est un espace de Banach.

Pour $p = 2$, $W^{k,2}(\Omega)$ sera noté par $H^k(\Omega)$, qui est un espace de Hilbert dont le produit scalaire est donné par

$$(u, v)_k = \int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leq k} D^\alpha u(x) D^\alpha v(x) dx \quad \forall u, v \in H^k(\Omega).$$

Théorème 1.10. *(Rellich)*

$$H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \text{ avec injection compact}$$

Théorème 1.11. (*trace de Sobolev*) Il existe une application linéaire et continue

$\gamma : H^1(\Omega) \longrightarrow L^2(\Gamma)$ telle que $\gamma u = u|_\Gamma$ pour $u \in C^1(\overline{\Omega})$.

Remarque l'espace $L^2(\Gamma)$ si-dessus représente l'espace des fonction réelles sur Γ qui sont L^2 pour la mesure superficielle $d\Gamma$. L'application γ s'appelle application de trace ; elle est définie comme le proulongement par densité de l'application $u \longrightarrow u|_\Gamma$ définie pour $u \in C^1(\overline{\Omega})$.

On note que l'application de trace $\gamma : H^1(\Omega) \longrightarrow L^2(\Gamma)$ est un opérateur compact.

1.5 Espaces fonctionnels pour la mécanique

Notation de base partout dans ce mémoire, $d \in \{1, 2, 3\}$ et \mathbb{S}^d représentent l'espace des tenseurs symétriques du second ordre sur \mathbb{R}^d ou, de manière équivalente, l'espace de matrices symétriques d'ordre d . L'élément zéro des espaces \mathbb{R}^d et \mathbb{S}^d sera être noté 0 .

Le produit scalaire et la norme sur \mathbb{R}^d et \mathbb{S}^d sont définis par

$$\begin{aligned} u \cdot v &= u_i v_i, & \|v\| &= (v \cdot v)^{\frac{1}{2}} \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^d. \\ \sigma \cdot \tau &= \sigma_{ij} \tau_{ij}, & \|\tau\| &= (\tau \cdot \tau)^{\frac{1}{2}} \quad \forall \sigma, \tau \in \mathbb{S}^d. \end{aligned}$$

où les indices i, j sont entre 1 et d , et sauf indication contraire, la convention de sommation sur des indices répétés est utilisée. Soit Ω être un domaine délimité de \mathbb{R}^d avec une frontière continue de Lipschitz Γ et soit $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ et Γ_4 une partition de Γ en quatre parties mesurables, telles cela signifie $(mes\Gamma_1) > 0$. Nous utilisons $x = (x_i)$ pour le point générique dans $\Omega \cup \Gamma$.

Un index qui suit une virgule représentera la dérivée partielle par rapport à la composante correspondante de la variable spéciale $x \in \Omega \cup \Gamma$, i.e. $f_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$.

De plus, $\nu = (\nu_i)$ désigne l'unité extérieure normale à Γ . Nous utilisons la notation standard pour les espaces de Sobolev et de Lebesgue associés à Ω et Γ . En particulier, nous utilisons les espaces $L^2(\Omega)^d, L^2(\Gamma_2)^d, L^2(\Gamma_3)$, et $H^1(\Omega)^d$ dotés de leurs produits internes canoniques et des normes associées. De plus, on rappelle que pour un élément $v \in H^1(\Omega)^d$, on écrit parfois v pour la trace $\gamma v \in L^2(\Gamma)^d$ de v à Γ . De plus, nous considérons les espaces suivants

$$V = \{v \in H^1(\Omega)^d : v = \mathbf{0} \text{ sur } \Gamma_1\}, \quad Q = \{\sigma = (\sigma_{ij}) : \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \in L^2(\Omega)\}$$

V et Q sont des espaces de Hilbert réels dotés des produits scalaires canoniques donnés par

$$(u, v)_V = \int_{\Omega} \varepsilon(u) \cdot \varepsilon(v) dx, \quad (\sigma, \tau)_Q = \int_{\Omega} \sigma \cdot \tau dx. \quad (1.25)$$

Ici et ci-dessous ε et Div représenteront respectivement les opérateurs de déformation et de divergence, c'est-à-dire

$$\varepsilon(u) = (\varepsilon_{ij}(u)), \quad \varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}), \quad \text{Div } \sigma = (\sigma_{ij,j}).$$

Puisque $\text{mes}(\Gamma_1) > 0$, l'inégalité de Korn s'applique sur V : il existe une constante $c_K > 0$ dépendant uniquement de Ω et Γ_1 telle que

$$\|\varepsilon(v)\|_Q \geq c_K \|v\|_{H_1} \quad \forall v \in V$$

Sur l'espace V nous considérons le produit scalaire donné par

$$(u, v)_V = (\varepsilon(u), \varepsilon(v))_Q \quad \forall u, v \in V$$

et soit $\|\cdot\|_V$ la norme associée, i.e.

$$\|v\|_V = \|\varepsilon(v)\|_Q \quad \forall v \in V$$

Par l'inégalité de Korn, il vient que $\|\cdot\|_{H_1}$ et $\|\cdot\|_V$ sont des normes équivalentes sur V et ainsi $(V, \|\cdot\|_V)$ est un espace de Hilbert. En outre, il existe une constante $c_0 > 0$ dépendant uniquement de Ω, Γ_1 et Γ_3 tel que

$$\|v\|_{L^2(\Gamma_3)^d} \leq c_0 \|v\|_V \quad v \in V$$

Cette inégalité découle du théorème de trace de Sobolev. Nous rappelons maintenant une conséquence de l'inégalité de Korn.

Théorème 1.12. *Sous l'hypothèse $\text{mes}(\Gamma_1) > 0$ notons par $\varepsilon(V)$ l'image de l'opérateur de déformation $\varepsilon : V \rightarrow Q$, i.e*

$$\varepsilon(V) = \{\varepsilon(v); \quad v \in V\}$$

Alors $\varepsilon(V)$ est un sous-espace fermé de Q .

On note $\mathbf{0}_V$ l'élément zéro de V , et pour tout élément $v \in V$, on note v_ν et v_τ ses composantes normale et tangentielle sur Γ données par $v_\nu = v \cdot \nu$ et $v_\tau = v - v_\nu \nu$, respectivement. Pour une fonction régulière $\sigma : \Omega \rightarrow \mathbb{S}^d$

on note σ_ν et σ_τ ses composantes normale et tangentielle sur Γ , soit $\sigma_\nu = (\sigma \nu) \cdot \nu$ et $\sigma_\tau = \sigma \nu - \sigma_\nu \nu$, et on rappelle la formule de Green donne

$$\int_{\Omega} \sigma \cdot \varepsilon(v) dx + \int_{\Omega} \text{Div } \sigma \cdot v dx = \int_{\Gamma} \sigma \nu \cdot v da \quad \forall v \in H^1(\Omega)^d. \quad (1.26)$$

On rappelle aussi qu'il existe $c_0 > 0$ qui dépend de Ω et Γ_1 , tel que

$$\|v\|_{L^2(\Gamma)^d} \leq c_0 \|v\|_V \quad \forall v \in V. \quad (1.27)$$

L'inégalité (1.27) représente une conséquence du théorème des traces de Sobolev. Soit $Y = L^2(\Omega)^d \times L^2(\Gamma_2)^d$ le produit de l'espace de Hilbert doté de l'interne canonique produit $(\cdot, \cdot)_Y$ et la norme associée $\|\cdot\|_Y$. Nous désignons par $\Pi : V \rightarrow Y$ l'opérateur défini par

$$\Pi v = (v, \gamma_2 v) \quad \forall v \in V. \quad (1.28)$$

où $\gamma_2 v$ représente la trace de la fonction $v \in V$ jusqu'à la frontière Γ_2 . Notez que π est un opérateur linéaire continu, et par conséquent, il existe une constante $d_0 > 0$, telle que :

$$\|\pi v\|_Y \leq d_0 \|v\|_V \quad \forall v \in V. \quad (1.29)$$

De plus, la compacité de l'opérateur trace combinée à la compacité du plongement $H^1(\Omega)^d \subset L^2(\Omega)^d$ implique que π est un opérateur faiblement-fortement continu, c'est-à-dire

$$v_n \rightharpoonup v \quad \text{in } V \quad \implies \quad \pi v_n \rightarrow \pi v \quad \text{dans } Y. \quad (1.30)$$

Chapitre 2

Modélisation

Ce chapitre représente un bref rappel de la mécanique des milieux continus où nous allons introduire le cadre physique utilisé dans ce mémoire, il est destiné à rappeler l'équation de mouvement de Cauchy, à décrire les lois de comportement élastiques, viscoélastiques et les lois de frottement et les conditions de contact.

2.1 Cadre physique - Modèle mathématique

Nous considérons un corps matériel qui occupe un domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^d (d = 2, 3)$ avec une frontière Lipschitzienne Γ divisée en quatre parties mesurables $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ et Γ_4 , correspondant aux différents types de conditions aux limites et telle que $\text{mes}(\Gamma_1) > 0$. Le corps est supposé en équilibre sous l'action de forces volumiques de densité f_0 . Des forces surfaciques de densité f_2 agissent sur Γ_2 . Enfin, le corps est encastré sur Γ_1 , sur Γ_3 et Γ_4 , le corps est en contact avec deux obstacles.

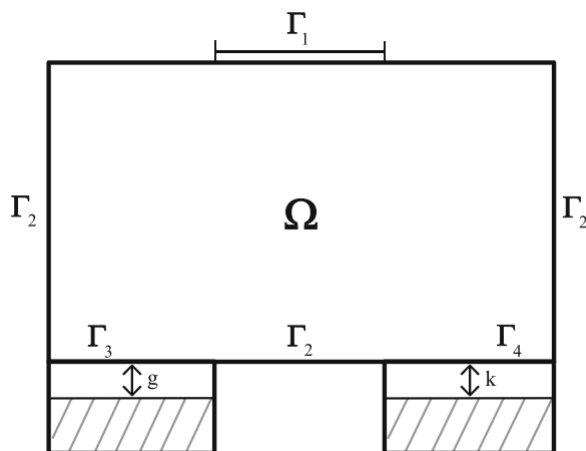


FIGURE 2.1 – Cadre physique

Afin de construire un modèle mathématique qui décrit l'évolution du corps déformable associé au cadre physique de la Figure (2,1), nous rappelons que le champ des déplacements $u : \Omega \times]0, T[\rightarrow \mathbb{R}^d$ et le champ de contraintes $\sigma : \Omega \times]0, T[\rightarrow \mathbb{S}^d$, représentent les inconnues du problème. Le mouvement du corps est décrit par l'équation de la dynamique

$$\text{Div } \sigma + f_0 = \rho \ddot{u} \quad \text{dans } \Omega \times]0, T[, \quad (2.1)$$

où $f_0 : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ représente la densité des forces volumiques sur Ω . Cette équation s'appelle équation du mouvement de Cauchy, où $\rho : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$ représente la densité de masse et \ddot{u} représente l'accélération. Les processus d'évolution modélisés par l'équation (2.1) s'appellent processus dynamiques. Dans certaines situations, l'équation (2.1) peut se simplifier. Par exemple dans le cas où u varie très lentement par rapport au temps, le terme $\rho \ddot{u}$ peut être négligé (processus quasistatiques). Dans ce cas l'équation (2.1) devient

$$\text{Div } \sigma + f_0 = 0 \quad \text{dans } \Omega \times]0, T[\quad (2.2)$$

Les processus de déformation gouvernés par l'équation (2.2) sont de processus statiques (lorsque les variables ne dépendent pas du temps) ou de processus quasistatiques (dans le cas contraire). Dans ce premier cas l'équation (2.2) est valable dans Ω . Par la suite, on va appeler simplement (2.2) équation d'équilibre.

Afin de compléter le modèle mathématique qui décrit l'évolution d'un milieu continu donné par l'équation (2.1) ou (2.2), il faut encore préciser les conditions aux limites. Puisque le corps est encastré sur Γ_1 , le champ de déplacements y est nul, donc

$$u = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1 \times (0, T). \quad (2.3)$$

La condition aux limites en traction peut se mettre sous la forme

$$\sigma \nu = f_2 \quad \text{sur } \Gamma_2 \times (0, T). \quad (2.4)$$

L'équation (2.1) ou (2.2) équivaut à d relations scalaires. Par conséquent, mathématiquement cette équation ne suffit pas à modéliser le problème d'équilibre du corps car il y a plus d'inconnues que d'équations. L'équation (2.1) ou (2.2) exprime un processus universel valable pour tous les matériaux et de ce fait elle ne suffit pas à déterminer tous les différents comportements mécaniques des milieux continus. Par conséquent, l'équation est donc insuffisante, à elle seule, pour décrire l'équilibre des corps matériels.

Elle doit alors être complétée par d'autres relations qui caractérisent le comportement de chaque type de matériau et que l'on désigne sous le vocable général de loi de comportement. Cette loi de comportement représente une relation reliant le tenseur de contrainte σ , le tenseur de déformation ε et leur dérivées. Pour plus de détails, nous vous renvoyons aux ouvrages [17].

2.2 Lois de comportement

Les lois de comportement caractérisent ce qui est propre à chaque type de matériau.

Bien qu'elles doivent respecter certaines propriétés d'invariance, leur origine est souvent expérimentale. C'est toute une série d'essais qu'il faut imaginer et réaliser pour établir une loi de comportement ; par exemple, voici quatre exemples classiques d'essais sur les solides :

essais de chargement monotone, essais de charge-décharge, essais de fluage et essais de relaxation.

Dans la description des phénomènes purement mécaniques, par loi de comportement (ou loi constitutive) nous comprenons dans la suite une relation entre le tenseur des contraintes σ , le tenseur des déformations infinitésimales ε et leurs dérivées temporelles $\dot{\sigma}$ et $\dot{\varepsilon}$.

Dans le cas unidimensionnel, on dit qu'un matériau est élastique si, lors des essais de charge-décharge les courbes $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ coïncident ; dans le cas contraire il est plastique (anélastique) et après décharge complète il subsiste une déformation résiduelle.

Enfin, on dit qu'un matériau est viscoélastique s'il peut décrire le phénomène de relaxation ou de fluage.

En conclusion, l'analyse des données expérimentales permet d'établir ce qui est propre au matériau lui-même et conduit à l'établissement de la forme des lois de comportement.

Lois de comportement des matériaux élastiques : Nous considérons ici une catégorie de matériaux pour lesquels la loi de comportement s'écrit sous la forme suivante

$$\sigma = \mathcal{F}(\varepsilon). \quad (2.5)$$

Ici le tenseur des contraintes est une fonction non linéaire du tenseur des déformations infinitésimales $\varepsilon = \varepsilon(u)$, ceci correspond aux matériaux élastiques et la loi de comportement (2.5) s'appelle *loi de comportement élastique*.

En général la fonction \mathcal{F} dépend du point $x \in \Omega$ donc nous avons

$$\sigma(x) = \mathcal{F}(x, \varepsilon(u))$$

Si \mathcal{F} ne dépend pas explicitement de \mathbf{x} , le milieu élastique est dit homogène. Autrement, il est dit non-homogène. Par la suite, pour simplifier l'écriture, nous utilisons $\mathcal{F}\varepsilon(u)$ pour $\mathcal{F}(x, \varepsilon(u))$

En élasticité linéaire \mathcal{F} est une fonction linéaire de ε , c'est-à-dire

$$\sigma = \mathcal{E}\varepsilon(u)$$

où $\mathcal{E} = (\mathcal{E}_{ijkl})$ est le tenseur d'élasticité d'ordre 4. Ses composantes \mathcal{E}_{ijkl} s'appellent coefficients d'élasticité et sont indépendantes du tenseur des déformations. Du fait des différentes symétries

matérielles inhérentes à l'homogénéité et l'isotropie du matériau, nous avons

$$\mathcal{E}_{ijkh} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kh} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jh} + \delta_{ih} \delta_{jk})$$

où les constantes λ et μ sont les coefficients de Lamé et δ_{ij} est le symbole de Kronecker. Par ailleurs, en utilisant l'égalité $\sigma_{ij} = \mathcal{E}_{ijkh} \varepsilon_{kh}$ et l'équation précédent nous avons,

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}$$

En inversant la loi élastique linéaire précédant, nous obtenons

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1 + \nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij}$$

où E représente le module de Young et ν le coefficient de Poisson.

Lois de comportement des matériaux viscoélastiques : L'investigation des propriétés mécaniques des matériaux tels que les pâtes, les huiles et les cires a mis en évidence les insuffisances de la théorie de l'élasticité. En effet, certains phénomènes, tels que le fluage ou la relaxation ne peuvent être décrits par les lois de comportement élastiques. C'est pourquoi les modèles viscoélastiques furent introduits. Ils sont utilisés aussi pour décrire le comportement de différents matériaux comme les métaux, les polymères, les caoutchoucs et les roches.

Dans le cas unidimensionnel, ces matériaux ont des caractéristiques élastiques, mais en même temps, les essais de chargement monotone indiquent que la courbe $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ dépend de $\dot{\varepsilon}$. Ce sont donc des *matériaux viscoélastiques*.

Dans le cas multidimensionnel la loi viscoélastique de Kelvin-Voigt s'écrit

$$\sigma = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}) + \mathcal{F}\varepsilon(u), \quad (2.6)$$

où \mathcal{A} représente l'opérateur de viscosité et \mathcal{F} est l'opérateur d'élasticité. Remarquons que lorsque $\mathcal{A} \equiv 0$, la loi (2.6) se réduit à une loi de comportement élastique de la forme (2.5).

2.3 Lois de frottement

Par loi de frottement nous comprenons une relation entre la contrainte tangentielle σ_τ et le déplacement tangentiel u_τ . Notons ici que σ_τ s'appelle aussi *force de frottement*.

Loi de frottement de type Coulomb. C'est une des lois de frottement les plus répandues dans la littérature mathématique.

Une version statique de la loi de frottement de Coulomb utilisée en littérature est donnée par

$$\begin{cases} \|\sigma_\tau\| \leq p_\tau (u_\nu - g) \\ u_\tau \neq \mathbf{0} \Rightarrow \sigma_\tau = -p_\tau (u_\nu - g) \frac{u_\tau}{\|u_\tau\|} \end{cases} \quad (2.7)$$

où p_τ est une fonction positive. Dans (2.7), la contrainte tangentielle ne peut pas excéder le seuil de frottement $p_\tau(u_\nu - g)$. De plus, quand le seuil de frottement est atteint, le corps se met à glisser et la contrainte tangentielle tend à s'opposer au mouvement. Cette condition de frottement a été utilisée dans différents papiers.

On note ici que dans la deuxième partie du mémoire nous nous plaçons dans ce type de frottement.

Loi de frottement de type Tresca. Cette loi de frottement est à seuil S , que nous considérons fixe. Tant que la contrainte tangentielle σ_τ n'a pas atteint le seuil S , le corps ne peut pas glisser sur la fondation et il y a blocage. Lorsque ce seuil est atteint, il y a glissement et la contrainte tangentielle tend à s'opposer au mouvement. Cette loi de frottement est dans le cas statique

$$\begin{cases} \|\sigma_\tau\| \leq S \\ \sigma_\tau = -S \frac{u_\tau}{\|u_\tau\|} \quad \text{si} \quad u_\tau \neq \mathbf{0} \end{cases}, \quad (2.8)$$

où $S > 0$ est le seuil de frottement.

2.4 Conditions de contact

Par conditions de contact nous comprenons une relation impliquant les composantes normales du champ des déplacements, des vitesses ou des contraintes.

Nous commençons par présenter les conditions aux limites de contact utilisées tout au long de ce mémoire. Dans ce cas, nous nous plaçons dans le cadre physique. Les égalités et les inégalités qui suivent sont considérées vraies presque partout sur Γ_3 ou Γ_4 .

Contact avec compliance normale. Dans ce paragraphe, nous nous intéressons à la condition de contact avec compliance normale dans laquelle la fondation est supposée déformable.

Elle s'exprime sous la forme

$$-\sigma_\nu = p(u_\nu), \quad (2.9)$$

où u_ν est le déplacement normal et $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ est une fonction donnée qui s'annule pour tout argument négatif, c'est-à-dire :

$$p(r) = 0 \quad \text{si} \quad r \leq 0. \quad (2.10)$$

Cette condition indique que la fondation exerce une réaction sur le corps en fonction de sa pénétration. Notons que la loi de compliance normale dépend de la fonction p choisie. Un exemple de fonction qui peut être utilisé dans (2.9) est donné par

$$p(r) = cr^+, \quad r^+ = \max\{r, 0\}.$$

Ici c représente le coefficient de rigidité de la fondation. La représentation graphique de la loi de compliance normale correspondant à cette fonction est donnée dans la Figure 2.2 **Contact avec**

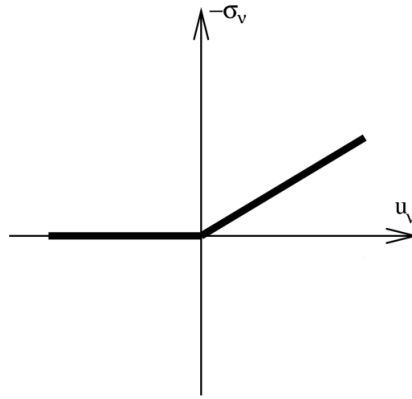


FIGURE 2.2 – Contact avec compliance normale

compliance normale et contrainte unilatérale. Cette condition a été considérée pour la première fois dans l'étude d'un problème dynamique pour des matériaux viscoplastiques. Elle s'exprime sous la forme

$$\begin{cases} u_\nu \leq F, \sigma_\nu + p(u_\nu) \leq 0 \\ (u_\nu - g)(\sigma_\nu + p(u_\nu)) = 0 \end{cases},$$

où g est une constante strictement positive et p est une fonction satisfaisant la condition (2.10). Dans cette loi, la fondation est composée d'un matériau rigide recouvert d'un matériau déformable autorisant des pénétrations limitées. Une représentation graphique de cette loi est donnée dans la Figure 2.3.

Nous présentons maintenant les observations suivantes

- 1) Lorsque $0 \leq u_\nu < g$, alors la réaction de la fondation est déterminée uniquement par le déplacement normal (puisque $-\sigma_\nu = p(u_\nu)$). Donc, nous sommes dans le cas de contact avec compliance normale.
- 2) Lorsque $u_\nu = g$, alors la couche d'aspérités est complètement écrasée et, par conséquent, le corps est en contact avec le matériau rigide. Le contact dans ce cas est décrit par la condition de contact de Signorini avec interstice g .
- 3) Si nous faisons tendre g vers zéro, alors la couche d'aspérités disparaît et, de ce fait, nous retrouvons la loi de contact de Signorini. Dans le cas où $g \rightarrow \infty$, la fondation est constituée d'un matériau déformable et nous retrouvons la loi de contact avec compliance normale. Dans le cas où $g > 0$ et $p = 0$, nous retrouvons la condition de contact de Signorini avec interstice g .

Condition de contact avec contrainte unilatérale et seuil critique : Cette condition de contact a été considérée dans l'article [16] dans l'étude d'un problème de contact statique

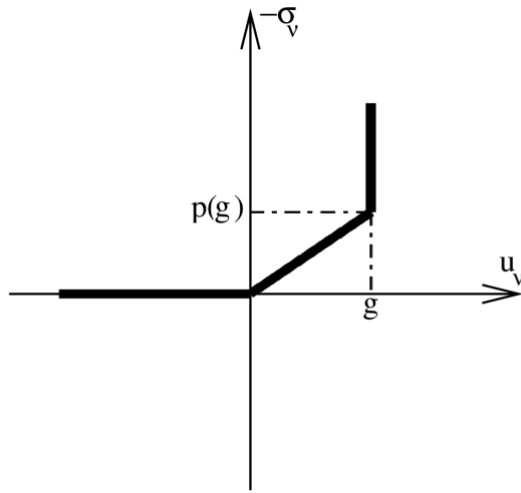


FIGURE 2.3 – Contact avec compliance normale et contrainte unilatérale

pour des matériaux élastiques. Dans cette condition, la fondation est constituée d'un matériau parfaitement rigide recouvert d'un matériau rigide-plastique d'épaisseur g . Elle se présente sous la forme

$$\left. \begin{array}{ll} \sigma_\nu = 0 & \text{si } u_\nu < 0 \\ -F < \sigma_\nu < 0 & \text{si } u_\nu = 0 \\ u_\nu \leq g, & \text{si } 0 < u_\nu < g \\ \sigma_\nu = -F & \text{si } u_\nu = g \end{array} \right\}, \quad (2.11)$$

et sa représentation graphique figure ci-dessous. Afin d'obtenir cette loi de contact, nous sup-

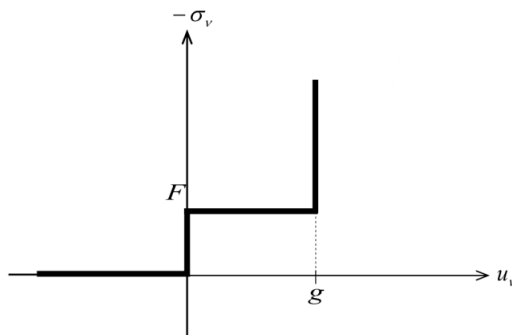


FIGURE 2.4 – Contact avec contrainte unilatérale et seuil critique

posons que la contrainte normale σ_ν a une décomposition additive de la forme

$$\sigma_\nu = \sigma_\nu^R + \sigma_\nu^P, \quad (2.12)$$

où σ_ν^R décrit la réaction du matériau rigide de la fondation et σ_ν^P décrit la réaction du matériau rigide-plastique. Supposons que σ_ν^R satisfait la condition de contact de Signorini avec interstice

g , c'est-à-dire

$$u_\nu \leq g, \quad \sigma_\nu^R \leq 0, \quad \sigma_\nu^R (u_\nu - g) = 0. \quad (2.13)$$

Supposons également que σ_ν^P satisfait la condition

$$-F \leq \sigma_\nu^P \leq 0, \quad \sigma_\nu^P = \begin{cases} 0 & \text{si } u_\nu < 0 \\ -F & \text{si } u_\nu > 0 \end{cases}, \quad (2.14)$$

où F est une fonction positive qui représente le seuil critique du matériau rigideplastique. En utilisant la condition (2.14), nous avons que

$$\begin{aligned} -F < \sigma_\nu^P < 0 &\implies u_\nu \leq 0 \\ \sigma_\nu^P = -F &\implies u_\nu \geq 0 \end{aligned}$$

Une représentation graphique de la condition (2.14) est donnée dans la figure ci-dessous. Nous

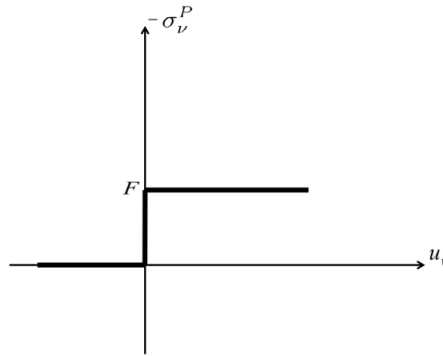


FIGURE 2.5 – Condition de contact (2.14)

combinons maintenant les conditions (2.13) et (2.14) pour obtenir la condition de contact (2.11)

En effet

- Si $u_\nu < 0$, alors (2.14) implique que $\sigma_\nu^P = 0$, (2.13) implique que $\sigma_\nu^R = 0$ et, par conséquent, l'égalité (2.12) montre que $\sigma_\nu = 0$.
- Si $u_\nu = 0$, alors (2.14) implique que $-F < \sigma_\nu^P < 0$, (2.13) implique que $\sigma_\nu^R = 0$ et, par conséquent, la décomposition (2.12) montre que $-F < \sigma_\nu < 0$.
- Si $0 < u_\nu < g$, alors (2.14) implique que $\sigma_\nu^P = -F$, (2.13) implique que $\sigma_\nu^R = 0$ et, par conséquent, la décomposition (2.12) montre que $\sigma_\nu = -F$.
- Si $u_\nu = g$, alors (2.14) implique que $\sigma_\nu^P = -F$, (2.13) implique que $\sigma_\nu^R \leq 0$ et, par conséquent, l'égalité (2.12) montre que $\sigma_\nu \leq -F$.

Nous donnons maintenant quelques interprétations physiques de cette condition de contact.

D'abord, lorsqu'il y a une séparation entre le corps et la fondation, c'est à-dire $u_\nu < 0$, alors la réaction de la fondation est nulle, i.e., $\sigma_\nu = 0$.

Supposons maintenant qu'il y a une pénétration mais, sans atteindre le seuil g , c'est-à-dire $u_\nu = g$, alors le corps est en contact avec le matériau rigide et donc la réaction de la fondation dépasse le seuil critique F du matériau rigide-plastique, i.e., $-\sigma_\nu > F$.

Condition de contact tangentielle : A part les conditions de contact, il convient de décrire les conditions aux limites dans le plan tangent de la surface Γ_3 ou Γ_4 .

Dans ce mémoire, nous supposons que la surface de contact est idéalisée et, par conséquent, le frottement est négligeable. Ceci implique que

$$\sigma_\tau = \mathbf{0}.$$

Autrement dit, la contrainte tangentielle s'annule sur la surface de contact tout au long du processus.

Nous terminons ce paragraphe en rappelant que dans la littérature le frottement est décrit par la loi de Coulomb (formulée pour la première fois par Amontons en 1699) et ses versions. Pour des applications sur cette loi.

Deuxième partie

Problème du contact élastique avec
contrainte unilatérale et frottement

Chapitre 3

Étude variationnelle du problème

3.1 Formulation mécanique et variationnelle du problème

Problème P :

Trouver un champ des déplacements $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ et un champ des contraintes $\sigma : \Omega \rightarrow \mathbb{S}^d$ tels que

$$\sigma = \mathcal{F}\varepsilon(u) \text{ dans } \Omega. \quad (3.1)$$

$$\text{Div } \sigma + f_0 = 0 \text{ dans } \Omega. \quad (3.2)$$

$$u = 0 \text{ sur } \Gamma_1. \quad (3.3)$$

$$\sigma_\nu = f_2 \text{ sur } \Gamma_2. \quad (3.4)$$

$$\left. \begin{array}{l} u_\nu \leq g, \\ \sigma_\nu = 0 \quad \text{si } u_\nu < 0, \\ -F \leq \sigma_\nu \leq 0 \quad \text{si } u_\nu = 0, \\ \sigma_\nu = -F \quad \text{si } 0 < u_\nu < g, \\ \sigma_\nu \leq -F \quad \text{si } u_\nu = g, \\ \sigma_\tau = 0 \end{array} \right\} \text{ sur } \Gamma_3 \quad (3.5)$$

$$\left. \begin{array}{l} u_\nu \leq k, \\ \sigma_\nu + p(u_\nu) \leq 0, \\ (u_\nu - k)(\sigma_\nu + p(u_\nu)) = 0, \\ \|\sigma_\tau\| \leq \mu p(u_\nu), \\ -\sigma_\tau = \mu p(u_\nu) \frac{u_\tau}{\|u_\tau\|} \text{ si } u_\tau \neq 0 \end{array} \right\} \text{ sur } \Gamma_4 \quad (3.6)$$

Dans l'étude du problème mécanique (3.1) - (3.6), nous supposons que l'opérateur d'élasticité \mathcal{F} satisfait les conditions suivantes

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \mathcal{F} : \Omega \times \mathbb{S}^d \longrightarrow \mathbb{S}^d. \\ (b) \text{ Il existe } L_{\mathcal{F}} > 0 \text{ tel que } \|\mathcal{F}(x, \varepsilon_1) - \mathcal{F}(x, \varepsilon_2)\| \leq L_{\mathcal{F}} \|\varepsilon_1 - \varepsilon_2\| \\ \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{S}^d, p.p.x \in \Omega \\ (c) \text{ Il existe } m_{\mathcal{F}} > 0 \text{ tel que} \\ (\mathcal{F}(x, \varepsilon_1) - \mathcal{F}(x, \varepsilon_2)) \cdot (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \geq m_{\mathcal{F}} \|\varepsilon_1 - \varepsilon_2\|^2 \\ \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{S}^d, p.p.x \in \Omega. \\ (d) \text{ L'application } x \longrightarrow F(x, \varepsilon) \text{ est mesurable sur } \Omega, \\ \forall \varepsilon \in \mathbb{S}^d. \\ (e) \text{ L'application } x \longrightarrow F(x, 0) \text{ appartient à } Q. \end{array} \right. \quad (3.7)$$

La fonction de compliance normale satisfait

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \quad p : \Gamma_4 \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+. \\ (b) \quad \text{ Il existe } L_p > 0 \text{ tel que} \\ |p(x, r_1) - p(x, r_2)| \leq L_p |r_1 - r_2|; \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}, p.p.x \in \Gamma_4. \\ (c) \text{ L'application } x \longrightarrow p(x, r) \text{ est mesurable sur } \Gamma_4, \forall r \in \mathbb{R}. \\ (d) \quad (p(x, r_1) - p(x, r_2))(r_1 - r_2) \geq 0 \quad \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}, \quad p.p.x \in \Gamma_4. \\ (e) \quad p(x, r) = 0 \quad \forall r \leq 0, \quad p.p.x \in \Gamma_4. \end{array} \right. \quad (3.8)$$

Enfin, nous supposons que les densités de forces volumique et le tractions surfacique, le coefficient de frottement et les épaisseurs sont données comme suit

$$f_0 \in L^2(\Omega)^d. \quad (3.9)$$

$$f_2 \in L^2(\Gamma_2)^d. \quad (3.10)$$

$$F \in L^2(\Gamma_3), \quad F(x) \geq 0 \text{ p.p. } x \in \Gamma_3. \quad (3.11)$$

$$\mu \in L^\infty(\Gamma_4), \quad \mu(x) \geq 0 \text{ p.p. } x \in \Gamma_4. \quad (3.12)$$

$$g > 0, k > 0. \quad (3.13)$$

Sous ces hypothèses, nous introduisons l'ensemble $U \subset V$? l'opérateur $A : V \longrightarrow V$, la fonction $j : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$, et l'élément $f \in Y$ définis par

$$U = \{v \in V : v_\nu \leq g \text{ p.p. sur } \Gamma_3, v_\nu \leq k \text{ p.p. sur } \Gamma_4\}. \quad (3.14)$$

$$(Au, v)_V = \int_{\Omega} \mathcal{F}\varepsilon(u)\varepsilon(v)dx + \int_{\Gamma_4} p(u_\nu)v_\nu da \quad \forall u, v \in V. \quad (3.15)$$

$$j(u, v) = \int_{\Gamma_3} Fv_\nu^+ da + \int_{\Gamma_4} \mu p(u_\nu)\|v_\tau\| da \quad \forall u, v \in V. \quad (3.16)$$

$$f = (f_0, f_2). \quad (3.17)$$

Ici et ci-dessous, r^+ désigne la partie positive de r , c'est-à-dire $r = \max\{0, r\}$. De plus, notez que la définition $\pi v = (v, \gamma_2 v) \quad \forall v \in V$ implique que

$$(f, \pi v)_Y = \int_{\Omega} f_0 \cdot v dx + \int_{\Gamma_2} f_2 \cdot v da \quad \forall v \in V. \quad (3.18)$$

Nous allons maintenant montrer la formulation variationnelle du problème P , et enfin, nous supposons que u, σ sont des fonctions suffisamment régulières qui satisfont (3.1) - (3.6). Ensuite, en utilisant (3.3), (3.5), (3.6) et (3.14), pour obtenir

$$u \in U \quad (3.19)$$

Soit $v \in U$, nous utilisons la formule de Green (1.26) et l'équation d'équilibre (3.2), nous obtenons

$$\int_{\Omega} \sigma \cdot (\varepsilon(v) - \varepsilon(u)) dx = \int_{\Omega} f_0 \cdot (v - u) dx + \int_{\Gamma} \sigma \nu \cdot (v - u) da.$$

Noutons que

$$\sigma \nu (v - u) = \sigma_\nu (v_\nu - u_\nu) + \sigma_\tau \cdot (v_\tau - u_\tau) \text{ p.p. sur } \Gamma_3 \text{ et } \Gamma_4$$

En utilisant cette décomposition ainsi que les conditions (3.3), (3.4), la définition (3.18) et comme $\sigma_\tau = 0$ sur Γ_3 , nous trouvons

$$\int_{\Omega} \sigma \cdot (\varepsilon(v) - \varepsilon(u)) dx = (f, \pi(v - u))_Y + \int_{\Gamma_3} \sigma_\nu (v_\nu - u_\nu) da + \int_{\Gamma_4} \sigma_\nu (v_\nu - u_\nu) da + \int_{\Gamma_4} \sigma_\tau \cdot (v_\tau - u_\tau) da \quad (3.20)$$

D'une part, nous écrivons

$$\sigma_\nu (v_\nu - u_\nu) = (\sigma_\nu + F)(v_\nu - g) + (\sigma_\nu + F)(g - u_\nu) - F(v_\nu - u_\nu) \text{ p.p. sur } \Gamma_3,$$

puis, nous utilisons la condition (3.5) ainsi que l'inclusion $v \in U$ pour obtenir que

$$\sigma_\nu (v_\nu - u_\nu) \geq -F(v_\nu - u_\nu) \text{ p.p. sur } \Gamma_3,$$

Nous utilisons l'hypothèse (3.11) sur la fonction F et, en intégrant sur Γ_3 , nous obtenons

$$\int_{\Gamma_3} \sigma_\nu (v_\nu - u_\nu) da \geq \int_{\Gamma_3} F(u_\nu^+ - v_\nu^+) da. \quad (3.21)$$

D'autre part, nous utilisons la loi de frottement (3.6) pour voir que

$$\int_{\Gamma_4} \sigma_\nu \cdot (v - u) da \geq \int_{\Gamma_4} p(u_\nu)(u_\nu v_\nu) da + \int_{\Gamma_4} \mu p(u_\nu)(\|u_\tau\| - \|v_\tau\|) da, \quad (3.22)$$

en effet, la condition de contact (3.6) sur Γ_4 donne

$$\sigma_\nu(u_\nu - v_\nu) \geq p(u_\nu)(u_\nu - v_\nu),$$

de plus, sur les points de Γ_4 où $u_\tau \neq 0$ nous avons

$$\sigma_\tau \cdot (v_\tau - u_\tau) = -\mu p(u_\nu) \frac{u_\tau}{\|u_\tau\|} \cdot (v_\tau - u_\tau),$$

alors

$$\sigma_\tau \cdot (v_\tau - u_\tau) \geq \mu p(u_\nu) (\|u_\tau\| - \|v_\tau\|),$$

car $u_\tau \cdot u_\tau = \|u_\tau\|^2$ et $u_\tau \cdot v_\tau \leq \|u_\tau\| \|v_\tau\|$, sur les points de Γ_4 où $u_\tau = 0$, nous avons

$$\sigma_\tau \cdot (v_\tau - u_\tau) = \sigma_\tau \cdot v_\tau \geq -\|\sigma_\tau\| \|v_\tau\| \geq \mu p(u_\nu) (\|u_\tau\| - \|v_\tau\|).$$

car $\|\sigma_\tau\| \leq \mu p(u_\nu)$ et $\|u_\tau\| = 0$.

d'où

$$\sigma_\nu(v_\nu - u_\nu) \geq p(u_\nu)(u_\nu - v_\nu) + \mu p(u_\nu)(\|u_\tau\| - \|v_\tau\|).$$

On intègre sur Γ_4 on obtient (3.22)

Ensuite, nous combinons l'égalité (3.20) avec les inégalités (3.21), (3.22), puis nous utilisons la loi de comportement (3.1), les définitions (3.15), (3.16) et la régularité (3.19). nous trouvons la formulation variationnelle suivante de Problème P .

Problème P^V :

Trouver un champ de déplacement u , tel que

$$u \in U, \quad (Au, v - u)_V + j(u, v) - j(u, u) \geq (f, \pi v - \pi u)_Y \quad \forall v \in U. \quad (3.23)$$

Notons que le problème P^V est formulé en termes de champ de déplacements.

Une fois que ce le champ de déplacement connu, le champ de contraintes peut être facilement obtenu en utilisant la loi de comportement (3.1). Un couple (u, σ) qui satisfait (3.1) et (3.23) est appelée une solution faible au problème de contact P .

3.2 Existence et unicité de la solution

La solvabilité unique du problème P^V est fournie par le théorème suivant.

Théorème 3.1. *Supposons (3.7) - (3.13). Alors, il existe une constante μ_0 , qui dépend de Ω , Γ_1 et \mathcal{F} , de sorte que le problème P^V a une solution unique, si*

$$L_p \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_4)} < \mu_0. \quad (3.24)$$

Démonstration

Nous utilisons Théorème 1.8 avec le choix $X = V$ et $K = U$, enfin, nous notons que l'ensemble (3.14) est un sous-ensemble convexe fermé non vide de V et, de plus, $0_V \in U$.

Par conséquent, la condition (1.19) est satisfaite. Ensuite, nous utilisons la définition (3.15) et les propriétés (3.7) (c) et (3.8) (d) pour voir que

$$(Au - Av, u - v)_V \geq m_{\mathcal{F}} \|u - v\|_V^2 \quad \forall u, v \in V. \quad (3.25)$$

D'autre part, en utilisant (3.15), (3.7) (b), (3.8) (b) et l'inégalité de trace (1.27) donne

$$\|Au - Av\|_V \leq (L_{\mathcal{F}} + c_0^2 L_p) \|u - v\|_V \quad \forall u, v \in V. \quad (3.26)$$

Nous concluons par (3.25) et (3.26) que A est un opérateur fortement monotone et de Lipschitz sur l'espace V qui montre que (1.20) est vérifiée. En outre, il est facile de voir que la fonctionnelle j définie par (3.16) satisfait la condition (1.23) (a).

Supposons maintenant que $\mu_1, \mu_2, v_1, v_2 \in V$. Ensuite, en utilisant la définition (1.23), après quelques calculs élémentaires, on constate que

$$j(\eta_1, v_2) - j(\eta_1, v_1) + j(\eta_2, v_1) - j(\eta_2, v_2) \leq \int_{\Gamma_4} \mu |p(\eta_{1\nu}) - p(\eta_{2\nu})| \|v_{1\tau}\| - \|v_{2\tau}\| da$$

et en utilisant les propriétés (3.8), (3.12), de la fonction p avec l'inégalité de trace (1.27), on en déduit que

$$j(\eta_1, v_2) - j(\eta_1, v_1) + j(\eta_2, v_1) - j(\eta_2, v_2) \leq c_0^2 L_p \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_4)} \|\eta_1 - \eta_2\|_V \|v_1 - v_2\|_V. \quad (3.27)$$

Il s'ensuit que j satisfait la condition (1.23) (b) avec $\alpha_j = c_0^2 L_p \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_4)}$,

d'où

$$\mu_0 = \frac{m_{\mathcal{F}}}{c_0^2}, \quad (3.28)$$

et notons que, clairement, μ_0 dépend de, Ω, Γ_1 et \mathcal{F} . Supposons que (3.24) est vraie.

Ensuite, puisque $m_A = m_{\mathcal{F}}$, il s'ensuit que la condition (1.5) est également valable. Pour terminer, en utilisant (1.29) et le théorème de représentation de Riesz, on en déduit qu'il existe un élément unique $\tilde{f} \in V$, tel que

$$(\tilde{f}, v)_V = (f, \pi v)_Y \quad \forall v \in V. \quad (3.29)$$

Théorème 3.1 est maintenant une conséquence directe du Théorème 1.8.

Chapitre 4

Résultats de convergence

La solution u du problème P^V dépend des données f_0, f_2, F, μ, g et k , par conséquent, nous le désignons parfois par $u = u(f_0, f_2, F, \mu, g, k)$. Dans ce qui suit, nous étudions sa dépendance vis-à-vis de ces données. À cette fin, dans le reste de cette section, nous supposons que (3.7) - (3.13), et (3.24) sont vérifiées et, en plus, nous considérons une perturbation $f_{0n}, f_{2n}, F_n, \mu_n, g_n$ et k_n de f_0, f_2, F, μ, g , et k , respectivement, qui satisfont les conditions (3.9) - (3.13) et (3.24). Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on considère l'ensemble $U_n \subset V$, la fonctionnelle $j_n : V \rightarrow \mathbb{R}$ et l'élément $f_n \in Y$ définis par

$$U_n = \{v \in V : v_\nu \leq g_n \quad \text{p.p. sur } \Gamma_3, v_\nu \leq k_n \quad \text{p.p. sur } \Gamma_4\}, \quad (4.1)$$

$$j_n(u, v) = \int_{\Gamma_3} F_n v_\nu^+ da + \int_{\Gamma_4} \mu_n p(u_\nu) \|v_\tau\| da \quad \forall u, v \in V, \quad (4.2)$$

$$f_n = (f_{0n}, f_{2n}). \quad (4.3)$$

De plus, nous considérons la perturbation suivante du problème P^V .

problème P_n^V

Trouver un champ des déplacements $u_n \in U_n$, tel que

$$(Au_n, v - u_n)_V + j_n(u_n, v) - j_n(v_n, v_n) \geq (f_n, \pi v - \pi u_n)_Y \quad \forall v \in U_n, \quad (4.4)$$

d'après Théorème 3,1, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, le problème P_n^V a une solution unique $u_n = u_n(f_{0n}, f_{2n}, F_n, \mu_n, g_n, k_n)$. Notre résultat principal dans cette section est ce qui suit

Théorème 4.1. *supposons que*

$$f_{0_n} \rightharpoonup f_0 \quad \text{in } L^2(\Omega)^d, \quad (4.5)$$

$$f_{2_n} \rightharpoonup f_2 \quad \text{in } L^2(\Gamma_2)^d, \quad (4.6)$$

$$F_n \rightharpoonup F \quad \text{in } L^2(\Gamma_3), \quad (4.7)$$

$$\mu_n \rightarrow \mu \quad \text{in } L^\infty(\Gamma_4), \quad (4.8)$$

$$g_n \rightarrow g, \quad k_n \rightarrow k, \quad (4.9)$$

Ensuite, la solution u_n du problème P_n^V converge vers la solution u du problème P^V ,

$$u_n \longrightarrow u \quad \text{dans } V. \quad (4.10)$$

La preuve du Théorème 4.1 se fera en plusieurs étapes que nous présent dans ce qui suit.

Nous commençons par considérer le problème intermédiaire suivant .

Problème \tilde{P}_n^V

Trouver un champ des déplacements $\tilde{u}_n \in U$, tel que

$$(A\tilde{u}_n, v - \tilde{u}_n)_V + j_n(\tilde{u}_n, v) - j_n(\tilde{u}_n, \tilde{u}_n) \geq (f_n, \pi v - \pi\tilde{u}_n)_Y \quad \forall v \in U. \quad (4.11)$$

L'unique solvabilité de ce problème est une conséquence directe du Théorème (1.8). Nous procédons maintenant au résultat suivant.

Lemme 4.1. *Il existe une constante $D > 0$, telle que*

$$\|u_n\|_V \leq D, \quad \|\tilde{u}_n\|_V \leq D, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (4.12)$$

Démonstration Soit $n \in \mathbb{N}$. Nous prenons $v = 0_V$ dans (3.17) obtenien

$$(Au_n, u_n)_V + j_n(u_n, u_n) \leq (f_n, \pi u_n)_Y.$$

Ensuite, en utilisant l'hypothèse (3.25), la positivité de la fonction j_n , la continuité de l'opérateur π , et (1.29), il s'ensuit que

$$\|u_n\|_V \leq \frac{1}{m_{\mathcal{F}}} \max(1, d_0) (\|f_n\|_Y + \|A0_V\|_V). \quad (4.13)$$

Des arguments similaires montrent que

$$\|\tilde{u}_n\|_V \leq \frac{1}{m_{\mathcal{F}}} \max(1, d_0) (\|f_n\|_Y + \|A0_V\|_V). \quad (4.14)$$

Enfin, des hypothèses (4.5) and (4.6) implique que

$$f_n \rightharpoonup f \quad \text{dans } Y. \quad (4.15)$$

et, par conséquent, la suite $\{f_n\} \subset Y$ est bornée, c'est-à-dire qu'il existe $E > 0$ qui ne dépend pas de n , de sorte que

$$\|f_n\|_Y \leq E. \quad (4.16)$$

Lemme 4.1 est maintenant une conséquence directe des inégalités (4.13), (4.14) et (4.16).

Lemme 4.2. *La suite $\{\tilde{u}_n\}$ converge faiblement vers u en V , c'est-à-dire*

$$\tilde{u}_n \rightharpoonup u \quad \text{dans } V. \quad (4.17)$$

Démonstration Lemme 4.1 combiné avec un argument standard de compacité implique qu'il existe $\tilde{u} \in V$, tel que le passage à une sous-séquence, toujours notée $\{\tilde{u}_n\}$, nous avons

$$\tilde{u}_n \rightharpoonup \tilde{u} \quad \text{dans } V. \quad (4.18)$$

Par la suite, nous prouvons l'égalité suivante

$$\tilde{u} = u. \quad (4.19)$$

D'abord, notons que U est une partie convexe et fermée de l'espace de Hilbert V et la suite $\{\tilde{u}_n\} \subset U$ converge faiblement vers \tilde{u} . Donc, du Théorème de Mazur, il résulte que $\tilde{u} \in U$.

Soit $n \in N$. On prenant $v = \tilde{u} \in U$ dans (4.11), nous obtenons que

$$(A\tilde{u}_n, \tilde{u}_n - \tilde{u})_V \leq (f_n, \pi\tilde{u}_n - \pi\tilde{u})_Y + j_n(\tilde{u}_n, \tilde{u}) - j_n(\tilde{u}_n, \tilde{u}_n). \quad (4.20)$$

Nous utilisons maintenant les convergences (4.7), (4.8), (4.15), (4.18), (1.30) et la compacité de l'opérateur trace pour voir que

$$(f_n, \pi\tilde{u}_n - \pi\tilde{u})_Y \rightarrow 0. \quad (4.21)$$

$$j_n(\tilde{u}_n, \tilde{u}) - j_n(\tilde{u}_n, \tilde{u}_n) \rightarrow 0. \quad (4.22)$$

Nous passons maintenant à la limite supérieure de (4.20) et on utilisant (4.21) et (4.22) en déduire que

$$\limsup_{n \rightarrow 0} (A\tilde{u}_n, \tilde{u}_n - \tilde{u})_V \leq 0.$$

Par conséquent, en utilisant (3.25) et (3.26), la convergence (4.18) et la proposition 1,1, nous déduisons que

$$\liminf_{n \rightarrow 0} (A\tilde{u}_n, \tilde{u}_n - v)_V \geq (A\tilde{u}, \tilde{u} - v)_V \quad \forall v \in U. \quad (4.23)$$

Par contre, en utilisant à nouveau l'inégalité (4.11), les convergences (4.7), (4.8), (4.15), (4.18) et (1.30), on obtient que

$$\lim_{n \rightarrow 0} \sup (A\tilde{u}_n, \tilde{u}_n - v)_V \leq (f, \pi\tilde{u} - \pi v)_Y + j(\tilde{u}, v) - j(\tilde{u}, \tilde{u}) \quad \forall v \in U. \quad (4.24)$$

nous combinons maintenant les inégalités (4.23) et (4.24) pour voir que

$$(A\tilde{u}, v - \tilde{u})_V + j(\tilde{u}, v) - j(\tilde{u}, \tilde{u}) \geq (f, \pi v - \pi\tilde{u})_Y \quad \forall v \in U. \quad (4.25)$$

Ensuite, nous prenons $v = \tilde{u}$ dans (4.25) et $v = u$ dans (3.23). Ensuite, en additionnant les inégalités obtenues et en utilisant la forte monotonie de l'opérateur A , (3.25), nous obtenons que

$$m_{\mathcal{F}} \|\tilde{u} - u\|_V^2 \leq j(\tilde{u}, u) - j(\tilde{u}, \tilde{u}) + j(u, \tilde{u}) - j(u, u).$$

Enfin, nous utilisons l'inégalité (3.27) pour voir que

$$(m_{\mathcal{F}} - c_0^2 L_p \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_4)}) \|\tilde{u} - u\|_V^2 \leq 0.$$

L'égalité (4.19) est maintenant une conséquence de l'hypothèse (3.24) et de la définition (3.28). Un examen attentif des arguments utilisés ci-dessus montre que toute sous-suite faiblement convergente de la suite $\tilde{u}_n \subset V$ converge faiblement vers u , où rappel que u est l'unique solution de l'inégalité (3.23). Par conséquent, en utilisant l'estimation (4.13), nous trouvons que toute suite \tilde{u}_n converge faiblement vers u dans V , ce qui conclut la preuve.

Nous procédons avec le résultat de forte convergence suivant.

Lemme 4.3. *La suite \tilde{u}_n converge fortement vers u dans V , c'est-à-dire*

$$\|\tilde{u}_n - u\|_V \rightarrow 0. \quad (4.26)$$

Démonstration

Soit $n \in \mathbb{N}$. nous prenons $v = u \in K$ dans (4.11) pour obtenir que

$$(A\tilde{u}_n, \tilde{u}_n - u)_V \leq (f_n, \pi\tilde{u}_n - \pi u)_Y + j_n(\tilde{u}_n, u) - j_n(\tilde{u}_n, \tilde{u}_n). \quad (4.27)$$

Ensuite, nous utilisons (3.25) pour trouver que

$$m_{\mathcal{F}} \|\tilde{u}_n - u\|_V^2 \leq (A\tilde{u}_n - Au, \tilde{u}_n - u)_V = (A\tilde{u}_n, \tilde{u}_n - u)_V - (Au, \tilde{u}_n - u)_V,$$

et, par conséquent, (4.27) rapporte que

$$\begin{aligned} & m_{\mathcal{F}} \|\tilde{u}_n - u\|_V^2 \\ & \leq (f_n, \pi\tilde{u}_n - \pi u)_Y + j_n(\tilde{u}_n, u) - j_n(\tilde{u}_n, \tilde{u}_n) - (Au, \tilde{u}_n - u)_V. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Nous utilisons maintenant (4.7),(4.8),(4.15),(4.17),(1.30) et la compacité de l'application trace pour voir que

$$(f_n, \pi \tilde{u}_n - \pi u)_Y \rightarrow 0. \quad (4.29)$$

$$j_n(\tilde{u}_n, u) - j_n(\tilde{u}_n, \tilde{u}_n) \rightarrow 0. \quad (4.30)$$

$$(Au, \tilde{u}_n - u)_V \rightarrow 0. \quad (4.31)$$

Enfin, nous combinons l'inégalité (4.28) avec les convergences (4.29) - (4.31) pour voir que (4.26) est vérifié.

Lemme 4.4. *La convergence suivante donne*

$$\|\tilde{u}_n - u_n\|_V \rightarrow 0. \quad (4.32)$$

Démonstration Soit $n \in \mathbb{N}$ et soient $\alpha_n > 0, \beta_n > 0$ donné par

$$\alpha_n = \min \left\{ \frac{g_n}{g}, \frac{k_n}{k} \right\}, \quad \beta_n = \min \left\{ \frac{g}{g_n}, \frac{k}{k_n} \right\}. \quad (4.33)$$

Alors, c'est depuis $\tilde{u}_n \in U$ et $u_n \in U_n$, il est facile de voir que

$$\alpha_n \tilde{u}_n \in U_n, \quad (4.34)$$

et

$$\beta_n u_n \in U. \quad (4.35)$$

La régularité (4.34) permet de tester en (4.4) avec $v = \alpha_n \tilde{u}_n$ pour obtenir

$$(Au_n, \alpha_n \tilde{u}_n - u_n)_V + j_n(u_n, \alpha_n \tilde{u}_n) - j_n(u_n, u_n) \geq (f_n, \pi(\alpha_n \tilde{u}_n) - \pi u_n)_Y. \quad (4.36)$$

De plus, la régularité (4.35) permet de tester en (4.11) avec $v = \beta_n u_n$ nous trouvons que

$$(A\tilde{u}_n, \beta_n u_n - \tilde{u}_n)_V + j_n(\tilde{u}_n, \beta_n u_n) - j_n(\tilde{u}_n, \tilde{u}_n) \geq (f_n, \pi(\beta_n u_n) - \pi \tilde{u}_n)_Y. \quad (4.37)$$

Nous additionnons maintenant les inégalités (4.36) et (4.37) pour trouver que

$$\begin{aligned} & (A\tilde{u}_n, \tilde{u}_n - \beta_n u_n)_V + (Au_n, u_n - \alpha_n \tilde{u}_n)_V \\ & \leq (1 - \beta_n)(f_n, \pi u_n)_Y + (1 - \alpha_n)(f_n, \pi \tilde{u}_n)_Y \\ & \quad + j_n(\tilde{u}_n, \beta_n u_n) - j_n(\tilde{u}_n, \tilde{u}_n) + j_n(u_n, \alpha_n \tilde{u}_n) - j_n(u_n, u_n) \end{aligned}$$

En suite, nous utilisons l'homogénéité positive de la fonction j par rapport à le deuxième argument, et après une certaine calculs, nous déduisons que

$$\begin{aligned} & (A\tilde{u}_n - Au_n, \tilde{u}_n - u_n)_V \\ & \leq (\alpha_n - 1)(Au_n, \tilde{u}_n)_V + (\beta_n - 1)(A\tilde{u}_n, u_n)_V \\ & \leq (1 - \beta_n)(f_n, \pi u_n)_Y + (1 - \alpha_n)(f_n, \pi \tilde{u}_n)_Y \\ & \quad + (\beta_n - 1)j(\tilde{u}_n, u_n) + (\alpha_n - 1)j(u_n, \tilde{u}_n) \\ & \quad + j_n(\tilde{u}_n, u_n) - j_n(\tilde{u}_n, \tilde{u}_n) + j_n(u_n, \tilde{u}_n) - j_n(u_n, u_n). \end{aligned} \quad (4.38)$$

Nous utilisons maintenant les inégalités (3.25), (3.26), (1.29) avec l'estimation (4.12) et (4.16) pour voir que

$$(A\tilde{u}_n - Au_n, \tilde{u}_n - u_n)_V \geq m_{\mathcal{F}} \|u_n - \tilde{u}_n\|_V^2, \quad (4.39)$$

$$(\alpha_n - 1)(Au_n, \tilde{u}_n)_V \leq |\alpha_n - 1| (L_{\mathcal{F}} + c_0^2 L_p + \|A\mathbf{0}_V\|_V) D, \quad (4.40)$$

$$(\beta_n - 1)(A\tilde{u}_n, u_n)_V \leq |\beta_n - 1| (L_{\mathcal{F}} + c_0^2 L_p + \|A\mathbf{0}_V\|_V) D, \quad (4.41)$$

$$(1 - \beta_n)(f_n, \pi u_n)_Y \leq |\beta_n - 1| Ed_0 D, \quad (4.42)$$

$$(1 - \alpha_n)(f_n, \pi \tilde{u}_n)_Y \leq |\alpha_n - 1| Ed_0 D. \quad (4.43)$$

D'autre part, en utilisant l'inégalité (3.27) avec $\eta_1 = \tilde{u}_n, \eta_2 = 0_V, v_1 = 0_V, v_2 = u_n$ combiné avec une hypothèse (3.8) (e), il s'ensuit que

$$j(\tilde{u}_n, u_n) \leq c_0^2 L_p \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_4)} \|\tilde{u}_n\|_V \|u_n\|_V.$$

Par conséquent, l'estimation (4.12) impliquent que

$$(\beta_n - 1)j(\tilde{u}_n, u_n) \leq |\beta_n - 1| c_0^2 L_p D^2 \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_4)}. \quad (4.44)$$

autrement dit

$$(\alpha_n - 1)j(u_n, \tilde{u}_n) \leq |\alpha_n - 1| c_0^2 L_p D^2 \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_4)}. \quad (4.45)$$

Enfin, en utilisant à nouveau l'inégalité (3.27), on en déduit que

$$\begin{aligned} & j_n(\tilde{u}_n, u_n) - j_n(\tilde{u}_n, \tilde{u}_n) + j_n(u_n, \tilde{u}_n) - j_n(u_n, u_n) \\ & \leq c_0^2 L_p \|\mu_n\|_{L^\infty(\Gamma_4)} \|u_n - \tilde{u}_n\|_V^2. \end{aligned} \quad (4.46)$$

On combine maintenant les inégalités (4.38) - (4.46) pour voir qu'il existe une constante positive G qui ne dépend pas de n , telle que

$$\left(m_{\mathcal{F}} - c_0^2 L_p \|\mu_n\|_{L^\infty(\Gamma_4)} \right) \|u_n - \tilde{u}_n\|_V^2 \leq G (|\alpha_n - 1| + |\beta_n - 1|). \quad (4.47)$$

Par contre, la convergence (4.8) implique que

$$m_{\mathcal{F}} - c_0^2 L_p \|\mu_n\|_{L^\infty(\Gamma_4)} \rightarrow m_{\mathcal{F}} - c_0^2 L_p \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_4)}, \quad (4.48)$$

et, en outre, l'hypothèse de petitesse (3.24) et la définition (3.28) donnent

$$m_{\mathcal{F}} - c_0^2 L_p \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_4)} > 0.$$

On combine cette inégalité avec la convergence (4.48) pour en déduire que pour n assez grand, on a

$$\left(m_{\mathcal{F}} - c_0^2 L_p \|\mu_n\|_{L^\infty(\Gamma_4)} \right) \geq \frac{1}{2} (m_{\mathcal{F}} - c_0^2 L_p \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_4)}). \quad (4.49)$$

Les inégalités (4.47) et (4.49) montrent qu'il existe une constante positive C qui ne dépend pas de n , telle que

$$\|u_n - \tilde{u}_n\|_V^2 \leq C (|\alpha_n - 1| + |\beta_n - 1|). \quad (4.50)$$

Notons enfin que la définition (4.33) et l'hypothèse (4.9) donnent

$$\alpha_n \longrightarrow 1, \beta_n \longrightarrow 1. \quad (4.51)$$

La convergence (4.32) est maintenant une conséquence de (4.50) et (4.51). Nous avons maintenant tous les ingrédients pour apporter la preuve du théorème 4.0.2

Démonstration Soit $n \in \mathbb{N}$. On écrit

$$\|u_n - u\|_V \leq \|u_n - \tilde{u}_n\|_V + \|\tilde{u}_n - u\|_V.$$

En plus de l'intérêt mathématique pour le résultat de convergence (4.10), il est important du point de vue mécanique, car il montre que le faible solution du contact Le problème dépend en permanence des données.

Conclusion et perspectives

Dans ce mémoire, nous avons traité un problème de contact entre un corps élastique et deux obstacles avec diverses lois de contact (compliance normale, contrainte unilatérale et seuil critique) et de frottement. Pour commencer, nous avons proposé une formulation variationnelle du modèle de contact en termes de déplacements. Puis, nous avons obtenu des résultats d'existence et d'unicité de la solution faible, ainsi que des résultats concernant le comportement de la solution par rapport aux perturbations des données et des résultats de convergence. Pour y parvenir, nous avons utilisé des arguments de monotonie, de compacité.

Pour continuer le travail accompli dans ce mémoire, il serait intéressant de considérer des processus de contact quasistatique ou dynamique associé aux différentes lois de contact et de frottement étudiées. L'analyse variationnelle et numérique de ces problèmes représentent des sujets de recherche ouverts qui méritent d'être abordés dans l'avenir.

Bibliographie

- [1] K.T. Andrews, A. Klarbring, M. Shillor , S. Wright . *A dynamic contact problem with friction and wear, Int. J. Egnng. Sci. 35, 1291-1309 (1997).*
- [2] M. Barboteu , M. Sofonea. *Solvability of a dynamic contact problem between a piezoelectric body and a conductive foundation. Appl. Math. Comput. 215, 2978-2991 (2009).*
- [3] G. Duvaut , J. L. Lions. *Les Inéquations en Mécanique et en Physique, Springer, Berlin, 1976.*
- [4] G. Fichera . *Boundary value problems in elasticity with unilateral constraints, in Handbuch der Pphysik VI a/2, Springer, Berlin, 391-424 (1972).*
- [5] M. Frémond. *Équilibre des structures qui adhèrent à leur support, C. R. Acad. Sci. Paris, 295, Série II, 913-916 (1982).*
- [6] W. Han , M. Sofonea, *Quasistatic Contact Problems in Viscoelasticity and Viscoplasticity, Studies in Advanced Mathematics, American Mathematical Society, Providence, RI-International Press, 2002.*
- [7] W. Han, M. Sofonea and K. Kazmi. *Analysis and numerical solution of a frictionless contact problem for electro-elastic-viscoplastic materials. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 196(37), 3915-3926(2007).*
- [8] S. Latreche , L. Selmani. *Analysis of a frictionless contact problem with adhesion for piezoelectric materials. Taiwanese journal of mathematics 21(1), 81-105 (2017).*
- [9] S. Latreche , L. Selmani. *History-dependent frictional contact problems. International conference on the Evolution of Contemporary Mathematics and their Impact in Sciences and Technology (ECMI-SciTech 2017), October 9-12, Constantine, Algeria.*
- [10] Z. Lerguet, M. Shillor , M. Sofonea. *A frictional contact problem for an electroviscoelastic body. EJDE, 2007, 1-16 (2007).*
- [11] S. Migórski, A. Ochal , M. Sofonea. *Analysis of a quasistatic contact problem for piezoelectric materials. J. Math. Anal. Appl. 382, 701-713 (2011).*

- [12] S. Migórski, A. Ochal, M. Sofonea. *Analysis of a piezoelectric contact problem with subdifferential boundary condition. Proceedings of the Royal Society of Edinburgh (Mathematics), 144A, 1007-1025 (2014).*
- [13] Y. Ouafik. *A piezoelectric body in frictional contact. Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie 48(96), 233-242 (2005).*
- [14] M. Rochdi, M. Shillor, M. Sofonea. *A quasistatic viscoelastic contact problem with normal compliance and friction. J. Elasticity 51, 105-126 (1998).*
- [15] B. Awbi, M. Shillor, M. Sofonea. *Dual formulation of a quasistatic viscoelastic contact problem with Tresca's friction law, Applicable Analysis, 79 (2000), 1-20.*
- [16] D. Motreanu, M. Sofonea. *Evolutionary variational inequalities arising in quasistatic frictional contact problems for elastic materials, Abstract and Applied Analysis, 4 (1999), 255-279.*
- [17] M. Sofonea, A. Matei, *Mathematical Models in Contact Mechanics*, London Mathematical Society Lecture Note Series. 398 (2012), Cambridge University Press, Cambridge.
- [18] S. Latreche. *Analyse variationnelle de différent problème aux limites en mécanique de contact, Université FARHAT ABBAS, Setif 1, 2018.*
- [19] Z. Larguet. *Analyse de quelque problème de contact avec frottement et adhésion, Université FARHAT ABBAS, Setif 1, 2008.*
- [20] I. Yahyeh Souleiman. *Analyse de quelque problème de contact glissant, Thèse de doctorat d'Université de Perpignan via Domitia, France, 2017.*
- [21] B. R. Ahlem, *Résultats de convergence pour les inéquations variationnelles et application en mécanique du contact [Math GM], Thèse de doctorat d'Université de Perpignan via Domitia, France, 2018.*
- [22] J. Nečas, I. Hlaváček. *Mathematical Theory of Elastic and Elastico-Plastic Bodies, An Introduction*, Elsevier Scientific Publishing Company, Amsterdam, Oxford, New York, (1981).
- [23] M. Shillor, M. Sofonea, J. Telega, *Models and Variational Analysis of Quasistatic Contact, Lecture Notes in Physics. 655 (2004)*, Springer, Berlin Heidelberg.
- [24] M. Sofonea *Problèmes Mathématiques en Élasticité et Viscoplasticité, Cours de D.E.A. de Mathématiques Appliquées. Université Blaise Pascal, Clermont-Ferrand (1991).*

Résumé : L'objet de ce mémoire porte sur une étude variationnelle d'un problème aux limites décrivant le contact avec frottement entre un corps déformable et deux fondations. Le mémoire est structuré en deux parties. La première partie est consacrée à rappeler le modèle mécanique de contact étudié ainsi que quelques outils mathématiques nécessaires dans le mémoire. La deuxième partie est destinée à l'étude d'un problème de contact élastique. Les lois de contact considérées sont la loi de contact avec compliance normale et contrainte unilatérale et la loi de contact avec contrainte unilatérale et seuil critique. Pour ce problème, nous avons obtenu un résultat d'existence et d'unicité d'une solution faible en utilisant des techniques d'analyse fonctionnelle et variationnelle. Enfin, nous étudions la dépendance continue de la solution avec les données initiales et nous prouvons des résultats de convergence.

Mots clé : loi de comportement élastique, frottement, compliance normale, contrainte unilatérale, inéquation quasivariationnelle, solution faible, résultats de convergence.

Abstract: The aim of this memory is a variational study of a boundary value problem which describe the frictional contact between a deformable and tow foundations. The memory is divided into parts. The first part is dedicated to recall a mechanical model of contact, as well as some necessary mathematical tools. The second part is destined to the study of a contact elastic problem. The contact conditions we consider are the normal compliance condition with unilateral constraint, the unilateral constraint condition with yield limit. For this problem we obtain an existence and uniqueness results of the weak solution by using the techniques of functional and variational analysis. Finally We also study the continuous dependence of the solution with respect to the data and prove convergence results.

Key words: elastic constitutive law, friction, normal compliance , unilateral constraint, quasivariational inequality, weak solution, convergence results.

ملخص: يهدف هذا العمل إلى دراسة تغيرية لمسألة لانهائية و التي تصف تماس مع احتكاك لجسم مرن قابل للتشوه مع قاعدتين. هذه الأطروحة مكونة من جزأين، الجزء الأول مخصص للتذكير بالنموذج الميكانيكي المدروس و كذلك بعض الوسائل الرياضية اللازمة، الجزء الثاني موجه لدراسة مسألة التماس المقترحة. في هذه المذكرة، شروط التماس المفروضة هي استجابة عادية مع قيد جانبي كذلك شرط قيد جانبي مع عتبة معيارية. لقد تحصلنا على نتائج وجود و وحدانية الحل الضعيف لهذه المسألة باستعمال التحليل الدالي و التغيري. أخيرا درسنا الاتصال المستمر بين الحل و معطيات المسألة و كذا أثبتنا نتائج التقارب.

الكلمات المفتاحية: قانون سلوك مرن، احتكاك، استجابة عادية، قيد جانبي ، متباينة شبه تغيرية، حل ضعيف، نتائج تقارب.