

N° d'ordre :

N° de série :



**République Algérienne Démocratique et Populaire**

**Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la  
Recherche Scientifique**

**UNIVERSITÉ HAMMA LAKHDAR D'EL OUED**

**FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES**

**Mémoire de fin d'étude**

**MASTER ACADEMIQUE**

Domaine: Mathématique et Informatique

Filière: Mathématique

Spécialité: Mathématique fondamentale

**Thème**

**Étude théorique de quelques  
problèmes en mécanique de contact**

**Présenté par:**

Fethiza Amara Meriem

Meneceur Maroua

**Sous la supervision de:**

**Mr. Azeb Ahmed Abdel Aziz**

Soutenu devant le jury composé de

|                       |  |           |                 |
|-----------------------|--|-----------|-----------------|
| HADJ AMMAR Tedjani    |  | Président | Univ. d'El-Oued |
| DOUIB Bachir          |  | Examineur | Univ. d'El-Oued |
| AZEB AHMED Abdel Aziz |  | Encadreur | Univ. d'El-Oued |

**Année universitaire: 2016 - 2017**

---

# Remerciement

*La louange est à Allah, qui nous a facilité l'accomplissement de ce travail de recherche chose ne peut être qu'avec la volonté de Dieu -à lui la toute puissance et la Majesté- et que la louange initiale et finale appartient à Allah, Seigneur des mondes.*

*Aussi, il nous fait plaisir que nous, au commencement de ce travail, présentons nos grands remerciements, estimations et reconnaissances à notre encadreur puissant ” **AZEB AHMED ABDELAZIZ** ” de nous avoir encourager moralement la durée de recherche et que ce travail est le fruit de ces encouragements*

*Nous présentons nos veridiques remerciements à toute personne, du proche ou du loin, qui nous a donné un coup de main, à fin de terminer ce travail de recherche.*

*Enfin, nous remercions vivement nos familles pour l'aide matérielle et morale durant la période de préparation.*

*”Que la Grace et la paix soient sur notre profet Mohammad ainsi que sur sa famille et ses compagnons”.*

# Table des matières

|                                                                                        |           |
|----------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>Introduction</b>                                                                    | <b>1</b>  |
| <b>Notations</b>                                                                       | <b>3</b>  |
| <b>1 Rappels de la mécanique de contact</b>                                            | <b>5</b>  |
| 1.1 Contraintes et déformations . . . . .                                              | 6         |
| 1.2 Lois de comportement . . . . .                                                     | 7         |
| 1.3 Condition aux limites . . . . .                                                    | 9         |
| <b>2 Outils Mathématiques</b>                                                          | <b>14</b> |
| 2.1 L'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ . . . . .                                        | 15        |
| 2.2 Espaces de fonctions à valeurs vectorielles . . . . .                              | 18        |
| 2.3 Eléments d'analyse non linéaire dans les espace de Hilbert . . . . .               | 20        |
| 2.3.1 La norme d'Espaces de Hilbert . . . . .                                          | 20        |
| 2.3.2 Opérateurs fortement monotones . . . . .                                         | 21        |
| 2.3.3 Equations et inéquations variationnelles d'évolution . . . . .                   | 24        |
| <b>3 Problème dynamique sans forttement avec compliance normale en viscoélasticité</b> | <b>25</b> |
| 3.1 Problème mécanique . . . . .                                                       | 25        |
| 3.2 Formulatuon variationnelle . . . . .                                               | 28        |
| 3.3 Existence et unicité de la solution . . . . .                                      | 31        |

|          |                                                                        |           |
|----------|------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>4</b> | <b>Problème quasistatique avec adhésion en électro-viscoélasticité</b> | <b>39</b> |
| 4.1      | Problème électro-mécanique . . . . .                                   | 40        |
| 4.2      | Formulation variationnelle . . . . .                                   | 44        |
| 4.3      | Existence et unicité de la solution . . . . .                          | 46        |
|          | <b>Conclusion</b>                                                      | <b>55</b> |
|          | <b>Bibliographie</b>                                                   | <b>56</b> |

# Introduction

Dans la plupart des systèmes de la mécanique des milieux continus, ils existent des situations dans les quelles un corps déformable entre en contact avec d'autre corps ou bien avec une fondation rigide ou déformable. La problématique du contact est essentiellement de savoir comment les forces sont appliquées sur une structure et comment réagissent ces structures lorsqu'elles subissent ces forces. La littérature concernant la mécanique de contact est vaste et aborde autant de sujets différents que sont la modélisation, l'analyse mathématique ou l'approximation numérique des problèmes de contact. Il existe ainsi de multiples références, citons ici quelques classiques. Une des premières références portant sur l'étude des problèmes de contact avec frottement via les inéquations variationnelles est sûrement [3]. Une autre excellente référence est [9]. Dans différents problèmes de contact provenant du secteur industriel, il y a besoin de prendre en considération l'endommagement interne du matériau causé par des contraintes mécaniques. On décrit l'évolution de l'endommagement par une inclusion différentielle du type parabolique comme dans [10, 9], et on note le champ d'endommagement ici par la variable interne  $\beta$  qui prend les valeurs entre zéro et un, lorsque  $\beta = 0$  le matériau est complètement endommagé, lorsque  $\beta = 1$  il n'y a pas d'endommagement et lorsque  $0 < \beta < 1$  il y a un endommagement partiel. Des modèles d'endommagement peuvent être trouvés dans [2, 11]. On peut trouver l'analyse mathématique des problèmes d'endommagement dans le cas unidimensionnel dans [10]. Un problème dynamique de contact avec endommagement et adhésion d'un matériau élasto-viscoplastique est déjà traité récemment dans [8]. F. Messelmi a étudié un problème dynamique de déplacement-traction et contact avec endommagement d'un matériau thermo-élasto-viscoplastique en présence de l'équation d'énergie, voir [14].

Dans ce travail, nous nous intéressons par l'étude deux problèmes de contact pour un matériau viscoélastique où électro-viscoélastique dans le processus dynamique, sous des hypothèses de petites déformations. Le contact est décrit à l'aide des conditions de contact de compliance normale sans frottement avec ou sans adhésion. On introduit dans la loi de comportement viscoélastique du corps une variable interne qui représente l'endommagement du matériau causé par la partie de viscosité. Ce mémoire est composé de quatre chapitres.

Dans le premier chapitre, le but est d'introduire les éléments nécessaires pour une bonne compréhension de la suite des objets traités. Nous commençons par décrire le champ des contraintes, les lois de comportement des différents matériaux, les conditions aux limites concernant le champ des déplacements.

Dans le deuxième chapitre, on étudie quelques préliminaires mathématiques qui seront utilisés partout dans ce mémoire. Nous commençons d'abord par les espaces de type Sobolev associés aux opérateurs divergence et déformation utilisés en mécanique, ainsi que leurs principales propriétés, notamment les théorèmes de trace. Nous rappelons ensuite les propriétés des espaces des fonctions à valeurs vectorielles. Enfin, nous passons en revue quelques résultats fondamentaux d'analyse fonctionnelle non linéaire dans les espaces de Hilbert et quelques résultats sur les opérateurs fortement monotones et de Lipschitz.

Dans le troisième chapitre, on étudie un problème dynamique avec compliance normal. Nous commençons d'abord par problème mécanique et formulation variationnelle, enfin on étudie l'existence et l'unicité de la solution.

Dans le quatrième chapitre, on étudie un problème quasistatique avec adhésion en électro-viscoélasticité. Nous commençons d'abord par un problème électro-mécanique et sa formulation variationnelle, enfin on étudie l'existence et unicité de la solution.

# Notations

Soit  $\Omega$  est un domaine de  $\mathbb{R}^d (d = 2, 3)$  on noté par

|                                     |                                                                                      |
|-------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|
| $\overline{\Omega}$                 | l'adhérence de $\Omega$ .                                                            |
| $\Gamma$                            | la frontière de $\Omega$ supposée régulière.                                         |
| $\Gamma_i (i = \overline{1, 3})$    | une partie mesurable de $\Gamma$ .                                                   |
| $mes \Gamma_1$                      | la mesure de Lebesgue $(d - 1)$ dimensionnelle de $\Gamma_1$ .                       |
| $\nu$                               | la normale unitaire sortante à $\Gamma$ .                                            |
| $v_\nu, v_\tau$                     | les composantes normales et tangentielles du champ vectoriel $v$ sur $\Omega$ .      |
| $C^1(\Omega)$                       | l'espace des fonctions réelles continuellement différentiables sur $\Omega$ .        |
| $H$                                 | l'espace $L^2(\Omega)^d$ .                                                           |
| $\mathcal{H}$                       | l'espace $L^2(\Omega)_s^{d \times d}$ .                                              |
| $H_1$                               | l'espace $H^1(\Omega)^d$ .                                                           |
| $\mathcal{H}_1$                     | l'espace $\{\sigma \in \mathcal{H}, Div \sigma = (\partial_j \sigma_{ij}) \in H\}$ . |
| $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$           | l'espace de sobolev d'ordre $\frac{1}{2}$ sur $\Gamma$ .                             |
| $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$          | l'espace dual de $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ .                                         |
| $\gamma : H_1 \rightarrow H_\Gamma$ | l'application trace pour les fonctions vectorielles.                                 |

Si  $X$  est un espace de Hilbert réel et  $d \in \mathbb{N}^*$ , on a les notations suivantes:

|                                              |                                                               |
|----------------------------------------------|---------------------------------------------------------------|
| $X^d$                                        | l'espace $\{x \in (x_i)   x_i \in X, i = \overline{1, d}\}$ . |
| $(\cdot, \cdot)_X$                           | produit scalaire sur $X$                                      |
| $\langle \cdot, \cdot \rangle_{X' \times X}$ | produit de dualité entre $X$ et $X'$                          |
| $ \cdot _X$                                  | la norme sur $X$                                              |
| $X'$                                         | l'espace dual de $X$                                          |

Si de plus  $(0, T)$  un intervalle de temps,  $k \in \mathbb{N}$  et  $1 \leq p \leq +\infty$ , on note par

|                                |                                                                                                          |
|--------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $C(0, T; X)$                   | l'espace des fonctions continues de $(0, T)$ dans $X$ .                                                  |
| $\ \cdot\ _{C(0, T; X)}$       | la norme de $C(0, T; X)$ .                                                                               |
| $C^1(0, T; X)$                 | l'espace des fonctions continûment dérivables sur $(0, T)$ dans $X$ .                                    |
| $\ \cdot\ _{C^1(0, T; X)}$     | la norme de $C^1(0, T; X)$ .                                                                             |
| $L^p(0, T; X)$                 | l'espace des fonctions mesurables sur $(0, T)$ dans $X$ telles que:<br>$\int_0^T  f(x) ^p dx < \infty$ . |
| $\ \cdot\ _{L^p(0, T; X)}$     | la norme de $L^p(0, T; X)$ .                                                                             |
| $W^{k,p}(0, T; X)$             | l'espace de Sobolev de paramètre $k$ et $p$ .                                                            |
| $\ \cdot\ _{W^{k,p}(0, T; X)}$ | la norme de $W^{k,p}(0, T; X)$ .                                                                         |

Autre notations:

|                |                                                                                                                           |
|----------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\mathbb{S}_d$ | espace des tenseurs d'ordre deux symétriques sur $\mathbb{R}^d$ c'est à dire $\mathbb{S}_d = \mathbb{R}_s^{d \times d}$ . |
| $c$            | une constante générique strictement positive.                                                                             |
| $p.p.$         | presque partout.                                                                                                          |
| $\Psi_K$       | fonction indicatrice de $K$ .                                                                                             |
| $\varphi_{,k}$ | la dérivée pour $x_k$ .                                                                                                   |



# Chapitre 1

## Rappels de la mécanique de contact

L'objectif des problèmes de contact, du point de vue mécanique, est d'étudier le nouvel état d'un corps matériel déformable, résultant de l'application des forces volumiques dans le domaine qu'occupe ce corps et des forces de traction sur une partie de la frontière de ce domaine dans un intervalle de temps donné.

Ce chapitre est consacré aux rappels de quelques notions de base de la mécanique des milieux continus tels que le tenseur des contraintes, le tenseur des déformations linéarisées. On y introduit quelques types des lois de comportement ( viscoélastique avec et sans endommagement et électro- viscoélastique ). On établit aussi les conditions aux limites de déplacement-traction, de contact avec compliance normale sans frottement et avec compliance normale et adhésion d'un corps déformable avec une base déformable, et les conditions aux limites électrique.

## 1.1 Contraintes et déformations

On considère un corps déformable occupant un domaine borné  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  ( $d = 2, 3$ ) et ayant une frontière  $\Gamma$  supposée assez régulière. L'objet du problème, du point de vue mécanique est l'étude dans un intervalle de temps  $(0, T)$  l'évolution du corps matériel due à l'application des forces extérieures sur l'intérieur (des forces de volumes et de surfaces) du corps et sur sa frontière. Cette évolution est décrite par l'équation

$$\text{Div} \sigma + f_0 = \rho \ddot{u} \quad \text{dans} \quad \Omega \times (0, T) \quad (1.1.1)$$

où les inconnues du problème sont le champ des déplacements  $u : \Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}^d$  et le champ des contraintes  $\sigma : \Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbb{S}_d$  où " $\ddot{u}$ " (respectivement  $\dot{u}$ ) représente la dérivée seconde du champ des déplacements par rapport au temps (respectivement la dérivée première) et  $\text{Div} \sigma$  est la divergence du champ des contraintes. La fonction qui désigne la densité de la masse  $\rho : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$  et la densité des forces volumiques  $f_0 : \Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}^+$  sont des données du problème.

Les processus d'évolution modélisées par l'équation (1.1.1) s'appellent processus dynamique. Dans certaines situation, l'équation (1.1.1) peut encore se simplifier. Par exemple dans le cas où  $\dot{u} = 0$ , il s'agit d'un problème d'équilibre (processus statique), ou bien dans le cas où le champ des vitesses  $\dot{u}$  varie très lentement par rapport au temps, c'est-à-dire que le terme peut être négligé (processus quasistatique). Dans ces deux cas l'équation de mouvement devient

$$\text{Div} \sigma + f_0 = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega \times (0, T) \quad (1.1.2)$$

Dans la suite, on va considérer des matériaux viscoélastique et électro-viscoélastiques dans le cadre des petites transformations. Dans ce cas, on a besoin du champ des déformations linéarisés  $\varepsilon : \Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbb{S}_d$  défini par

$$\varepsilon = (\varepsilon_{ij}), \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\partial_j u_i + \partial_i u_j) \quad \text{dans} \quad \Omega \times (0, T) \quad (1.1.3)$$

où  $\partial_k$  représente l'opérateur de dérivation partielle par rapport à la variable  $x_k$ .

Les équations précédentes sont insuffisantes à elles seules pour décrire les mouvements des milieux continus, elles doivent être complétées par d'autres relations caractérisant le comportement de chaque matériau ce sont les lois de comportements qui nous décrivons dans la sous-section suivante.

## 1.2 Lois de comportement

Les lois de comportement sont des relations entre le tenseur des contraintes et le tenseur des déformations et leurs dérivées. C'est toute série d'essais qu'il faut imaginer et réaliser pour établir une loi de comportement. Les expériences physiques pour les matériaux unidimensionnels constituent le point de départ dans l'établissement des lois de comportement. L'équation du mouvement (1.1.1) ou l'équation d'équilibre (1.1.2), chacune des deux équations équivalent à des relations scalaires, et du point de vue mathématique cette équation ne suffit pas à modéliser le problème d'équilibre du corps car, par exemple, les  $d$  composantes  $u_i$  du champ de déplacement ne figurent pas dans cette équation. Du point de vue physique, chacune des équations (1.1.1) et (1.1.2) exprime une loi universelle valable pour tous les matériaux. Si donc cette équation suffisait à déterminer tous les paramètres, cela signifierait que, soumis à des conditions identiques, les divers milieux continus auraient des comportements identiques. Ceci est naturellement absurde. Donc chaque équation (1.1.1) ou (1.1.2) est insuffisante, à elle seule, à décrire l'équilibre des corps matériels, elle doit être complétée par d'autres relations qui caractérisent le comportement de chaque type de matériau et que l'on désigne sous le vocable général la loi de comportement qui est une relation reliant le tenseur de contrainte, le tenseur de déformation et leurs dérivées. On présente dans cette mémoire, la loi de comportement de matériaux : viscoélastique.

### a) Loi de comportement des matériaux viscoélastiques

La loi de comportement est de la forme

$$\sigma = \mathcal{A}(\varepsilon(\dot{u})) + \mathcal{G}(\varepsilon(u)) \quad (1.2.1)$$

où  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{G}$  sont des fonctions constitutives généralement non linéaires.  $\mathcal{A}$  représente l'opérateur de viscosité et  $\mathcal{G}$  désigne l'opérateur d'élasticité. Pour un corps élastique lorsque  $\mathcal{A} = 0$ , la loi se réduit à

$$\sigma = \mathcal{G}(\varepsilon(u)).$$

Nous rappelons qu'en viscoélasticité linéaire, le tenseur de contraintes  $\sigma = (\sigma_{ij})$  est donné par

$$\sigma_{ij} = a_{ijkh}\varepsilon_{kh}(\dot{u}) + g_{ijkh}\varepsilon_{kh}(u) \quad (1.2.2)$$

$\mathcal{A} = (a_{ijkh})$  est le tenseur de viscosité et  $\mathcal{G} = (g_{ijkh})$  le tenseur d'élasticité, pour  $i, j, k, h = 1, \dots, d$ . La loi de comportement (1.2.1) est une loi viscoélastique du type Kelvin-Voigt. L'investigation des propriétés mécaniques des matériaux tels que les pâtes, les huiles et les cires, a mis en évidence que certains phénomènes, tels que le fluage et la relaxation, ne peuvent être décrits par les lois de comportement élastique. C'est pour cela que les lois viscoélastique ont été introduites. Elles décrivent le comportement des matériaux comme les métaux, les polymères, les caoutchoucs et les roches. Nous envisageons ici des matériaux qui ont des propriétés élastique, mais on même temps, les essais monotone indiquent que la courbe  $\sigma = \sigma(\varepsilon)$  dépend de  $\dot{\varepsilon} = \varepsilon(\dot{u})$ . Ces sont les matériaux viscoélastiques.

### b) Loi de comportement viscoélastique avec endommagement

Si nous prenons en considération l'effet de l'endommagement du matériau durant le contact, nous arrivons à une généralisation de la loi (1.2.1) qui est la loi de comportement viscoélastique avec endommagement ayant la forme

$$\sigma = \mathcal{A}(\varepsilon(\dot{u})) + \mathcal{G}(\varepsilon(u), \beta). \quad (1.2.3)$$

Notons que les valeurs de la fonction d'endommagement  $\beta$  sont comprises entre zéro et un. Lorsque  $\beta = 1$ , il n'y a pas d'endommagement dans le matériau, quand  $\beta = 0$ , le matériau est complètement endommagé, pour  $0 < \beta < 1$ , il y a un endommagement partiel et le système a une capacité de résistance réduite.

L'inclusion différentielle suivante sera utilisée pour décrire l'évolution du champ d'endommagement

$$\dot{\beta} - \kappa \Delta \beta + \partial \Psi_K(\beta) \ni \phi(\varepsilon(u), \beta).$$

L'ensemble des fonctions d'endommagement admissibles  $K$  défini par

$$K = \{\xi \in H^1(\Omega) \quad / \quad 0 \leq \xi \leq 1 \quad \text{dans } \Omega\},$$

$\kappa$  est un coefficient positive,  $\partial \Psi_K$  représente le sous-différentiel de la source d'endommagement dans le système.  $\phi$  est une fonction constitutive donnée qui représente la source de l'endommagement dans le système.

### c) Loi de comportement électro-viscoélastiques.

Un matériau est dit électro-viscoélastique si sa loi de comportement est de la forme

$$\begin{cases} \sigma = \mathcal{A}(\varepsilon(\dot{u})) + \mathcal{G}(\varepsilon(u)) - \mathcal{E}^* E(\varphi), \\ D = \mathcal{E} \varepsilon(u) + B E(\varphi) \end{cases} \quad (1.2.4)$$

dans la quelle interviennent l'opérateur de viscosité  $\mathcal{A} : \Omega \times \mathbb{S}_d \longrightarrow \mathbb{S}_d$ , l'opérateur d'élasticité  $\mathcal{G}$  non linéaires.

Nous rappelons qu'en viscoélasticité linéaire de type Kelvin-Voigt et en tenant compte de la dépendance du champ des contraintes avec le champ électrique, le tenseur des contraintes  $\sigma = (\sigma_{ij})$  est donné par :

$$\sigma_{ij} = a_{ijkh} \varepsilon_{kh}(\dot{u}) + g_{ijkh} \varepsilon_{kh}(u) + e_{ijk}^* \varphi_{,k}, \quad (1.2.5)$$

où  $\mathcal{A} = (a_{ijkh})$  est un tenseur d'ordre quatre, ses composantes  $a_{ijkh}$  s'appellent coefficients de viscosité,  $\mathcal{G} = (g_{ijkh})$  est un tenseur d'ordre quatre, ses composantes  $g_{ijkh}$  s'appellent coefficients d'élasticité,  $E(\varphi) = -\nabla \varphi$  est le champ électrique,  $\mathcal{E} = (e_{ijk})$  est le tenseur piézoélectrique qui traduit la proportionnalité entre la charge et déformation à champ constante ou nul et  $B = (B_{ij})$  est le tenseur diélectrique à déformation nulle qui constitue un tenseur symétrique défini positif. Par ailleurs  $\mathcal{E}^* = (e_{ijk}^*)$  où  $e_{ijk}^* = e_{kij}$ .

## 1.3 Condition aux limites

Nous considérons un corps matériel déformable qui occupe un domaine borné  $\Omega \subset \mathbb{R}^d (d = 2, 3)$  avec une frontière régulière  $\Gamma$ , partitionnée en trois parties mesurables  $\Gamma_1, \Gamma_2$  et  $\Gamma_3$ , correspondant aux conditions aux limites mécaniques, d'une part, et en deux parties mesurables  $\Gamma_a$  et  $\Gamma_b$ , correspondant aux conditions aux limites électriques, d'autre part, telles que  $mes \Gamma_1 > 0$ ,  $mes \Gamma_a > 0$  et  $\Gamma_3 \subseteq \Gamma_b$ .

Définissons maintenant les conditions aux limites sur chacune des trois parties de  $\Gamma$ .

### a) Les conditions aux limites de déplacement-traction

Le corps est encastré à la partie  $\Gamma_1 \times (0, T)$ , le champ des déplacements  $y$  est par conséquent nul

$$u = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_1 \times (0, T). \quad (1.3.1)$$

Une traction surfacique de densité  $f_2$  agit sur la partie  $\Gamma_2 \times (0, T)$ , et par conséquent le vecteur de contrainte de Cauchy  $\sigma\nu$  satisfait

$$\sigma\nu = f_2 \quad \text{sur} \quad \Gamma_2 \times (0, T). \quad (1.3.2)$$

Enfin, le corps est éventuellement en contact avec une fondation sur  $\Gamma_3 \times (0, T)$ . C'est ici que commence toute la richesse des problèmes et que réside notre intérêt, car les conditions sur la surface potentielle de contact  $\Gamma_3$  peuvent être diverses et donner ainsi lieu à une variété de modèles de contact avec ou sans frottement. Nous nous limitons à citer deux exemples de conditions aux limites.

**b) La condition de contact sans frottement avec compliance normale**

Nous rappelons la condition dite de compliance normale sur la surface potentielle de contact

$$\sigma_\nu = -p_\nu (u_\nu - g), \quad (1.3.3)$$

où  $u_\nu$  représente le déplacement normale,  $p_\nu$  est une fonction positive donnée, quand  $u_\nu > g$ , la différence  $u_\nu - g$  représente l'interpénétration des asoérités du corps ceux de la fonction. La fonction de compliance normale  $p_\nu$  satisfait  $p_\nu(r) = 0$  pour  $r \leq 0$ . Comme exemple

$$p_\nu(r) = c_\nu r_+, \quad (1.3.4)$$

où  $c_\nu$  est une constante positive et  $r_+ = \max\{0, r\}$ .

La condition de contact sans frottement est donnée par

$$\sigma_\tau = 0,$$

cette équation traduit le fait que les mouvements tangentiels sont libres, donc la force de frottement est nulle sur la surface de contact.

**c) Les conditions de contact avec compliance normale et adhésion.**

On va décrire les conditions de contact avec compliance normale et adhésion sur  $\Gamma_3 \times (0, T)$ , on introduit une variable interne d'état  $\alpha$  définie sur  $\Gamma_3 \times (0, T)$  qui représente l'intensité d'adhésion sur la surface de contact, telle que  $0 \leq \alpha \leq 1$ . Quand  $\alpha = 1$  l'adhésion est complète et tous les liens sont actifs, quand  $\alpha = 0$  tous les liens sont désactivés et il n'y a pas d'adhésion quand  $0 < \alpha < 1$  c'est le cas d'une adhésion partielle.

On suppose que la contrainte normale satisfait la condition de compliance normale avec adhésion

$$-\sigma_\nu = p_\nu(u_\nu) - \gamma_\nu \alpha^2 R_\nu(u_\nu) \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (1.3.5)$$

où  $\gamma_\nu$  est un coefficient positif,  $p_\nu : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$  est la fonction de compliance normale et  $R_\nu : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$  est l'opérateur de troncature donné par

$$R_\nu(s) = \begin{cases} L & \text{si } s < -L, \\ -s & \text{si } -L \leq s \leq 0, \\ 0 & \text{si } 0 < s. \end{cases} \quad (1.3.6)$$

Ici  $L > 0$  est la longueur caractéristique des liens.

Quand le champ d'adhésion  $\alpha$  est nul, (1.3.5) devient

$$-\sigma_\nu = p_\nu(u_\nu) \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (1.3.7)$$

qui représente la condition de compliance normale.

On suppose que la contrainte tangentielle satisfait la condition suivante

$$-\sigma_\tau = p_\tau(\alpha) R_\tau(u_\tau) \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (1.3.8)$$

où  $p_\tau : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$  est la fonction de contact tangentiel et  $R_\tau : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$  est l'opérateur de troncature donné par

$$R_\tau(v) = \begin{cases} v & \text{si } |v| \leq L, \\ L \frac{v}{|v|} & \text{si } |v| > L. \end{cases} \quad (1.3.9)$$

La diversité des matériaux a conduit les chercheurs à utiliser le collage des composites comme étant un moyen universel d'assemblage de matériaux de natures différentes. Pour modéliser les phénomènes d'adhésion, il est nécessaire d'ajouter le processus d'adhésion à la description du contact.

L'évolution du champ d'adhésion est décrite par une équation différentielle de la forme

$$\dot{\alpha} = -(\alpha[\gamma_\nu(R_\nu(u_\nu))^2 + \gamma_\tau |R_\tau(u_\tau)|^2] - \varepsilon_\alpha)_+ \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (1.3.10)$$

$$\alpha(0) = \alpha_0 \quad \text{sur } \Gamma_3, \quad (1.3.11)$$

où  $\gamma_\nu, \gamma_\tau$  et  $\varepsilon_\alpha$  sont les coefficients d'adhésion positifs et  $\alpha_0$  l'adhésion initiale tel que

$$0 \leq \alpha_0 \leq 1, \quad \text{p.p } x \in \Gamma_3. \quad (1.3.12)$$

**Remarque 1.3.1** *Nous remarquons que sous les trois conditions précédentes le champ d'adhésion vérifent la restriction  $0 \leq \alpha \leq 1$ . En effet, puisque  $\dot{\alpha} \leq 0$  donc  $\alpha \leq \alpha_0 \leq 1$ . En outre, si  $\alpha = 0$  quand  $t = t_0$  donc  $\dot{\alpha} = 0$  pour tout  $t \geq t_0$ , et d'où  $\alpha = 0$  pour tout  $t \geq t_0$ , p.p.  $x \in \Gamma_3$ . Alors, nous concluons que  $0 \leq \alpha \leq 1$  pour tout  $t \in (0, T)$  p.p.  $x \in \Gamma_3$ .*

**d) Les conditions aux limites électriques.**

On note par  $\nu$  la normale unitaire sortante à  $\Gamma$ . Le corps est encastré sur  $\Gamma_1$  dans une structure fixe. Sur  $\Gamma_2$  agissent des tractions surfaciques de densité  $f_2$  et dans  $\Omega$  agissent des forces volumiques de densité  $f_0$  et des charges électriques de densité volumiques  $q_0$ . On suppose que  $f_2$  et  $f_0$  varient très lentement par rapport au temps. Le corps est soumis à l'action de potentiel nul sur la partie  $\Gamma_a$  de la frontière ainsi qu'à l'action des charges électriques de densité surfacique  $q_2$ , agissant sur la partie  $\Gamma_b$ . Soit  $T > 0$  et soit  $(0, T)$  l'intervalle de temps en question. Le corps est en contact avec une fondation sur la partie  $\Gamma_3$ . Ces conditions aux limites électriques sont déterminées à partir des deux équations:

$$\varphi = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_a \times (0, T). \quad (1.3.13)$$

$$D.\nu = q_2 \quad \text{sur} \quad \Gamma_b \times (0, T). \quad (1.3.14)$$



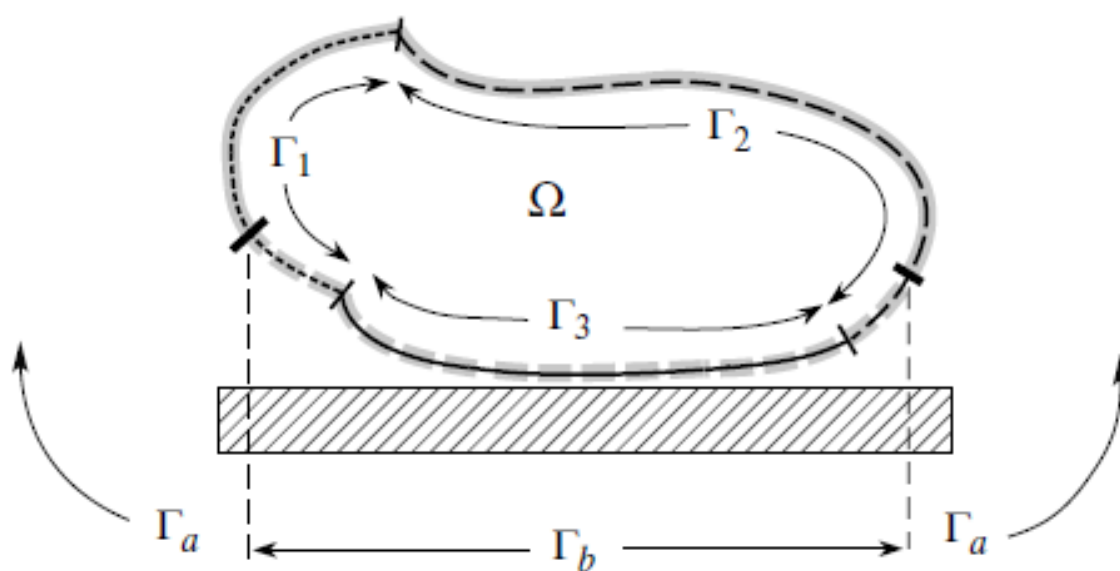


Fig. 1.1 - Cadre physique no. 1

# Chapitre 2

## Outils Mathématiques

Afin de faciliter la lecture de cette mémoire, il nous est paru nécessaire de présenter dans le deuxième chapitre quelques préliminaires mathématiques qui seront utilisés partout dans ce mémoire. Nous commençons d'abord par les espaces de type Sobolev associés aux opérateurs divergence et déformation utilisés en mécanique, ainsi que leurs principales propriétés, notamment les théorèmes de trace. Nous rappelons ensuite les propriétés des espaces des fonctions à valeurs vectorielles. Enfin, nous passons quelques résultats fondamentaux d'analyse fonctionnelle non linéaire dans les espaces de Hilbert, quelques résultats sur les opérateurs fortement monotones et de Lipschitz, les équations et les inéquations variationnelles d'évolution. Partout dans ce chapitre  $\Omega$  est un domaine borné et Lipschitzien de  $\mathbb{R}^d$  ( $d = 2, 3$ ), de frontière  $\Gamma$  représentable localement comme le graphe d'une fonction Lipschitzienne sur un ouvert de  $\mathbb{R}^3$ ,  $\Omega$  étant situé localement d'un seul côté de  $\Gamma$ .

## 2.1 L'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$

On commence par un bref rappel de quelques résultats sur l'espace de Sobolev  $H^1(\Omega)$  défini par

$$H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) \mid \partial_i u \in L^2(\Omega), i = 1, 2, 3\}.$$

On sait que  $H^1(\Omega)$  est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = (u, v)_{L^2(\Omega)} + (\partial_i u, \partial_i v)_{L^2(\Omega)}, \quad (2.1.1)$$

et la norme associée

$$|u|_{H^1(\Omega)} = \left( (u, u)_{H^1(\Omega)} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.1.2)$$

On a les résultats suivants :

$$C^1(\overline{\Omega}) \text{ est dense dans } H^1(\Omega). \quad [13] \quad (2.1.3)$$

On introduit des espaces du type Sobolev utilisés en mécanique du contact, à savoir les espaces de Hilbert associés aux opérateurs divergence et déformation, ainsi que les espaces de fonctions à valeurs vectorielles. On présente en plus leurs principales propriétés, notamment les théorèmes de trace. On adopte ici la convention de l'indice muet et on précise aussi que toutes les notations ainsi que les espaces fonctionnels utilisés dans ce mémoire sont introduits dans cette section.

### Espace de Hilbert aux opérateurs divergence et déformation

Nous désignons par  $\mathbb{S}_d$  l'espace des tenseurs symétriques d'ordre deux sur  $\mathbb{R}^d$  ( $d = 2, 3$ ), et  $|\cdot|$  et  $\cdot$  représentent respectivement le produit scalaire et la norme euclidienne sur  $\mathbb{R}^d$  et  $\mathbb{S}_d$ . Ainsi,

$$u \cdot v = u_i v_i, \quad |v| = (v \cdot v)^{\frac{1}{2}} \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^d, \quad (2.1.4)$$

$$\sigma \cdot \tau = \sigma_{ij} \tau_{ij}, \quad |\sigma| = (\sigma \cdot \sigma)^{\frac{1}{2}} \quad \forall \sigma, \tau \in \mathbb{S}^d. \quad (2.1.5)$$

Nous utilisons les espaces suivants:

$$\begin{aligned} H &= \{ u = (u_i) \mid u_i \in L^2(\Omega) \mid i = \overline{1, d} \} = L^2(\Omega)^d \\ \mathcal{H} &= \{ \sigma = (\sigma_{ij}) \mid \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \in L^2(\Omega) \mid i, j = \overline{1, d} \} = L^2(\Omega)_s^{d \times d} \\ H_1 &= \{ u = (u_i) \mid u_i \in H^1(\Omega) \mid i = \overline{1, d} \} = H^1(\Omega)^d \\ \mathcal{H}_1 &= \{ \sigma \in \mathcal{H} \mid \text{Div} \sigma \in H \}, \end{aligned}$$

où  $\varepsilon : H_1 \rightarrow \mathcal{H}$  et  $\text{Div} : \mathcal{H}_1 \rightarrow H$  sont les opérateurs de déformation et de divergence, définis par

$$\varepsilon(u) = (\varepsilon_{ij}(u)), \varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2}(\partial_j u_i + \partial_i u_j), \quad \text{Div} \sigma = (\partial_j \sigma_{ij}) \quad 1 \leq i, j \leq d, \quad (2.1.6)$$

Ces espaces respectifs sont des espaces de Hilbert réel munis de leurs produits scalaires suivants:

$$(u, v)_H = \int_{\Omega} u_i v_i dx \quad \forall u, v \in H \quad (2.1.7)$$

$$(\sigma, \tau)_{\mathcal{H}} = \int_{\Omega} \sigma_{ij} \tau_{ij} dx \quad \forall \sigma, \tau \in \mathcal{H} \quad (2.1.8)$$

$$(u, v)_{H_1} = (u, v)_H + (\varepsilon(u), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} \quad \forall u, v \in H_1 \quad (2.1.9)$$

$$(\sigma, \tau)_{\mathcal{H}_1} = (\sigma, \tau)_{\mathcal{H}} + (\text{Div} \sigma, \text{Div} \tau)_H \quad \forall \sigma, \tau \in \mathcal{H}_1. \quad (2.1.10)$$

Les normes sur les espaces  $H$ ,  $\mathcal{H}$ ,  $H_1$  et  $\mathcal{H}_1$  sont notées respectivement par  $|\cdot|_H$ ,  $|\cdot|_{\mathcal{H}}$ ,  $|\cdot|_{H_1}$  et  $|\cdot|_{\mathcal{H}_1}$ .

Comme la frontière  $\Gamma$  est Lipschitzienne, le vecteur normal extérieur  $\nu$  à la frontière est défini *p.p.* Pour tout champ de vecteurs  $u \in H_1$  nous utilisons la notation  $u$  pour désigner la trace  $\gamma_u$  de  $u$  sur  $\Gamma$  et nous notons par  $u_\nu$  et  $u_\tau$  les composantes normale et tangentielle de  $u$  sur la frontière données par

$$u_\nu = u \cdot \nu, \quad u_\tau = u - u_\nu \nu. \quad (2.1.11)$$

Pour le champ des contraintes  $\sigma$  nous notons par  $\sigma_\nu$  et  $\sigma_\tau$  les composantes normale et tangentielle à la frontière et pour tout  $\sigma \in \mathcal{H}_1$ , il existe un élément noté  $\sigma\nu \in H'_\Gamma$  à savoir :

$$\sigma_\nu = (\sigma\nu) \cdot \nu, \quad \sigma_\tau = \sigma\nu - \sigma_\nu \nu. \quad (2.1.12)$$

Nous rappelons que l'application de trace  $\gamma : H_1 \rightarrow H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^d$  est linéaire continue, mais n'est pas surjective. L'image de  $H_1$  par cette application est notée par  $H_\Gamma$ , ce sous-espace s'injecte continûment dans  $L^2(\Gamma)^d$ . Désignons par  $H'_\Gamma$  le dual  $H_\Gamma$ , et  $(\cdot, \cdot)_{H'_\Gamma \times H_\Gamma}$  le produit de dualité entre  $H'_\Gamma$  et  $H_\Gamma$ .

On a :

$$(\sigma\nu, \gamma v)_{H'_\Gamma \times H_\Gamma} = (\sigma, \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + (\text{Div } \sigma, v)_H \quad \forall v \in H_1. \quad (2.1.13)$$

En outre, si  $\sigma$  est assez régulier (par exemple  $C^1$ ), nous avons la formule

$$(\sigma\nu, \gamma v) = \int_\Gamma \sigma\nu \cdot \nu da \quad \forall v \in H_1. \quad (2.1.14)$$

Donc, si  $\sigma$  est assez régulier nous avons la formule de Green suivante:

$$(\sigma, \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + (\text{Div } \sigma, v)_H = \int_\Gamma \sigma\nu \cdot \nu da \quad \forall v \in H_1. \quad (2.1.15)$$

Nous introduisons à présent un sous espace fermé de  $H_1$ , dont la définition est donnée ci-après

$$V = \{v \in H_1 / v = 0 \text{ sur } \Gamma_1\}, \quad (2.1.16)$$

puisque  $\text{mes } \Gamma_1 > 0$ , l'inégalité de Korn ([5] p. 79) s'applique sur  $V$  : il existe une constante  $C_k > 0$  dépendant uniquement de  $\Omega$  et  $\Gamma_1$  telle que

$$|\varepsilon(v)|_{\mathcal{H}} \geq C_k |v|_{H_1} \quad \forall v \in V, \quad (2.1.17)$$

sur  $V$  nous considérons le produit scalaire donnée par

$$(u, v)_V = (\varepsilon(u), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} \quad \forall u, v \in V, \quad (2.1.18)$$

et soit  $|\cdot|_V$  la norme associée, c'est à dire

$$|v|_V = |\varepsilon(v)|_{\mathcal{H}} \quad \forall v \in V, \quad (2.1.19)$$

par l'ingalité de Korn, il vient que  $|\cdot|_{H_1}$  et  $|\cdot|_V$  sont des normes équivalentes sur  $V$  et ainsi  $(V, |\cdot|_V)$  est un espace de Hilbert.

En outre, par le théorème de trace de Sobolev, il existe une constante  $C_0 > 0$  dépendant uniquement de  $\Omega$ ,  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  telle que

$$|v|_{L^2(\Gamma_3)^d} \leq C_0 |v|_V \quad \forall v \in V. \quad (2.1.20)$$

On introduit également les espaces suivants :

$$\begin{aligned} W &= \{\phi \in H^1(\Omega) \mid \phi = 0 \text{ sur } \Gamma_a\}, \\ \mathcal{W} &= \{D = (D_i) \mid D_i \in L^2(\Omega)^d, \operatorname{Div} D \in L^2(\Omega)\}, \end{aligned}$$

où  $\operatorname{div} D = (D_{i,i})$ , ces espaces sont des espaces de Hilbert réels munis des produits scalaires donnés par

$$(\varphi, \phi)_W = (\nabla \varphi, \nabla \phi)_H, \quad (D, E)_\mathcal{W} = (D, E)_H + (\operatorname{div} D, \operatorname{div} E)_{L^2(\Omega)}, \quad (2.1.21)$$

soient  $|\cdot|_W$  et  $|\cdot|_\mathcal{W}$  les normes associées :

$$|\phi|_W = |\nabla \phi|_H, \quad |D|_\mathcal{W}^2 = |D|_H^2 + |\operatorname{div} D|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (2.1.22)$$

Puisque  $\operatorname{mes} \Gamma_a > 0$ , l'inégalité de Friedrichs-Poincaré est vérifiée ainsi il existe une constante  $c > 0$  dépendant uniquement de  $\Omega$  et  $\Gamma_a$  telle que

$$|\nabla \phi|_H \geq c |\phi|_{H^1(\Omega)} \quad \forall \phi \in W \quad (2.1.23)$$

## 2.2 Espaces de fonctions à valeurs vectorielles

Soit  $X$  un espace de Hilbert. Soient  $k \in \mathbb{N}$  et  $1 \leq p \leq +\infty$  et  $T > 0$ . On rappelle que  $W^{k,p}(0, T; X)$  est l'espace des distributions vectorielles  $u \in D'(0, T; X)$  telle que

$D_j u \in L^p(0, T; X)$  pour  $j = \overline{0, k}$ ,  $D_j$  désignant la dérivée d'ordre  $j$  au sens des distribution.

Si  $1 \leq p \leq +\infty$ ,  $W^{k,p}(0, T; X)$  est un espace de Banach réel pour la norme définie par:

$$|u|_{W^{k,p}(0,T;X)} = \left( \sum_{j=0}^k \int_0^T |D_j u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \quad \forall u \in W^{k,p}(0, T; X). \quad (2.2.1)$$

En particulier,  $W^{k,2}(0, T; X)$  est un espace de Hilbert réel pour le produit scalaire défini par

$$\begin{aligned} (u, v)_{W^{k,2}(0,T;X)} &= \sum_{j=0}^k \int_0^T (D_j u(t), D_j v(t))_X dt \\ \forall u, v &\in W^{k,2}(0, T; X). \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

D'autre part,  $W^{k,\infty}(0, T; X)$  est un espace de Banach pour la norme définie par

$$\begin{aligned} |u|_{W^{k,\infty}(0,T;X)} &= \sum_{j=0}^k \sup_{(0,T)} \operatorname{ess} |D_j(u(t))|_X \\ \forall u &\in W^{k,\infty}(0, T; X). \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

tel que  $\sup_{(0,T)} \text{ess}|f(x)| = \inf\{M > 0 : |f(x)| \leq M \text{ p.p. } (0, T)\}.$

Pour le cas particulier  $k = 0$ , on remarque que

$$W^{0,p}(0, T; X) = L^p(0, T; X), \quad (2.2.4)$$

et on note alors la norme  $L^p(0, T; X)$  par  $|\cdot|_{L^p(0,T;X)}$  pour tout  $1 \leq p \leq +\infty$ . On définit aussi, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , l'espace  $C^k(0, T; X)$  des fonctions  $u : (0, T) \rightarrow X$  telles que pour tout  $j = \overline{0, k}$  les dérivées  $\frac{d^j u}{dt^j}$  existent et sont continues sur  $(0, T)$ . On note, en particulier,  $C^0(0, T; X)$  par  $C(0, T; X)$ . L'espace  $C^k(0, T; X)$  est un espace de Banach pour la norme définie par

$$|u|_{C^k(0,T;X)} = \sum_{j=0}^k \max_{t \in (0,T)} \left| \frac{d^j u}{dt^j}(t) \right|_X, \quad \forall u \in C^k(0, T; X). \quad (2.2.5)$$

En particulier, les normes sur les espaces  $C(0, T; X)$  et  $C^1(0, T; X)$  sont données par

$$|u|_{C(0,T;X)} = \max_{t \in (0,T)} |u(t)|_X, \quad \forall u \in C(0, T; X), \quad (2.2.6)$$

$$|u|_{C^1(0,T;X)} = \max_{t \in (0,T)} |u(t)|_X + \max_{t \in (0,T)} |\dot{u}|_X, \quad \forall u \in C^1(0, T; X)$$

On précise que le point au dessus d'une expression désigne la dérivée de cette expression par rapport au temps, représentée par la variable  $t \in (0, T)$ .

### Lemme de Gronwall

Nous rappelons ici le lemme du type Gronwall qui intervient dans de nombreux problèmes de contact, en particulier pour établir l'unicité de la solution.

**Lemme 2.2.1 .** Soient  $m, n \in C(0, T; \mathbb{R})$  telles que  $m(t) \geq 0$  et  $n(t) \geq 0$  pour tout  $t \in (0, T)$ ,  $a \geq 0$  une constante et  $\phi \in C(0, T; \mathbb{R})$

(1) Si

$$\phi(t) \leq a + \int_0^t m(s) ds + \int_0^t n(s) \phi(s) ds \quad \forall t \in (0, T),$$

alors

$$\phi(t) \leq \left( a + \int_0^t m(s) ds \right) \exp \left( \int_0^t n(s) ds \right) \quad \forall t \in (0, T).$$

(2) Si

$$\phi(t) \leq m(t) + a \int_0^t \phi(s) ds \quad \forall t \in (0, T),$$

alors

$$\int_0^t \phi(s) ds \leq e^{at} \int_0^t m(s) ds \quad \forall t \in (0, T).$$

Dans le cas particulier  $a = 0, n = 1$ , la partie (1) de ce lemme devient.

**Corollaire 2.2.1** . Soit  $m \in C(0, T; \mathbb{R})$  telle que  $m \geq 0$  pour tout  $t \in (0, T)$ .

Si  $\phi \in C(0, T; \mathbb{R})$  est une fonction telle que

$$\phi(t) \leq \int_0^t m(s) ds + \int_0^t \phi(s) ds \quad \forall t \in (0, T),$$

alors, il existe  $c > 0$  tel que

$$\phi(t) \leq c \int_0^t m(s) ds \quad \forall t \in (0, T).$$

## 2.3 Eléments d'analyse non linéaire dans les espace de Hilbert

Dans ce paragraphe, nous rappelons quelques éléments d'analyse non linéaire dans les espaces de Hilbert et quelques résultats concernant les équations les inéquations variationnelles d'évolution qui interviennent dans l'étude des problèmes mécaniques.

### 2.3.1 La norme d'Espaces de Hilbert

Soit  $X$  un espace de Hilbert et  $(\cdot, \cdot)_X$  un produit scalaire sur  $X$  c'est-à-dire  $(\cdot, \cdot)_X : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  est une application bilinéaire symétrique et définie positive. On note par  $|\cdot|_X$  l'application de  $X$  dans  $\mathbb{R}_+$  définie par

$$|u|_X = (u, u)_X^{\frac{1}{2}}, \tag{2.3.1}$$

et on rappelle que  $|\cdot|_X$  est une norme sur  $X$  qui vérifie l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$|(u, v)_X| \leq |u|_X |v|_X \quad \forall u, v \in X. \tag{2.3.2}$$

On dit que  $X$  est un espace de Hilbert si  $X$  est complet pour la norme définie par (2.3.4).

Dans toute la suite on va supposer que  $X$  est un espace de Hilbert.



Soit  $X'$  le dual de  $X$  c'est-à-dire l'espace des fonctionnelles linéaires et continues sur  $X$  muni de la norme

$$|\varphi|_{X'} = \sup_{\substack{v \in X \\ v \neq 0_X}} \frac{|\langle \varphi, v \rangle_{X' \times H}|}{|v|_X}, \quad (2.3.3)$$

où  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{X' \times X}$  représente la produite de dualité entre  $X'$  et  $X$ .

### 2.3.2 Opérateurs fortement monotones

Nous commençons ici par un bref rappel sur les opérateurs fortement monotones et de Lipschitz. Pour cela, on considère un espace de Helbert  $X$  munit du produit scalaire  $(\cdot, \cdot)_X$  et de la norme associée  $|\cdot|_X$ . Soit  $A : X \rightarrow X$  un operateur non linéaire.

**Définition 2.3.1** . *L'opérateur  $A$  est dit:*

monotone si

$$(Au - Av, u - v)_X \geq 0 \quad \forall u, v \in X, \quad (2.3.4)$$

fortement monotone s'il existe  $m > 0$  tel que

$$(Au - Av, u - v)_X \geq m |u - v|_X^2 \quad \forall u, v \in X, \quad (2.3.5)$$

de Lipschitz s'il existe  $M > 0$  tel que

$$|Au - Av|_X \leq M |u - v|_X \quad \forall u, v \in X. \quad (2.3.6)$$

**Théorème 2.3.1** . (*Théorème du point fixe*) Soit  $X$  un espace de Banach,  $A : X \rightarrow X$  un opérateur satisfait (2.3.6) avec  $0 < M < 1$ . L'opérateur  $A$  admet un point fixe unique  $x \in X$ , c'est-à-dire  $Ax = x$  et nous appelons  $A$  un opérateur contractant.

**Proposition 2.3.1** Soit  $A : X \rightarrow X$  un opérateur fortement monotone et de Lipschitz.

Alors pour tout  $f \in X$  il existe un élément unique  $u \in X$  tel que  $Au = f$ .

Le résultat précédent est un cas praticulier du théorème de Minty-Browder.[3]

**Définition 2.3.2** Soit  $A : X \rightarrow X'$  un opérateur défini sur  $X$ . L'opérateur  $A$  est dit:

monotone si

$$\langle Au - Av, u - v \rangle_{X \times X'} \geq 0 \quad \forall u, v \in X, \quad (2.3.7)$$

hémicontinu si

$$\forall u, v \in X, \text{ l'application } t \rightarrow A(u + tv) : \mathbb{R} \rightarrow X' \text{ est continue.} \quad (2.3.8)$$

**Définition 2.3.3** Une forme bilinéaire  $a : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  est continue s'il existe un réel  $M > 0$  tel que

$$|a(u, v)| \leq M |u|_X |v|_X \quad \forall u, v \in X. \quad (2.3.9)$$

**Définition 2.3.4** Une forme bilinéaire  $a : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  est dite coercive s'il existe une constante  $m > 0$  telle que

$$a(u, u) \geq m |u|_X^2 \quad \forall u \in X. \quad (2.3.10)$$

**Théorème 2.3.2 .(Théorème de Lax-Milgram).** Soit  $X$  un espace de Hilbert,  $a : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  une forme bilinéaire continue et coercive. Soit  $l : X \rightarrow \mathbb{R}$  une forme linéaire continue.

Alors, il existe une solution unique  $u \in X$  qui satisfait

$$a(u, v) = l(v) \quad \forall v \in X. \quad (2.3.11)$$

### Sous différentiabilité

Nous considérons dans tout ce paragraphe que  $X$  est un espace de Hilbert et  $K$  un sous-ensemble de l'espace  $X$ .

**Définition 2.3.5** . On appelle fonction indicatrice de  $K$ , la fonction  $\Psi_K$  définie par

$$\Psi_K(u) = \begin{cases} 0 & \text{si } u \in K \\ +\infty & \text{si } u \notin K \end{cases} \quad (2.3.12)$$

**Définition 2.3.6** Soit une fonction  $j : X \rightarrow \mathbb{R}$  et  $u$  un élément de l'espace  $X$  tel que  $j(u) = \pm\infty$ . Le sous-différentiel de la fonction  $j$  en  $u$ , noté  $\partial_j(u)$  est l'ensemble défini par

$$\partial_j(u) = \{u' \in X' \mid j(v) \geq j(u) + (u', v - u) \quad \forall v \in X\}. \quad (2.3.13)$$

Le crochet  $(\cdot, \cdot)$  désignant la dualité entre  $X$  et  $X'$ .

Tout élément  $u'$  de l'ensemble  $\partial_j(u)$  est appelé sous-gradient de la fonction  $j$  en  $u$ . La fonction  $j$  est dite sous-différentiable en  $u$  si  $\partial_j(u) \neq \emptyset$ . Elle est dite sous-différentiable si elle l'est en tout point  $u$  de l'espace  $X$ .

Nous pouvons caractériser le sous-différentiel  $\partial\Psi_K$  d'une fonction indicatrice  $\Psi_K$  d'un ensemble convexe non vide

$$\partial\Psi_K(u) = \{u' \in X \mid (u', v - u) \leq 0 \quad \forall v \in K\}. \quad (2.3.14)$$

**Théorème 2.3.3 (Cauchy -Lipschitz)** Soit  $(X, |\cdot|_X)$  un espace de Banach réel et soit  $F(t, \cdot) : X \rightarrow X$  un opérateur défini p.p. sur  $(0, T)$ , qui satisfait les propriétés suivantes:

$$\begin{cases} \text{il existe } L_F > 0 \text{ tel que} \\ |F(t, x_1) - F(t, x_2)|_X \leq L_F |x_1 - x_2| \quad \forall x_1, x_2 \in X, p.p. t \in (0, T) \end{cases} \quad (2.3.15)$$

il existe  $1 \leq p \leq +\infty$  tel que  $F(\cdot, x) \in L^p(0, T; X)$ ,  $\forall x \in X$ .

Alors pour tout  $x_0 \in X$ , il existe une fonction unique  $x \in W^{1,p}(0, T; X)$  vérifie

$$\dot{x}(t) = F(t, x(t)) \quad p.p. t \in (0, T), \quad (2.3.16)$$

$$x(0) = x_0. \quad (2.3.17)$$

Pour des détails sur ce Théorème on peut envoyer le lecteur par exemple à ([14], p. 60).

Maintenant nous considérons  $V$  et  $H$  deux espaces de Hilbert réels tels que l'application d'inclusion de  $(V, |\cdot|_V)$  dans  $(H, |\cdot|_H)$  est continue et dense. Identifiant le dual de  $H$  avec lui-même, c'est-à-dire nous pouvons écrire le triplet de Gelfand  $V \subset H \subset V'$ . Les notations  $|\cdot|_V, |\cdot|_{V'}$  et  $(\cdot, \cdot)_{V' \times V}$  représentent les normes sur  $V, V'$  et le produit de dualité entre  $V'$  et  $V$  respectivement.

### 2.3.3 Equations et inéquations variationnelles d'évolution

Nous allons rappeler dans ce paragraphe deux résultats sur les équations d'évolution et un résultat sur les equations et les inéquations variationnelles d'évolution.

**Théorème 2.3.4** *Soit  $V, H$  satisfaisant les hypothèses décrites ci-dessus et soit  $A : V \rightarrow V'$  un opérateur hémicontinu et monotone qui satisfait*

$$\exists \lambda > 0 \text{ et } \exists \alpha \in \mathbb{R}, \quad \langle Av, v \rangle_{V' \times V} \geq \lambda |v|_V^2 + \alpha \quad \forall v \in V, \quad (2.3.18)$$

$$\exists c > 0, \quad |Av|_{V'} \leq c(|v|_V + 1) \quad \forall v \in V. \quad (2.3.19)$$

Alors, pour tout  $u_0 \in H$  et  $f \in L^2(0, T; V')$ , il existe une fonction unique  $u$  qui satisfait

$$u \in L^2(0, T; V) \cap C(0, T; H), \quad \dot{u} \in L^2(0, T; V'), \quad (2.3.20)$$

$$\dot{u}(t) + Au(t) = f(t) \text{ p.p.t } \in (0, T), \quad (2.3.21)$$

$$u(0) = u_0. \quad (2.3.22)$$

**Théorème 2.3.5** . *Soit  $V \subset H \subset V'$  un triple de Gelfand,  $K$  un sous-ensemble fermé non vide et convexe de  $V$ , et soit  $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  une forme bilinéaire symétrique et continue qui satisfait*

$$\exists c_1 > 0, c_0 \in \mathbb{R} \quad a(v, v) + c_0 |v|_H^2 \geq c_1 |v|_V^2 \quad \forall v \in V. \quad (2.3.23)$$

Alors, pour tout  $u_0 \in K$  et  $f \in L^2(0, T; H)$ , il existe une unique fonction  $u$  qui satisfait

$$u \in H^1(0, T; H) \cap L^2(0, T; V), \quad (2.3.24)$$

$$u(t) \in K \quad \forall t \in (0, T), \quad (2.3.25)$$

$$\langle \dot{u}(t), v - u(t) \rangle_{V' \times V} + a(u(t), v - u(t)) \geq (f(t), v - u(t))_H \quad (2.3.26)$$

pour tout  $v \in K$ , p.p.t  $\in (0, T)$

$$u(0) = u_0. \quad (2.3.27)$$

# Chapitre 3

## Problème dynamique sans frottement avec compliance normale en viscoélasticité

On considère un problème de contact sans frottement avec compliance normale. Ce chapitre est divisé en trois sections. Dans la première section, nous présentons le problème mécanique, puis nous indiquons les hypothèses sur les données. Dans la deuxième section, nous décrivons la formulation variationnelle du problème mécanique. Notre intérêt principale dans la troisième section est d'obtenir un résultat d'existence et d'unicité pour le problème variationnel.

### 3.1 Problème mécanique

**Problème  $P^1$ :** Trouver le champ de déplacement  $u : \Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}^d$ , le champ des contraintes  $\sigma : \Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbb{S}_d$  et le champ d'endommagement  $\beta : \Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$  tels que

$$\rho \ddot{u} = \operatorname{Div} \sigma + f_0 \quad \text{dans } \Omega \times (0, T) \quad (3.1.1)$$

$$\sigma = \mathcal{A}(\varepsilon(\dot{u})) + \mathcal{G}(\varepsilon(u), \beta) \quad \text{dans } \Omega \times (0, T) \quad (3.1.2)$$

$$\dot{\beta} - \kappa \triangle \beta + \partial \Psi_k(\beta) \ni \phi(\varepsilon(u), \beta) \quad \text{dans } \Omega \times (0, T) \quad (3.1.3)$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial \nu} = 0 \quad \text{sur } \Gamma \times (0, T) \quad (3.1.4)$$

$$u = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1 \times (0, T) \quad (3.1.5)$$

$$\sigma \nu = f_2 \quad \text{sur } \Gamma_2 \times (0, T) \quad (3.1.6)$$

$$-\sigma_\nu = p_\nu (u_\nu - g) \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T) \quad (3.1.7)$$

$$\sigma_\tau = 0 \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T) \quad (3.1.8)$$

$$u(0) = u_0, \quad \dot{u}(0) = v_0, \quad \beta(0) = \beta_0 \quad \text{dans } \Omega \quad (3.1.9)$$

L'équation (3.1.2) représente la loi de comportement. L'évolution du champ d'endommagement est modélisée par l'inclusion du type parabolique donnée par la relation (3.1.3) où  $\phi$  est la fonction source de l'endommagement. L'équation (3.1.1) représente l'équation du mouvement, tandis que les conditions (3.1.5) et (3.1.6) sont respectivement les conditions aux limites de déplacement et traction, la relation (3.1.4) représente la condition de Newmann, où  $\frac{\partial \beta}{\partial \nu}$  représente la dérivé normal de  $\beta$ .

Nous passons maintenant obtenir une formulation variationnelle du problème  $P^1$ . Dans ce but, nous introduisons la notation et les hypothèses supplémentaires sur les données du problème.

Pour l'étude du problème (3.1.1) – (3.1.9), on suppose que l'opérateur de la viscosité  $\mathcal{A} : \Omega \times \mathbb{S}_d \rightarrow \mathbb{S}_d$  satisfait:

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \quad \text{il existe une constante } M_1^{\mathcal{A}}, M_2^{\mathcal{A}} > 0 \text{ tels que} \\ \quad \|\mathcal{A}(x, \varepsilon)\| \leq M_1^{\mathcal{A}} \|\varepsilon\| + M_2^{\mathcal{A}} \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{S}_d, \quad p.p \ x \in \Omega. \\ (b) \quad \text{il existe une constante } m_{\mathcal{A}} > 0 \text{ tel que} \\ \quad (\mathcal{A}(x, \xi_1) - \mathcal{A}(x, \xi_2)) \cdot (\xi_1 - \xi_2) \geq m_{\mathcal{A}} \|\xi_1 - \xi_2\|^2, \\ \quad \quad \forall \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{S}_d, \quad p.p \ x \in \Omega. \\ (c) \quad \text{l'application } x \mapsto \mathcal{A}(x, \xi) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Omega, \quad \forall \xi \in \mathbb{S}_d. \\ (d) \quad \text{l'application } x \mapsto \mathcal{A}(x, 0) \in \mathcal{H}. \end{array} \right. \quad (3.1.10)$$

L'opérateur d'élasticité  $\mathcal{G} : \Omega \times \mathbb{S}_d \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}_d$  satisfait

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \text{ il existe une constante } M_G > 0 \text{ tel que} \\ \|\mathcal{G}(x, \xi_1, \beta_1) - \mathcal{G}(x, \xi_2, \beta_2)\| \leq M_G (\|\xi_1 - \xi_2\| + \|\beta_1 - \beta_2\|) \\ \quad \forall \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{S}_d, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}, \text{ p.p } x \in \Omega. \\ (b) \text{ l'application } x \mapsto \mathcal{G}(x, \xi, \beta) \text{ est Lebesgue} \\ \text{mesurable sur } \Omega, \quad \forall \xi \in \mathbb{S}_d, \beta \in \mathbb{R}. \\ (c) \text{ l'application } x \mapsto \mathcal{G}(x, 0, 0) \in \mathcal{H}. \end{array} \right. \quad (3.1.11)$$

La fonction source d'endommagement  $\phi : \Omega \times \mathbb{S}_d \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  satisfait

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \text{ il existe } L_\phi > 0 \text{ tel que} \\ |\phi(x, \varepsilon_1, \beta_1) - \phi(x, \varepsilon_2, \beta_2)| \leq L_\phi (|\varepsilon_1 - \varepsilon_2| + |\beta_1 - \beta_2|) \\ \quad \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{S}_d, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}, \text{ p.p } x \in \Omega. \\ (b) \text{ L'application } x \mapsto \phi(x, \varepsilon, \beta) \text{ est Lebesgue} \\ \text{mesurable sur } \Omega, \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{S}_d, \beta \in k. \\ (c) \text{ l'application } x \mapsto \phi(x, 0, 0) \in \mathcal{H}. \end{array} \right. \quad (3.1.12)$$

La fonction de compliance normale  $p_v : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$  vérifiée

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \text{ il existe } L_v > 0 \text{ tel que} \\ |p_v(x, r_1) - p_v(x, r_2)| \leq L_v |r_1 - r_2| \\ \quad \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}, \text{ p.p } x \in \Gamma_3. \\ (b) \text{ L'application } x \mapsto p_v(x, r) \\ \text{est Lebesgue mesurable sur } \Gamma_3, \quad \forall r \in \mathbb{R}. \\ (c) \text{ L'application } x \mapsto p_v(x, r) = 0 \\ \text{pour tous } r \leq 0. \end{array} \right. \quad (3.1.13)$$

Nous supposons que la masse volumique, les forces volumiques et surfaciques satisfont

$$\rho \in L^\infty(\Omega), \quad \exists \rho_* > 0, \text{ tel que } \rho(x) \geq \rho_* \quad \text{p.p } x \in \Omega, \quad (3.1.14)$$

$$f_0 \in L^2(0, T; H), \quad f_2 \in L^2\left(0, T; [L^2(\Gamma_2)]^d\right). \quad (3.1.15)$$

Les données initiales satisfont les conditions suivantes :

$$u_0 \in V, \quad v_0 \in H, \quad \beta_0 \in K. \quad (3.1.16)$$

Dans ce qui suit, nous utilisons un nouveau produit scalaire dans l'espace intérieur  $H$ ,

$$((u, v))_H = (\rho u, v)_H \quad \forall u, v \in H, \quad (3.1.17)$$

et soit la norme associée  $|||v|||_H = ((v, v))_H^{\frac{1}{2}}$ . D'après hypothèse (3.1.14) les deux normes  $||| \cdot |||_H$  et  $\| \cdot \|_H$  sont equivalence sur  $H$ . De plus, l'inclusion de  $(V, \| \cdot \|_H)$  en  $(H, ||| \cdot |||_H)$  est continue et compacte. Soit  $(V', \| \cdot \|_V)$  l'espace dual de  $V$ . Identifier  $H$  avec son espace dual, on peut écrire

$$V \subset H = H' \subset V'.$$

Nous utilisons la notation  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{V' \times V}$  pour représenter le produit de dualité entre  $V'$  et  $V$ . On a

$$\langle u, v \rangle_{V' \times V} = ((u, v))_H \quad \forall u \in H, v \in V. \quad (3.1.18)$$

Ensuite, on définit la fonction  $f : (0, T) \rightarrow V'$ , la fonction de frottement  $j : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  et la forme bilinéaire  $a : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  comme suit:

$$\langle f(t), v \rangle_{V' \times V} = (f_0(t), v)_H + (f_2(t), v)_{[L^2(\Gamma_2)]^d} \quad \forall v \in V, t \in (0, T), \quad (3.1.19)$$

$$j(u, v) = \int_{\Gamma_3} p_v(u_v - g)v_v da \quad \forall u, v \in V, \quad (3.1.20)$$

$$a(\xi, \varphi) = \kappa \int_{\Omega} \nabla \xi \cdot \nabla \varphi dx \quad \forall \xi, \varphi \in H^1(\Omega). \quad (3.1.21)$$

Nous notons que les conditions (3.1.15) indique

$$f \in L^2(0, T; V'). \quad (3.1.22)$$

## 3.2 Formulatuon variationnelle

Nous passons maintenant à tirer une formulation variationnelle du problème mécanique  $P^1$ . Aussi, nous supposons que  $(u, \sigma, \beta)$  sont des fonctions régulières satisfaisant (3.1.1) et (3.1.9) et soit  $v \in V, t \in (0, T)$ . En appliquant la formule de Green et utiliser les conditions (3.1.4) – (3.1.8).



En utilisant la formule de Green

$$(\sigma, \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + (Div \sigma, v)_H = \int_{\Gamma} \sigma \nu \cdot v da \quad \forall v \in H_1,$$

on trouve

$$\int_{\Omega} \sigma \cdot \varepsilon(v) dx + \int_{\Omega} Div \sigma \cdot v dx = \int_{\Gamma_1} \sigma \nu \cdot v da + \int_{\Gamma_2} \sigma \nu \cdot v da + \int_{\Gamma_3} \sigma \nu \cdot v da \quad \forall v \in V.$$

De la définition (2.1.17) de l'espace  $V$  avec (3.1.1) et (3.1.6), on obtient

$$\int_{\Omega} \sigma \cdot \varepsilon(v) dx - \int_{\Omega} f_0 \cdot v dx + \int_{\Omega} \rho \ddot{u} \cdot v dx = \int_{\Gamma_2} f_2 \cdot v da + \int_{\Gamma_3} \sigma \nu \cdot v da \quad \forall v \in V,$$

et puisque

$$-\sigma \nu \cdot v = p_{\nu} (u_{\nu} - g) v,$$

il vient que

$$\int_{\Omega} \sigma \cdot \varepsilon(v) dx + \int_{\Omega} \rho \ddot{u} \cdot v dx = \int_{\Omega} f_0 \cdot v dx + \int_{\Gamma_2} f_2 \cdot v da - \int_{\Gamma_3} p_{\nu} (u_{\nu} - g) v da.$$

De (3.1.17) – (3.1.19) et (3.1.20), nous obtenons

$$\langle \ddot{u}(t), v \rangle_{V' \times V} + (\sigma(t), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + j(u(t), v) = \langle f(t), v \rangle_{V' \times V} \quad \forall v \in V, t \in (0, T).$$

Enfin, soit  $\beta(t) \in K$  et pour tout  $t \in (0, T)$ . De la définition

$$\partial \Psi_K(u) = \{u' \in X \mid (u', v - u) \leq 0 \quad \forall v \in K\},$$

et de (3.1.3), on obtient

$$\left( \dot{\beta}(t), \xi - \beta(t) \right)_{L^2(\Omega)} - \kappa(\Delta \beta(t), \xi - \beta(t))_{L^2(\Omega)} \geq (\phi(\varepsilon(u(t)), \beta(t)), \xi - \beta(t))_{L^2(\Omega)} \quad \forall \xi \in K,$$

en utilisant la formule de Green

$$(D, \nabla \phi)_H + (div D, \phi)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Gamma} D \cdot \nu \phi da \quad \forall \phi \in H^1(\Omega),$$

avec (3.1.4) et (3.1.24), on trouve

$$\left( \dot{\beta}(t), \xi - \beta(t) \right)_{L^2(\Omega)} + a(\beta(t), \xi - \beta(t))_{L^2(\Omega)} \geq (\phi(\varepsilon(u(t)), \beta(t)), \xi - \beta(t))_{L^2(\Omega)} \quad \forall \xi \in K.$$

Nous obtenons la formulation variationnelle du problème mécanique  $P^1$ .

**Problème  $P_V^1$**  : Trouver le champ de déplacement  $u : (0, T) \rightarrow V$ , le champ d'endommagement  $\beta : (0, T) \rightarrow H^1(\Omega)$  tels que :

$$\langle \ddot{u}(t), v \rangle_{V' \times V} + (\mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}(t)) + \mathcal{G}(\varepsilon(u(t)), \beta(t)), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + j(u(t), v) = \langle f(t), v \rangle_{V' \times V} \quad (3.2.1)$$

pour tout  $v$  dans  $V$ .

$$\left( \dot{\beta}(t), \xi - \beta(t) \right)_{L^2(\Omega)} + a(\beta(t), \xi - \beta(t)) \geq (\phi(\varepsilon(u(t)), \beta(t)), \xi - \beta(t))_{L^2(\Omega)} \quad (3.2.2)$$

pour tout  $\xi \in K$ , p.p  $t \in (0, T)$  et,

$$u(0) = u_0, \quad \dot{u}(0) = v_0, \quad \beta(0) = \beta_0. \quad (3.2.3)$$

### 3.3 Existence et unicité de la solution

L'existence d'une solution unique de problème variationnelle  $P_V^1$  est prouvé en basant sur les résultats pour les équations et les inégalités variationnelles et des arguments de point fixe. Nous supposons dans ce qui suit que (3.1.10) – (3.1.13) sont vérifiées.

**Théorème 3.3.1 .** *Sous les hypothèses (3.1.10) – (3.1.13), le problème  $P_V^1$  admet une solution unique  $\{u, \beta\}$  ayant la régularité*

$$u \in H^1(0, T; V) \cap C(0, T; H), \quad \ddot{u} \in L^2(0, T; V'), \quad (3.3.1)$$

$$\beta \in H^1(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega)). \quad (3.3.2)$$

Les fonction  $u, \beta$  satisfaisant (3.1.2) – (3.2.1) et (3.2.3) s'appellent une solution faible du problème  $P^1$ . Nous concluons que sous les hypothèses (3.1.10) – (3.1.16), le problème mécanique (3.1.2) a une solution faible unique qui satisfait (3.3.1). La régularité de la solution faible est donnée par (3.3.1) en termes de contraintes

$$\sigma \in L^2(0, T; \mathcal{H}), \quad \text{Div} \sigma \in L^2(0, T; V'). \quad (3.3.3)$$

Comme un premier pas vers l'existence et résultat d'unicité, soit  $\eta \in L^2(0, T; V')$  et  $\theta \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$  être donné nous considérons le problème variationnel suivant

**Problème  $P_\eta^1$ .** Trouver le champ de déplacement  $u_\eta : (0, T) \rightarrow V$  tel que

$$\langle \ddot{u}_\eta(t), v \rangle_{V' \times V} + (\mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}_\eta(t)), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + \langle \eta(t), v \rangle_{V' \times V} = \langle f(t), v \rangle_{V' \times V}, \quad (3.3.4)$$

pour tout  $v$  dans  $V$ , p.p  $t \in (0, T)$

$$u_\eta(0) = u_0, \quad \dot{u}_\eta(0) = v_0. \quad (3.3.5)$$

**Lemme 3.3.1** *Le problème  $P_\eta^1$  admet une solution unique  $u_\eta$  telle que*

$$u_\eta \in W^{1,2}(0, T; V) \cap C^1(0, T; H), \quad \ddot{u} \in L^2(0, T; V'). \quad (3.3.6)$$

**Preuve.** Nous définition l'opérateur  $A : V \rightarrow V'$  par

$$(Au, v)_{V' \times V} = (\mathcal{A}\varepsilon(u), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} \quad \forall u, v \in V. \quad (3.3.7)$$

De (3.3.7) et (2.1.20) et pour tout  $u, v \in V$ , on a

$$|Au - Av|_{V'} \leq c |\mathcal{A}\varepsilon(u) - \mathcal{A}\varepsilon(v)|_{\mathcal{H}}.$$

En combinant (3.1.10), nous déduisons que  $A : V \rightarrow V'$  est continue, d'où l'application  $t \rightarrow A(u + tv)$  est continue et alors de définition (2.3.13), nous concluons que  $A$  est un opérateur hémicontinu. En outre, de (3.3.7), (2.1.20), (3.1.10) on a

$$\langle Au - Av, u - v \rangle_{V' \times V} \geq m_{\mathcal{A}} |u - v|_V^2 \quad \forall u, v \in V, \quad (3.3.8)$$

donc,  $A$  est un opérateur monotone. Nous choisissons  $V = 0_V$  dans (3.3.7), on obtient

$$\begin{aligned} \langle Au, u \rangle_{V' \times V} &\geq m_{\mathcal{A}} |u|_V^2 - |A0_V|_{V'} |u|_V \\ &\geq \frac{1}{2} m_{\mathcal{A}} |u|_V^2 - \frac{1}{2m_{\mathcal{A}}} |A0_V|_{V'}^2 \quad \forall u \in V, \end{aligned}$$

donc

$$(Au, u)_{V' \times V} \geq \lambda |u|_V^2 + \alpha \quad \forall u \in V, \text{ avec } \lambda = \frac{1}{2} m_{\mathcal{A}} \text{ et } \alpha = -\frac{1}{2m_{\mathcal{A}}} |A0_V|_{V'}^2.$$

Alors, la condition (2.3.18) du Théorème 2.3.4 est vérifiée. En plus, nous utilisons (3.3.7), (3.1.10) et (2.1.20), nous trouvons

$$\begin{aligned} |Au|_{V'} &\leq c |\mathcal{A}\varepsilon(u)|_{\mathcal{H}} \\ &\leq c (M_1^{\mathcal{A}} |\varepsilon(u)|_{\mathcal{H}} + M_2^{\mathcal{A}}) \\ &\leq c (M_1^{\mathcal{A}} |u|_V + M_2^{\mathcal{A}}) \quad \forall u \in V, \end{aligned}$$

et d'où

$$|Au|_{V'} \leq c (|u|_V + 1) \quad \forall u \in V.$$

Alors, la condition (2.3.19) du Théorème 2.3.4 est satisfaite. En outre, de (3.1.16) et (3.1.22), nous avons

$$f - \eta \in \mathcal{C}(0, T; V') \text{ et } v_0 \in H.$$

Finalement, nous remarquons que toutes les conditions du Théorème 2.3.4 sont vérifiées donc, nous concluons qu'il existe une unique fonction  $v_\eta$  qui satisfait

$$v_\eta \in L^2(0, T; V) \cap C(0, T; H) \quad , \quad \dot{v}_\eta \in L^2(0, T; V'), \quad (3.3.9)$$

$$v_\eta(t) + Av_\eta(t) + \eta(t) = f(t) \quad p.p.t \in (0, T), \quad (3.3.10)$$

$$v_\eta(0) = v_0. \quad (3.3.11)$$

Nous définissons la fonction  $u_\eta : (0, T) \rightarrow V$  par

$$u_\eta(t) = \int_0^t v_\eta(s) ds + u_0 \quad \forall t \in (0, T). \quad (3.3.12)$$

De (3.3.7) et (3.3.9)–(3.3.12), nous déduisons que  $u_\eta$  est une solution unique du problème variationnel  $P_\eta^1$  satisfait la régularité (3.3.6). ■

**Problème  $P_\theta^1$ .** Trouve le champ d'endommagement  $\beta : (0, T) \rightarrow H^1(\Omega)$  tel que

$$\begin{aligned} \beta_\theta(t) &\in K, \quad \left( \dot{\beta}_\theta(t), \xi - \beta_\theta(t) \right)_{L^2(\Omega)} + a(\beta_\theta(t), \xi - \beta_\theta(t)) \\ &\geq (\theta(t), \xi - \beta_\theta(t))_{L^2(\Omega)} \quad \forall \xi \in K, \quad p.p.t \in (0, T), \end{aligned} \quad (3.3.13)$$

$$\beta(0) = \beta_0. \quad (3.3.14)$$

**Lemme 3.3.2 .** *Le problème  $P_\theta^1$  admet une solution unique  $\beta_\theta$  telle que*

$$\beta_\theta \in W^{1,2}(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega)). \quad (3.3.15)$$

**Preuve.** L'inclusion de la trace de  $(H^1(\Omega), |\cdot|_{H^1(\Omega)})$  dans  $(L^2(\Omega), |\cdot|_{L^2(\Omega)})$  est continue et dense, nous pouvons écrire le triplet de Gelfand

$$H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset (H^1(\Omega))'.$$

Nous utilisons la notation  $(\cdot, \cdot)_{(H^1(\Omega))' \times H^1(\Omega)}$  pour désigner le produit de dualité entre  $(H^1(\Omega))'$  et  $H^1(\Omega)$ , nous avons

$$(\beta, \xi)_{(H^1(\Omega))' \times H^1(\Omega)} = (\beta, \xi)_{L^2(\Omega)}, \quad \forall \beta \in L^2(\Omega), \quad \xi \in H^1(\Omega).$$

On sait que l'ensemble des endommagements admissible  $K$  est un sous-ensemble non vide, ferme et convexe dans  $H^1(\Omega)$ . Ainsi, le champ d'endommagement initial  $\beta_0 \in K$ . Maintenant, en utilisant la définition (3.1.21) de la forme bilinéaire  $a$ , pour tout  $\varphi, \xi \in H^1(\Omega)$ , on a

$$a(\varphi, \xi) = a(\xi, \varphi),$$

et

$$\begin{aligned} |a(\varphi, \xi)| &\leq 3\kappa |\nabla \varphi|_H |\nabla \xi|_H \\ &\leq c |\varphi|_{H^1(\Omega)} |\xi|_{H^1(\Omega)}, \end{aligned}$$

donc,  $a$  est continue et symétrique. Ainsi, pour tout  $\varphi \in H^1(\Omega)$ , nous avons

$$a(\varphi, \varphi) = \kappa |\nabla \varphi|_H^2,$$

alors

$$a(\varphi, \varphi) + (\kappa + 1) |\nabla \varphi|_{L^2(\Omega)}^2 \geq \kappa \left( |\nabla \varphi|_H^2 + |\nabla \varphi|_{L^2(\Omega)}^2 \right),$$

et d'où

$$a(\varphi, \varphi) + c_0 |\varphi|_{L^2(\Omega)}^2 \geq c_1 |\varphi|_{H^1(\Omega)}^2 \text{ avec } c_0 = \kappa + 1 \text{ et } c_1 = \kappa.$$

Nous remarquons que toutes les conditions du Théorème 2.3.5 sont vérifiées. ce que conclut la preuve du Lemme 3.3.3. ■

Maintenant, pour  $t \in (0, T)$ , nous considérons l'opérateur

$$\Lambda : L^2(0, T; V' \times L^2(\Omega)) \rightarrow L^2(0, T; V' \times L^2(\Omega)),$$

défini par: pour chaque  $(\eta, \theta) \in L^2(0, T; V' \times L^2(\Omega))$

$$\Lambda(\eta, \theta)(t) = (\Lambda_1(\eta, \theta)(t), \Lambda_2(\eta, \theta)(t)) \in V' \times L^2(\Omega), \quad (3.3.16)$$

avec

$$(\Lambda_1(\eta, \theta)(t), v)_{V' \times V} = (\mathcal{G}(\varepsilon(u_\eta(t)), \beta_\theta(t)), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + j(u_\eta(t), v) \quad \forall v \in V, \quad (3.3.17)$$

$$\Lambda_2(\eta, \theta)(t) = \phi(\varepsilon(u_\eta(t)), \beta_\theta(t)). \quad (3.3.18)$$

Ici, pour tout  $(\eta, \theta) \in L^2(0, T; V' \times L^2(\Omega))$ ;  $u_\eta, \beta_\theta$  représentent le champ déplacement et le champ d'endommagement obtenus dans les Lemmes 3.3.2, 3.3.3 respectivement. Nous avons le résultat suivant

**Lemme 3.3.3** *Il existe un élément unique  $(\eta^*, \theta^*) \in L^2(0, T; V' \times L^2(\Omega))$  tel que*

$$\Lambda(\eta^*, \theta^*) = (\eta^*, \theta^*).$$

**Preuve.** Soient  $(\eta_1, \theta_1)$  et  $(\eta_2, \theta_2) \in L^2(0, T; V' \times L^2(\Omega))$ . Nous utilisons les notations  $u_{\eta_i} = u_i, \dot{u}_{\eta_i} = v_{\eta_i} = v_i, \beta_{\theta_i} = \beta_i$  pour  $i = 1, 2$ . En employant (3.1.11) et la remarque (1.3.1), nous avons

$$\begin{aligned} |\Lambda_1(\eta_1, \theta_1)(t) - \Lambda_1(\eta_2, \theta_2)(t)|_{V'}^2 &\leq c |\mathcal{G}(\varepsilon(u_1(t)), \beta_1(t)) - \mathcal{G}(\varepsilon(u_2(t)), \beta_2(t))|_{\mathcal{H}}^2 \\ &\leq c \left( |u_1(t) - u_2(t)|_V^2 + |\beta_1(t) - \beta_2(t)|_{L^2(\Omega)}^2 \right). \end{aligned} \quad (3.3.19)$$

Nous rappelons que  $u_{i\nu}$  et  $u_{i\tau}$  représentent les composantes normale et tangentielle de la fonction  $u_i$  respectivement. Maintenant, de (3.3.18) et (3.1.12), on obtient

$$\begin{aligned} &|\Lambda_1(\eta_1, \theta_1)(t) - \Lambda_1(\eta_2, \theta_2)(t)|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\leq c \left( |u_1(t) - u_2(t)|_V^2 + |\beta_1(t) - \beta_2(t)|_{L^2(\Omega)}^2 \right). \end{aligned} \quad (3.3.20)$$

Alors, d'après (3.3.20) et (3.3.20), on a

$$\begin{aligned} &|\Lambda_1(\eta_1, \theta_1)(t) - \Lambda_1(\eta_2, \theta_2)(t)|_{V' \times L^2(\Omega)}^2 \\ &\leq c \left( |u_1(t) - u_2(t)|_V^2 + |\beta_1(t) - \beta_2(t)|_{L^2(\Omega)}^2 \right). \end{aligned} \quad (3.3.21)$$

D'autre part, de (3.3.4), nous trouvons

$$(\dot{v}_1 - \dot{v}_2, v_1 - v_2)_{V' \times V} + (\mathcal{A}\varepsilon(v_1) - \mathcal{A}\varepsilon(v_2), \varepsilon(v_1) - \varepsilon(v_2))_{\mathcal{H}} + (\eta_1 - \eta_2, v_1 - v_2)_{V' \times V} = 0.$$

Nous intégrons l'égalité précédente par rapport à  $t$  avec la condition initiale  $v_1(0) = v_2(0) = v_0$  et (3.1.10) pour trouver

$$m_{\mathcal{A}} \int_0^t |v_1(s) - v_2(s)|_V^2 ds \leq - \int_0^t (\eta_1(s) - \eta_2(s), v_1(s) - v_2(s))_{V' \times V} ds,$$

donc, en utilisant  $2ab \leq \frac{a^2}{m_{\mathcal{A}}} + m_{\mathcal{A}}b^2$ , pour tous  $t \in (0, T)$ , on a

$$\int_0^t |v_1(s) - v_2(s)|_V^2 ds \leq c \int_0^t |\eta_1(s) - \eta_2(s)|_{V'}^2 ds. \quad (3.3.22)$$

De (3.3.15), nous déduisons que

$$\left( \dot{\beta}_1 - \dot{\beta}_2, \beta_1 - \beta_2 \right)_{L^2(\Omega)} + a(\beta_1 - \beta_2, \beta_1 - \beta_2) \leq (\theta_1 - \theta_2, \beta_1 - \beta_2)_{L^2(\Omega)} \quad p.p.t \in (0, T).$$

En intégrant l'inégalité précédente avec les conditions initiales

$$\beta_1(0) = \beta_2(0) = \beta_0,$$

et en utilisant l'inégalité

$$a(\beta_1 - \beta_2, \beta_1 - \beta_2) \geq 0,$$

on obtient

$$\frac{1}{2} |\beta_1(t) - \beta_2(t)|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \int_0^t (\theta_1(s) - \theta_2(s), \beta_1(s) - \beta_2(s))_{L^2(\Omega)} ds.$$

Il vient alors que

$$|\beta_1(t) - \beta_2(t)|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \int_0^t |\theta_1(s) - \theta_2(s)|_{L^2(\Omega)}^2 ds + \int_0^t |\beta_1(s) - \beta_2(s)|_{L^2(\Omega)}^2 ds.$$

Nous combinons l'intégralité précédente avec le Lemme de Gronwall 2.2.1, on trouve

$$|\beta_1(t) - \beta_2(t)|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \int_0^t |\theta_1(s) - \theta_2(s)|_{L^2(\Omega)}^2 ds. \quad (3.3.23)$$

On sait que

$$u_i(t) = \int_0^t v_i(s) ds + u_0,$$

donc

$$|u_1(t) - u_2(t)|_V^2 \leq c \int_0^t |v_1(s) - v_2(s)|_V^2 ds \quad \forall t \in (0, T). \quad (3.3.24)$$

Nous combinons (3.3.24) avec (3.3.21) pour obtenir

$$\begin{aligned} |\Lambda_1(\eta_1, \theta_1)(t) - \Lambda_1(\eta_2, \theta_2)(t)|_{V' \times L^2(\Omega)}^2 &\leq c (|u_1(t) - u_2(t)|_V^2 \\ &\quad + |\beta_1(t) - \beta_2(t)|_{L^2(\Omega)}^2) \\ &\leq c \left( \int_0^t |v_1(s) - v_2(s)|_V^2 ds \right. \\ &\quad \left. + |\beta_1(t) - \beta_2(t)|_{L^2(\Omega)}^2 \right). \end{aligned}$$

D'après l'inégalité précédente et les estimations (3.3.22) et (3.3.23), nous obtenons

$$|\Lambda_1(\eta_1, \theta_1)(t) - \Lambda_1(\eta_2, \theta_2)(t)|_{V' \times L^2(\Omega)}^2 \leq c \int_0^t |(\eta_1, \theta_1)(s) - (\eta_2, \theta_2)(s)|_{V' \times L^2(\Omega)}^2 ds.$$

En réitérant  $m$  fois l'inégalité précédente, on obtient

$$|\Lambda^m(\eta_1, \theta_1)(t) - \Lambda^m(\eta_2, \theta_2)(t)|_{L^2(0, T; V' \times L^2(\Omega))}^2 \leq \frac{(cT)^m}{m!} |(\eta_1, \theta_1) - (\eta_2, \theta_2)|_{L^2(0, T; V' \times L^2(\Omega))}^2.$$

Ce qui implique que pour  $m$  suffisamment grand, l'opérateur  $\Lambda^m$  est une contraction sur l'espace de Banach  $L^2(0, T; V' \times L^2(\Omega))$ , donc,  $\Lambda^m$  possède un point fixe unique

$(\eta^*, \theta^*) \in L^2(0, T; V' \times L^2(\Omega))$  et par conséquent  $(\eta^*, \theta^*)$  est l'unique point fixe de  $\Lambda$ . ■



Maintenant, on peut établir la démonstration du Théorème 3.3.1.

**Démonstration du Théorème 3.3.1.**

**Existence.** Soit  $(\eta^*, \theta^*) \in L^2(0, T; V' \times L^2(\Omega))$  le point fixe de  $\Lambda$  qui est défini par (3.3.16) et (3.3.18), nous adobtons les notations

$$u_* = u_{\eta^*}, \beta_* = \beta_{\theta^*}, \quad (3.3.25)$$

et pour tout  $t \in (0, T)$ , on pose

$$\sigma_*(t) = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}_*(t)) + \mathcal{G}(\varepsilon(u_*(t)), \beta_*(t)) \quad (3.3.26)$$

Nous montrons que  $(u_*, \beta_*)$  satisfaisant (3.2.1) – (3.2.3) et la régularité (3.3.1). En effet, nous écrivons (3.3.4) pour  $\eta = \eta_*$  et en utilisant (3.3.25), on obtient

$$\begin{aligned} & \langle \ddot{u}_*(t), v \rangle_{V' \times V} + (\mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}_*(t)), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + \langle \eta^*(t), v \rangle_{V' \times V} \\ &= \langle f(t), v \rangle_{V' \times V} \quad \forall v \in V, t \in (0, T). \end{aligned} \quad (3.3.27)$$

En outre, nous écrivons (3.3.13) pour  $\theta = \theta^*$  et en utilisant (3.3.25), on obtient

$$\begin{aligned} \beta_*(t) &\in K, \quad \left( \dot{\beta}_*(t), \xi - \beta_*(t) \right)_{L^2(\Omega)} + a(\beta_*(t), \xi - \beta_*(t)) \\ &\geq (\theta^*(t), \xi - \beta_*(t))_{L^2(\Omega)} \quad \forall \xi \in K, \quad p.p.t \in (0, T), \end{aligned} \quad (3.3.28)$$

Nous combinons les égalités  $\Lambda_1(\eta^*, \theta^*) = \eta^*$  et  $\Lambda_2(\eta^*, \theta^*) = \theta^*$  avec (3.3.17) et (3.3.18) on obtient

$$\langle \eta^*(t), v \rangle_{V' \times V} = (\mathcal{G}(\varepsilon(u(t)), \beta(t)), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + j(u_*(t), v) \quad \forall v \in V, \quad (3.3.29)$$

$$\theta^*(t) = \phi(\varepsilon(u_*(t)), \beta_*(t)). \quad (3.3.30)$$

De (3.3.29) et (3.3.27), on a

$$\begin{aligned} & \langle \ddot{u}_*(t), v \rangle_{V' \times V} + (\mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}_*(t)), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + (\mathcal{G}(\varepsilon(u(t)), \beta(t)), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} \\ &+ j(u_*(t), v) = \langle f(t), v \rangle_{V' \times V} \quad \forall v \in V, t \in (0, T). \end{aligned} \quad (3.3.31)$$

Ainsi, de (3.3.30) et (3.3.28), on a

$$\begin{aligned} \beta_*(t) &\in K, \forall t \in (0, T), \quad \left( \dot{\beta}_*(t), \xi - \beta_*(t) \right)_{L^2(\Omega)} + a(\beta_*(t), \xi - \beta_*(t)) \\ &\geq (\phi(\varepsilon(u_*(t)), \beta_*(t)), \xi - \beta_*(t))_{L^2(\Omega)} \quad \forall \xi \in K. \end{aligned} \quad (3.3.32)$$

Maintenant, de (3.3.31) avec les conditions initiales (3.2.3) et d'après les Lemmes 3.3.2, 3.3.3, nous trouvons que  $(u_*, \beta_*)$  satisfait (3.2.1) – (3.2.3) et la régularité (3.3.1). Puisque  $u_*$  satisfait (3.3.1) et de (3.3.26), on a

$$\sigma \in L^2(0, T; \mathcal{H}). \quad (3.3.33)$$

Nous choisissons  $v \in D(\Omega)^d$  dans (3.3.31) et utilisons (3.3.26), (3.1.18) pour trouver

$$\rho \ddot{u}_*(t) = \text{Div} \sigma_*(t) + f_0(t) \quad \text{dans } V' \quad \forall t \in (0, T).$$

D'après l'égalité précédente avec (3.1.14) – (3.1.15), (3.3.1) et (3.3.33), on obtient

$$\text{Div} \sigma_* \in L^2(0, T; V').$$

Enfin, nous concluons que  $(u_*, \beta_*)$  est une solution faible du problème  $P^1$  ayant la régularité (3.3.1), ce qui termine la preuve d'existence du Théorème 3.3.1.

**Unicité.** L'unicité de la solution est une conséquence de l'unicité du point fixe de l'opérateur  $\Lambda$  qui est défini par (3.3.16) – (3.3.18).

# Chapitre 4

## Problème quasistatique avec adhésion en électro-viscoélasticité

Dans ce chapitre, on considère un problème de contact avec compliance normale et adhésion dans un processus quasistatique. Le matériau est électro-viscoélastique. L'adhésion sur la surface de contact est modélisé par une variable interne de surface appelée champ d'adhésion.

Le problème est formulé par un système des équations et des inéquations aux dérivées partielles contenant l'équation de mouvement ou d'équilibre du corps, la loi de comportement du matériau, une équation différentielle modélisant le champ d'adhésion et les conditions aux limites auxquelles il est soumis.

Ce chapitre est divisé en trois sections. Dans la première section, nous présentons le problème électro-mécanique, puis nous indiquons les hypothèses sur les données. Dans la deuxième section, nous décrivons la formulation variationnelle du problème mécanique. Enfin, dans la troisième section, nous étudions l'existence et l'unicité d'une solution faible du problème mécanique.

Les techniques employées sont basées sur les résultats des équations variationnelles et la théorie des opérateurs monotones et le théorème de Cauchy- Lipschitz, suivi par les arguments du point fixe.

## 4.1 Problème électro-mécanique

On considère que le corps est électro-viscoélastique, plus exactement on utilise une loi de comportement de la forme (1.2.4). En ce qui concerne le contact, on modélise par une compliance normale avec adhésion.

Problème  $P^2$ . Trouver le champ des déplacements  $u : \Omega \times (0; T) \longrightarrow \mathbb{R}^d$ , le champ des contraintes  $\sigma : \Omega \times (0; T) \longrightarrow \mathbb{S}_d$ , le champ potentiel électrique  $\varphi : \Omega \times (0; T) \longrightarrow \mathbb{R}$ , le champ des déplacements électriques  $D : \Omega \times (0; T) \longrightarrow \mathbb{R}^d$  et le champ d'adhésion  $\alpha : \Gamma_3 \times (0; T) \longrightarrow \mathbb{R}$  tels que

$$\sigma = \mathcal{A}(\varepsilon(\dot{u})) + \mathcal{G}(\varepsilon(u)) + \mathcal{E}^* \nabla \varphi \quad \text{dans } \Omega \times (0, T). \quad (4.1.1)$$

$$D = \mathcal{E}\varepsilon(u) - B\nabla \varphi \quad \text{dans } \Omega \times (0, T). \quad (4.1.2)$$

$$\text{Div} \sigma + f_0 = 0 \quad \text{dans } \Omega \times (0, T). \quad (4.1.3)$$

$$\text{div} D = q_0 \quad \text{dans } \Omega \times (0, T). \quad (4.1.4)$$

$$u = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1 \times (0, T). \quad (4.1.5)$$

$$\sigma \nu = f_2 \quad \text{sur } \Gamma_2 \times (0, T). \quad (4.1.6)$$

$$-\sigma_\nu = p_\nu(u_\nu) - \gamma_\nu \alpha^2 R_\nu(u_\nu) \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T). \quad (4.1.7)$$

$$-\sigma_\tau = p_\tau(\alpha) R_\tau(u_\tau) \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T). \quad (4.1.8)$$

$$\dot{\alpha} = -(\alpha[\gamma_\nu(R_\nu)^2 + \gamma_\tau |R_\tau(u_\tau)|^2] - \varepsilon_\alpha)_+ \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T). \quad (4.1.9)$$

$$\varphi = 0 \quad \text{sur } \Gamma_a \times (0, T). \quad (4.1.10)$$

$$D \cdot \nu = q_2 \quad \text{sur } \Gamma_b \times (0, T). \quad (4.1.11)$$

$$u(0) = u_0 \quad \text{dans } \Omega. \quad (4.1.12)$$

$$\alpha(0) = \alpha_0 \quad \text{sur } \Gamma_3. \quad (4.1.13)$$

Les équations (4.1.1) et (4.1.2) représentent la loi de comportement du corps. L'équation (4.1.3) représente l'équation du mouvement, la relation (4.1.4) représente l'équation de conservation de la charge, tandis que les conditions (4.1.5) et (4.1.6) sont respectivement, des conditions aux limites de déplacement-traction. Les conditions (4.1.7), (4.1.8) et (4.1.9)

représentent les conditions aux limites de contact avec compliance normale et adhésion. Les équations (4.1.10) et (4.1.11) sont les conditions aux limites électriques et pour finir (4.1.12) et (4.1.13) représentent les conditions initiales.

D'autre part, pour le champ d'adhésion, nous définissons l'ensemble  $Z$ .

$$Z = \{\theta \in L^\infty(0, T; L^2(\Gamma_3)) \mid 0 \leq \theta(t) \leq 1 \quad \forall t \in (0, T), \text{ p.p sur } \Gamma_3\}.$$

On considère maintenant les hypothèses suivantes: L'opérateur de viscosité  $\mathcal{A} : \Omega \times \mathbb{S}_d \longrightarrow \mathbb{S}_d$  satisfait (3.1.10).

L'opérateur d'élasticité  $\mathcal{G} : \Omega \times \mathbb{S}_d \longrightarrow \mathbb{S}_d$  satisfait

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \text{ il existe une constante } M_{\mathcal{G}} > 0 \text{ tel que} \\ \|\mathcal{G}(x, \xi_1) - \mathcal{G}(x, \xi_2)\| \leq M_{\mathcal{G}} \|\xi_1 - \xi_2\| \\ \quad \forall \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{S}_d, \text{ p.p } x \in \Omega. \\ (b) \text{ l'application } x \mapsto \mathcal{G}(x, \xi) \text{ est Lebesgue} \\ \text{mesurable sur } \Omega, \quad \forall \xi \in \mathbb{S}_d. \\ (c) \text{ l'application } x \mapsto \mathcal{G}(x, 0) \in \mathcal{H}. \end{array} \right. \quad (4.1.14)$$

Le tenseur diélectrique  $B = (B_{ij}) : \Omega \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$  satisfait

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) B(x, E) = (B_{ij}(x)E_j) \\ \quad \forall E = (E_j) \in \mathbb{R}^d \quad \text{p.p. } x \in \Omega. \\ (b) B_{ij} = B_{ji} \in L^\infty(\Omega), 1 \leq i, j \leq d. \\ (c) \text{ Il existe } M_B > 0 \text{ telle que} \\ \quad BE \cdot E \geq M_B |E|^2 \\ \quad \forall E = (E_i) \in \mathbb{R}^d, \quad \text{p.p dans } \Omega. \end{array} \right. \quad (4.1.15)$$

Le tenseur piézoélectrique  $\mathcal{E} = (e_{ijk}) : \Omega \times \mathbb{S}_d \rightarrow \mathbb{R}^d$  vérifie

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \mathcal{E}(x, \tau) = (e_{ijk}(x)\tau_{jk}) \\ \quad \forall \tau = (\tau_{jk}) \in \mathbb{S}_d, \text{ p.p. } x \in \Omega. \\ (b) e_{ijk} = e_{ikj} \in L^\infty(\Omega), \quad 1 \leq i, j, k \leq d. \end{array} \right. \quad (4.1.16)$$

La fonction de compliance normale  $p_v : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$  vérifiée l'hypothèse (3.1.13)

La fonction de contact tangentiel  $p_\tau : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$  satisfait

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \text{ Il existe } M_\tau > 0 \text{ telle que} \\ \quad |p_\tau(x, r_1) - p_\tau(x, r_2)| \leq M_\tau |r_1 - r_2| \\ \quad \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}, \quad \text{p.p. } x \in \Gamma_3. \\ (b) \text{ Il existe } m_\tau > 0 \text{ telle que} \\ \quad |p_\tau(x, r)| \leq m_\tau \quad \forall r \in \mathbb{R}, \text{p.p. } x \in \Gamma_3. \\ (c) p_\tau(., r) \text{ est Lebesgue mesurable} \\ \quad \text{sur } \Gamma_3, \forall r \in \mathbb{R}. \\ (d) p_\tau(., 0) \in L^2(\Gamma_3). \end{array} \right. \quad (4.1.17)$$

On suppose que les forces volumiques  $f_0$  et les tractions surfaciques  $f_2$  ont la régularité

$$f_0 \in C(0, T; H), \quad f_2 \in C(0, T; L^2(\Gamma_2)^d). \quad (4.1.18)$$

De même, la densité de charge volumique  $q_0$  et surfacique  $q_2$  ont la régularité

$$q_0 \in C(0, T; L^2(\Omega)), \quad q_2 \in C(0, T; L^2(\Gamma_b)) \quad (4.1.19)$$

$$q_2(t) = 0 \quad \text{sur } \Gamma_3 \quad \forall t \in (0, T). \quad (4.1.20)$$

Les coefficients d'adhésion  $\gamma_\nu, \gamma_\tau$  vérifient

$$\gamma_\nu, \gamma_\tau \in L^\infty(\Gamma_3), \quad \varepsilon_\alpha \in L^2(\Gamma_3), \quad \gamma_\nu, \gamma_\tau, \varepsilon_\alpha \geq 0, \quad \text{p.p. sur } \Gamma_3. \quad (4.1.21)$$

Le champ initial des déplacements satisfait

$$u_0 \in V, \quad v_0 \in H. \quad (4.1.22)$$

et le champ initial d'adhésion satisfait

$$\alpha_0 \in L^2(\Gamma_3), \quad 0 \leq \alpha_0 \leq 1, \quad \text{p.p. sur } \Gamma_3. \quad (4.1.23)$$

On définit la fonction  $f(t) \in V$  par

$$(f(t), v)_V = \int_\Omega f_0(t).v dx + \int_{\Gamma_2} f_2(t).v da \quad \forall v \in V \quad \text{p.p. } t \in (0, T), \quad (4.1.24)$$

et la fonction  $q : (0, T) \rightarrow W$  par

$$(q(t), \phi)_W = \int_{\Omega} q_0(t) \phi dx - \int_{\Gamma_b} q_2(t) \phi da \quad \forall \phi \in W, \text{ et } p.t \in (0, T). \quad (4.1.25)$$

Les conditions (4.1.18) et (4.1.19) impliquent

$$f \in C(0, T; V), \quad q \in C(0, T; W). \quad (4.1.26)$$

Soit  $j : L^\infty(\Gamma_3) \times V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  la fonctionnelle d'adhésion

$$j(\alpha, u, v) = \int_{\Gamma_3} p_\nu(u_\nu) v_\nu da + \int_{\Gamma_3} (-\gamma_\nu \alpha^2 R_\nu(u_\nu) v_\nu + p_\tau(\alpha) R_\tau(u_\tau) v_\tau) da, \quad (4.1.27)$$

Les conditions (3.1.13) et (4.1.17) entraînant que l'intégrale (4.1.27) est bien définie.

## 4.2 Formulation variationnelle

En utilisant la formule de Green (2.1.16) on trouve

$$\int_{\Omega} \sigma \cdot \varepsilon(v) dx + \int_{\Omega} \text{Div} \sigma \cdot v dx = \int_{\Gamma_1} \sigma \nu \cdot v da + \int_{\Gamma_2} \sigma \nu \cdot v da + \int_{\Gamma_3} \sigma \nu \cdot v da \quad \forall v \in V.$$

De la définition de l'espace  $V$  avec (4.1.3) et (4.1.6), on obtient

$$\int_{\Omega} \sigma \cdot \varepsilon(v) dx - \int_{\Omega} f_0 \cdot v dx = \int_{\Gamma_2} f_2 \cdot v da + \int_{\Gamma_3} \sigma \nu \cdot v da \quad \forall v \in V,$$

et puisque

$$\begin{aligned} \sigma \nu \cdot v &= \sigma_{\nu} \cdot v_{\nu} + \sigma_{\tau} \cdot v_{\tau} \\ &= -p_{\nu}(u_{\nu}) v_{\nu} + \gamma_{\nu} \alpha^2 R_{\nu}(u_{\nu}) v_{\nu} - p_{\tau}(\alpha) R_{\tau}(u_{\tau}) \cdot v_{\tau}, \end{aligned}$$

il vient que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \sigma \cdot \varepsilon(v) dx &= \\ \int_{\Omega} f_0 \cdot v dx + \int_{\Gamma_2} f_2 \cdot v da - \int_{\Gamma_3} p_{\nu}(u_{\nu}) \cdot v_{\nu} da - \int_{\Gamma_3} (-\gamma_{\nu} \alpha^2 R_{\nu}(u_{\nu}) v_{\nu} + p_{\tau}(\alpha) R_{\tau}(u_{\tau}) \cdot v_{\tau}) da. \end{aligned}$$

De (4.1.24) et (4.1.27) nous obtenons

$$(\sigma(t), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + j(\alpha(t), u(t), v) = (f(t), v)_V \quad \forall v \in V, t \in (0, T),$$

et de (4.1.1), on obtient

$$\begin{aligned} (\mathcal{A}\epsilon(\dot{u}(t)), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + (\mathcal{G}(\varepsilon(u(t)), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + j(\alpha(t), u(t), v) \\ + (\mathcal{E}^* \nabla \phi(t), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} = (f(t), v)_V \quad \forall v \in V, t \in (0, T). \end{aligned} \tag{4.2.1}$$

D'autre part, en utilisant la formule de Green

$$(D, \nabla \phi)_H + (\text{div} D, \phi)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Gamma} D \cdot \nu \phi da \quad \forall \phi \in H^1(\Omega),$$

on a

$$\int_{\Omega} D \nabla \phi dx + \int_{\Omega} \text{div} D \phi da = \int_{\Gamma_a} D \cdot \nu \phi da + \int_{\Gamma_b} D \cdot \nu \phi da \quad \forall \phi \in W.$$

De la définition de l'espace  $W$  avec (4.1.4) et (4.1.11), nous trouvons

$$\int_{\Omega} D \cdot \nabla \phi dx = \int_{\Gamma_b} q_2 \phi da - \int_{\Omega} q_0 \phi dx \quad \forall \phi \in W.$$



De (4.1.2) et (4.1.25), on obtient

$$(B\nabla\phi(t), \nabla\phi)_H - (\mathcal{E}\varepsilon(u(t)), \nabla\phi)_H = (q(t), \phi)_W \quad \forall \phi \in W, t \in (0, T), \quad (4.2.2)$$

De (4.2.1) , (4.1.9) et (4.1.12) – (4.1.13), on obtient la formulation variationnelle du problème  $P^2$  .

**Problème  $P_V^2$ .** Trouver le champ des déplacements  $u : (0, T) \longrightarrow V$ , le champ potentiel électrique  $\varphi : (0, T) \longrightarrow W$  et le champ d'adhésion  $\alpha : (0, T) \longrightarrow L^2(\Gamma_3)$  tels que :

$$(\mathcal{A}\epsilon(\dot{u}(t)), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + (\mathcal{G}(\varepsilon(u(t)), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + j(\alpha(t), u(t), v) \quad (4.2.3)$$

$$+ (\mathcal{E}^*\nabla\phi(t), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} = (f(t), v)_V \quad \forall v \in V, \quad t \in (0, T)$$

$$(B\nabla\phi(t), \nabla\phi)_H - (\mathcal{E}\varepsilon(u(t)), \nabla\phi)_H = (q(t), \phi)_W \quad \forall \phi \in W, \quad t \in (0, T), \quad (4.2.4)$$

$$\dot{\alpha} = -(\alpha[\gamma_v(R_v)^2 + \gamma_T|R_\tau(u_T)|^2] - \varepsilon_\alpha)_+ \quad \text{p.p. } t \in (0, T). \quad (4.2.5)$$

$$u(0) = u_0, \quad \alpha(0) = \alpha_0. \quad (4.2.6)$$

### 4.3 Existence et unicité de la solution

L'intérêt principal dans cette section est le résultat d'existence et d'unicité suivant:

**Théorème 4.3.1** *Sous le hypothèse (3.1.10) et (4.1.14) – (4.1.17), et (3.1.13) le problème  $P_V^2$  admet une solution unique  $\{u, \varphi, \alpha\}$  ayant la régularité*

$$u \in C^1(0, T; H), \quad (4.3.1)$$

$$\varphi \in C(0, T; W), \quad (4.3.2)$$

$$\alpha \in W^{1,\infty}(0, T; L^2(\Gamma_3)) \cap Z, \quad (4.3.3)$$

Les fonctions  $u, \varphi, \sigma, D$  et  $\alpha$  satisfaisant (4.1.1) – (4.1.2) et (4.2.3) – (4.2.6) s'appellent une solution faible du problème  $P^2$ . Nous concluons que sous le hypothèse (3.1.10), le problème mécanique (4.1.1) – (4.1.13) a une solution faible unique qui satisfait (4.3.1) – (4.3.3). La régularité de la solution faible est donnée par (4.3.1) – (4.3.3) et en termes de contraintes

$$\alpha \in C(0, T; \mathcal{H}), \quad (4.3.4)$$

$$D \in C(0, T; \mathcal{W}). \quad (4.3.5)$$

En effet, de (4.2.3) et (4.2.4), il vient que  $Div\sigma(t) + f_0(t) = 0$  ;  $divD = q_0(t)$  pour tout  $t \in (0, T)$ , De la régularité (4.3.1) et (4.3.2) de  $u$  et  $\varphi$  combinée avec (4.1.1) – (4.1.2) et (3.1.10) – (3.1.26), on obtient (4.3.4) et (4.3.5).

La démonstration du Théorème 4.3.1 sera faite en plusieurs étapes, elle est basée sur les résultats des inéquations variationnelles, les opérateurs monotones et les arguments du point fixe. Nous supposons dans la suite de cette section que (3.1.10) sont vérifiés,  $c$  désigne une constante positive qui dépend de  $\Omega, \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, p_\nu, p_\tau$  et  $L, \gamma_\nu, \gamma_\tau$ , dont la valeur peut changer d'un endroit à un autre.

Soit  $\eta \in L^2(0, T; V)$ . Dans la première étape, on considère le problème variationnel suivant:

**Problème  $P_{u_\eta}^2$ .** Trouver le champ des déplacements  $u_\eta : (0, T) \longrightarrow V$  tel que

$$(\mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}_\eta(t)), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + (\eta(t), v)_V = (f(t), v)_V \quad (4.3.6)$$

$$\forall v \in V, \text{ p.p. } t \in (0, T),$$

$$u_\eta(0) = u_0, \quad . \quad (4.3.7)$$

Nous avons le résultat suivant

**Lemme 4.3.1** *Il existe une unique solution du problème  $P_{u_\eta}^2$  qui satisfait  $u_\eta \in C^1(0, T; H)$ .*

**Preuve.** Nous définissons l'opérateur  $A : V \longrightarrow V$  par

$$(Au, v)_V = (\mathcal{A}\varepsilon(u), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} \quad \forall u, v \in V. \quad (4.3.8)$$

De (4.3.8), (2.1.20) et pour tout  $u, v \in V$ , on a

$$|Au - Av|_V \leq c|\mathcal{A}\varepsilon(u) - \mathcal{A}\varepsilon(v)|_{\mathcal{H}}.$$

En combinant (3.1.10) avec le théorème de Krasnoselski, nous déduisons que  $A : V \longrightarrow V$  est continu, d'où l'application  $t \longrightarrow A(u+tv)$  est continue et alors de la définition 2.3.2, nous concluons que  $A$  est un opérateur hémicontinu. En outre, de (4.3.8), (2.1.20) et (3.1.10), on a

$$(Au - Av, u - v)_V \geq m_{\mathcal{A}}|u - v|_V^2 \quad \forall u, v \in V, \quad (4.3.9)$$

donc,  $A$  est un opérateur monotone. Nous choisissons  $V = 0_V$  dans (4.3.9), on obtient

$$(Au, u)_V \geq m_{\mathcal{A}}|u|_V^2 - |A0_V|_V|u|_V \geq \frac{1}{2}m_{\mathcal{A}}|u|_V^2 - \frac{1}{2m_{\mathcal{A}}}|A0_V|_V^2 \quad \forall u \in V,$$

donc

$$(Au, u)_V \geq \lambda|u|_V^2 + \alpha, \quad \forall u \in V, \text{ avec } \lambda = \frac{1}{2}m_{\mathcal{A}} \text{ et } \alpha = -\frac{1}{2m_{\mathcal{A}}}|A0_V|_V^2.$$

Alors, la condition (2.3.18) du Théorème 2.3.4 est vérifiée. En plus, nous utilisons (4.3.8), (3.1.10) et (2.1.20), nous trouvons

$$|Au|_V \leq c|\mathcal{A}\varepsilon(u)|_{\mathcal{H}} \leq c(M_1^{\mathcal{A}}|\varepsilon(u)|_{\mathcal{H}} + M_2^{\mathcal{A}}) \leq c(M_1^{\mathcal{A}}|u|_V + M_2^{\mathcal{A}}) \quad \forall u \in V,$$

et d'où

$$|Au|_V \leq c(|u|_V + 1) \quad \forall u \in V.$$

Alors, la condition (2.3.19) du Théorème 2.3.4 est satisfaite. En outre, de (4.1.22) et (4.1.26), nous avons

$$f - \eta \in C(0, T; V) \text{ et } v_0 \in H.$$

Finalement, nous remarquons que toutes les conditions du Théorème 2.3.4 sont vérifiées, donc, nous concluons qu'il existe une unique fonction  $v_\eta$  qui satisfait

$$v_\eta \in C(0, T; H), \quad (4.3.10)$$

$$Av_\eta(t) + \eta(t) = f(t) \quad \text{p.p. } t \in (0, T), \quad (4.3.11)$$

$$v_\eta(0) = v_0, \quad (4.3.12)$$

Nous définissons la fonction  $u_\eta : (0, T) \longrightarrow V$  par

$$u_\eta(t) = \int_0^t v_\eta(s) ds + u_0 \quad \forall t \in (0, T). \quad (4.3.13)$$

On déduit de (4.3.8) et (4.3.10)-(4.3.13), nous déduisons que  $u_\eta$  est une solution unique du problème variationnel  $P_{u_\eta}^2$  satisfait la régularité (4.3.1). ■

Dans la deuxième étape, soit  $\eta \in L^2(0, T; V)$ , nous utilisons le champ des déplacements  $u_\eta$  obtenu dans le Lemme 4.3.1 et nous considérons le problème variationnel suivant:

**Problème  $P_{\varphi_\eta}^2$ .** Trouver le champ potentiel électrique  $\varphi_\eta : (0, T) \longrightarrow W$  tel que

$$(B\nabla\varphi_\eta(t), \nabla\phi)_H - (\mathcal{E}\varepsilon(u_\eta(t)), \nabla\phi)_H = (q(t), \phi)_W \quad \forall \phi \in W, t \in (0, T). \quad (4.3.14)$$

Nous avons le résultat suivant:

**Lemme 4.3.2** *Le problème variationnel  $P_{\varphi_\eta}^2$  admet une solution unique  $\varphi_\eta$  qui satisfait la régularité  $\varphi_\eta \in C(0, T; W)$ .*

**Preuve.** Nous définissons la forme bilinéaire  $b : W \times W \longrightarrow R$  par

$$b(\varphi, \phi) = (B\nabla\varphi, \nabla\phi)_H \quad \forall \varphi, \phi \in W, \quad (4.3.15)$$

De (4.3.15), (4.1.15), (2.1.22), (2.1.23) et de l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on a

$$b(\varphi, \phi) = b(\phi, \varphi), |b(\varphi, \phi)| \leq c|\varphi|_W|\phi|_W, b(\varphi, \varphi) \geq c|\varphi|_W^2 \text{ pour tout } \varphi, \phi \in W$$

c'est-à-dire que la forme bilinéaire  $b$  est continue, symétrique et coercive sur  $W$ .

Cependant, en utilisant le théorème de représentation de Riesz, on peut définir une forme linéaire continue  $l_\eta : W \longrightarrow \mathbb{R}$  par

$$l_\eta(\phi) = (q(t), \phi)_W + (\mathcal{E}\varepsilon(u_\eta(t)), \nabla\phi)_H \quad \forall \phi \in W, t \in (0, T).$$

On applique le Théorème de Lax-Milgram pour déduire qu'il existe un élément unique  $\varphi_\eta(t) \in W$  tel que

$$b(\varphi_\eta, \phi) = l_\eta(\phi) = (q(t), \phi)_W + (\mathcal{E}\varepsilon(u_\eta(t)), \nabla\phi)_H \quad \forall \phi \in W. \quad (4.3.16)$$

Nous concluons alors que  $\varphi_\eta$  est une solution unique de  $P_{\varphi_\eta}^2$ .

Maintenant, en utilisant (4.1.15) – (4.1.16), (2.1.20) et (2.1.23), on a pour tout  $t_1, t_2 \in (0, T)$

$$|\varphi_\eta(t_1) - \varphi_\eta(t_2)|_W \leq c(|u_\eta(t_1) - u_\eta(t_2)|_V + |q(t_1) - q(t_2)|_W).$$

D'après l'inégalité précédente, (4.3.1) et (4.1.26), on a

$$\varphi_\eta \in C(0, T; W).$$

Ce qui termine la preuve du Lemme 4.3.2. ■

Dans la troisième étape, nous utilisons le champ des déplacements  $u_\eta$  obtenu dans le Lemme 4.3.1 et on considère le problème suivant:

**Problème  $P_{\alpha_\eta}^2$ .** Trouver le champ d'adhésion  $\alpha_\eta : (0, T) \rightarrow L^2(\Gamma_3)$  tel que

$$\dot{\alpha}_\eta(t) = -(\alpha_\eta(t)[\gamma_\nu(R_\nu(u_{\eta\nu}))^2 + \gamma_\tau|R_\tau(u_{\eta\tau})|^2] - \varepsilon_\alpha)_+, \quad \text{p.p. } t \in (0, T), \quad (4.3.17)$$

$$\alpha_\eta(0) = \alpha_0. \quad (4.3.18)$$

On a le résultat suivant:

**Lemme 4.3.3** *Le Problème  $P_{\alpha_\eta}^2$  admet une solution unique  $\alpha_\eta$  qui satisfait*

$$\alpha_\eta \in W^{1,\infty}(0, T; L^2(\Gamma_3)) \cap Z.$$

**Preuve.** On considère l'application  $F_\eta : (0, T) \times L^2(\Gamma_3) \rightarrow L^2(\Gamma_3)$  définie par

$$F_\eta(t, \alpha) = -(\alpha_\eta(t)[\gamma_\nu(R_\nu(u_{\eta\nu}(t)))^2 + \gamma_\tau|R_\tau(u_{\eta\tau}(t))|^2] - \varepsilon_\alpha)_+ \quad \forall t \in (0, T), \alpha \in L^\infty(\Gamma_3).$$

On a d'après (4.1.21) et les propriétés de l'opérateur  $R$ ,  $F_\eta$  est de Lipschitz par rapport à  $\alpha$ , uniformément dans le temps. Cependant, pour tout  $\alpha \in L^2(\Gamma_3)$ , l'application  $t \rightarrow F_\eta(t, \alpha)$  appartient à  $L^\infty(0, T; L^2(\Gamma_3))$ . Donc, d'après le Théorème de Cauchy-Lipschitz, il existe  $\alpha_\eta \in W^{1,\infty}(0, T; L^2(\Gamma_3))$  solution unique du problème  $P_{\alpha_\eta}$ . En utilisant des arguments similaires à la remarque 1.3.1 et (4.1.23) il vient que

$$0 \leq \alpha_\eta(t) \leq 1 \quad \forall t \in (0, T), \text{ p.p. sur } \Gamma_3$$

donc  $\alpha_\eta \in Z$ , ce qui conclut la preuve du Lemme 4.3.3 ■

Maintenant, pour  $t \in (0, T)$ , nous considérons l'opérateur

$$\Lambda : (0, T) \rightarrow V,$$

pour chaque  $\eta \in C(0, T; V)$

$$(\Lambda(\eta)(t), v)_V = (\mathcal{G}(\varepsilon(u_\eta(t)), \varepsilon(v)))_{\mathcal{H}} + (\mathcal{E}^* \nabla \varphi_\eta(t), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + j(\alpha_\eta(t) u_\eta(t), v) \quad (4.3.19)$$

pour tout  $v$  dans  $V$ .

Ici, pour tout  $\eta \in C(0, T; V)$ ,  $u_\eta, \varphi_\eta$  et  $\alpha_\eta$  resprésentent le champ déplacement, le champ potentiel électrique, le champ d'adhésion obtenus dans les Lemmes 4.3.1, 4.3.2 et 4.3.3 respectivement. Nous avons le résultat suivant:

**Lemme 4.3.4** *Il existe un élément unique  $\eta^* \in C(0, T; V)$  tel que*

$$\Lambda(\eta^*) = \eta^*.$$

**Preuve.** Soit  $\eta \in C(0, T; V)$  et  $t_1, t_2 \in (0, T)$ . Nous utilisons les notations  $u_{\eta_i} = u_i$ ,  $\varphi_{\eta_i} = \varphi_i$  et  $\alpha_{\eta_i} = \alpha_i$  pour  $i = 1, 2$ . En employant (4.1.14) et la remarque (4.1.16) – (4.1.17), nous avons

$$\begin{aligned} |\Lambda_\eta(t_1) - \Lambda_\eta(t_2)|_V^2 &\leq c(|\mathcal{G}(\varepsilon(u_\eta(t_1))) - \mathcal{G}(\varepsilon(u_\eta(t_2)))|_{\mathcal{H}}^2 \\ &\quad + c|\mathcal{E}^* \nabla \varphi_\eta(t_1) - \mathcal{E}^* \nabla \varphi_\eta(t_2)|_{\mathcal{H}}^2 \\ &\quad + c|p_\nu(u_{\eta\nu}(t_1)) - p_\nu(u_{\eta\nu}(t_2))|_{L^2(\Gamma_3)}^2 \\ &\quad + c|\alpha_\eta^2(t_1) R_\nu(u_{\eta\nu}(t_1)) - \alpha_\eta^2(t_2) R_\nu(u_{\eta\nu}(t_2))|_{L^2(\Gamma_3)}^2 \\ &\quad + c|p_\tau(\alpha_\eta(t_1)) R_\tau(u_{\eta\tau}(t_1)) - p_\tau(\alpha_\eta(t_2)) R_\tau(u_{\eta\tau}(t_2))|_{L^2(\Gamma_3)}^2. \end{aligned} \quad (4.3.20)$$

Nous rappelons que  $u_{i\nu}$  et  $u_{i\tau}$  représentent les composantes normale et tangentielle de la fonction  $u_i$  respectivement. Maintenant,

$$|\Lambda_\eta(t_1) - \Lambda_\eta(t_2)|_{L^2(\Omega)}^2 \leq c(|u_\eta(t_1) - u_\eta(t_2)|_V^2). \quad (4.3.21)$$

Alors, depuis (4.3.20) et (4.3.21), on a

$$\begin{aligned} |\Lambda_\eta(t_1) - \Lambda_\eta(t_2)|_{V \times L^2(\Omega)}^2 &\leq c (|u_\eta(t_1) - u_\eta(t_2)|_V^2 \\ &\quad + |\varphi_\eta(t_1) - \varphi_\eta(t_2)|_W^2 \\ &\quad + |\alpha_\eta(t_1) - \alpha_\eta(t_2)|_{L^2(\Gamma_3)}^2). \end{aligned} \quad (4.3.22)$$

D'autre part, de (4.3.6), nous trouvons

$$(\mathcal{A}\varepsilon(v_1) - \mathcal{A}\varepsilon(v_2), \varepsilon(v_1) - \varepsilon(v_2))_{\mathcal{H}} + (\eta_1 - \eta_2, v_1 - v_2)_V = 0.$$

Nous intégrons l'égalité précédente par rapport au temps avec la condition initiale  $v_1(0) = v_2(0) = v_0$  et (3.1.10) pour trouver

$$m_{\mathcal{A}} \int_0^t |v_1(s) - v_2(s)|_V^2 ds \leq - \int_0^t (\eta_1(s) - \eta_2(s), v_1(s) - v_2(s))_V ds,$$

donc, en utilisant  $2ab \leq \frac{a^2}{m_{\mathcal{A}}} + m_{\mathcal{A}}b^2$ , pour tous  $t \in (0, T)$ , on a

$$\int_0^t |v_1(s) - v_2(s)|_V^2 ds \leq c \int_0^t |\eta_1(s) - \eta_2(s)|_V^2 ds. \quad (4.3.23)$$

Maintenant, nous intégrons (4.3.17) avec la condition initiale (4.3.18) pour obtenir

$$\alpha_i(t) = \alpha_0 - \int_0^t (\alpha_i(s) [\gamma_\nu(R_\nu(u_{i\nu}(s)))^2 + \gamma_\tau |R_\tau(u_{i\tau}(s))|^2 - \varepsilon_\alpha]_+ ds,$$

et d'où

$$\begin{aligned} |\alpha_1(t) - \alpha_2(t)|_{L^2(\Gamma_3)} &\leq c \int_0^t |\alpha_1(s)(R_\nu(u_{1\nu}))^2 - \alpha_2(s)(R_\nu(u_{2\nu}))^2|_{L^2(\Gamma_3)} \\ &\quad + c \int_0^t |\alpha_1(s)|R_\tau(u_{1\tau}(s))|^2 - \alpha_2(s)|R_\tau(u_{2\tau}(s))|^2|_{L^2(\Gamma_3)} ds. \end{aligned}$$

En utilisant la définition  $R_\nu$  et  $R_\tau$  avec l'écriture  $\alpha_1 = \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_2$  pour trouver

$$|\alpha_1(t) - \alpha_2(t)|_{L^2(\Gamma_3)} \leq c \left( \int_0^t |\alpha_1(s) - \alpha_2(s)|_{L^2(\Gamma_3)} ds + \int_0^t |u_1(s) - u_2(s)|_{L^2(\Gamma_3)^d} ds \right). \quad (4.3.24)$$

En combinant (4.3.24) avec le Lemme de Gronwall, on obtient

$$|\alpha_1(t) - \alpha_2(t)|_{L^2(\Gamma_3)} \leq c \int_0^t |u_1(s) - u_2(s)|_{L^2(\Gamma_3)^d} ds,$$

et d'après l'inégalité (2.1.21), on a

$$|\alpha_1(t) - \alpha_2(t)|_{L^2(\Gamma_3)}^2 \leq c \int_0^t |u_1(s) - u_2(s)|_V^2 ds. \quad (4.3.25)$$

Nous utilisons (4.3.14), (4.1.15) – (4.1.16), (2.1.22) et l'inégalité de Friedrichs-Poincaré (2.1.23) pour obtenir

$$|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)|_W^2 \leq c |u_1(t) - u_2(t)|_V^2. \quad (4.3.26)$$

On sait que

$$u_i(t) = \int_0^t v_i(s) ds + u_0,$$

donc

$$|u_1(t) - u_2(t)|_V^2 \leq c \int_0^t |v_1(s) - v_2(s)|_V^2 ds \quad \forall t \in (0, T). \quad (4.3.27)$$

Nous combinons (4.3.25) – (4.3.26) avec (4.3.22) pour obtenir

$$\begin{aligned} |\Lambda_\eta(t_1) - \Lambda_\eta(t_2)|_{V \times L^2(\Omega)}^2 &\leq c |u_1(t) - u_2(t)|_V^2 \\ &\leq c \int_0^t |v_1(s) - v_2(s)|_V^2 ds. \end{aligned}$$

D'après l'inégalité précédente et les estimations (4.3.23) et, nous obtenons

$$|\Lambda_\eta(t_1) - \Lambda_\eta(t_2)|_{V \times L^2(\Omega)}^2 \leq c \int_0^t |\eta_1(s) - \eta_2(s)|_V^2 ds.$$

En réitérant  $m$  fois l'inégalité précédente, on obtient

$$|\Lambda_\eta^m(t_1) - \Lambda_\eta^m(t_2)|_{L^2(0,T;V)}^2 \leq \frac{(cT)^m}{m!} |(\eta_1) - (\eta_2)|_{L^2(0,T;V)}^2.$$

Ce qui implique que pour  $m$  suffisamment grand, l'opérateur  $\Lambda^m$  est une contraction sur l'espace de Banach  $C(0, T; V)$ , donc  $\Lambda^m$  possède un point fixe unique  $\eta^* \in C(0, T; V)$  et par conséquent  $\eta^*$  est l'unique point fixe de  $\Lambda$ . ■

Maintenant, on peut établir la démonstration du Théorème 4.3.1

#### Démonstration du Théorème 4.3.1.

**Existence.** Soit  $\eta^* \in C(0, T; V)$  le point fixe de  $\Lambda$ , nous adoptons les notations

$$u_* = u_{\eta^*}, \varphi_* = \varphi_{\eta^*}, \alpha_* = \alpha_{\eta^*}, \quad (4.3.28)$$

et pour tout  $t \in (0, T)$ , on pose

$$\sigma_*(t) = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}_*(t)) + \mathcal{G}(\varepsilon(u_*(t))) + \mathcal{E}^* \nabla \varphi_*(t), \quad (4.3.29)$$



$$D_*(t) = -B\nabla\varphi_*(t) + \mathcal{E}\varepsilon(u_*(t)). \quad (4.3.30)$$

Nous montrons que  $(u_*, \varphi_*, \alpha_*)$  satisfaisant (4.2.3) – (4.2.6) et la régularité (4.3.1) – (4.3.3). En effet, nous écrivons (4.3.6) pour  $\eta = \eta^*$  et en utilisant (4.3.28), on obtient

$$(\mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}_*(t)), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + (\eta^*(t), v)_V = (f(t), v)_V \quad \forall v \in V, t \in (0, T). \quad (4.3.31)$$

Nous combinons les égalités  $\Lambda\eta^* = \eta^*$  avec (4.3.19) pour obtenir

$$(\eta^*(t), v)_V = (\mathcal{G}(\varepsilon(u(t))), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + (\mathcal{E}^*\nabla\varphi_*(t), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + j(\alpha_*(t), u_*(t), v) \quad (4.3.32)$$

pour tout  $v$  dans  $V$ .

De (4.3.32) et (4.3.31), on a

$$\begin{aligned} & (\mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}_*(t)), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + (\mathcal{G}(\varepsilon(u(t))), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} \\ & \quad + (\mathcal{E}^*\nabla\varphi_*(t), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + j(u_*(t), v) \\ & = (f(t), v)_V \quad \forall v \in V, \quad t \in (0, T). \end{aligned} \quad (4.3.33)$$

Nous écrivons (4.3.14) pour  $\eta = \eta^*$  et en employant (4.3.28), on obtient

$$(B\nabla\varphi_*(t), \nabla\phi)_H - (\mathcal{E}\varepsilon(u_*(t)), \nabla\phi)_H = (q(t), \phi)_W \quad \forall \phi \in W, t \in (0, T). \quad (4.3.34)$$

Aussi, nous écrivons (4.3.17) pour  $\eta = \eta^*$  et en utilisant (4.3.28), on obtient

$$\dot{\alpha}_*(t) = -(\alpha_*(t)[\gamma_\nu(R_\nu(u_{*\nu}))^2 + \gamma_\tau|R_\tau(u_{*\tau})|^2] - \varepsilon_\alpha)_+, \quad \text{p.p. } t \in (0, T), \quad (4.3.35)$$

Maintenant, de (4.3.33) – (4.3.35) avec les conditions initiales (4.3.7) et d'après les Lemmes 4.3.1, 4.3.2, 4.3.3 et 4.3.4 nous trouvons que  $(u_*, \varphi_*, \alpha_*)$  satisfait (4.2.3) – (4.2.6) et la régularité (4.3.1) – (4.3.3). Puisque  $(u_*, \varphi_*)$  satisfait (4.3.1) et de (4.3.29), on a

$$\sigma \in C(0, T; \mathcal{H}). \quad (4.3.36)$$

Nous choisissons  $v \in \mathcal{D}(\Omega)^d$  dans (4.3.33) et utilisons (4.3.29), pour trouver

$$\text{Div}\sigma_*(t) + f_0(t) = 0 \quad \text{dans } V \quad \forall t \in (0, T).$$

Soit  $t_1, t_2 \in (0, T)$ , d'après (2.1.20), (2.1.23) avec (4.3.30) et (4.1.18) – (4.1.16), nous déduisons que

$$|D_*(t_1) - D_*(t_2)|_H \leq c(|\varphi_*(t_1) - \varphi_*(t_2)|_W + |u_*(t_1) - u_*(t_2)|_V),$$

de la régularité de  $(u_*, \varphi_*)$  donnée par (4.3.1) – (4.3.2), nous impliquons que

$$D_* \in C(0, T; H). \quad (4.3.37)$$

Nous choisissons  $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$  dans (4.3.34) et utilisons (4.1.25) trouvons que

$$\operatorname{div} D_*(t) = q_0(t) \quad \forall t \in (0, T).$$

D'après (4.1.19) et (4.3.37), on a

$$D_* \in C(0, T; \mathcal{W}).$$

Enfin, nous concluons que  $(u_*, \sigma_*, \varphi_*, D_*, \alpha_*)$  est une solution faible du problème  $P$  ayant la régularité (4.3.1) – (4.3.5), en ce qui termine la preuve d'existence du théorème 4.3.1.

**Unicité.** L'unicité de la solution est une conséquence de l'unicité du point fixe de l'opérateur  $\Lambda$  et la résolubilité unique des problèmes  $P_{u_\eta}^2, P_{\varphi_\eta}^2$  et  $P_{\alpha_\eta}^2$ . ■

# Conclusion

Les phénomènes de contact entre deux corps déformables ou entre un corps déformable et une fondation sont des phénomènes omniprésents dans la vie courante. Ces phénomènes peuvent faire appel à des modèles mathématiques sophistiqués qui sont représentés par des systèmes des équations aux dérivées partielles avec des conditions aux limites décrivant des processus de contact (avec ou sans frottement) complexes. Cependant, la théorie mathématique des problèmes de contact est un domaine d'étude très large où de nombreux problèmes restent à investiguer. Dans notre travail, notre objectif est d'apporter une contribution à cette théorie mathématique des problèmes de contact. En d'autre terme, l'objet de notre travail de mémoire est d'étudier théoriquement un problème de contact entre un corps déformable et une fondation déformable en utilisant loi constitutive viscoélastique avec endommagement. Le contact est sans frottement est modélisé à l'aide d'une condition de compliance normal. Nous présentons une formulation forte et faible, une résultat d'existence et l'unicité.

Plusiers perspectives peuvent être envisagées à ce travail de recherche. On peut dans un premier temps coupler la condition de compliance normale avec l'adhésion ou la changer par une des autres conditions aux limites comme la réponse normale instantanée ou condition de Signorini. On peut encore aller plus loin en introduisant d'autres lois constitutiives qui existent entre les propriétés électriques, thermiques et mécaniques d'un matériau piézoélectrique (lois électro-thermo-viscoélastique et électro-thermo-viscoplastique avec endommagement ) dans les quelles intervient essentiellement la température due à la chaleur dégagée par le frottement par exemple, et son influence sur les propriétés du matériau piézoélectrique.

# Bibliographie

- [1] A.A.Azeb Ahmed, "Étude analytique de quelques problèmes dynamiques en mécanique des milieux continus", Université F. Abbas de Sétif, (2010).
- [2] G. Duvaut and J. L. Lions, les inéquations en mécanique et en physique, Springer verlag, Berlin (1976).
- [3] H. Brézis, "*Analyse fonctionnelle, Théorie et Applications*". Masson, Paris (1987)
- [4] I. R. Ionescu and M. Sofonea, Functional and Numerical Methods in Viscoplasticity, Oxford University Press, Oxford, 1993.
- [5] J.Necas and I. Havacek, Mathematical Theory of Elastic and Elastoplastic Bodies. An Introduction, Elsevier, Amsterdm (1981).
- [6] J. R. Fernandez and M. Sofonea. Variational and numerical analysis of the Signorini's contact problem in viscoplasticity with damage. Journal of Applied Mathematics 2003 : 2 (2003) 87-114.
- [7] L. Selmani and L. Chouchane, A frictionless contact problem with adhesion and damage, Annals of university of Craiova, Math. Cop. Sci. Ser. 33 (2006), 94-107.
- [8] M. Frémond and B. Nedjar, Damage, gradient of damage and principle of virtualwork, Int. J. Solids structure, 33 (8), 1083-1103. (1996).
- [9] M. Frémond and B. Nedjar, Damage in concrete : the unilateral phenomenon, Nu-clear Engng. Design, 156, 323-335. (1999).

- [10] M. Frémond, K.L. Kuttler, B. Nedjar and M. Shillor, One-dimensional models of damage. *Adv. Math. Sci. Appl.* 8 (2), 541-570. (1998).
- [11] M. Selmani, L. Selmani; Analysis of a frictionless contact problem for elastic-viscoplastic material. *Nonlinear Analysis: Modelling and Control*, 2012, Vol. 17, No. 1, 99-117
- [12] M.S.Mesai Aoun, "Analyse Mathématique de quelques problème aux limites en piézoélectricité", Université K. Merbah de Ouargla, (2013).
- [13] M. Sofonea, "Modélisation mathématique en Mécanique du Contact". *Annals of University of Craiova, Math. Comp. Sci. Ser.* Volume 32, 2005, Pages 67-74, ISSN: 1223-6934.
- [14] P. Suquet, Plasticité et homogénéisation, Thèse de Doctorat d'Etat, Université Pierre et Marie Curie, Paris 6, 1982.
- [15] R.Arhab, " Contribution à l'étude du contact piézoélectrique avec adhésion", Université de Perpignan,(2008).
- [16] S. Smata, "Etude Mathématique de quelques problèmes aux limites en élasto-viscoplasticité", Université F. Abbas de Sétif, (2012).
- [17] Y. Ayyad, M. Sofonea, "Analysis of two dynamic frictionless contact problems for elastic-visco-plastic materials". *Electronic Jornal of Differential Equation*, Vol. 2007, No. 55, pp. 1-17, ISSN: 1072-6691.

## ملخص

في هذه المذكرة درسنا وجود ووحدانية الحل لمسألتين حديثتين في ميدان الضغطية الكهربائية. الأولى هي مسألة تواصل بتالصق بين جسم كهرومرن و قاعدة، الثانية هي مسألة تواصل بتالصق واتالف بين جسم كهرو لزوج مرن ذو قاعدة. استعملنا صيغة Green للحصول عن الشكل التغيري للمسألتين ثم برهنا عن وجود ووحدانية الحل بالحجج التالية: معادلة تفايزية مرتبطة بالزمن، معادلة تحويلية، متراجحة قطع مكافئ، معادلة تفاضلية و نقطة ثابتة.

**الكلمات المفتاحية:** معادلة تفايزية مرتبطة بالزمن، متراجحة قطع مكافئ، معادلة تحويلية، معادلة تفاضلية، نقطة ثابتة.

## Résumé

Dans ce mémoire, on a étudié l'existence et l'unicité de la solution de deux problèmes aux limites en piézoélectricité. Le premier est un problème dynamique de contact sans frottement avec compliance normale, le second est un problème quasistatique de contact avec adhésion entre un corps électro-viscoélastique. On a utilisé la formule de Green pour obtenir la formulation variationnelle des problèmes. Puis, on a montré l'existence et l'unicité de la solution par les arguments suivants: équation variationnelle dépendant du temps, inéquation du type parabolique, équation d'évolution, équation différentielle et point fixe. Mots clés: équation variationnelle dépendant du temps, inéquation du type parabolique, équation d'évolution, équation différentielle, point fixe.

## Abstract

In this thesis, we studied the existence and uniqueness of the solution of two boundary contact problems in piezoelectricity. The first is a contact problem dynamic between an visco-elastic body and a base, the second is a contact problem with adhesion between an electro-viscoelastic body with a base. We used the Green's formula for obtain the variational formulation of the problems and we proved the existence and uniqueness of the solution by the following arguments: variational equation time dependent, evolution equation, parabolic inequality, differential equation and fixed point.

**Key words:** variational equation time dependent, evolution equation, parabolic inequality, differential equation, fixed point.