



République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et De

la Recherche Scientifique



Université ECHAHID HAMMA LAKHDAR, El-Oued

FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES

Mémoire de fin d'étude

MASTER ACADEMIQUE

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Spécialité : Mathématiques fondamentales et appliquées

Thème

Théorèmes du point fixe et Applications

Présenté par : Bedda Imane et Latreche Afaf

Soutenue devant le jury :

Président	Tedjani Hadj Ammar	M.C.A	Univ El-Oued
Rapporteur	Said Ameer Meziane	M.C.A	Univ El-Oued
Examineur	Mesai Oun Mohammed Salah	M.C.A	Univ El-Oued

Année universitaire : 2024/2025



Dédicaces

*Je dédie ce modeste travail à **mon père** et à **ma mère** pour leur patience et de leur soutien moral lors de la réalisation de ce travail.*

À mes frères bien-aimés .

À mes chères amies .

*À tous les membres de la famille **Bedda**.*

Bedda Imane

Dédicaces

*Je dédie ce modeste travail à **mon père** qu'il repose en paix et **ma mère** pour leurs patiences et de leurs soutiens morales lors de la réalisation de ce travail.*

*À mon cher **mari**.*

*À mes chers enfants : **Othmane et Afnane**.*

*À tous les nombres de la famille **Latreche**.*

Latreche Afaf

Remerciements

Ce n'est pas seulement par tradition que cette page se trouve dans ce travail, mais parce que les personnes auxquelles mes remerciements sont adressés les méritent réellement.

Tout d'abord, mes remerciements vont à **Allah** qui m'a donné la force de mener à bien ce travail de recherche.

J'exprime mon profond gratitude envers mon encadrant, Prof

Said Ameer Meziane

pour son soutien inconditionnel, sa disponibilité, ses conseils précieux, son apport dans le projet et son aide permanente.

Je tiens à exprimer ma gratitude envers tous les professeurs du Département de Mathématiques et Informatique, ainsi qu'envers le personnel administratif, pour leur précieux soutien et leur contribution à mon parcours académique.

Enfin, je souhaite remercier toutes les personnes qui, de près ou de loin, m'ont aidé par leurs conseils, leurs critiques constructives et leurs encouragements.

Merci à vous tous

pour votre contribution et votre soutien précieux.

ملخص

في هذه المذكرة، درسنا بعض نظريات النقطة الثابتة وبراهينها وخواصها، ونذكر منها: نظريات باناخ، باناخ-بيكار، براوير، شودر، كرانوسيلسكي، وكانان، بالإضافة إلى بعض تطبيقاتها. ونحن مهتمون بإيجاد شروط تضمن وجود نقطة ثابتة ووحدايتها، وفقا للفضاء المعرف عليه التطبيق أو المؤثر. كما تناولنا أمثلة لحل بعض أنواع المعادلات التفاضلية.

Résumé

Dans ce mémoire, nous avons étudié certains théorèmes du point fixe, leurs démonstrations et leurs propriétés. Parmi eux, nous citons : les théorèmes de Banach, de Banach-Picard, de Brouwer, de Schauder, de Krasnoselskii et de Kannan, ainsi que certaines de leurs applications. Nous nous intéressons particulièrement à l'établissement de conditions garantissant l'existence et l'unicité d'un point fixe, selon l'espace sur lequel l'application ou l'opérateur est défini. Nous avons également abordé des exemples de résolution de certains types d'équations différentielles.

Abstract

In this memory, we have examined several fixed-point theorems, their proofs, and properties. Among the memory, we highlight : the Banach contraction principle, Banach-Picard theorem, Brouwer's fixed-point theorem, Schauder fixed-point theorem, Krasnoselskii's theorem and Kannan's theorem, along with some of their applications. Our primary focus has been on establishing sufficient conditions that guarantee both the existence and uniqueness of fixed points, depending on the underlying space where the mapping or operator is defined. Furthermore, we have explored illustrative examples demonstrating their application in solving various types of differential equations.

Table des matières

Introduction	8
Notations générales	10
1 Rappels d'analyse	11
1.1 Espace métrique	11
1.2 Espace vectoriels	12
1.2.1 Espace vectoriels normée	13
1.2.2 Les espaces vectoriels de fonctions	13
1.3 Espace de Banach	13
1.3.1 Contraction	14
1.4 Espaces de Hilbert	15
1.4.1 Opérateurs compacts	16
1.4.2 les opérateur non linéaire dans les espaces de Hilbert	18
1.4.3 Lemme de Gronwall	20
1.5 Les espaces $L^p(\Omega)$	21
1.6 Espaces de Sobolev	22
1.7 Espaces Topologiques	24
2 Les théorèmes de point fixe	27
2.1 Théorème du points fixe de Banach	28
2.2 Théorème du point fixe de Banach-Picard	31
2.3 Théorème du point fixe de Brouwer	32
2.4 Théorème du point fixe de Schauder	34
2.5 Théorème du point fixe de Kranoselskii	36

2.6	Théorème du point fixe de Kannan	37
3	Applications du point fixe aux equations differentielles	39
3.1	Application de contraction de Banach	39
3.2	Application de théorème de Schauder	41
3.3	Application du théorème de Krasnoselskii	43
	Bibliographie	48

Introduction générale

Le théorème du point fixe est l'une des techniques mathématiques qui nous permet de résoudre des nombreux problèmes.

Généralement trouver des solution pour des équations différentielles ou intégrales revient à trouver des points fixes pour des opérateurs associés à ces dernières.

En 1886, Henri Poincaré démontre un résultat équivalent au théorème du point fixe de Brouwer. L'énoncé exact est prouvé pour la dimension trois par Piers Bohl pour la première fois en 1904, puis par Jacques Hadamard dans le cas général en 1910. Luitzen Brouwer propose une nouvelle démonstration en 1912.

Le théorème du point fixe de Schauder établi en 1930 ; est une généralisation du théorème du point fixe de Brouwer et affirme qu'une application continue sur un convexe compact admet un point fixe, qui n'est pas nécessairement unique. Mais qui nous permet de résoudre plusieurs problèmes.

notre travail de recherche sera axé sur les applications est compose en trois parties est structurés de la manière suivante :

Dans la première partie, on commence par indiquer des définitions élémentaires des notions d'analyses, illustrent de façon intéressantes de certains manipulations que l'on peut faire et qui caractérise ce qui nous décrivons dans notre mémoire. Citons les espaces, vectoriel, espace de Banach, espace de Hibert et espace de Sobolev.

Dans la deuxieme partie, nous écrivons La signification du théorème de point

fixe, Théorème du point fixe de Banach dans les espaces métriques par des fonctions contractantes dans les espaces métriques et les espaces normés, Théorème du point fixe de Banach-Picard donne l'importance du point fixe dans les espaces normés complets et les applications contractantes, Théorème du point fixe de Brouwer est un résultat de l'espace topologique algébrique étudie les fonctions continues sur une boule fermée dans un espace de dimension finie, Théorème du point fixe de Schauder ce théorème prolonge le résultat de Brouwer pour les fonctions continues sur un convexe compact dans un espace de Banach qui généralise les résultats de Brouwer en dimension infinie, Théorème du point fixe de Krasnoselskii ce théorème concerne les applications de la forme $f + g$ où g est continue et compacte et f une contraction à la fin nous citons le Théorème du point fixe de Kannan.

Dans la troisième partie, nous étudions et citons des applications du point fixe aux divers équations différentielles.

Notations générales

$\mathbb{N}$	Ensemble des entiers naturels,
$\mathbb{R}$	l'ensemble des nombres réels,
c	Constante réelle strictement positive,
i.e	C'est à dire,
$\partial_i \psi$	La dérivée partielle de ψ par rapport à la i^{eme} composante $x : \partial_i \psi = \frac{\partial \psi}{\partial x_i}$,
$\nabla \psi$	Gradient de l'application $\psi : \nabla \psi = (\partial_1 \psi, \dots, \partial_d \psi)$,
$\text{Div} \psi$	Divergence de l'application, $\psi : \text{Div} \psi = \partial_1 \psi + \dots + \partial_d \psi$,
$(\cdot, \cdot)_X$	le produit scalaire de X ,
$\ \cdot \ _X$	la norme de X ,
p.p.	Presque partout,
Ω	Ouvert de $\mathbb{R}^d$, parfois domaine L'hertzien,
$\bar{\Omega}$	l'adhérence de Ω ,
$L^2(\Omega)$	Espace des fonctions u mesurables sur Ω telles que $\int_{\Omega} u ^2 dx < +\infty$,
$\ \cdot \ _{L^2(\Omega)}$	La norme de $L^2(\Omega)$ définie par $\ u \ _{L^2(\Omega)} = (\int_{\Omega} u ^2 dx)^{\frac{1}{2}}$,
$L^\infty(\Omega)$	Espace des fonctions u mesurables sur Ω telles que, $\exists c > 0 : u < c$, p.p., sur Ω ,
$H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$	L'espace de Sobolev d'ordre $\frac{1}{2}$ sur Γ , Si de plus $[0, T]$ un intervalle de temps, $k \in \mathbb{N}$ et $1 \leq p \leq +\infty$, on note par H_Γ L'espace $(H^{\frac{1}{2}}(\Gamma))^d$,
H'_Γ	l'espace dual de H_Γ .

Chapitre 1

Rappels d'analyse

Ce chapitre est consacré à la disription des espaces utilisés dans cette memoire. Comme les espaces vectoriels, espace de Banach, espace de Hilbert, espace de Sobolev et espace Topologie.

Nous rappelons des notions de base et certains propriétés des espaces qui seront utilisé tout au long de ce mémoire.

Pour plus de détails, voir [3, 4, 6, 7].

1.1 Espace métrique

Définition 1.1.1 Une distance (ou métrique) sur un ensemble X est une application :

$$\begin{aligned} d : X \times X &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ (x, y) &\longmapsto d(x, y) \end{aligned}$$

possédant, pour tous $x, y, z \in X$, les propriétés suivantes :

1. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
2. $d(x, y) = d(y, x)$;
3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (inégalité triangulaire).

Muni de la distance d , X est appelé espace métrique, on note parfois un tel espace (X, d) . Le nombre réel positif $d(x, y)$ est appelé la distance entre x et y dans X .

Proposition 1.1.1 :

Soit (X, d) un espace métrique.

1. Pour tout $x, y, z \in X$, on a $|d(x, z) - d(z, y)| \leq d(x, y)$.
2. Pour tout $x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1} \in X$, on a $d(x_1, x_{n+1}) \leq \sum_{i=1}^n d(x_i, x_{i+1})$.

Proposition 1.1.2 :

Pour tous $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, on a :

1. $|\sum_{i=1}^n x_i y_i| \leq (\sum_{i=1}^n x_i^2)^{\frac{1}{2}} (\sum_{i=1}^n y_i^2)^{\frac{1}{2}}$ (inégalité de Cauchy-Schwarz).
2. $(\sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^2) \leq (\sum_{i=1}^n x_i^2)^{\frac{1}{2}} + (\sum_{i=1}^n y_i^2)^{\frac{1}{2}}$ (inégalité de Minkowski).

Définition 1.1.2 Soient (X, d) un espace métrique, $a \in X$ et $r > 0$.

1. On appelle boule ouverte de centre a et de rayon r l'ensemble :

$$B(a, r) = \{x \in X; d(a, x) < r\}.$$

2. On appelle boule fermée de centre a et de rayon r l'ensemble :

$$B'(a, r) = \{x \in X; d(a, x) \leq r\}.$$

3. On appelle sphère de centre a et de rayon r l'ensemble :

$$S(a, r) = \{x \in X; d(a, x) = r\}.$$

Notons que l'on a $B'(a, r) = B(a, r) \cup S(a, r)$.

1.2 Espace vectoriels

Définition 1.2.1 soit E un ensemble muni de deux lois :

Une addition $+$ sur E telle que $(E, +)$ soit un groupe commutatif.

Une loi externe de multiplication des vecteurs $\vec{v}$ de E par un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ satisfaisant

- i) $\lambda(\vec{u} + \vec{v}) = \lambda.\vec{u} + \lambda.\vec{v}$
- ii) $(\alpha + \lambda).\vec{u} = \alpha.\vec{u} + \lambda.\vec{u}$
- iii) $\lambda.(\alpha.\vec{u}) = (\lambda.\alpha).\vec{u}$
- iv) $1.\vec{u} = \vec{u}$

1.2.1 Espace vectoriels normée

Définition 1.2.2 soit X un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Une norme $\|\cdot\|$ sur l'espace X est une application définie sur X à valeur dans $\mathbb{R}_+$ qui possède les propriétés suivantes :

1. Pour tous $x \in X$, $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
2. Pour tous $x \in X$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$.
3. Pour tous $x, y \in X$, $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Cette inégalité est appelée inégalité triangulaire.

Définition 1.2.3 Un espace vectoriel normé est un espace vectoriel X muni d'une norme $\|\cdot\|$ et de la topologie associée à cette norme.

1.2.2 Les espaces vectoriels de fonctions

Soient X un ensemble quelconque et n un entier quelconque.

On note $E = \mathbb{F}(X, \mathbb{K}^n)$, l'espace de toutes les fonctions de X à valeurs dans $\mathbb{K}^n$. Muni de deux lois, l'un la somme des fonctions et l'autre multiplier une fonction de E par un scalaire (une constante) $\lambda \in \mathbb{K}$.

1.3 Espace de Banach

Maintenant il nous est paru nécessaire de présenter quelque espaces, quelque résultats sur les opérateurs fortement monotones et Lipschitzienne, les inéquations variationnelles et dévolution.

Définition 1.3.1 Une suite $(x_k)_k$ d'éléments d'un espace normé E est dite suite de Cauchy si :

$$\forall \epsilon > 0; \exists N \geq 1; k, l \geq N \Rightarrow \|x_k - x_l\| \leq \epsilon$$

Toute suite convergente est de Cauchy.

1.3.1 Contraction

Le principe de contraction de Banach est le résultat le plus élémentaire dans la théorie du point fixe.

En analyse ces théorèmes se relèvent être des outils très utiles en mathématiques, principalement dans le domaine de résolution des équations différentielles.

Le théorème de point fixe de Banach donne un critère général dans les espaces métriques complets pour assurer que le procédé d'itération d'une fonction tend vers un point fixe.

En définit quelques définitions qui permet d'affirmer qu'une fonction f admet des critères de théorème du point fixe de contraction.

Définition 1.3.2 *Soit (X, d) un espace métrique, une application $f : X \longrightarrow X$ est dite lipschitzienne de rapport $k \geq 0$ si :*

$$d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y) \quad \text{pour tout } x, y \in X$$

k est dite constante de lipschitz.

Définition 1.3.3 *Soit (X, d) un espace métrique une application $f : X \longrightarrow X$ est dite 1-lipschitzienne si $k = 1$ et*

$$d(f(x), f(y)) \leq d(x, y) \quad \text{pour tout } x, y \in X$$

et l'application f est dite non expansive.

Définition 1.3.4 *L'application lipschitzienne f est appelée.*

1. *non expansive si $k = 1$.*
2. *contraction si $0 < k < 1$.*

Théorème 1.3.1 *Soit (X, d) un espace métrique complet et $f : X \longrightarrow X$ une contraction avec k sa constante de Lipschitz.*

Alors f admet une unique point fixe $u \in X$.

En outre, pour tout $x \in X$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = u$$

$$d(f^n(x), u) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x, f(x))$$

1.4 Espaces de Hilbert

Définition 1.4.1 soit H un espace vectoriel réel et $(\cdot, \cdot)_H$ un produit scalaire sur H , c'est-à-dire $(\cdot, \cdot)_H : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ est une application bilinéaire symétrique et définie positive.

On note par $\| \cdot \|_H$ l'application de $H \rightarrow \mathbb{R}_+$ définie par :

$$\| u \|_H = (u, u)_H^{\frac{1}{2}}, \quad (1.1)$$

et on rappelle que $\| \cdot \|_H$ est une norme sur H qui vérifie l'inégalité de Cauchy-Schwartz :

$$|(u, v)_H| \leq \| u \|_H \| v \|_H, \quad \forall u, v \in H. \quad (1.2)$$

On dit que H est un espace de Hilbert si H est complet pour la norme défini par (1.1). Soit H' l'espace dual de H c'est à dire l'espace des fonctionnelles linéaires et continues sur H muni de la norme :

$$\| \eta \|_{H'} = \sup_{v \in H - \{0\}} \frac{(\eta, v)_{H' \times H}}{\| v \|_H},$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H' \times H}$ représente la dualité entre H' et H .

Définition 1.4.2 soit $(X, \| \cdot \|)$ un espace vectoriel normé et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de X .

1. On dit que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente s'il existe $x \in X$ tel que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \| x_n - x \| = 0. \text{ Autrement dit}$$

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow \| x_n - x \| \leq \epsilon$$

Théorème 1.4.1 (Théorème de représentation de Riesz-Fréchet) : Soit H un espace de Hilbert et soit H' son espace dual. Alors, pour tout $\phi \in H'$ il existe $f \in H$ unique tel que

$$\langle \phi, v \rangle_{H' \times H} = (f, v)_H \quad \forall v \in H.$$

De plus

$$\|\phi\|_{H'} = \|f\|_H.$$

L'importance de ce théorème est que toute forme linéaire continue sur H peut se représenter à l'aide du produit scalaire. L'application $\phi \mapsto f$ est un isomorphisme isométrique qui permet d'identifier H et H' .

1.4.1 Opérateurs compacts

Opérateurs compacts constituent une classe importante d'applications linéaires continues.

D'une part, ils sont presque des opérateurs de rang fini (i.e. approchés par des opérateurs dont l'image est de dimension finie).

D'autre part, la classe des opérateurs compacts est suffisamment large pour inclure les opérateurs à noyau continu ou dans L^2 .

Définition 1.4.3 Soient E et F deux espaces vectoriels normés.

Une application $T \in \mathcal{L}(E, F)$ est un opérateur compact si $\overline{T(\overline{B_E})}$ est un compact de F , où $\overline{B_E}$ est la boule unité fermée de E . On note par $K(E, F)$ l'ensemble des opérateurs compacts de E dans F et par $K(E)$ si $E = F$.

Proposition 1.4.1 :

Soient E et F deux espaces vectoriels normés et $T \in \mathcal{L}(E, F)$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- i) T est compact.
- ii) Pour tout $A \subset E$ borné, $\overline{T(A)}$ est compact.
- iii) Toute suite bornée $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de E , $(Tx_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une valeur d'adhérence

Démonstration :

i) $\Rightarrow$ ii) Soit $A \subset E$ borné, alors il existe $r > 0$ tel que $A \subset r \cdot \overline{B_E}$
d'où $\overline{T(A)} \subset r \overline{T(\overline{B_E})}$. Ainsi, $\overline{T(A)}$ est compact, comme fermé du compact $r \cdot \overline{T(\overline{B_E})}$.

ii) $\Rightarrow$ iii) Il suffit de poser $A = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$.

iii) $\Rightarrow$ i) Soit $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de $\overline{T(\overline{B_E})}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $z_n \in T(B)$ tel que $\|y_n - z_n\|_F \leq 2^{-n}$.

Comme par hypothèse $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une valeur d'adhérence, il en est de même pour $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Proposition 1.4.2 Soit E, F deux espaces de Banach.

- i) L'ensemble des opérateurs compacts $K(E, F)$ est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{L}(E, F)$.
- ii) Soient $S \in \mathcal{L}(E, F)$ et $T \in \mathcal{L}(F, G)$, alors si S ou T est compact, $T \circ S \in K(E, G)$.

Démonstration :

- i) Soient $\lambda, \beta \in K$. Soit (x_n) une suite bornée de E . Comme S, T sont compacts, il existe une sous-suite $(x_{\phi(n)})$ telle que $S(x_{\phi(n)})$ et $T(x_{\phi(n)})$ convergent, ainsi $\lambda S(x_{\phi(n)}) + \beta T(x_{\phi(n)})$ converge.

Donc, la suite image de toute suite bornée par $\lambda S + \beta T$ admet une valeur d'adhérence i.e. $\lambda S + \beta T \in K(E, F)$.

Soit $T \in \overline{K(E, F)}$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $T_\varepsilon \in K(E, F)$ tel que $\|T - T_\varepsilon\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$, cela signifie que $\|Tx - T_\varepsilon x\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ pour tout $x \in \overline{B_E}$. Comme T_ε est compacte, $T_\varepsilon(\overline{B_E})$ est précompacte, il existe donc $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ et $\{y_1, \dots, y_{N_\varepsilon}\}$ tel que $T_\varepsilon(\overline{B_E}) \subset \bigcup_{i=1}^{N_\varepsilon} B(y_i, \frac{\varepsilon}{2})$.

Ainsi, pour tout $x \in \overline{B_E}$, il existe $i_0 \in \{1, \dots, N_\varepsilon\}$ tel que $\|T_\varepsilon x - y_{i_0}\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$, alors $\|Tx - y_{i_0}\| \leq \|Tx - T_\varepsilon x\| + \|T_\varepsilon x - y_{i_0}\| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

D'où $T(\overline{B_X}) \subset \bigcup_{i=1}^{N_\varepsilon} B(y_i, \varepsilon)$, par suite $\overline{T(\overline{B})_E}$ est compact car F est complet. On a donc montré que $T \in K(E, F)$.

Ainsi $\overline{K(E, F)} = K(E, F)$.

ii) Supposons $S \in K(E, F)$. Comme $T(S(\overline{B_E})) \subset T(\overline{S(\overline{B_E})})$, ce dernier est compact, comme image du compact $\overline{S(\overline{B_E})}$ par l'application continue T .

Remarque 1.4.1 Soit E un espace vectoriel normé de dimension infinie.

Alors, l'opérateur identité de E n'est pas compact.

Plus généralement, tout isomorphisme $T : E \longrightarrow E$ n'est pas compact.

1.4.2 les opérateurs non linéaires dans les espaces de Hilbert

I-Opérateur fortement monotone

Nous donnons quelques définitions et propriétés sur les opérateurs non linéaires et les formes bilinéaires dans un espace de Hilbert muni du produit scalaire $(\cdot, \cdot)_X$ et de la norme associée $\|\cdot\|_X$.

Définition 1.4.4 Soit $A : X \longrightarrow X$ un opérateur non-linéaire. L'opérateur A est dit :

(1) monotone si

$$(Au - Av, u - v)_X \geq 0 \quad \forall u, v \in X; \quad (1.3)$$

(2) fortement monotone si il existe $m > 0$ tel que

$$(Au - Av, u - v)_X \geq m \|u - v\|_X \quad \forall u, v \in X; \quad (1.4)$$

(3) Lipschitz si il existe $M > 0$ tel que

$$\|Au - Av\|_X \leq M \|u - v\|_X \quad \forall u, v \in X. \quad (1.5)$$

et la fonctionnelle $\gamma : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ satisfait

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \text{ Pour tout } \eta \in X, \gamma(\eta, \cdot) \text{ est un convexe et s.c.i. sur } X, \\ (b) \text{ il existe } \alpha > 0 \text{ tel que} \\ \gamma(u_1, v_1) - \gamma(u_2, v_1) + \gamma(u_2, v_1) - \gamma(u_2, v_2) \leq \alpha \|u_1 - u_2\|_X \|v_1 - v_2\|_X. \end{array} \right. \quad (1.6)$$

L'existence et l'unicité d'une solution au problème

$$(Au, u - v)_X + \gamma(u, v) + \gamma(u, u) \geq (f, u - v)_X \quad \forall v \in X \quad (1.7)$$

est donnée par le résultat suivant.

Théorème 1.4.2 Supposons que les hypothèses (1.4), (1.5) et (1.6) sont satisfaites. Alors $\alpha < m$, pour tout $f \in X$, il existe une solution unique $u \in X$ au problème (1.7).

Pour l'opérateur $\Lambda^m : K \rightarrow K$ défini par la relation

$$\Lambda^m = \Lambda(\Lambda^{m-1}) \quad m \geq 2,$$

nous avons la version suivante du théorème de point fixe.

Théorème 1.4.3 Soit K un sous ensemble fermé et non vide de l'espace de Banach $(X, \|\cdot\|_X)$. Supposons que $\Lambda^m : K \rightarrow K$ est une contraction pour m un entier positif. Alors Λ admet un point fixe unique dans K .

Définition 1.4.5 Une forme bilinéaire $b : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ est continue s'il existe un réel $M > 0$ tel que :

$$\|b(u, v)\|_X \leq M \|u\|_X \|v\|_X, \quad \forall u, v \in X.$$

Définition 1.4.6 Une forme bilinéaire $b : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ est dite coercive s'il existe une constante $m > 0$ telle que :

$$b(u, u) \geq m \|u\|_X^2, \quad \forall u \in X.$$

Théorème 1.4.4 (Théorème du Lax-Milgram)

Soit H un espace de Hilbert, $b : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire continue et coercitive.

Soit $l : H \rightarrow \mathbb{R}$ une forme linéaire continue. Alors, il existe une solution unique $u \in H$ qui satisfait :

$$b(u, v) = l(v), \quad \forall v \in H. \quad (1.8)$$

De plus, si $b(\cdot, \cdot)$ est symétrique, alors u est caractérisé par la propriété :

$$\frac{1}{2}b(u, u) - \langle u, u \rangle_X \leq \frac{1}{2}b(v, v) - \langle v, v \rangle_X, \quad \forall v \in X. \quad (1.9)$$

II- Équation différentielle ordinaire

Théorème 1.4.5 (Cauchy-Lipschitz) : Soit $(X, \|\cdot\|_X)$ un espace de Banach réel et soit $F(t, \cdot) : X \rightarrow X$ un opérateur défini p.p. sur $[0, T]$, qui satisfait les propriétés

suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \text{ il existe } L_F > 0 \text{ tel que} \\ \| F(t, x) - F(t, y) \|_X \leq L_F \| x - y \|_X \quad \forall x, y \in X, p.p. t \in [0, T], \\ (b) \text{ il existe } 1 \leq p \leq \infty \text{ tel que} \\ F(\cdot, x) \in L^p([0, T]; X) \quad \forall x \in X. \end{array} \right.$$

Alors, pour tout $x_0 \in X$, il existe une fonction unique $x \in W^{1,p}([0, T]; X)$ tel que

$$\dot{x}(t) = F(t, x(t)), \quad p.p. t \in [0, T],$$

$$x(0) = x_0.$$

1.4.3 Lemme de Gronwall

Nous rappelons ici le lemme du type Gronwall qui intervient dans de nombreux problèmes de contact, en particulier pour établir l'unicité de la solution.

Lemme 1.4.1 Soient $m, n \in C([0, T]; \mathbb{R})$ telles que $m(t) \geq 0$ et $n(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0, T]$, $a \geq 0$ une constante et $\psi \in C([0, T]; \mathbb{R})$

(1) Si

$$\psi(t) \leq a + \int_0^t m(s) ds + \int_0^t n(s) \psi(s) ds \quad \forall t \in [0, T],$$

alors

$$\psi(t) \leq (a + \int_0^t m(s) ds) \exp\left(\int_0^t n(s) ds\right) \quad \forall t \in [0, T],$$

(2) Si

$$\psi(t) \leq m(t) + a \int_0^t \psi(s) ds \quad \forall t \in [0, T],$$

alors

$$\int_0^t \psi(s) ds \leq e^{at} \int_0^t m(s) ds \quad \forall t \in [0, T].$$

Dans le cas particulier $a = 0$, $n = 1$, la partie (1) de ce lemme devient.

Corollaire 1.4.1 Soient $m \in C([0, T]; \mathbb{R})$ telles que $m(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0, T]$. Si $\psi \in C([0, T]; \mathbb{R})$ est une fonction telle que

$$\psi(t) \leq \int_0^t m(s)ds + \int_0^t \psi(s)ds \quad \forall t \in [0, T],$$

alors, il existe $c > 0$ tel que

$$\psi(t) \leq \int_0^t m(s)ds \quad \forall t \in [0, T].$$

Le Corollaire (1.4.1) est souvent utilisé pour montrer l'unicité de la solution. Dans le cas particulier $m = 0$, la partie (1) de ce lemme devient.

Corollaire 1.4.2 Soient $n \in C([0, T]; \mathbb{R})$ telles que $n(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0, T]$. Si $a \geq 0$ et $\psi \in C([0, T]; \mathbb{R})$ est une fonction telle que ;

$$\psi(t) \leq (a + \int_0^t n(s)\psi(s)ds) \quad \forall t \in [0, T].$$

Alors :

$$\psi(t) \leq (a) \exp(\int_0^t n(s)ds) \quad \forall t \in [0, T].$$

Le corollaire précédent est souvent utilisé pour montrer l'unicité de la solution de façon suivante.

En supposant qu'il existe deux solution, en notant par ψ la norme de la différence entre ces solution, on essaie ensuite de majorer ψ sous la forme

$$\psi(t) \leq \int_0^t n(s)\psi(s)ds. \quad \forall t \in [0, T],$$

avec une certaine fonction $n \geq 0$. L'application du corollaire donne immédiatement la nullité de ψ .

1.5 Les espaces $L^p(\Omega)$

Définition 1.5.1 (Espace de Lebesgue). Soit $p \in \mathbb{R}$, $1 \leq p \leq \infty$. On appelle l'espace de Lebesgue $L^p(\Omega)$ l'ensemble,

$$L^p(\Omega) = \{v : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable sur } \Omega \text{ et } |v|^p \text{ lebesgue integrable sur } \Omega\}.$$

C'est un espace de Banach s'il est muni de la norme

$$\|v\|_{L^\infty(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |v(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Si $p = \infty$ et $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, mesurable.

Alors on définit $\|\cdot\|_{L^\infty(\Omega)}$ par :

$$\|v\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{x \in \Omega} |v(x)| = \inf\{c; |v(x)| \leq c\}.$$

L'espace $L^\infty(\Omega)$ est aussi un espace de Banach.

Définition 1.5.2 Soit $p \in \mathbb{R}$, $1 \leq p \leq \infty$. On dit qu'une fonction $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ appartient à $L^p_{loc}(\Omega)$ si $u \circ I_K \in L^p$ pour tout $\forall K \subset \Omega$ ou I_K représente l'application identité de K .

Théorème 1.5.1 . Pour tout $p \in [1, +\infty[$, les espaces $L^p(\Omega)$ vérifient les assertions suivantes :

- 1) Les espaces $L^p(\Omega)$ sont des espaces de Banach.
- 2) Pour toute fonction $u \in L^p(\Omega)$, toute $v \in L^q(\Omega)$ l'inégalité de Holder est vérifiée ; i.e

$$\int_{\Omega} |u(x)v(x)| dx \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^q(\Omega)}, \text{ avec } \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$$

- 3) les espaces $L^2(\Omega)$ sont des espaces séparables pour $[1, +\infty[$

- 4) L'espace $L^2(\Omega)$ munit de produit scalaire

$$(u, v) = \int_{\Omega} u(x)v(x)dx, \forall u, v \in L^2(\Omega).$$

est un espace de Hilbert. De plus l'inégalité de Cauchy-Schwarz correspondant à l'inégalité de Hölder est vérifiée. i.e.

$$\int_{\Omega} |u(x)v(x)| dx \leq \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)}.$$

1.6 Espaces de Sobolev

Les espaces de Sobolev ont été introduits au début du siècle et ont permis de résoudre bon nombre de problèmes concernant les équations aux dérivées partielles sans réponse

jusque là.

On commence par un bref rappel de quelques résultats sur l'espaces de Sobolev $H^1(\Omega)$ défini par :

$$H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) \mid \partial_i u \in L^2(\Omega) \ i = 1, \dots, d\}.$$

On note par ∇u le vecteur de composante $\partial_i u$. On a $\nabla u \in L^2(\Omega)^d$ pour tout $u \in H^1(\Omega)$.

On sait que $H^1(\Omega)$ est un espaces de Hilbert pour le produite scalaire :

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = (u, v)_{L^2(\Omega)} + (\partial_i u, \partial_i v)_{L^2(\Omega)},$$

et la norme associée :

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = (u, u)_{H^1(\Omega)}^{\frac{1}{2}}, \text{ et on écrit } \|u\|_{H^1(\Omega)}^2 = \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)^d}^2.$$

On a les résultats suivants :

$$C^1(\bar{\Omega}) \text{ est dense dans } H^1(\Omega).$$

Théorème 1.6.1 (Rellich)

$$H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \text{ avec injection compacte.}$$

Théorème 1.6.2 (trace de Sobolev)

Il existe une application linéaire et continue $\delta : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Gamma)$ telle que $\delta u = u|_{\Gamma}$ pour tout $u \in C^1(\bar{\Omega})$.

Remarque 1.6.1 L'espaces $L^2(\Gamma)$ ci-dessus représenté l'espaces de fonctions réelles sur Γ qui sont L^2 pour la mesure superficielle dT .

L'application δ s'appelle application de trace, elle est définie comme le prolongement par densité de l'application $u \rightarrow u|_{\Gamma}$ définir pour $u \in C^1(\bar{\Omega})$.

Remarque 1.6.2 On note que l'application de trace $\delta : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Gamma)$ est un opérateur compacte.

Définition 1.6.1 Pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $p \in [1, +\infty]$, nous définissons l'espace de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ par

$$W^{k,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) \mid \forall \alpha, |\alpha| \leq k; \exists v_\alpha \in L^p(\Omega), \text{ tel que } v_\alpha = D^\alpha u\}.$$

Remarque 1.6.3 Nous ferons très souvent l'abus d'écriture qui consiste à identifier $D^\alpha u$ et v_α .

La norme sur l'espace $W^{k,p}(\Omega)$ est donnée par

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \begin{cases} (\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)})^{\frac{1}{p}} & \text{si } 1 \leq p < \infty, \\ \max_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)} & \text{si } p = \infty. \end{cases}$$

Pour $p = 2$, on note par $H^k(\Omega)$ l'espace $W^{k,2}(\Omega)$ et la norme précédente provient d'un produit scalaire.

Théorème 1.6.3 Les espaces de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$, pour $k \in \mathbb{N}$ et $p \in [1, +\infty]$, munis de la norme $\|\cdot\|$, sont des espaces de Banach.

De plus, les espaces $H^k(\Omega)$, pour tout k entier, sont des espaces de Hilbert.

Pour des détails supplémentaires sur les espaces de Sobolev nous renvoyons le [\[10\]](#).

1.7 Espaces Topologiques

Définition 1.7.1 Une topologie sur un ensemble X est la donnée d'un ensemble τ de parties de X , i.e. $\tau \subset P(X)$, vérifiant les propriétés suivantes, appelées axiomes des ouverts.

- i. $\emptyset, X \in \tau$.
- ii. Si $U, V \in \tau$, alors $U \cap V \in \tau$.
- iii. Si $(U_i)_{i \in I}$ est une famille de parties de X appartenant à τ , alors $\bigcup_{i \in I} U_i \in \tau$.

L'ensemble X , muni de la topologie τ , est appelé espace topologique.

Définition 1.7.2 Soient (X, τ) un espace topologique et $x \in X$. On dit qu'une partie V de X est un voisinage de x s'il existe un ouvert U de X tel que $x \in U \subset V$.

Plus généralement, soit A une partie de X , on appelle voisinage de A toute partie V de X telle qu'il existe un ouvert U de X vérifiant $A \subset U \subset V$.

Définition 1.7.3 Soient X, Y deux espaces topologiques

$f : X \longrightarrow Y$ une application.

1. On dit que f est ouverte si l'image par f de tout ouvert de X est ouverte dans Y .
2. On dit que f est fermée si l'image par f de tout fermé de X est fermée dans Y .

Proposition 1.7.1 :

Soient X, Y des espaces topologiques et $f : X \longrightarrow Y$ une application. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

- (i) f est une application ouverte.
- (ii) Pour tout sous-ensemble B de Y et pour tout fermé F dans X tel que $f^{-1}(B) \subset F$, il existe un fermé D dans Y tel que $B \subset D$ et $f^{-1}(D) \subset F$.

Proposition 1.7.2 :

Soient X, Y des espaces topologiques et $f : X \longrightarrow Y$ une application. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

- (i) f est fermée.
- (ii) Pour toute partie A de X , on a $\overline{f(A)} \subset f(\overline{A})$.

Proposition 1.7.3 :

Soient X un espace topologique, Y un espace topologique séparé, A une partie de X , $a \in \overline{A}$ et $f : A \longrightarrow Y$ une application. Alors on a :

1. Si ℓ est une limite de f en a , alors ℓ est la seule valeur d'adhérence de f en a .
2. L'application f admet au plus une limite en a .
3. Si $a \in A$ et si f admet en a la limite ℓ , alors $\ell = f(a)$.

Théorème 1.7.1 Soient X un espace topologique, $A \subset X$ et $x \in X$.

1. S'il existe une suite $(a_n)_{n \geq 0}$ dans A convergeant vers x , alors $x \in \overline{A}$.
2. Si x admet une base dénombrable de voisinages et si $x \in \overline{A}$, alors il existe une suite $(a_n)_{n \geq 0}$ dans A convergeant vers x .

Proposition 1.7.4 :

Soient (X, τ) un espace topologique compact et $A \subset X$.

Alors A est compact si et seulement si A est fermé.

Proposition 1.7.5 :

Toute partie compact d'un espace topologique séparé est fermée.

Proposition 1.7.6 :

Toute partie infinie d'un espace compact admet au moins un point d'accumulation.

Définition 1.7.4 soit X un espace normé, $x \in X$ et $r > 0$, on not :

1. $B_X(x, r) = \{y \in X : \|y - x\| < r\}$.
2. $\bar{B}_X(x, r) = \{y \in X : \|y - x\| \leq r\}$.
3. $\partial B_X(x, r) = \{y \in X : \|y - x\| = r\}$.

Chapitre 2

Les théorèmes de point fixe

La signification du théorème de point fixe.

L'application de ce théorème nous donne des résultats qui sont d'une importance fondamentale dans l'analyse non linéaire.

Citons quelques un :

- *Existence de la solution*
- *Unicité de la solution*
- *Stabilité de la solution sous une petite perturbation de l'équation*
- *Existence de la convergence des méthodes d'approximation*
- *Stabilité des méthodes d'approximation*

Pour achever ce paragraphe, nous allons montrer que les hypothèses du théorème point fixe.

Liste des théorèmes

- *Théorème du point fixe de Banach, également attribué au mathématicien français Émile Picard.*
- *Théorème du point fixe de Browder.*
- *Théorème du point fixe de Schauder.*

- Théorème du point fixe de Kranselskii.
- Théorème du point fixe de Kannan.
- Théorème de Poincaré-Birkhoff.
- Théorème du point fixe de Ryll-Nardzewski.

2.1 Théorème du points fixe de Banach

Théorème 2.1.1 (Théorème de point fixe de Banach 1922.)

Soit K un sous ensemble fermé et non vide de l'espace de Banach $(X, \|\cdot\|_X)$.

Supposons que $\Lambda : K \rightarrow K$ est une contraction, c'est à dire il existe $c \in]0, 1[$ telle que

$$\|\Lambda(u) - \Lambda(v)\|_X \leq c \|u - v\|_X \quad \forall u, v \in K.$$

Alors, il existe un unique élément $u \in K$ tel que $\Lambda(u) = u$; i.e possède un point fixe unique dans K .

Remarque 2.1.1 De plus nous avons la propriété suivante qui est importante, si $x_1 = f(x_0)$ et pour $n \geq 1, x_n = f(x_{n-1})$ alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x$$

et

$$d(x_n, x) \leq \frac{k^n}{(1-k)} d(x_1, x_0), n \geq 1,$$

x étant le point fixe de f .

Preuve.

Existence : Soit $y \in \mathbb{E}$ un point arbitraire dans $\mathbb{E}$. Considérons la suite $(x_n)_{n \geq 1}$ donnée par

$$\begin{cases} x_n &= f(x_{n-1}), n \geq 1 \\ x_0 &= y. \end{cases} \quad (2.1)$$

On doit prouver que (x_n) est une suite de Cauchy dans $\mathbb{E}$.

Pour $m \leq n$

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x_{m+1}) + d(x_{m+1}, x_{m+2}) + \dots d(x_{n-1}, x_n)$$

Puisque f est une contraction, on a :

$$d(x_p, x_{p+1}) = d(f(x_{p-1}), f(x_p)) \leq kd(x_{p-1}, x_p), \text{ pour } p \geq 1.$$

Par itération on a :

$$\begin{aligned} d(x_m, x(n)) &\leq (k^m + k^{m+1} + \dots + k_{n-1})d(x_0, x_1) \\ &\leq k^m(1 + k + \dots + k^{n-m-1})d(x_0, x_1) \\ &\leq \frac{k^m}{1-k}d(x_0, x_1). \end{aligned} \tag{2.2}$$

On déduit que $(x_n)_n$ est de Cauchy dans $\mathbb{E}$ qui est complet, donc $(x_n)_n$ converge vers x dans $\mathbb{E}$.

Par ailleurs puisque f est continue, on a :

$$x = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_{n-1}) = f(\lim_{n \rightarrow +\infty} x_{n-1}) = f(x).$$

Donc x est un point fixe de f (i.e. $f(x) = x$).

Unicité : Supposons qu'il existe deux points $x, y \in \mathbb{E}$ tel que $x \neq y$, $x = f(x)$ et $y = f(y)$.

Alors on a :

$$d(x, y) = d(f(x), f(y)),$$

donc

$$\frac{d(f(x), f(y))}{d(x, y)} = 1.$$

D'autre part on a :

$$\frac{d(f(x), f(y))}{d(x, y)} \leq k \leq 1.$$

Ce qui contradiction d'où l'unicité existe.

Exemple 2.1.1 1) $\mathbb{E} = \mathbb{R}$ et l'application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{1}{2}x + 1.$$

Alors f est contractante et admet un unique point fixe $x = 2$.

2) $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$, ne possède pas de point fixe (on a pas $f([0, 1]) \subset [0, 1]$.)

Remarque 2.1.2 1) Les hypothèses du théorème du Banach est réellement utilisé si nous a négligions seulement une, alors le point fixe n'existe pas.

a) $\mathbb{E}$ n'est pas stable pour $f : f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ sur $\mathbb{E} = [0, 1]$. On a $\mathbb{E}$ est fermé dans $\mathbb{R}$ donc complet (car $\mathbb{R}$ est complet . De plus $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} < 1$ ce qui implique que $\sup_{x \in \mathbb{E}} |f'(x)| < 1$ donc f est contractante.

Mais f n'admet pas de point fixe car $f([0, 1]) = [0, \sqrt{2}] \not\subset [0, 1]$, i.e $\mathbb{E}$ n'est pas stable par f .

b) Si f n'est pas contraction : $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ sur $\mathbb{E} = [0, +\infty[$.

On a $f : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$, et fermé de $\mathbb{R}$ qui est complet.

Mais f n'admet pas de point fixe car $\sup_{x \in \mathbb{E}} |f'(x)| = 1$ donc f n'est pas contractante.

c) $\mathbb{E}$ n'est pas complet : $f(x) = \frac{\sin x}{2}$ sur $\mathbb{E} =]0, \frac{\pi}{4}]$.

On a $f(]0, \frac{\pi}{4}]) =]0, \frac{\sqrt{2}}{4}] \subset]0, \frac{\pi}{4}]$, et $\sup_{x \in \mathbb{E}} |f'(x)| = \frac{1}{2} < 1$, donc f est contractante.

Mais n'admet pas de point fixe car $\mathbb{E}$ n'est pas fermé dans $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{E}$ n'est pas complet.

2) Si f est une application Lipschitzienne (pas nécessairement une contraction) mais l'une de ces itérées f^p est une contraction, alors f a encore un point fixe et un seul. Ceci résulte de l'unicité.

En effet, soit x l'unique point fixe de f^p on a :

$$f^p(f(x)) = f(f^p(x)) = f(x)$$

ce qui convient dire que $f(x)$ est aussi un point fixe de f^p et grâce à l'unicité $f(x) = x$.

Donc ce résultat est valable pour tous les types de contraction qui assurent l'unicité du point fixe.

3) Il se peut que f ne soit pas une contraction sur tout l'espace $\mathbb{E}$ mais juste dans le voisinage d'un point donné. Dans ce cas on a le résultat suivant qui est la version local du théorème de Banach.

Théorème 2.1.2 Soit $(\mathbb{E}, d)$ un espace métrique complet et $f : B(x_0, r) \rightarrow \mathbb{E}$ une contraction de constante k avec

$$d(f(x_0), x_0) > (1 - k)r.$$

Alors f admet un unique point fixe dans $B(x_0, r)$.

Preuve

On a $d(f(x_0), x_0) > (1 - k)r$ donc il existe r_0 tel que $0 \leq r_0 \leq 1$ et

$$d(f(x_0), x_0) > (1 - k)r_0.$$

On montre que $f : \overline{B(x_0, r_0)} \rightarrow B'(x_0, r_0)$.

Soit $x \in B'(x_0, r_0)$ alors

$$\begin{aligned} d(f(x), x_0) &\leq d(f(x), f(x_0)) + d(f(x_0), x_0) \\ &\leq kd(x, x_0) + (1 - k)r_0 \\ &\leq kr_0 + (1 - k)r_0 \\ &= r_0. \end{aligned}$$

2.2 Théorème du point fixe de Banach-Picard

Théorème 2.2.1 Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace normé complet, f une application contractante de E dans E : il existe un nombre k de sorte que $0 \leq k < 1$ et pour tout $x, y \in E$,

$$\|f(y) - f(x)\| \leq k\|y - x\|.$$

Alors il existe un et un seul point fixe ξ de l'application f : $\exists! \xi \in E; f(\xi) = \xi$.

Preuve

La preuve de ce théorème consiste à se donner $x_0 \in E$ et à étudier la suite de ses itérés par l'application f : $x_{n+1} = f(x_n)$. Si on note $f^{(j)}$ l'itérée d'ordre $j \in \mathbb{N}$ de l'application f pour la loi de composition, on obtient sans difficulté

$$\|f^{(j)}(y) - f^{(j)}(x)\| \leq k^j\|y - x\|.$$

On montre que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy. Comme $x_n = f^{(n)}(x_0)$, on a grâce à l'inégalité triangulaire

$$\|x_{n+m} - x_n\| = \|f(x_n) - f(x_{n-1})\| \leq k\|x_n - x_{n-1}\| \leq \cdots \leq k^n\|x_1 - x_0\|.$$

On déduit de toutes ces inégalités que pour deux entiers n et m arbitraires,

$$\|x_{n+m} - x_n\| \leq \frac{k^n}{1-k} \|x_1 - x_0\|.$$

Le membre de droite de l'inégalité précédente peut être rendu arbitrairement petit si n est assez grand et la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc une suite de Cauchy.

Comme l'espace E est complet, elle converge vers un point $\xi \in E$ qui satisfait par continuité à la relation $f(\xi) = \xi$. Un tel point fixe est nécessairement unique : pour un autre point fixe ξ' , on a $\|\xi - \xi'\| = \|f(\xi) - f(\xi')\| \leq k\|\xi - \xi'\|$ avec $0 \leq k < 1$; l'inégalité précédente n'est possible que sous la condition $\|\xi - \xi'\| = 0$, c'est à dire pour $\xi = \xi'$.

Les itérations de Picard $x_{n+1} = f(x_n)$ utilisées dans la preuve fournissent un procédé explicite d'approximation du point fixe : c'est l'"algorithme du point fixe".

2.3 Théorème du point fixe de Brouwer

Le théorème du point fixe de Brouwer est un résultat de la topologie algébrique. Il fait partie de la grande famille des théorèmes du point fixe. Ce théorème donne l'existence d'un point fixe pour une fonction continue sur une boule fermée dans un espace de dimension finie.

Théorème 2.3.1 Soit $D \subset E$ une partie non vide compact convexe de $\mathbb{R}^n$ et $f : D \rightarrow D$ une fonction continue. Il existe alors $x \in D$ tel que $f(x) = x$.

Le théorème de Brouwer prends plusieurs formes selon le contexte d'utilisation, pour $n = 1$ (dimension un) le théorème de Brouwer prend la forme suivante

Théorème 2.3.2 Si $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ continue, alors il existe $x \in [a, b]$ tel que $f(x) = x$.

Remarque 2.3.1 Dans $\mathbb{R}$ les parties compactes et convexes sont les segments.

Preuve.

Si f est continue sur $[a, b]$ dans lui même, la fonction $g(x) = f(x) - x$ est continue de plus

$$g(a) = f(a) - a \geq 0 \text{ et } g(b) = f(b) - b \leq 0.$$

Par le théorème de la valeur intermédiaire, il existe un point x_0 tel que $g(x_0) = x_0$, c'est-à-dire $f(x_0) = x_0$ (x_0 est le point fixe de f).

-Pour dimension deux :

Théorème 2.3.3 *Tout application f continue du disque fermé dans lui même admet au moins un point fixe.*

Remarque 2.3.2 *Dans le plan, les parties compactes et convexes sont des disques fermés ou bien des boules fermées.*

Preuve.

On va donner un squelette de la démonstration. Si C le domaine de définition de f d'intérieure vide. C'est un segment. Sinon, C est semable à une boule unité fermée. Le terme semable signifie qu'il existe un homéomorphisme φ de la boule unité vers C . L'équation définissant le point fixe peut encore s'écrire si $g = f \circ \varphi$, $g(x) = x$.

Autrement dit, on peut supposer que C est la boule unité fermée.

On peut de plus choisir la norme de manière quelconque. Si on choisit celle qui associer la valeur absolue de la plus grande coordonnée, cela revient à dire que l'on peut choisir pour compact C , l'ensemble $[1, 1][1, 1]$, sans perte de généralité. Si l'on définit la fonction h comme suit

$$\begin{aligned} h : [1, 1] \times [1, 1] &\longrightarrow [1, 1] \times [1, 1] \\ x &\longmapsto h(x) = g(x) - x, \end{aligned} \tag{2.3}$$

Cela revient à montrer que la fonction g atteint le vecteur nul sur $[1, 1] \times [1, 1]$. Si f_k , pour $k = 1, 2$ sont les deux fonctions coordonnées de f , cela revient à montrer l'existence d'un point x_0 , tel que h_1, h_2 , admettent toutes deux pour zéro de la valeurs x_0 .

La fonction h_1 est une fonction de $[1, 1] \times [1, 1]$ dans $[1, 1]$. Sur $\{1\} \times [1, 1]$. L'altitude est positive. En revanche sur $\{1\} \times [1, 1]$, elle est négative. Ceci laisse penser que la courbe de niveau 0 est une ligne qui parte d'un point $[1, 1] \times \{1\}$ pour finir sur un point de $[1, 1] \times \{1\}$. Le même raisonnement appliquée à h_2 laisse penser que la courbe de niveau 0 est cette fois-ci une ligne qui part d'un point de $\{1\} \times [1, 1]$ pour terminer sur un point de $\{1\} \times [1, 1]$.

Intuitivement, il semble évident que ces deux lignes de niveaux doivent nécessairement se croiser et ce point de croisement est un point fixe de $f \circ \varphi$.

Remarque 2.3.3 Il est important de voir que l'unicité n'est pas assurée par le Théorème de Browder du fait que chaque point de C est un point fixe de l'application identité. Il est possible de généraliser en toute dimension finie. Donc dans un espace euclidien, on retrouve.

Théorème 2.3.4 Toute application f continue de la boule unité fermée de $\mathbb{R}^n$ dans lui-même admet un point fixe. Ce point fixe n'est pas forcément unique.

2.4 Théorème du point fixe de Schauder

Le théorème du point fixe de Schauder est plus topologique et affirme qu'une application continue sur un convexe compact admet un point fixe, qui n'est pas nécessairement unique.

Remarque 2.4.1 - Ce théorème prolonge le résultat du théorème de Brouwer pour montrer l'existence d'un point fixe pour une fonction continue sur un convexe compact dans un espace de Banach.

- Schauder a généraliser le résultat de Brouwer en dimension infinie.

Théorème 2.4.1 Soit C un sous ensemble non vide, compact convexe dans un espace Banach E et supposons $f : C \rightarrow C$ une application continue. Alors f admet un point fixe.

Preuve.

Soit C un sous ensemble compact convexe d'un espace de Banach E , et soit $f : C$ une application continue. Comme C est un compact, f est uniforme continue donc, fixons $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x, y \in C$, on a

$$\|x - y\| \leq \delta \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon,$$

de plus il existe $\{x_1, x_2, \dots, x_\ell\} \subset C$ tel que $C \subset \bigcup_{1 \leq j \leq \ell} B(x_j, \delta)$.

Soit $L := \text{Vect}(f(x_j))_{1 \leq j \leq \ell}$ alors L est de dimension finie et $C^* := C \cap L$ est compact convexe de dimension finie.

Pour $1 \leq j \leq \ell$, on définit les fonctions continues $\psi_j : E \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$\psi_j = \begin{cases} 0 & \text{si } \|x - x_j\| \geq \delta \\ 1 - \frac{\|x - x_j\|}{\delta} & \text{sinon,} \end{cases}$$

il est clair que ψ_j est strictement positive sur $B(x_j, \delta)$ et nulle ailleurs.

On a donc pour tout $x \in C$,

$$\sum_{j=1}^{\ell} \psi_j(x) > 0.$$

Ainsi, on peut définir sur C les fonctions continues positives ε_j par

$$\varepsilon_j(x) = \frac{\psi_j(x)}{\sum_{k=1}^{\ell} \psi_k}$$

pour les quelles, on a $\sum_{j=1}^{\ell} \varepsilon_j(x) = 1$, pour tout $x \in C$.

Posant, pour $x \in C$

$$g(x) = \sum_{j=1}^{\ell} \varepsilon_j(x) f(x_j).$$

La fonction g est continue et prend ses valeurs dans C^* .

Le théorème de Brouwer assure que la restriction $g|_{C^* C^*} \rightarrow C^*$ possède un point fixe $z \in C^*$.

De plus

$$\begin{aligned} f(z) - z &= f(z) - g(z). \\ &= \sum_{j=1}^{\ell} \varepsilon_j(z) f(z) - \sum_{j=1}^{\ell} \varepsilon_j(x) f(x_j). \\ &= \sum_{j=1}^{\ell} \varepsilon_j(z) [f(z) - f(x_j)]. \end{aligned}$$

On a si $\varepsilon_j(z) \neq 0$ alors $\|z - x_j\| < \delta$, et par suite $\|f(z) - f(x_j)\| < \varepsilon$.

On a donc pour tout j

$$\begin{aligned} \|f(z) - z\| &\leq \sum_{j=1}^{\ell} \varepsilon_j(z) \|f(z) - f(x_j)\|. \\ &\leq \sum_{j=1}^{\ell} \varepsilon_j(z) \varepsilon = \varepsilon. \end{aligned}$$

Pour tout entier m , on peut trouver un point $y_m \in C$ tel que

$$\|f(z_m) - z_m\| \leq 2^{-m},$$

et puisque C est compact, on peut extraire une sous suite (z_{m_k}) de la suite $(z_m)_{m \in \mathbb{Z}}$ et qui converge vers un point $z^* \in C$.

Alors f étant continue, la suite $(f(z_{m_k}))$ converge vers $f(z^*)$, et on conclut par la suite que $f(z^*) = z^*$ i.e z^* est un point fixe de f sur C .

2.5 Théorème du point fixe de Kranoselskii

Nous donnons un théorème d'existence du point fixe concernant les applications de la forme $\Lambda = f + g$, où g est continue et compacte et f une contraction.

Théorème 2.5.1 Soit X un espace de Banach et D un ensemble non vide de X fermé borné et convexe. f, g deux applications de D dans X telles que :

f est une contraction (de constante k) g est compact et continue.

$$fx + gy \in D, \forall x, y \in D$$

Alors il existe $x \in D$ tel que $fx + gx = x$.

Remarque 2.5.1 Ce théorème peut être formulé d'une façon plus générale en considérant une seule application

$G : D \times Q(D) \rightarrow D$ où Q est un opérateur de D dans un autre espace de Banach Y et tel que :

- i) $G(x, y)$ est une contraction en x pour tout $y \in Q(D)$.
- ii) $G(x, y)$ est continue en $y \in Q(D)$ uniformément par rapport à $x \in D$.
- iii) Q est compacte et continue.

Sous ces conditions $x \in G(x, Q(x))$ a une solution dans D

-La condition (iii) peut être remplacée par $fx + gx \in D (\forall x \in D)$ grâce au théorème de Darbo.

-Dans un espace d'Hilbert (iii) peut être aussi remplacée par $fx + gx \in D (\forall x \in D)$. [7]

2.6 Théorème du point fixe de Kannan

Théorème 2.6.1 (R. Kannan 1968)

Soient (E, d) un espace métrique complet et $f : E \rightarrow E$ une application. Supposons qu'il existe $a \in [0, \frac{1}{2}[$, tel que pour tous $x, y \in E$, on a

$$d(f(x), f(y)) \leq a[d(x, f(x)) + d(y, f(y))]. \quad (2.4)$$

Alors f admet un point fixe unique dans E .

Preuve.

Existence : Soit $x_0 \in E$, on définit la suite $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ par

$$x_n = f(x_{n-1}), n = 1, 2, \dots,$$

en utilisant la condition (2.4), on obtient

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+1}) &= d(f(x_{n-1}), f(x_n)) \\ &\leq a[d(x_{n-1}, x_n) + d(x_n, x_{n+1})], \end{aligned}$$

ce qui implique

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \left(\frac{a}{1-a}\right) d(x_{n-1}, x_n),$$

par récurrence sur n , on a

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \left(\frac{a}{1-a}\right)^n d(x_0, x_1).$$

On pose $r = \frac{a}{1-a}$. Si n, p sont deux entiers naturels, alors

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+p}) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \dots + d(x_{n+p-1}, x_{n+p}) \\ &\leq (r^n + r^{n+1} + \dots + r^{n+p-1}) d(x_0, x_1) \\ &\leq \frac{r^n}{1-r} d(x_0, x_1) \end{aligned}$$

Comme $a \in [0, \frac{1}{2}[$ on a $r \in [0, 1[$ et donc $d(x_n, x_{n+p}) \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$.

La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est alors de Cauchy.

Comme E est complet, il existe $u \in E$ tel que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = u$. u est un point fixe de E car

$$\begin{aligned} d(u, f(u)) &\leq d(u, x_n) + d(x_n, f(u)) \\ &\leq d(u, x_n) + a[d(x_n, x_{n-1}) + d(u, f(u))], \end{aligned}$$

et donc

$$d(u, f(u)) \leq \frac{1}{1-a}d(u, x_n) + \frac{a}{a-1}d(x_{n-1}, x_n).$$

Soit $\varepsilon > 0$ un réel arbitraire, comme $(x_n)_{n \geq 0}$ converge vers u , il existe un entier naturel $N = N(\varepsilon)$ tel que

$$n \geq N \Rightarrow d(u, x_n) \leq \varepsilon \frac{1-a}{1+a}$$

et

$$d(x_{n-1}, x_n) \leq \varepsilon \frac{1-a}{1+a}$$

Il en résulte que

$$d(u, f(u)) \leq \frac{\varepsilon}{1+a} + \frac{\varepsilon a}{1+a} = \varepsilon.$$

Comme ε est arbitraire, on déduit que $f(u) = u$.

Unicité : Soit v est un autre point fixe de f , alors

$$\begin{aligned} d(u, v) &\leq a[d(u, f(u)) + d(v, f(v))] \\ &= 0, \end{aligned}$$

et donc $u = v$, ce qui achève la preuve.

Exemple 2.6.1 Soit $E = \mathbb{R}$ et $f : E \rightarrow E$ une application définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 2 \\ -\frac{1}{2} & \text{si } x > 2. \end{cases}$$

Alors :

1. f n'est pas continue.
2. f satisfait la condition (1) avec $a = \frac{1}{5}$ et par conséquent, d'après le théorème de Kannan, f admet un point fixe unique $u = 0$ dans E .

Chapitre 3

Applications du point fixe aux equations differentielles

3.1 Application de contraction de Banach

Théorème 3.1.1 Le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (3.1)$$

où $f : D \rightarrow E$, D est un domaine de $\mathbb{R} \times E$ avec E un Banach, alors le problème admet une unique solution $x(t)$ définie sur un certain intervalle $I = [t_0 - h, t_0 + h]$, pourvu que h est choisi tel que :

$$h \leq \min\{r, r\delta, \frac{1}{\beta}\}.$$

r : Rayon environ x_0

Soit $\mathbb{E}$ un espace de Banach, on définit l'opérateur :

$$\Lambda : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E},$$

$$\Lambda x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s))ds,$$

On considère les hypothèses suivantes :

H_1 : f est continue,

H_2 : $\delta > 0$ et $\beta > 0$ tel que :

$$\delta = \sup_{(t,x) \in D} |f(t,x)|,$$

et

$$\beta = \sup_{(t,x) \in D} |f_x(t,x)|.$$

H_3 : De plus la fonction f est β -lipschitzienne en x uniformément par rapport à $t \in I$.

En effet, en utilisant le théorème des accroissements finis il existe $z(t)$ tel que

$$f(t, x(t)) - f(t, y(t)) = f_x(t, z(t))[x(t) - y(t)].$$

D'où

$$|f(t, x(t)) - f(t, y(t))| \leq \beta |x(t) - y(t)|.$$

Preuve :

Montrons que l'opérateur Λ vérifie les conditions du théorème de contraction de Banach, la preuve est donnée en deux étapes.

Étape(1). on montre que $\Lambda(M) \subset M$, avec $M = B(x_0, r), r > 0$ i.e.

$$\forall x \in M, \quad \Lambda x \in M,$$

soit $x \in M$, pour $t \in I$ on a :

$$\Lambda x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds \Leftrightarrow \Lambda x(t) - x_0 = \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds,$$

alors

$$|\Lambda x(t) - x_0| \leq \int_{t_0}^t |f(s, x(s))| ds, \quad \forall t \in I,$$

par passage au sup, on obtient

$$\begin{aligned} \sup_{t \in I} |\Lambda x(t) - x_0| &\leq \int_{t_0}^t \sup_{t \in I} |f(s, x(s))| ds \\ &\leq \delta |t - t_0| \\ &\leq h \cdot \delta \\ &\leq r, \end{aligned}$$

par suite $d(\Lambda x, x_0) \leq r$. D'où, $\Lambda x \in M$.

Étape(2). Λ est une contraction. Soient $x, y \in M$ pour tout $t \in I$ on a :

$$\begin{aligned}\Lambda x(t) - \Lambda y(t) &= x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s))ds - x_0 - \int_{t_0}^t f(s, y(s))ds, \\ &= \int_{t_0}^t (f(s, x(s)) - f(s, y(s)))ds,\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}|\Lambda x(t) - \Lambda y(t)| &\leq \int_{t_0}^t |f(s, x(s)) - f(s, y(s))|ds, \\ &\leq \beta.h \sup_{t \in I} |x(t) - y(t)|,\end{aligned}$$

par suite

$$d(\Lambda x, \Lambda y) \leq \beta.h.d(x, y),$$

Λ est une contraction car $\beta.h < 1$, par suite Λ admet un unique point fixe x qui correspond à l'unique solution $x(t)$ de l'équation différentielle.

3.2 Application de théorème de Schauder

Théorème 3.2.1 soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application continue, alors si $t_0 \in I$ et $x_0 \in \Omega$ sont donnés, le problème suivant :

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (3.2)$$

admet au moins une solution x de classe $\mathcal{C}^1$ définie sur un certain intervalle dans I de la forme $[t_0 - h, t_0 + h]$, avec $h > 0$.

Preuve :

Cylindre de sécurité.

Comme I et Ω sont des ouverts, il existe $D_0 = [t_0 - h, t_0 + h] \times \bar{B}(y_0, r_0)$ un cylindre inclus dans $I \times \Omega$, D_0 est compact donc f est bornée sur D_0 par une constante M .

Soit $h \leq h_0$ et x une solution du problème définie au moins sur $I_0 \subset [t_0 - h, t_0 + h]$, supposons qu'elle sorte du cylindre

$$D = [t_0 - h, t_0 + h] \times \bar{B}(x_0, r_0),$$

au temps $\tau \in [t_0 - h, t_0 + h]$ alors, par continuité.

$$r_0 = \|x(\tau) - x_0\| = \left\| \int_{t_0}^{\tau} x'(u) du \right\| \leq hM.$$

Donc si $h \leq \min(h_0, r_0 M)$ alors toute solution définie sur $I_0 \subset [t_0 - h, t_0 + h]$, rest dans la boule $\bar{B}(x_0, r_0)$. On nommera cylindre de sécurité l'ensemble

$$[t_0 - h, t_0 + h] \times \bar{B}(x_0, r_0).$$

-Application de Schauder : On note :

$$E = \mathcal{C}([t_0 - h, t_0 + h], \mathbb{R}^n) \quad \text{et} \quad D = \mathcal{C}([t_0 - h, t_0 + h], \bar{B}(x_0, r_0)).$$

Alors E est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel normé et D est un convexe fermé non vide, pour $x \in D$, on définit la fonction $\Phi(x)$ sur $[t_0 - h, t_0 + h]$ comme suit :

$$\Phi x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(u, x(u)) du,$$

par convergence dominée, Φ est continue puis comme $Mh \leq r_0$, on a

$$\Phi : D \rightarrow D,$$

supposons que $\Phi(D)$ est relativement compact, alors par le théorème de Schauder, on a l'existence d'un point fixe dans D de Φ , i.e. une solution à notre équation différentielle définie sur $[t_0 - h, t_0 + h]$.

$\Phi(D)$ est relativement compacte, $[t_0 - h, t_0 + h]$ est compact et $\Phi(D)$ est bornée par r_0 en norme infinie.

Puis si $x \in D$ et $t_1, t_2 \in [t_0 - h, t_0 + h]$ alors :

$$\begin{aligned} \|\Phi x(t_1) - \Phi x(t_2)\| &= \left\| \int_{t_1}^{t_2} f(u, x(u)) du \right\| \\ &\leq M|t_1 - t_2|. \end{aligned}$$

En déduit que les fonctions de $\Phi(D)$ sont M -lipschitzienne sur $[t_0 - h, t_0 + h]$.

Donc forment une famille équicontinue.

Le théorème d'Ascoli permet alors de dire que $\Phi(D)$ est relativement compacte.

3.3 Application du théorème de Krasnoselskii

On se propose d'étudier le problème à valeur sur le bord de Neumann suivant :

$$\begin{cases} -u'' + m^2 u = \lambda f(t, u) + g(t, u), & 0 < t < 1 \\ u'(0) = u'(1) = 0. \end{cases} \quad (3.3)$$

Où m est une constante positive.

$\lambda > 0$ est un paramètre, $f : (0, 1) \times [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ et $g : (0, 1) \times [0, \infty) \rightarrow (-\infty, +\infty)$ sont continues.

On va prouver l'existence d'une solution positive du problème (1) sous certaines hypothèses sur f et g et pour un paramètre λ suffisamment petit. L'approche est basée sur le théorème du point fixe de krasnoselskii. On considère le problème dans l'espace de Banach $E = C[0, 1]$ muni de la norme : $\|u\| = \sup_{t \in [0, 1]} |u(t)|$.

Soit $G(t, s)$, la fonction de Green pour le problème à valeur sur le bord de Neumann :

$$\begin{cases} -u'' + m^2 u = 0, & 0 < t < 1 \\ u'(0) = u'(1) = 0. \end{cases} \quad (3.4)$$

Alors

$$G(t, s) = \frac{1}{\rho} \begin{cases} \varphi(s)\varphi(1-t), & 0 \leq s \leq t \leq 1 \\ \varphi(t)\varphi(1-s), & 0 \leq t \leq s \leq 1, \end{cases}$$

où $\rho = \frac{1}{2}m(e^m - e^{-m})$, $\varphi(t) = \frac{1}{2}m(e^{mt} + e^{-mt})$

$\varphi(t)$ est croissante sur $[0, 1[$ et $G(s, t) \leq G(s, s)$, $0 \leq s, t \leq 1$.

Nous énonçons les deux lemmes suivants qui nous seront utiles :

Lemme 3.3.1 Soit $G(t, s)$ la fonction de Green associée au problème (3.4).

supposons que $0 < \theta < \frac{1}{2}$, alors : $G(t, s) \geq M_\theta G(s, s)$, $\theta \leq t \leq 1 - \theta$, $0 \leq s \leq 1$ où

$$M_\theta = \frac{e^{m\theta} + e^{-m\theta}}{e^m + e^{-m}}$$

$$G(t, s) \geq C \varphi(t)\varphi(1-t)G(t_0, s), \quad t, t_0, s \in [0, 1]$$

$$\text{où } C = \frac{1}{\varphi^2(1)}.$$

Lemme 3.3.2 :

Soit $y \in C((0, 1), [0, \infty))$, $0 < \int_0^1 y(s)ds < \infty$ alors le problème à valeur sur le bord de

Nemann :

$$\begin{cases} -w'' + m^2 w = y(t), 0 < t < 1 \\ w'(0) = w'(1) = 0. \end{cases} \quad (3.5)$$

admet une solution unique w et il existe une constante C_y telle que :

$$C \| w \| \varphi(t)\varphi(1-t) \leq w(t) \leq C_y \varphi(t)\varphi(1-t) \text{ avec } C_y = \frac{1}{\rho} \int_0^1 y(s) ds.$$

-On déduit du lemme (3.3.2) que si $y(t) = M$ alors $C_y = C_M = \frac{M}{\rho}$.

On impose les hypothèses suivantes :

(H₁) $f(t, u) \leq p(t)q(u)$ où $p : (0, 1) \rightarrow [0, +\infty)$ et $q : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ sont continues.

(H₂) $|g(t, u)| \leq M, M > 0$ est une constante.

(H₃) $0 < \int_0^1 G(s, s)p(s)ds < +\infty$.

(H₄) $\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{f(t, u)}{u} = +\infty$ uniformément sur tout sous intervalle compact de $[0, 1]$.

Soit $C^+[0, 1] = \{u \in [0, 1], u(t) \geq 0, 0 \leq t \leq 1\}$,

et $K = \{u \in C^+[0, 1], \min_{\theta \leq t \leq 1-\theta} u(t) \geq M_\theta \|u\|\}$.

On vérifie, aisément, que $C^+[0, 1]$ et K sont deux cônes de E .

Soit $v(t)$ la solution du problème à valeur sur le bord :

$$\begin{cases} -v'' + m^2 v = M, 0 < t < 1 \\ v'(0) = v'(1) = 0. \end{cases} \quad (3.6)$$

D'après le lemme(3.3.2) $v(t) \leq C_M \varphi(t)\varphi(1-t) = \frac{M}{\rho} \varphi(t)\varphi(1-t)$.

Posons :

$$[y(t)]^* = \begin{cases} y(t), & y(t) \geq 0 \quad 0 < t < 1 \\ 0 & y(t) < 0. \end{cases}$$

et $F(\lambda, t, u) = \lambda f(t, [u - v]^*) + g(t, [u - v]^*) + M, 0 \leq t \leq 1$.

Considérons le problème à valeur sur le bord :

$$\begin{cases} -u'' + m^2 u = F(\lambda, t, u) \\ u'(0) = u'(1) = 0. \end{cases} \quad (3.7)$$

Il n'est pas difficile de prouver que $u = u_0 - v$ est une solution positive du problème (3.3) si et seulement si u_0 est une solution positive du problème (3.7), v est la solution du problème (3.6) et $u_0(t) > v(t), 0 < t < 1$.

Définissons l'opérateur $\Pi_\lambda : C^+[0, 1] \rightarrow C^+[0, 1]$ par $(\Pi_\lambda u)(t) = \int_0^1 G(t, s)F(\lambda, s, u(s))ds$.

Lemme 3.3.3 Supposons que les hypothèse $(H_1) - (H_3)$ sont vérifiées.

Alors $\Pi_\lambda : K \rightarrow K$ est complètement continu (i.e. continu et compact). Le théorème du point fixe de krasnoselskii dans un cône va jouer un rôle important pour prouver le résultat cherché.

Théorème 3.3.1 Soit E un espace de Banach et $K \subset E$ un cône. Ω_1, Ω_2 sont deux ouverts de E avec $0 \in \Omega_1$ et $\bar{\Omega}_1 \subset \Omega_2$.

Soit $\Pi : K \cap (\bar{\Omega}_2 \setminus \Omega_1) \rightarrow K$ un opérateur complètement continu tel que :

- a) $\|\Pi u\| \leq \|u\|$ pour tout $u \in K \cap \partial\Omega_1$, et $\|\Pi u\| \geq \|u\|$ pour tout $u \in K \cap \partial\Omega_2$
- b) $\|\Pi u\| \leq \|u\|$ pour tout $u \in K \cap \partial\Omega_2$, et $\|\Pi u\| \geq \|u\|$ pour tout $u \in K \cap \partial\Omega_1$

Alors Π possède un point fixe dans $K \cap (\bar{\Omega}_2 \setminus \Omega_1)$.

On enchaîne avec le résultat principal qu'est :

Théorème 3.3.2 Supposons que $(H_1) - (H_4)$ sont satisfaites. Alors le problème (3.3)

admet au moins une solution positive $u \in (C^2(0, 1) [0, 1])$,

si $0 < \lambda \leq \left[\max_{0 \leq \tau \leq r} q(\tau) \int_0^1 G(s, s)p(s)ds \right]^{-1}$ où $r = \max \left\{ 1 + 2M \int_0^1 G(s, s)ds, \frac{M}{\rho C} \right\}$

Démonstration : D'après le lemme (3.3.3), Π_λ est complètement continu.

Soit $\Omega_1 = \{u \in C[0, 1], \|u\| < r\}$.

Pour tout $u \in K \cap \partial\Omega_1, t \in [0, 1]$, on a :

$$\begin{aligned}
 (\Pi_\lambda)(t) &= \int_0^1 G(t, s)F(\lambda, s, u(s)) \\
 &= \int_0^1 G(t, s)(\lambda f(s, [u(s) - x(s)]^*) + g(s, [u(s) - x(s)]^*) + M)ds \\
 &\leq \int_0^1 G(t, s)\lambda p(s)q([u(s) - x(s)]^*)ds + 2M \int_0^1 G(s, s)ds \\
 &\leq \lambda \max_{0 \leq \tau \leq r} q(\tau) \int_0^1 p(s)G(s, s)ds + 2M \int_0^1 G(s, s)ds \\
 &\leq 1 + 2M \int_0^1 G(s, s)ds \leq r = \|u\|.
 \end{aligned}$$

Ce qui implique que $\|\Pi_\lambda u\| \leq \|u\|$ pour $u \in K \cap \partial\Omega_1$.

Par ailleurs, choisissons N assez grand tel que : $\frac{1}{2}\lambda M_\theta N C \varphi^2(\theta) \int_0^1 G(s, s) ds \geq 1$.

D'après (H_4) , il existe une constante $B > 0$ telle que :

$$\frac{f(s, u)}{u} > N.$$

Pour $(s, u) \in [\theta, 1 - \theta] \times [B, \infty)$.

Posons :

$$\Omega_2 = \{u \in C[0, 1], \|u\| < R\},$$

$$\text{où } R = \max\{2r, \frac{2M}{\rho C} \cdot \frac{2B}{C \rho^2(\theta)}\}.$$

Pour tout $u \in K \cap \partial\Omega_2, s \in [0, 1]$, on a :

$$\begin{aligned} u(s) - v(s) &\geq u(s) - C_M \rho(s) \rho(1-s) \geq u(s) - \frac{M}{\rho} \varphi(s) \varphi(1-s) \\ &\geq u(s) - \frac{M}{\rho C R} C \|u\| \varphi(s) \varphi(1-s) \\ &\geq u(s) - \frac{1}{2} u(s) \\ &\geq \frac{1}{2} u(s) \geq 0. \end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned} \min_{\theta \leq s \leq 1-\theta} (u(s) - v(s)) &\geq \min_{\theta \leq s \leq 1-\theta} \frac{1}{2} u(s) \geq \min_{\theta \leq s \leq 1-\theta} \frac{C}{2} \|u\| \varphi(s) \varphi(1-s) \\ &\geq \frac{C R}{2} \varphi^2(\theta) \geq B. \end{aligned}$$

Donc pour tout $t \in [\theta, 1 - \theta]$,

$$\begin{aligned}
(\Pi_\lambda u)(t) &= \int_0^1 G(t, s) F(\lambda, s, u(s)) \\
&= \int_0^1 G(t, s) (\lambda f(s, [u(s) - v(s)]^*) + g(s, [u(s) - v(s)]^*) + M) ds \\
&\geq \int_0^{1-\theta} G(t, s) \lambda f(s, [u(s) - v(s)]^*) ds \\
&\geq \lambda M_\theta \int_0^{1-\theta} G(s, s) N(u(s) - v(s)) ds \\
&\geq \lambda M_\theta \int_0^{1-\theta} G(s, s) N \frac{u(s)}{2} ds \\
&\geq \lambda M_\theta \int_0^{1-\theta} G(s, s) \frac{NC}{2} \|u\| \varphi(s) \varphi(1-s) ds \\
&\geq \frac{1}{2} \lambda M_\theta NC \varphi^2(\theta) \int_0^{1-\theta} G(s, s) \|u\| ds \geq \|u\|,
\end{aligned}$$

ceci implique que $\|\Pi_\lambda\| \geq \|u\|$ pour tout $u \in K \cap \partial\Omega_2$.

En appliquant (b) du théorème (3.3.1), on déduit que Π_λ possède un point fixe u_0 avec $r \leq \|u_0\| \leq R$.

Du lemme (3.3.1), on a :

$$\begin{aligned}
u_0 &\geq C \|u_0\| \varphi(t) \varphi(1-t) \\
&\geq Cr \varphi(t) \varphi(1-t) \\
&\geq \frac{C\rho r}{M} \frac{M}{\rho} \varphi(t) \varphi(1-t) \\
&\geq \frac{M}{\rho} \varphi(t) \varphi(1-t) = v(t).
\end{aligned}$$

Et $u(t) = u_0(t) - v(t)$, $u(t) \in C[0, 1] \cap C^2(0, 1)$ est une solution positive du problème.

Bibliographie

- [1] R.P. Agarwal, D. O'Regan, D.R. Sahu, *Fixed point theory for Lipschitzian type mappings with applications*, Springer
- [2] C. Bessaga, *On the converse of the Banach fixed point principle*, *colloq. Math.* 7 (1959) 41-43
- [3] M. Edelstein, *An extension of Banach's contraction principle*, *Proc. Amer. Math. Soc.* 12 (1961) 7-10.
- [4] W.A. Kirk, *Mappings of generalized contractive type*, *J. Math. Anal. Appl.* 32 (1970) 567-572
- [5] S. Leader, *Two convergence principals with applications to fixed points in metric spaces*, *Non linear Analysis* 6 (1982) 531-538
- [6] A. Meir and E. Keeler, *A theorem on contractive mappings*, *J. Math. Anal. Appl.* 28 (1969) 326-329
- [7] W.R. Melvin, *Some extensions of Krasnoselskii fixed point theorem*, *J. Diff. Eq.* 11 (1972) 335-348
- [8] V.M. Sehgal and S.P. Singh, *On a fixed point theorem of Krasnoselskii for locally convex-spaces*, *Pacific J. Math.* 62 (1976) 561-567
- [9] D.R. Smart, *Fixed point theory*, *Combridge Uni. Press, Combridge* 1974
- [10] K. Yosida, *Functional Analysis*, 6th ed., Springer, New York 1995
- [11] C.B. Zhai, C. Yang, C.M. Guo, *Positive solutions of operator equations on ordered Banach spaces and applications*, *Comp. Maths. App* 56 (2008)