

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieure et de la
Recherche Scientifique



Université Echahid Hamma Lakhdar d'El-Oued



FACULTE DES SCIENCES ET TECHNOLOGIE

Mémoire de fin d'étude

Présenté pour l'obtention du diplôme de

LICENCE ACADEMIQUE

Domaine: Sciences et Technologies

Filière: Génie mécanique

Spécialité: Energétique

Thème

Etude de la variation de vitesse en couche limite
dynamique laminaire en présence de contrôle actif

Devant le jury composé de :

..... Président
..... Examineur
..... Examineur
Berkane Houda Encadreur

Présenté par :

- Khaldi Bachir
- Moumen Sad Abdeldjalil
- Lemmouchia Abdelouahab

2014-2015

REMERCIEMENTS

*En premier lieu, nous tenons à remercier «DIEU» qui
Nous ont aidés pour que ce modeste travail soit achevé.
Nous adressons nos plus vifs remerciements à toutes
les personnes qui nous ont aidés de près ou de loin
à l'élaboration de ce modeste mémoire
nous remercions notre encadreur **Berkane Houda**
pour leur conseils.*

*Un grand remerciement aussi à tous les enseignants qui
ont contribué à notre formation à l'institut d'électrotechnique.
Nous remercions vivement nos familles Mouden , khaldi
et Lemmouchia pour leur aide matérielle et morale
durant toute la période de formation..*

*Mouden sad abdeljalil
khaldi bachir
lemmouchia abdelouahab*





Dédicace

Je dédie ce présent mémoire à :

Ma mère, mon père, mes frères et sœurs et à
la famille Moumen.

A mes amis : Larbi ,Bachir , Kama, Ismail ,Wahab,
Med , lazher, et professeurs de l'université de Hamma
Lakhder.

A toutes les personnes qui ont contribuées de
près ou de loin à l'élaboration de ce travail.

abdeljalil

Dédicace

Je dédie ce présent mémoire à :

Ma mère, mon père, mes frères et sœurs et à
la famille Khaldi

A mes amis : Abdeldjalil, Bachir, Larbi, Wahab,
Othman, Ali, Et Professeurs De L'université De
Hamma Lakhder.

A toutes les personnes qui ont contribuées de
près ou de loin à l'élaboration de ce travail.

bachir

TABLE DES MATIERES

Remerciements	i
Table des matières	ii
Nomenclature	iii
Introduction	01

Chapitre 1 : Généralités et équations fondamentales

1.1 Viscosité	02
1.2 Equation de continuité.....	03
1.3 Equation de quantité de mouvement.....	04
1.4 Description de l'écoulement autour d'une paroi.....	06

Chapitre 2 : Adimensionnalisation des équations des couche limite dynamique

2.1 Couche limite dynamique.....	07
2.2 Equations de couche limite dynamique isovolume.....	07
2.2.1 Configuration de la couche limite.....	08
2.2.2 Forme adimensionnelle des équations locales.....	08
2.2.3 Hypothèses et modèle de "Prandtl".....	09
2.2.4 Couplage fluide parfait-couche limite.....	10

Chapitre 3 : Solution de Blasius des équations de couche limite

3.1 Situation du problème et mise en équation.....	11
3.2 Méthodes de résolution du problème.....	13
3.1.3 Présentation de l'organigramme de calcul.....	37
3.1.4 Evaluation de la couche limite dynamique.....	38

3.1.4.1 Evaluation des épaisseurs intégrales	39
3.1.4.2 Evaluation de la contrainte pariétale et du coefficient de frottement..	41
3.1.4.3 Evaluation de la traînée pariétale et du coefficient de traînée.....	41
3.3 Contrôle actif de la couche limite dynamique.....	48
3.3.1 Aspiration et Soufflage avec une vitesse uniforme.....	48
3.3.2 Aspiration et Soufflage avec un profil linéaire de vitesse.....	50
3.4 Résultats et commentaires.....	52
3.4.1 Représentation graphique des résultats.....	52
3.4.1.1 Epaisseur conventionnelle de la couche limite dynamique.....	52
3.4.1.2 Epaisseur de déplacement.....	52
3.4.1.3 Epaisseur de quantité de mouvement.....	53
3.4.1.4 Coefficient de frottement.....	53
3.4.2 Commentaires et analyse des résultats.....	54
CONCLUSION GENERALE	98
BIBLIOGRAPHIE.....	



Dédicace

Je dédie ce présent mémoire à :

Ma mère, mon père, mes frères et sœurs et à
la famille Lemmouchia

A mes amis : Abdeldjalil, Bachir, Larbi , Said , Et
Professeurs De L'université De Hamma Lakhder.

A toutes les personnes qui ont contribuées de
près ou de loin à l'élaboration de ce travail.

abdelouaha

abdelouaha

b

Nomenclature

Caractères usuels

$\overline{\overline{D}}$	tenseur de taux de déformations	$1/s$
f	fonction de Blasius	
\vec{f}	vecteur des forces appliquées au fluide	kgm/s^2
g	accélération de la pesanteur	m/s^2
h	enthalpie par unité de masse	m^2/s^2
k	coefficient de transfert de chaleur pariétal	w/m^2sk
L	longueur de la plaque	m
m	la masse	kg
p	pression	kg/ms^2
$\overline{\overline{P}}$	tenseur des contraintes totales	kg/ms^2
S	distance entre deux plans parallèles	m
ds	élément de surface	m^2
U, V	composantes de vitesse	m/s
w	envergure de la plaque	m

Caractères grecs

δ	épaisseur de la couche limite dynamique	m
$\varepsilon, \varepsilon'$	nombres infiniment petits	
μ	viscosité dynamique	kg/ms
ν	viscosité cinématique	m^2/s
η	coordonnée réduite	
ρ	masse volumique	kg/m^3
Σ	surface de contrôle	m^2
τ	tenseur des contraintes visqueuses	kg/ms^2
Ω	volume de contrôle	m^3

ϕ	densité de flux par unité de surface	m^2 / s^2
ψ	fonction de courant	m^2 / s

Nombres sans dimensions

Re	nombre de Reynolds	$\rho U_0 L / \mu$
----	--------------------	--------------------

Indices

E	relatif à l'interface
L	relatif à une valeur globale
x	relatif à une valeur locale
max	relatif à une valeur maximale
P	relatif à la paroi
∞	loin de la paroi

Introduction

Considérons l'écoulement d'un fluide avec une vitesse à l'infini amont U_∞ , au voisinage de la paroi, les valeurs de la vitesse sont différentes de celles de l'écoulement à potentiel et varient en fonction de la distance à la paroi y . Cette zone de gradients de vitesse est appelée couche limite. Elle résulte d'un échange de quantité de mouvement entre le fluide et la paroi. Son épaisseur est généralement petite par rapport à l'ensemble de l'écoulement.

Il existe en général plusieurs techniques, qui ont été développées, pour le contrôle artificiel du comportement de la couche limite le long d'un corps. Parmi ces techniques, le soufflage ou l'aspiration d'un fluide par la surface du corps qui conduit au changement de la structure de la couche limite.

Dans cette étude on s'intéresse à l'influence de du contrôle actif sur la distribution des vitesses en couche limite laminaire pour des fluides incompressibles sur une paroi lisse.

Pour arriver à cet objectif on propose les chapitres suivants :

Dans le premier chapitre on présente des définitions puis un rappel des équations fondamentales de la mécanique des fluides.

Le deuxième chapitre est consacré à l'étude de la couche limite laminaire au niveau de l'écoulement dynamique. Les idées de base sur lesquelles repose le concept de la couche limite sont exposées avec les simplifications des équations conduisant aux formes régissant les écoulements de type couche limite.

A partir du troisième chapitre nous résolvons les équations de la couche limite dynamique à l'aide de la méthode de "Blasius" et de la méthode approchée. Le problème est traité en présence et en absence du contrôle actif.

Une conclusion générale est donnée pour commenter les résultats obtenus et pour proposer des perspectives à notre étude.

Chapitre 1

Généralités et équations fondamentales

1.1. Viscosité

La notion de viscosité est associée à la résistance qu'oppose tout fluide à sa mise en mouvement. Pour préciser cette propriété de façon plus quantitative, nous considérons l'expérience de "Couette" en écoulement plan. Telle qu'elle est schématisée à la figure (1.1), cette expérience concerne un fluide visqueux disposé entre deux plans parallèles distants d'une hauteur S . Elle consiste à déplacer relativement à l'autre, l'une des deux parois d'un mouvement permanent de translation rectiligne dans son propre plan. Pour simplifier, on suppose la paroi inférieure fixe et la paroi supérieure mobile à la vitesse U_0 .

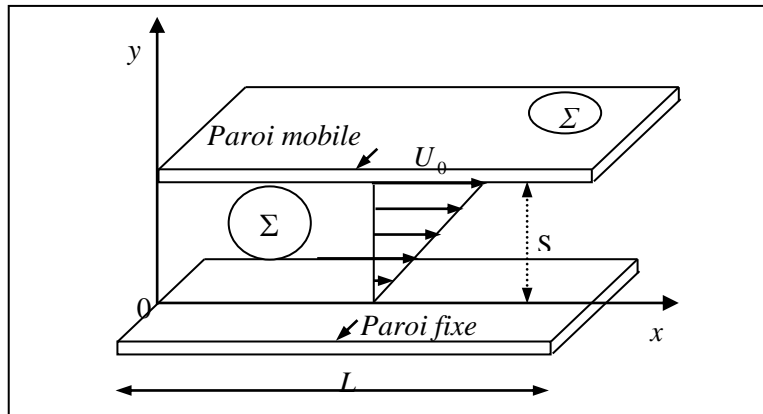


Fig.1.1: Schéma de l'écoulement de Couette plan.

En l'absence de toute autre force extérieure (gravité, pression), le mouvement du fluide résulte exclusivement du déplacement du plan mobile.

En régime permanent, l'expérience révèle, pour certains fluides, que le profil de vitesses qui s'établit entre les deux plaques est linéaire. En outre pour maintenir le mouvement uniforme de la paroi supérieure, il faut exercer sur une aire Σ de celle-ci une force tangentielle dont le module F est tel que :

$$F/\Sigma \propto \mu U_0/S$$

En désignant par μ le coefficient de proportionnalité appelé *viscosité dynamique* du fluide,

on écrira :

$$\frac{F}{\Sigma} = \mu \frac{U_0}{S} \quad (1.1)$$

Cette relation s'applique bien aux fluides usuels. Elle est à l'origine d'un *comportement rhéologique* que nous qualifierons de *newtonien*.

On introduit également le coefficient de *viscosité cinématique* :

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad (1.2)$$

1.2. Equation de continuité

Considérons un volume matériel Ω . La masse contenue dans ce volume est :

$$m = \int_{\Omega} \rho dv$$

où ρ désigne la densité locale. Si le volume matériel ne contient ni sources ni puits, la masse qui se trouve dans Ω est constante et on peut écrire :

$$\frac{d}{dt} m = \frac{d}{dt} \int \int \int_{\Omega} \rho dv = 0 \quad (1.3)$$

Nous pouvons maintenant appliquer le théorème de transport au volume Ω :

$$\frac{d}{dt} \int \int \int_{\Omega} \rho dv = \int \int \int_{\Omega} \frac{\partial \rho}{\partial t} dv + \int \int_{\Sigma} \rho (\vec{V} \cdot \vec{n}) ds$$

Σ est la surface de contrôle. D'après (1.3) on peut écrire :

$$\int \int \int_{\Omega} \frac{\partial \rho}{\partial t} dv + \int \int_{\Sigma} \rho (\vec{V} \cdot \vec{n}) ds = 0 \quad (1.4)$$

Si le volume Ω ne contient pas de surface de discontinuité, l'intégrale sur Σ peut être remplacée par une intégrale de volume et "le théorème de Green-Ostrogradsky" permet d'écrire :

$$\int \int_{\Sigma} \rho (\vec{V} \cdot \vec{n}) ds = \int \int \int_{\Omega} \nabla \cdot (\rho \vec{V}) dv$$

dans ces conditions, l'équation (1.4) devient :

$$\iiint_{\Omega} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) \right] dv = 0$$

Le volume d'intégration est arbitraire et par conséquent l'intégrale doit être identiquement nulle :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) = 0 \quad (1.5)$$

L'équation (1.5) est souvent appelée *équation de continuité* (forme différentielle).

1.3. Equation de quantité de mouvement

Pour un volume arbitraire Ω , la quantité de mouvement, définie pour une particule de fluide par le produit mV , doit être conservée. Cette conservation, sous sa forme générale, peut être exprimée par l'équation suivante, sous forme intégrale :

$$\iiint_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{V}) dv + \iint_{\Sigma} (\rho \vec{v} \cdot \vec{V}) \cdot \vec{V} ds = \iiint_{\Omega} \rho \cdot \vec{f} dv + \iint_{\Sigma} \vec{n} \cdot \vec{P} ds \quad (1.6)$$

où \vec{v} est le vecteur unité tangent à la surface Σ , et \vec{P} définit le tenseur des contraintes totales appliquées en un point du fluide et qui s'écrit de la manière suivante :

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$

L'équation (1.6) s'écrit sous la forme différentielle comme suit :

$$\rho \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \rho (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} = \vec{f} - \nabla \cdot \vec{P}$$

Où \vec{f} représente le vecteur des forces appliquées au fluide (forces massiques).

Dans le cas d'un écoulement idéal, donc sans frottements internes, ou pour un fluide au repos, le tenseur des contraintes totales se réduit uniquement à l'effet de la pression hydrostatique p , et cela devient :

$$\overline{\overline{P}}_{ideal} = - \begin{pmatrix} P & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & P \end{pmatrix}$$

Pour un fluide incompressible, newtonien et visqueux, le tenseur ci-dessus présente alors des contraintes visqueuses, dont le tenseur est $\overline{\overline{\tau}}$, et cela devient :

$$\overline{\overline{P}}_{visq} = \overline{\overline{P}}_{ideal} + \overline{\overline{\tau}}$$

Le tenseur des contraintes visqueuses, selon l'hypothèse de "Newton", est une fonction linéaire du taux de déformation $\overline{\overline{D}}$:

$$\overline{\overline{\tau}} = 2\mu \overline{\overline{D}}$$

Avec $\overline{\overline{D}}$ défini de la manière suivante :

$$\overline{\overline{D}} = \left[\nabla \otimes \vec{V} + (\nabla \otimes \vec{V})^T \right]$$

En tenant compte de la condition d'incompressibilité, défini par $\nabla \cdot \vec{V} = 0$, on aboutit aux *équations de Navier-Stokes*, qui expriment la conservation de la quantité de mouvement d'un fluide incompressible, newtonien et visqueux et dont l'expression est :

$$\rho \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \rho (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} = \vec{f} - \nabla \cdot \overline{\overline{p}} + \mu \nabla^2 \vec{V}$$

1.4. Description d'un écoulement autour d'une paroi

Lorsqu'un fluide se déplace en contournant un obstacle fixe, les champs de vitesse et de pression sont perturbés par ce dernier. Si la vitesse au loin est petite, l'effet de la viscosité, qui est l'adhérence du fluide sur la surface, se traduit par de faibles gradients pariétaux de la vitesse et ces gradients se font sentir légèrement mais très loin de l'obstacle. Si au contraire la vitesse est grande, le freinage à la paroi est intense et les gradients pariétaux élevés, mais la viscosité contribue à leur décroissance rapide avec la distance à la surface. Dans ce dernier cas, il existe une zone de fluide contiguë appelée *couche limite dynamique*, dans laquelle se produit l'accommodation entre la nullité de la vitesse (sur la paroi) et la pleine vitesse locale du fluide libre, là où les gradients de vitesse sont si modérés que le fluide peut être considéré, en première approximation, comme sans viscosité. La couche limite dynamique est une zone dans laquelle la rotationnalité est très forte à la paroi et s'estompe à la frontière ; on schématise en parlant d'une frontière et d'une épaisseur de couche limite dynamique.

Chapitre 2

Adimensionnalisation des équations de la Couche limite dynamique

2.1. Couche limite dynamique

Une des caractéristiques principales d'un fluide est la viscosité. Elle varie avec la température et ne s'annule jamais. À la paroi, la vitesse du fluide est nulle et on observe des forces de frottement qui freinent l'écoulement au voisinage de celle-ci (figure 2.1).

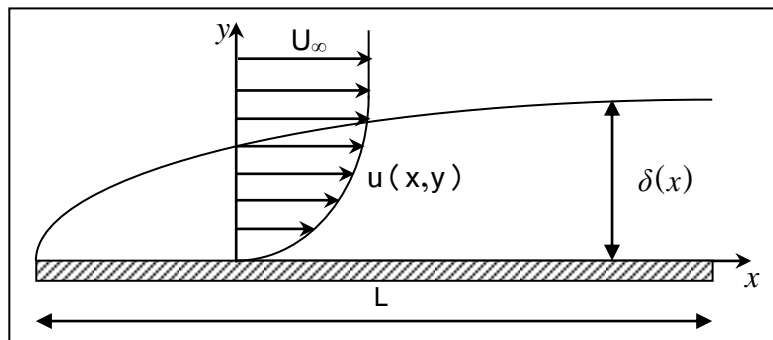


Fig.2.1 : Variation de l'épaisseur et de la vitesse de la couche limite dynamique sur une paroi plane [05].

2.2. Equations de couche limite dynamique isovolume

Nous allons procéder ici à une simplification des équations générales de sorte à établir, pour la région de couche limite, un nouveau modèle d'écoulement, "intermédiaire" entre ceux de Navier-Stokes et d'Euler.

Nous nous limitons au cas de l'écoulement bidimensionnel plan permanent en l'absence de forces extérieures de volume. Dans ces conditions les équations générales de Navier-Stokes s'écrivent en projections cartésiennes :

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \quad (2.1)$$

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(U \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + V \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) \quad (2.2)$$

$$U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(U \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + V \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right) \quad (2.3)$$

2.2.1. Configuration de couche limite

Il s'agit d'envisager la simplification des équations précédentes sous les hypothèses suivantes :

- Grand Nombre de Reynolds global ($\text{Re} \gg 1$)
- Géométrie d'écoulement particulière avec aplatissement suivant la direction normale à l'advection.
- Facteur d'aplatissement fonction du nombre de Reynolds global.

Convenant de prendre l'axe des x pour direction privilégiée de l'advection, nous traduisons mathématiquement les hypothèses précédentes par les relations suivantes :

$$\frac{y}{x} \approx \varepsilon(\text{Re}) \quad \text{et} \quad \frac{V}{U} \approx \varepsilon'(\text{Re})$$

où ε et ε' sont deux "infinitement" petits, fonctions du nombre de "Reynolds" global dont l'ordre reste à déterminer. Pour cela, nous particularisons les expressions de ces quantités aux fonctions puissances suivantes :

et

$$\varepsilon(\text{Re}) = \text{Re}^{-m}, m > 0 \quad \text{et} \quad \varepsilon'(\text{Re}) = \text{Re}^{-n}, n > 0$$

2.2.2. Forme adimensionnelle des équations locales

Nous désignons par L l'échelle de longueur caractéristique de l'advection telle que, par définition $x \sim L$, et par U_∞ celle de vitesse, telle que $U \sim U_\infty$. Nous introduisons les grandeurs adimensionnelles suivantes :

$$\begin{aligned} x^* &= x/L & U^* &= U/U_\infty \\ y^* &= y/\varepsilon L = \text{Re}^m \times y/L & V^* &= V/\varepsilon' U_\infty = \text{Re}^n \times V/U_\infty \end{aligned}$$

On aura soin de noter qu'en raison de la distorsion d'échelles introduite sur y et V , les grandeurs étoilées figurant dans les expressions précédentes sont toutes de même ordre (~ 1). Pour la pression, on supposera qu'il en est de même pour la grandeur normée par ρU_∞^2 et l'on posera ainsi :

$$P^* = P / \rho U_\infty^2 \sim 1$$

Après substitution dans les équations de "Navier-Stokes" on obtient :

$$\frac{\partial U^*}{\partial x^*} + \text{Re}^{m-n} \times \frac{\partial V^*}{\partial y^*} = 0 \quad (2.4)$$

$$U^* \frac{\partial U^*}{\partial x^*} + \text{Re}^{m-n} \times V^* \frac{\partial U^*}{\partial y^*} = -\frac{\partial P^*}{\partial x^*} + \text{Re}^{2m-1} \times \frac{\partial^2 U^*}{\partial y^{*2}} \quad (2.5.a)$$

$$U^* \frac{\partial V^*}{\partial x^*} + \text{Re}^{m-n} \times V^* \frac{\partial V^*}{\partial y^*} = -\text{Re}^{m+n} \frac{\partial P^*}{\partial y^*} + \text{Re}^{2m-1} \times \frac{\partial^2 V^*}{\partial y^{*2}} \quad (2.5.b)$$

2.2.3. Hypothèses et modèle de "Prandtl"

A grand nombre de Reynolds le système d'équations (2.5) peut se simplifier. Notons en premier lieu que, pour éviter toute dégénérescence physiquement inacceptable, il convient d'imposer $m = n$. En effet, dans le cas contraire, l'équation de continuité donnerait pour $\text{Re} \rightarrow \infty$ soit $(\partial U / \partial x = 0)$, soit $(\partial V / \partial y = 0)$ selon le signe de la différence $(m - n)$. L'une comme l'autre de ces simplifications n'est pas représentative de la réalité physique.

On obtient ainsi les hypothèses de Prandtl :

- Dans la région de couche limite les distorsions géométriques et cinématiques sont de même ordre :

$$\frac{y}{x} \sim \frac{V}{U}$$

- Pour le bilan de quantité de mouvement longitudinale, les forces d'inertie, de pression et de viscosité sont de même ordre dans la région de couche limite.

$$\frac{y}{x} \sim \frac{V}{U} \sim \frac{1}{\sqrt{\text{Re}}}$$

En conséquence directe des hypothèses précédentes et en revenant à une formulation dimensionnelle, les équations constitutives du modèle de Prandtl pour l'écoulement de couche limite s'écrivent :

(2.6)

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \\ U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \\ 0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \Rightarrow \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (2.7.a)$$

(2.7.b)

2.2.4. Couplage fluide parfait-couche limite

Notant par $P_E(x)$ la répartition de la pression en fluide parfait à la frontière de la couche limite, celle-ci "s'imprime" telle quelle sur toute l'épaisseur de la zone conduisant à la répartition $P_s(x)$ le long de la paroi solide. La solution interne se présente donc comme une correction du seul champ de vitesse, les deux projections de l'équation de la dynamique pouvant se regrouper sous la formulation unitaire suivante :

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P_E}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$$

En application du *théorème de "Bernoulli"* pour l'écoulement irrotationnel externe, on peut écrire le long de la frontière libre de couche limite :

$$-\frac{1}{\rho} \frac{dP_E}{dx} = U_E \frac{dU_E}{dx}$$

de sorte que l'équation de

"Prandtl" peut encore s'écrire :

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = U_E \frac{\partial U_E}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \quad (2.8)$$

Chapitre 3

Solution de Blasius des équations de couche limite

3.1. Situation du problème et mise en équation

Nous étudierons la configuration la plus simple et qui fut historiquement la première application de la théorie de "Prandtl". C'est celle d'une couche limite sur une plaque plane, infiniment mince, de longueur L et d'envergure w disposée parallèlement à un écoulement uniforme de vitesse U_∞ d'un fluide visqueux (ν) et non pesant. Le mouvement est supposé permanent et le rapport de forme (w/L) tel qu'il autorise une approche bidimensionnelle plane. Enfin le nombre de "Reynolds" global $U_\infty L/\nu$ est pris suffisamment grand pour justifier les approximations de couche limite.

En fluide parfait, l'obstacle se confondant avec une portion de ligne de courant, l'écoulement reste celui d'un champ de vitesse uniforme en tout point, de valeur U_∞ auquel correspond bien évidemment un champ de pression constante. En application du théorème de "Bernoulli" le long de la plaque, on en déduit que $dP_E/dx = 0$.

Comme le schématise la figure suivante (3.1), le caractère visqueux du fluide réel provoque une répartition transversale (profil) de vitesse s'accompagnant d'une déflexion des lignes de courant (b). Ce sont ces caractéristiques qu'il s'agit de déterminer.

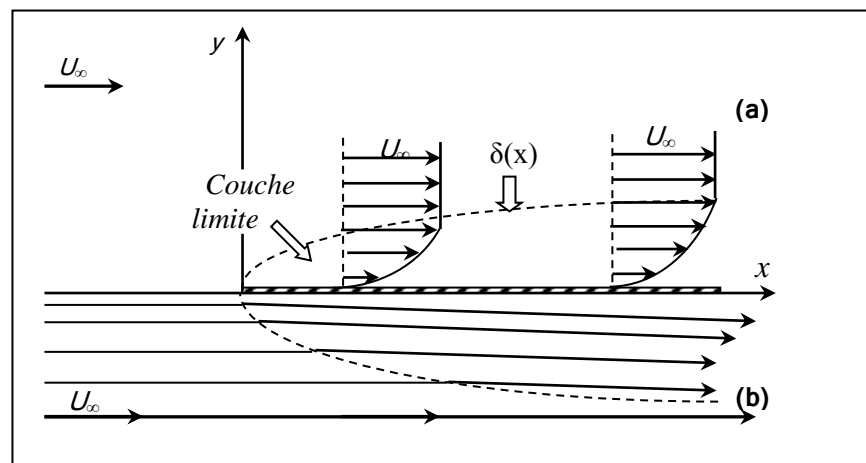


Fig.3.1 : Couche limite sur une plaque plane à incidence nulle dans un courant uniforme à l'infini : (a) Profils de vitesse ; (b) Déflexion des lignes de courant [04].

En application du modèle de "Prandtl" et puisque le gradient longitudinal de pression est nul, la correction de vitesse au sein de la couche limite est régie par les équations :

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \\ U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \end{cases}$$

avec les conditions aux limites :

$$U(x,0) = V(x,0) = 0 \quad (\text{Représentent l'effet de l'adhérence}).$$

$$U(x,\infty) = U_\infty (\equiv C^{te}). \quad (\text{vitesse uniforme; pas de déformation de lignes de courant}).$$

La solution d'affinité correspond à une fonction de courant de la forme :

$$\psi = U_\infty g(x) f(\eta) \quad (3.1)$$

où la variable η est définie par $\eta = y / g(x)$. En observant que :

$$d\eta = -y \frac{g'(x)}{g^2(x)} dx + \frac{dy}{g(x)}$$

on en déduit immédiatement que $\partial\eta / \partial x = -\eta g' / g$ et $\partial\eta / \partial y = 1/g$. Les composantes du vecteur vitesse s'obtient par :

$$\begin{cases} U = \frac{\partial\psi}{\partial y} = \frac{\partial\psi}{\partial\eta} \frac{\partial\eta}{\partial y} = U_\infty f' \\ V = \frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial\eta} \frac{\partial\eta}{\partial x} = U_\infty g' (\eta f' - f) \end{cases}$$

ainsi que :

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} = -U_\infty \frac{g'}{g} \eta f'' \\ \frac{\partial U}{\partial y} = U_\infty \frac{f''}{g} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = U_\infty \frac{f'''}{g^2} \end{cases} \quad (3.2)$$

La substitution de ces expressions dans l'équation de la dynamique, conduit après simplifications à la relation :

$$\frac{U_\infty}{\nu} g g' = -\frac{f'''}{f f''}$$

qui, en raison de la séparation des variables ne peut être satisfaite que pour :

$$\frac{U_\infty}{\nu} g g' = Cte \equiv K \quad \text{et} \quad -\frac{f'''}{f f''} = Cte \equiv K$$

Le choix de la constante $K \neq 0$; reste arbitraire et en suivant la proposition de "Blasius" [04], nous prendrons $K = 1/2$. Le changement de variable est alors fixé par $\eta = y\sqrt{U_\infty/\nu x}$ et l'équation différentielle résolvante du champ de vitesse devient :

$$2f''' + f f'' = 0 \quad (3.3)$$

Les conditions aux limites après transformation, imposent que :

$$\left. \begin{array}{l} U = 0 \Leftrightarrow f' = 0 \\ V = 0 \Leftrightarrow (\eta f' - f) = 0 \Leftrightarrow f = 0 \end{array} \right\} \text{ (à la paroi)} \quad (3.4)$$

$$f' = 1 \quad \text{(loin de la paroi)}$$

Nous avons donc transformé le problème aux dérivées partielles initial en un problème différentiel ordinaire avec des conditions aux limites définies en deux points. La similitude des profils de vitesse est une propriété remarquable puisqu'une fonction unique détermine la forme de tous les profils. La solution analytique de cette équation n'est pas possible, c'est donc à travers une résolution numérique qu'on obtient la solution de notre problème.

3.2. Méthodes de résolution du problème

Des méthodes très variées permettant la résolution numérique des équations de la couche limite. Si l'on s'intéresse seulement à des problèmes différentiels avec des conditions aux limites spécifiées en deux points, comme celui défini par l'équation (3.3) munie des conditions aux limites (3.4), les formules de type "Runge-Kutta" sont parmi les plus utilisées, elles sont faciles à programmer, en général stables, elles utilisent une largeur du pas peut être

modifiée sans difficultés, en plus de ça la connaissance de la valeur initiale suffit à intégrer l'équation différentielle. Mais, elles demandent plus de temps de calcul que les autres méthodes de précision comparables. Si f, f' et f'' sont tous connues dans une certaine position (η_i) , la formule de "Runge-Kutta" du quatrième ordre est préférable à utiliser pour obtenir la solution à $(\eta_{i+1} = \eta_i + h)$ positions. Pour se préparer à l'utilisation de cette méthode, l'équation du troisième ordre (3.3), doit être écrite en trois équations de premier ordre :

$$\begin{cases} \frac{df}{d\eta} = p \\ \frac{dp}{d\eta} = q \\ \frac{dq}{d\eta} = -\frac{1}{2}fq \end{cases} \quad (3.5)$$

En appliquant les formules de "Runge-Kutta" pour chacune des équations précédentes, on obtient :

$$\begin{cases} \Delta_1 f_i = hp_i \\ \Delta_1 p_i = hq_i \\ \Delta_1 q_i = -\frac{1}{2}hf_i q_i \\ \Delta_2 f_i = h(p_i + \frac{1}{2}\Delta_1 p_i) \\ \Delta_2 p_i = h(q_i + \frac{1}{2}\Delta_1 q_i) \\ \Delta_2 q_i = -\frac{1}{2}h(f_i + \frac{1}{2}\Delta_1 f_i)(q_i + \frac{1}{2}\Delta_1 q_i) \\ \Delta_3 f_i = h(p_i + \frac{1}{2}\Delta_2 p_i) \\ \Delta_3 p_i = h(q_i + \frac{1}{2}\Delta_2 q_i) \\ \Delta_3 q_i = -\frac{1}{2}h(f_i + \frac{1}{2}\Delta_2 f_i)(q_i + \frac{1}{2}\Delta_2 q_i) \\ \Delta_4 f_i = h(p_i + \frac{1}{2}\Delta_3 p_i) \\ \Delta_4 p_i = h(q_i + \frac{1}{2}\Delta_3 q_i) \\ \Delta_4 q_i = -\frac{1}{2}h(f_i + \frac{1}{2}\Delta_3 f_i)(q_i + \frac{1}{2}\Delta_3 q_i) \end{cases}$$

Finalement, les valeurs de f, f' et f'' sont calculées pour (η_{i+1}) :

$$\begin{cases} f_{i+1} = f_i + \frac{1}{6}(\Delta_1 f_i + 2\Delta_2 f_i + 2\Delta_3 f_i + \Delta_4 f_i) \\ p_{i+1} = p_i + \frac{1}{6}(\Delta_1 p_i + 2\Delta_2 p_i + 2\Delta_3 p_i + \Delta_4 p_i) \\ q_{i+1} = q_i + \frac{1}{6}(\Delta_1 q_i + 2\Delta_2 q_i + 2\Delta_3 q_i + \Delta_4 q_i) \end{cases}$$

Il faut noter que, l'intégration numérique des équations (3.5) ne peut pas démarrer pour

la valeur de $\eta = 0$ parce que q est inconnue en ce point. Les conditions aux limites (3.4) concernent seulement les valeurs de f et p' pour $\eta = 0$. La résolution par la méthode de "Runge-Kutta", exige de démarrer avec la méthode de "Moitié intervalle" présentée sur la figure (3.2), pour fixer la valeur de q à $\eta = 0$. La condition aux limites pour η tend vers l'infini est inapplicable, on va limiter notre ordre d'intégration numérique à une valeur maximale η_{\max} . La condition : $\eta \rightarrow \infty \Rightarrow f' \rightarrow 1$, devient :

$$1 - p \leq \varepsilon \text{ pour } \eta = \eta_{\max}$$

Au début du calcul, on choisit une valeur arbitraire de q_0 avec une incrémentation positive $\Delta_1 q_0$. Pour les conditions $f = p = 0$ et q_0 pour $\eta = 0$. Les équations (3.5) sont intégrées jusqu'à η proche de η_{\max} . La dernière valeur calculée de p est notée p_{\max} . Si ce point est inférieur à 1, on remplace q_0 par $q_0 + \Delta_1 q_0$ et on répète l'intégration à partir de $\eta = 0$

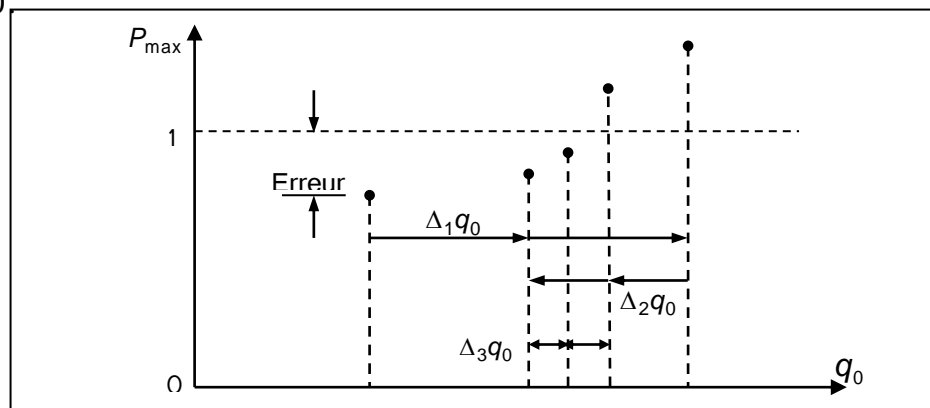


Fig.3.2 : Représentation de la méthode de Moitié intervalle [05].

Si la valeur de p_{\max} est supérieur à 1, on prend $\left(\Delta_2 q_0 = \frac{\Delta_1 q_0}{2}\right)$ pour inverser la direction et on remplace q_0 par $(q_0 + \Delta_2 q_0)$. On répète le calcul avec cette valeur négative jusqu'à ce que p_{\max} sera inférieur à 1 (figure 3.2). Puis on inverse la direction, en mettant $\left(\Delta_3 q_0 = -\frac{\Delta_2 q_0}{2}\right)$ et en remplaçant q_0 par $(q_0 + \Delta_3 q_0)$ jusqu'à ce que la valeur de p_{\max} sera supérieure à 1 tant que q_0 est positive, ou p_{\max} sera inférieure à 1 lorsque q_0 est négative. A la fin de chaque itération on calcul $(1 - p_{\max})$ comme l'erreur indiquée sur la figure (3.2) et on vérifie si l'erreur est positive et aussi si elle est inférieure ou égale à la valeur 'estimée de epsilon. Quand les deux conditions précédentes sont vérifiées, la condition aux limites est satisfaite, et l'itération est terminée.

La composante normale du vecteur vitesse peut être déduite en fonction de (η) à l'aide de :

$$V = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{1}{2} U_E \left(\frac{v}{U_E x} \right)^{1/2} (\eta f' - f)$$

Si l'on représente le produit :

$$\frac{V}{U_E} \left(\frac{U_E x}{v} \right)^{1/2} = \frac{V}{U_E} (\text{Re}_x)^{1/2} = \frac{1}{2} (\eta f' - f)$$

en fonction de η , on constate que cette fonction tend vers une valeur constante égale à 0.860 lorsque $\eta \rightarrow \infty$. Ainsi sur la frontière de la couche limite, la vitesse transversale garde une valeur non nulle telle que :

$$V_E = 0.860 \frac{U_E}{(\text{Re}_x)^{1/2}}$$

3.3 Contrôle actif de la couche limite dynamique

Il existe en général plusieurs techniques, qui ont été développées, pour le contrôle artificiel du comportement de la couche limite le long d'un corps. Parmi ces techniques, le soufflage ou l'aspiration d'un fluide par la surface du corps qui conduit au changement de la structure de la couche limite.

3.3.1 Aspiration et soufflage avec une vitesse uniforme

L'écoulement de la couche limite en présence de l'aspiration ou du soufflage peut devenir auto similaire si la vitesse est uniformément distribuée.

On se propose d'étudier la couche limite sur une plaque plane avec aspiration ou soufflage du fluide avec une vitesse uniforme V_0 , en l'absence du gradient de pression (figure 3.3).

Les équations de la couche limite dans ce cas sont :

$$\begin{cases} \frac{dV_0}{dy} = 0 \\ V_0 \frac{dU}{dy} = \nu \frac{d^2U}{dy^2} \end{cases}$$

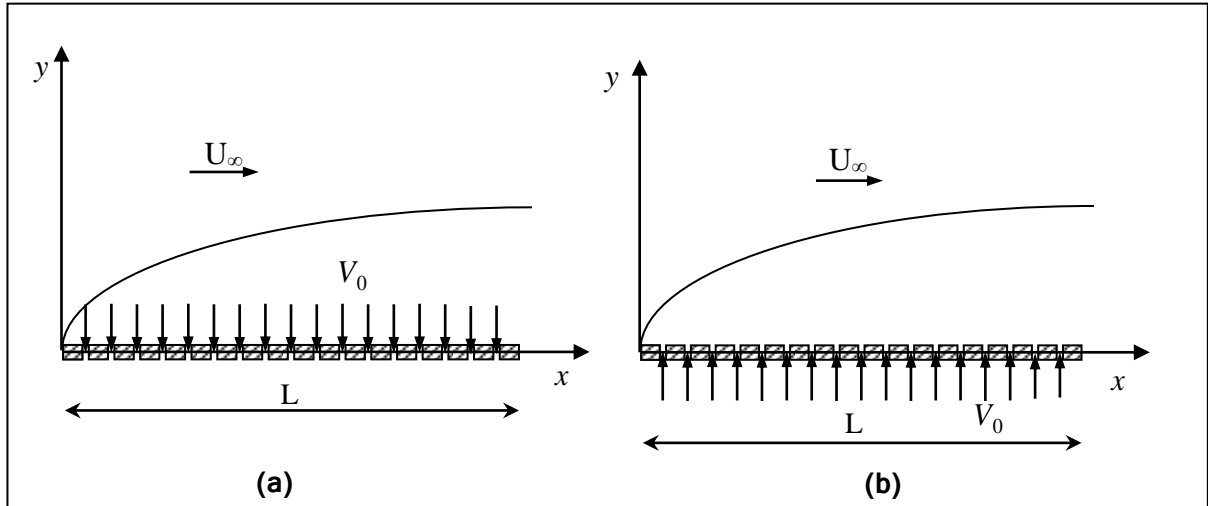


Fig.3.3: Contrôle actif avec une vitesse uniforme V_0 d'une couche limite dynamique sur une plaque plane : (a) Aspiration, (b) Soufflage.

On a :

$$V_0 = -\frac{\partial \psi}{dx} = \frac{1}{2}(\eta f' - f) \sqrt{\frac{\nu U_\infty}{x}}$$

puisque la composante U de vitesse est nulle au niveau ($\eta = 0$) :

$$U = 0 \quad \frac{U}{U_\infty} = f' = 0$$

on obtient :

$$V_0 = -\frac{1}{2} f \sqrt{\frac{\nu U_\infty}{x}} \quad (3.6)$$

$$\frac{V_0}{U_\infty} = -\frac{1}{2} f \sqrt{\frac{1}{\text{Re}_x}}$$

Le rapport entre la vitesse de l'aspiration ou de soufflage et U_∞ doit être petit pour vérifier les hypothèses de "Prandtl" [26], on lui donne comme valeur :

$$\frac{V_0}{U_\infty} \approx 0.0001$$

D'après l'équation (3.6), on peut déduire la valeur de f :

$$f = \pm 0.2 \quad (3.7)$$

f est positive pour le cas de l'aspiration et négative pour le cas du soufflage. En injectant cette valeur dans les conditions aux limites (3.4), elles deviennent :

$$U = 0 \Leftrightarrow f' = 0$$
$$V = V_0 \Leftrightarrow \begin{cases} f = +0.2 & (\text{pour l'aspiration}) \\ f = -0.2 & (\text{pour le soufflage}) \end{cases}$$

Ensuite, on calcule la fonction f et ses deux dérivées, f' et f'' pour les deux procédés de contrôle.

3.4. Présentation de l'organigramme de calcul

L'organigramme présenté sur la figure (3.4) traduit les étapes de calcul précédentes.

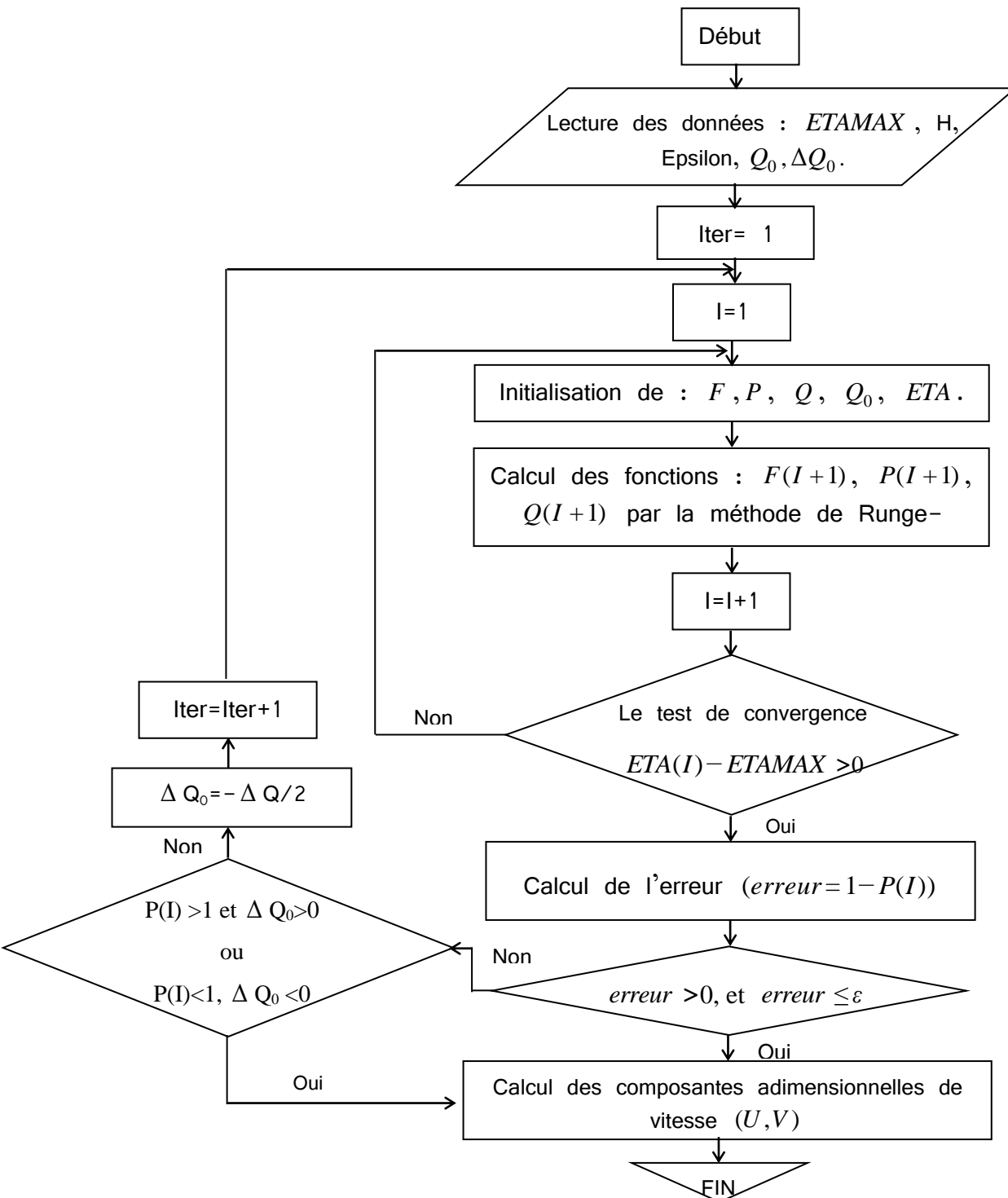


Fig.3.4 : Organigramme de résolution de l'équation de "Blasius" pour une couche limite dynamique le long d'une plaque plane.

Chapitre 4

Résultats et commentaires

4.1. Représentation graphique des résultats

La détermination des fonctions f, f' et f'' permet la détermination des profil des vitesses en couche limite. La fonction $f(\eta)$ et sa dérivée seconde $f''(\eta)$ sont représentées sur la figure (4.2). Les courbes de $f = U/U_\infty$ et $\frac{v}{U_\infty} \sqrt{\frac{U_\infty x}{\nu}}$ en fonction de η sont représentées sur la figure (4.1). On note que f' varie de façon presque linéaire au voisinage de $\eta = 0$, puis tend asymptotiquement vers 1 lorsque η augmente et tend vers η_{max} . Pour $\eta = 5$, $f'(\eta) = 0.99$ et en ce point $U = 0.99U_E$.

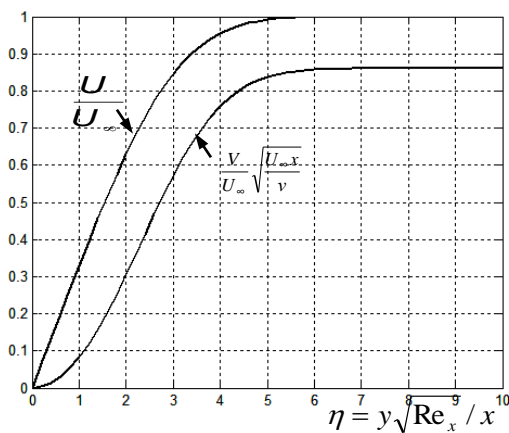


Fig.4.1 : Distribution des vitesses dans la couche limite dynamique le long d'une plaque plane.

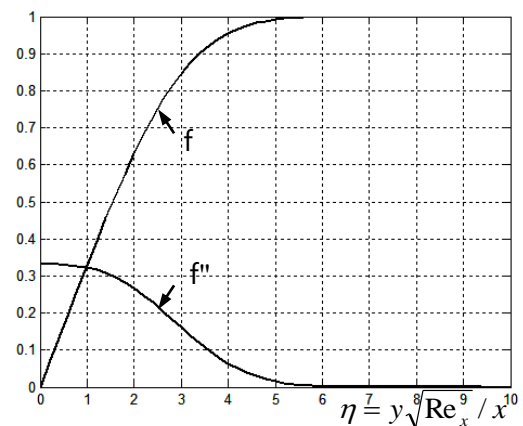


Fig.4.2 : Les fonctions de Blasius, f et f'' .

4.2. Commentaires et analyse des résultats

La résolution de l'équation de la couche limite dynamique en variable réduite a permis de représenter le profil de vitesse au voisinage de la paroi solide.

Il est important de noter que les différents procédés de contrôle actif ont une grande influence sur la variation de vitesse en couche limite laminaire. Le soufflage a déplacé le profil de vitesse vers le haut. Par contre, un comportement tout à fait contraire a été remarqué dans le cas d'une aspiration.

On conclut que, les procédés de contrôle actif ont une grande influence sur les profils de vitesse en couche limite dynamique.

Conclusion générale

L'objectif principal de ce travail est l'étude de la variation de vitesse sous l'influence du contrôle actif. On a étudié la couche limite sur une plaque plane lisse à incidence nulle en écoulement laminaire incompressible.

Après simplification des équations de "*Navier-Stokes*", on a déduit les équations qui régissent notre problème.

La résolution du problème dynamique a permis de déterminer le champ des vitesses.

Les résultats obtenus par cette étude illustrent l'influence du contrôle actif sur la distribution de vitesse en couche limite laminaire sur une plaque plane.

En perspective à ce travail, on propose une étude qui peut traiter les couches limites qui se développent sur diverses configurations d'obstacles, en écoulement laminaire ou turbulent, pour des fluides compressibles ou incompressibles.

Bibliographie

- [01] M. BOUMAH RAT & A. GOURDIN. "Méthodes numériques appliquées". Techniques et Documentation, Paris, 1983.
- [02] S. CANDEL. "Mécanique des fluides". Edition Dunod, Paris, 1995.
- [03] P. CHASSAING. "Mécanique des fluides, éléments d'un premier parcours". CÉPADÈUS, Paris, 2000.
- [04] P. H. MARTY. "Transferts Thermiques Convectifs". ILP Génie, 2001.
- [05] B. R. MUNSON. "Fundamentals of Fluid Mechanics". John Willey et Sons, Inc, 2002.
- [06] J. P. NOUGIER. "Méthodes de Calcul Numérique". Masson, Paris, 1991.
- [07] H. SCHLISHTING. "Boundary Layer Theory". MC Graw-Hill, Newyork, 1968.
- [08] N. S. & TAIBI. "Pratique du Fortran 77". Berti éditions. 1675.