

Université Echahid Hamma Lakhdar EL-OUED
Faculté des Sciences Exactes
Département des Mathématiques



Mémoire

Présentée par :

**LOUCIF MOHAMMED
DACHRI MILOUD**

Pour l'obtention du diplôme de

Master

Spécialité : Mathématiques Appliquées

Thème :

**Les solutions d'équations d'opérateurs linéaires bornés
sous forme intégrale dans les espaces de Hilbert**

Soutenue publiquement **le 15 Juin 2022** devant le jury composé de

ABDELOUAHAB MANSOUR	M.C.A	Président
LOURABI HARIZ-BAKKAR	M.C.A	Encadreur
AHFOUDHA BELHADI		Examineur

Promotion : 2021/2022

Remerciement

*Nous tenons à remercier tout d'abord « Allah » seigneur le
tout puissant de l'univers, qui a permis que ce travail voit
la lumière.*

A lui toute louange.

*La présentation de ce modeste travail nous offre
l'opportunité notre d'exprimer gratitude et reconnaissance
à notre professeurs encadreur
"Lourabi Hariz- Bakkar".*

*pour son assistance académique constante qui nous ont
permis de mener à bien notre mémoire.*

*Ainsi que tous nos professeurs qui nous ont enseignés
durant nos études à la faculté de science exacte.*

*Nous remercions également tous nos collègues d'étude,
particulièrement notre promotion de Master
mathématique, 2021/2022 à l'université de Elahid
Hamma Lakhdar El-Oued.*

*En-fin nous remercions vivement notre famille pour l'aide
matérielle et morale durant la période de préparation.*

Merci !



• ملخص:

هدفنا الأساسي في هذه المذكرة هو التعبير عن حلول معادلات المؤثرات من الصنف سلفستر على شكل تكامل من أجل أنواع من المؤثرات وتحسين استخدامها وذلك بإضافة شروط على المؤثرات المستخدمة. نعلم أن معادلات المؤثرات من نوع سلفستر تأخذ عدة أنواع من أنماط الحلول منها على سلسلة غير منتهية أو على شكل عبارة خطية عناصرها مصفوفات الكتل بمعاملات النازمية من $B(H)$. وفي هذه الدراسة قمنا بالتعبير عن الحلول بصيغة التكامل وتوضيح الدراسات السابقة في حالات أكثر تعميمًا تضاف لنظرية المؤثرات وذلك في فضاء هيلبرت وحصلنا على نتائج مهمة، مصنفة بالبرهان في هذه المذكرة.

• الكلمات المفتاحية:

مؤثر ناظمي-مؤثر - تكامل - معادلات المؤثرات .

• Résumé :

Notre objectif principal dans cette mémoire est d'exprimer les solutions des équations d'opérateurs de type Sylvester sous la forme d'intégral pour différents types d'opérateurs et d'améliorer leur utilisation en ajoutant des conditions aux opérateurs utilisés. On sait que les équations d'opérateurs de type Sylvester prennent plusieurs types de modèles de solutions, les incluant sur une série infinie ou sous la forme d'un énoncé linéaire dont les éléments sont des matrices de blocs avec coefficients d'opérateurs normaux dans $B(H)$, et dans cette étude nous avons exprimé les solutions sous forme d'intégrale et clarifié les études précédentes dans des cas plus généralisés est ajoutée à la théorie des opérateurs dans l'espace de Hilbert, et nous avons obtenu des résultats importants, classés par la preuve dans cette mémoire .

• Mots clés :

opérateur normal , Auto-Adjoint opérateur , intégrale , équations d'opérateurs .

• Abstract :

Our main goal in this memorandum is to express the solutions of the equations of operators of the class Sylvester in the form of an integration for different types of influences and to improve their use by adding conditions to the used operators. We know that the Sylvester-type operator equations take several types of solutions patterns, including them on an infinite series or in the form of a linear statement whose elements are matrices of blocks with the coefficients of normal operator in $B(H)$, and in this study we expressed the solutions in the form of integration and clarified previous studies in more cases A generalization is added to the theory of operators in Hilbert space, and we have obtained important results, categorized by the proof in this memorandum.

• Keywords :

normal operator , Self-Adjoint operator , integral , operators equations .

Table des matières

Table des matières	3
Notations générales	5
Introduction	6
1 Les opérateurs bornés sur les espaces de Hilbert	8
1.1 Espaces de Hilbert	8
1.1.1 Définitions	8
1.1.2 Propriétés des espaces de Hilbert	9
1.2 Généralités sur les opérateurs linéaires bornés	11
1.2.1 Définitions et exemples	11
1.2.2 Adjoint d'un opérateur linéaire borné	13
1.2.3 L'inverse d'un opérateur linéaire borné	14
1.2.4 Les commutateurs	15
1.2.5 Racine carrée d'un opérateur linéaire borné	16
1.2.6 Opérateurs unitaires, Isométriques, Auto-adjoints	17
1.3 Théorie Spectrale	18
1.3.1 Spectre des opérateurs linéaires bornés	18
1.3.2 Rayon spectral	20
2 Les fonctions analytiques et la transformation de Fourier	21
2.1 Les fonctions holomorphes	21
2.1.1 Dérivabilité	21
2.2 Le Calcul intégrale	23
2.2.1 Propriétés des courbes	23
2.3 Intégrales curvilignes	25
2.4 Les théorèmes de Cauchy	26
2.5 Propriétés analytiques des fonctions holomorphes	29
2.5.1 L'analyticité	29
2.5.2 La propriété des zéros isolés	30
2.5.3 La propriété du module maximum	30
2.6 La Transformée de Fourier	30
2.7 Définitions et fondamentaux	31
2.7.1 Définition de la transformée de Fourier $\mathcal{F}(\cdot)$	31

2.7.2	Remarques et premières propriétés	31
2.7.3	La transformée inverse $\mathcal{F}^{-1}(\cdot)$	32
3	Les équations d'opérateurs dans les espaces fonctionnelles	33
3.1	Les équations d'opérateurs de type $AX - XB = Y$	33
3.2	Les équations d'opérateurs généralisées	35
3.3	Équation aux différences homogènes	37
3.4	La solution d'équation $AX - XB = Y$ dans le cas les opérateurs Auto Adjoint . .	39
3.5	La solution en série	42
4	L'équation $AX - XB = Y$ dans $B(\mathcal{H})$	45
4.1	Solutions intégrales de contour d'équations de type Sylvester	45
4.2	L'équation de Sylvester généralisée	45
4.3	L'équation de type Stein	47
4.3.1	L'équation $AX - X^*D = Y$	47
4.3.2	L'équation $AXB - X^* = Y$	48
4.4	L'équation d'opérateurs de type $(A + i\gamma)X - X(B + i\zeta) = Y$	49
4.4.1	Calcul opérationnel	50
4.4.2	Principaux résultats	52
4.5	La solution d'équation Lypunov des maladies Variole des Singes	56
4.5.1	Clarification des images pour la variole	59
	Conclusion	61
	Prespectives	63
	Bibliographie	64

Notations générales

$\mathcal{H}$	Espace de Hilbert .
$\langle ., . \rangle$	Produit scalaire .
T	L'opérateur linéaire .
$\ .\ $	La norme .
$B(\mathcal{H})$	L'espace des opérateurs linéaires bornés sur espace de Hilbert $\mathcal{H}$.
$\mathcal{L}(E, F)$	L'ensemble des applications linéaires continues de E dans F .
T^{-1}	L'inverse de l'opérateur T .
T^*	L'adjoint de l'opérateur T .
$Im(T)$	L'image de l'opérateur T .
$Ker(T)$	Le noyau de l'opérateur T .
$D(T)$	Le domaine de l'opérateur T .
$\rho(T)$	L'ensemble résolvante de l'opérateur T .
$R_\lambda(T)$	La résolvante de l'opérateur T .
$\sigma(T)$	Le spectre de l'opérateur T .
$\sigma_p(T)$	Le spectre ponctuel de l'opérateur T .
$\sigma_r(T)$	Le spectre résiduel de l'opérateur T .
$\sigma_c(T)$	Le spectre continue de l'opérateur T .
$r(T)$	Le rayon spectral de l'opérateur T .
$tr(T)$	Trace de T .
$(FP)_{B(\mathcal{H})}$	propriété de Fuglede-Putnam.

Introduction

La théorie des opérateurs sont considérées comme l'un des éléments de base de l'analyse fonctionnelle et l'un de ses piliers qui ont contribué à la science des mathématiques. Les équations d'opérateurs ont plusieurs et différentes applications, telles que dans la théorie de contrôle, l'optimisation, les systèmes dynamiques et dans la mécanique quantique.

Rosenblum a étudié systématiquement l'équation $\delta_{A,B} = AX - XB$, où A et B sont des opérateurs bornés sur un espace de Hilbert complexe séparable, il a prouvé que le spectre de $\delta_{A,B}$ est contenu dans $\sigma(A) - \sigma(B)$ où $\sigma(A) - \sigma(B) = \{\lambda_1 - \lambda_2, \lambda_1 \in \sigma(A), \lambda_2 \in \sigma(B)\}$.

La condition $\sigma(A) \cap \sigma(B) = \emptyset$ implique que pour chaque opérateur borné Y dans H il existe un opérateur borné unique X vérifie $AX - XB = Y$.

Mais ce dernier résultat ne résout pas complètement le problème de solvabilité de l'équation $AX - XB = Y$. Si A est l'adjoint du shift unilatéral et $B = 0$ alors l'équation admet une solution pour chaque Y alors que $\sigma(B) \subset \sigma(A)$. Pour voir l'importance d'équations d'opérateurs, on peut prendre par exemple les travaux de Wintner si A et B sont des opérateurs non bornés qui représentent le moment et la position satisfaisant la relation, Roth a prouvé (dans le cas de dimension finie) que l'équation $AX - XB = Y$ admet une solution si et seulement si

$$X = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_A} (\lambda - A)^{-1} Y (\lambda - B)^{-1} d\lambda$$

ou Γ_A est un contour de Cauchy autour de $\sigma(A)$ Schweinsberg a montré que ce résultat reste valide dans le cas de dimension infinie avec A et B normaux et bornés.

Dans cette mémoire on va améliorer et introduire quelques résultats concernant les équations de type Sylvester,

Cette mémoire est organisée comme suit.

- Dans le premier chapitre est consacré aux quelques définitions et des éléments basiques qui sont indispensables et utiles au long de notre travail. Plus particulièrement, on présente dans ce chapitre :
 - Les opérateurs linéaires bornés et leurs propriétés, l'adjoint, l'inverse et le spectre.
 - la propriété de Fuglède-Putnam.
 - Quelques classes d'opérateurs linéaires bornés.
- Le deuxième chapitre on rappelle sur les fonctions analytiques, le Calcul intégrale de contour et la transformation de Fourier et l'utilisation dans les solutions d'équations d'opérateurs.
- Le troisième chapitre est présentés des solutions d'équations d'opérateurs dans quelque espace fonctionnelle (espace Banach) ensuite, nous consacrons dans l'espace de Hilbert

borné $B(\mathcal{H})$.

- Enfin, dans le quatrième chapitre, on va prendre les solutions d'équations d'opérateurs de type Sylvester, les équations de type Lyapunov et les équations de type Stein, et on applique ces solutions sur les maladies infectieuses de variole des singes .

CHAPITRE 1

Les opérateurs bornés sur les espaces de Hilbert

Pour simplifier la lecture de ce travail, nous présentons dans ce chapitre quelques définitions et des résultats principaux d'analyse fonctionnelle, ces rappels concernent les espaces de Hilbert, les opérateurs et leurs propriétés sur les espaces de Hilbert, ainsi que quelques classes d'opérateurs.

1.1 Espaces de Hilbert

1.1.1 Définitions

Définition 1.1.1. Soit $\mathcal{H}$ un espace vectoriel. On appelle produit scalaire sur $\mathcal{H}$ toute forme bilinéaire, définie positive.

On notera $\langle x, y \rangle$ le produit scalaire des vecteurs $x, y \in \mathcal{H}$ cela signifie que l'application :

$$\langle, \rangle : \mathcal{H} * \mathcal{H} \longrightarrow K = \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}$$

$$(x, y) \longmapsto \langle x, y \rangle$$

vérifiant :

- Pour tout $y \in \mathcal{H}$ l'application $x \in \mathcal{H} \longrightarrow \langle x, y \rangle \in K$ est une forme linéaire.
- Pour tout $x, y \in \mathcal{H}$ on a :

$$\langle x, y \rangle = \begin{cases} \langle y, x \rangle & \text{si l'espace est réel} \\ \overline{\langle y, x \rangle} & \text{si l'espace est complexe} \end{cases}$$

- Pour tout $x \in \mathcal{H}$:

$$\begin{cases} \langle x, x \rangle = 0 & \text{si } x = 0 \\ \langle x, x \rangle > 0 & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

- Tous les espaces de Hilbert que nous considérerons seront supposés **séparables** c'est-à-dire admettant un sous-ensemble dénombrable dense.
- L'espace de Hilbert est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire qui est de plus complet pour la norme :

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

Remarque 1.1.1. Notons que dans le cas complexe, on a donc pour $x, y \in \mathcal{H}$ et $\alpha \in \mathbb{C}$:

$$\langle x, \alpha y \rangle = \overline{\alpha} \langle x, y \rangle$$

Exemple 1.

1)

- Le produit scalaire sur $\mathbb{R}^N$ est défini par :

$$\varphi(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$$

ou $x = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$, $y = (y_i)_{1 \leq i \leq n}$

forme bilinéaire sur $\mathbb{R}^N$

- Le produit scalaire sur $\mathbb{C}^N$ est défini par :

$$\varphi(x, y) = x_1 \overline{y_1} + x_2 \overline{y_2} + \dots + x_n \overline{y_n}$$

ou $x = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$, $y = (y_i)_{1 \leq i \leq n}$

n'est pas forme bilinéaire .

- 2) L'espace $L^2(\mathbb{R}^N) = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \text{ mesurable tel que : } \int_{\mathbb{R}^N} |f(x)|^2 dx < +\infty\}$
Le produit scalaire :

$$\langle f, g \rangle = \int f(x) \overline{g(x)} dx \text{ et la norme définie par } \|f\| = \left(\int_{\mathbb{R}^N} |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

1.1.2 Propriétés des espaces de Hilbert

Proposition 1.1.1. (L'inégalité de Cauchy-Schwarz)

Soit $\mathcal{H}$ espace de Hilbert $x, y \in \mathcal{H}$.

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\|_{\mathcal{H}} \cdot \|y\|_{\mathcal{H}}$$

Preuve : Soient x et y dans $\mathcal{H}$ l'inégalité de **Cauchy-Schwarz** (ainsi que son cas d'égalité) est immédiate si : $\langle x, x \rangle = 0$.

si non : pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, tel que $|\lambda| = 1$ et $|\lambda \varphi(x, y)| = |\varphi(x, y)|$
pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\varphi(\lambda x + ty, \lambda x + ty)$ est positive ;

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda x + ty, \lambda x + ty) &= \varphi(\lambda x, \lambda x) + \varphi(\lambda x, ty) + \varphi(ty, \lambda x) + \varphi(ty, ty) \\ &= \varphi(x, x) + \lambda t \varphi(x, y) + t \overline{\lambda} \varphi(y, x) + t^2 \varphi(y, y) \\ &= \varphi(x, x) + 2t \operatorname{Re} \varphi(x, y) + t^2 \varphi(y, y) \\ &\leq \varphi(x, x) + |2t \operatorname{Re} \varphi(x, y)| + t^2 \varphi(y, y) . \end{aligned}$$

Donc : $\Delta' = |\varphi(x, y)|^2 - \varphi(x, x)\varphi(y, y) \leq 0$.

On aura

$$|\varphi(x, y)|^2 \leq \varphi(x, x)\varphi(y, y)$$

□

Définition 1.1.2. (L'orthogonal)

on dit que x et y sont orthogonaux, si : $\forall x, y \in \mathcal{H} : \langle x, y \rangle = 0$
alors l'orthogonal de M (partie de $\mathcal{H}$) est défini par :

$$M^\perp = \{y \in \mathcal{H} \text{ tq } \forall x, y \in \mathcal{H}; y \perp x\}$$

Proposition 1.1.2. (Identité du parallélogramme)

Pour tout $(x, y) \in \mathcal{H}^2$, on a l'identité :

$$\|x + y\|_{\mathcal{H}}^2 + \|x - y\|_{\mathcal{H}}^2 = 2(\|x\|_{\mathcal{H}}^2 + \|y\|_{\mathcal{H}}^2).$$

Appelé l'identité du parallélogramme.

Proposition 1.1.3. (Identité polarisation)

Soient $x, y \in \mathcal{H}$

1) Si $\varphi : \mathcal{H} * \mathcal{H} \mapsto K$ est une forme bilinéaire symétrique sur E , on a :

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) &= \frac{1}{4} [\varphi(x + y, x + y) - \varphi(x + y, x - y)] \\ \langle x, y \rangle &= \frac{1}{4} (\|x + y\|_{\mathcal{H}}^2 - \|x - y\|_{\mathcal{H}}^2) \end{aligned}$$

2) Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et si $\varphi : \mathcal{H} * \mathcal{H} \mapsto \mathbb{C}$ est une forme sesquilinéaire sur $\mathcal{H}$ on a :

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{4} [\varphi(x + y, x + y) - \varphi(x - y, x - y) + i\varphi(x + iy, x + iy) - i\varphi(x - iy, x - iy)].$$

Alors :

$$\begin{aligned} \forall x, y : \|x + y\|^2 &= \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2 \\ \forall x, y : \|x - y\|^2 &= \|x\|^2 - 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2 \end{aligned}$$

Théorème 1.1.1. [2](projection)

Soit A un ensemble convexe fermé (et non vide) de $\mathcal{H}$ alors pour tout $x \in \mathcal{H}$, il existe un unique $y \in A$ tel que :

$$\inf_{x \in A} \|x - a\| = \|x - y\|$$

Autrement dit : il existe un unique point $x \in \mathcal{H}$ qui est à une distance de x , la plus petite possible ce point y , s'appelle **la projection** de x sur A .

Corollaire 1.1.1. Soit F sous espace vectoriel ferme de $\mathcal{H}$, et soit $x \in \mathcal{H}$:

- 1) Soit $y \in F$ tel que $\|x - y\| = \inf_{z \in F} \|x - z\|$
Alors $(x - y)$ est orthogonal à F (i.e orthogonal à tous les vecteurs $z \in F$)
- 2) **Réciproquement** si $y \in F$ et tel que : $(x - y) \perp F$ alors
 $\|x - y\| = \inf_{z \in F} \|x - z\|$ i.e y est la projection de x sur F .

Définition 1.1.3. On notera $y \in P_F(x)$ et on dira que y est la **projection orthogonale** de x sur F .

1.2 Généralités sur les opérateurs linéaires bornés

1.2.1 Définitions et exemples

Définition 1.2.1. (Opérateur linéaire)

Soient E et F deux espaces vectoriels $D(T) \subset E$ dans F l'application

$$T : D(T) \subset E \mapsto F$$

($D(T)$ est la domaine de T) qui vérifie les conditions suivantes :

- 1) $\forall x, y \in D(T) : T(x, y) = T(x) + T(y)$ (condition additive).
- 2) $\forall x \in D(T), \forall \lambda \in \mathcal{K} (\mathcal{K} = \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}) : T(\lambda x) = \lambda T(x)$ (condition homogène).

Remarque 1.2.1. • d'autre termes, l'opérateur $T : T : D(T) \subset E \mapsto F$ est linéaire ssi :

$$T(\lambda x, \mu y) = \lambda T(x) + \mu T(y), \forall \lambda, \mu \in \mathcal{K} \text{ et } \forall x, y \in D(T).$$

- Le vecteur $T(x)$ est en générale T_x .

Définition 1.2.2. (opérateur continu)

Soient E et F deux espaces de Hilbert un opérateur linéaire continu, A défini de E dans F est une application linéaire et continue de E et F c'est-à-dire : $\forall x \in E, Ax \in F$

$$\forall (x, y) \in E * E, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} : A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay.$$

$$\exists c > 0 : \forall x \in E, \text{ tel que } \|Ax\|_F \leq c \|x\|_E.$$

Le plus petit nombre "c" s'appelle **La norme** de l'opérateur A et se note $\|A\|$ i.e

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \neq 0} \frac{\|Ax\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|_F = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\|_F$$

Définition 1.2.3. (L'opérateur borné)

On dit que l'opérateur $A : E \mapsto F$ est borné s'il fait correspondre à tout ensemble borné dans $D(A)$ un ensemble borné dans l'espace F .

Définition 1.2.4. Un opérateur linéaire $A : E \mapsto F$ tel que $D(A) = \mathcal{H}$ est borné si et seulement si pour tout $x \in \mathcal{H}$, on a

$$\|Ax\|_F \leq c\|x\|_{\mathcal{H}}$$

Théorème 1.2.1. Soit un opérateur linéaire $A : E \mapsto F$ tel que $D(A) = \mathcal{H}$.
 A est continu si et seulement s'il est borné.

Exemple 2. L'opérateur de multiplication

$$\begin{aligned} T : c[0, 1] &\mapsto c[0, 1] \\ f(x) &\mapsto xf(x). \end{aligned}$$

est borné car :

$$\|Tf\| = \sup_{x \in [0, 1]} |xf(x)| \leq \|f\|_{\infty}$$

$$\Rightarrow \|f\|_{\infty} ; c = 1$$

Théorème 1.2.2. Pour tout opérateur linéaire T sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$, les assertions suivantes sont équivalentes :

1. T est borné.
2. T est continu dans l'espace $\mathcal{H}$.
3. T est continu en un point x_0 de l'espace $\mathcal{H}$.

Preuve : On remarque que 2. $\Rightarrow$ 3., donc il suffit de démontrer 1. $\Rightarrow$ 2. et 3. $\Rightarrow$ 1.

- 1. $\Rightarrow$ 2. soit x_0 vecteur quelconque de $\mathcal{H}$ et, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans $\mathcal{H}$. Comme

$$\|Tx_n - Tx_0\| = \|T(x_n - x_0)\| \leq \|T\| \|x_n - x_0\|$$

On a donc

$$(x_n \longrightarrow x_0) \Rightarrow Tx_n \longrightarrow Tx_0$$

d'où la continuité de T .

- 3. $\Rightarrow$ 1. Soit T un opérateur linéaire continu en $x_0 \in \mathcal{H}$
 supposons le contraire, Soit T non borné, alors pour tout entier naturel n , il existe un vecteur non nul $x_n \in \mathcal{H}$ tel que $\|Tx_n\| > n\|x_n\|$
 Si on pose $y_n = \frac{x_n}{n\|x_n\|}$ alors $\|y_n\| = \frac{1}{n}$

Or $y_n \rightarrow 0$ donc $y_n + x_0 \rightarrow x_0$ mais

$$\|T(y_n + x_0) - Tx_0\| = \|Ty_n\| = \frac{\|Tx_n\|}{n\|x_n\|} > \frac{n\|x_n\|}{n\|x_n\|} = 1$$

Donc T n'est pas continu en x_0 d'où la contradiction, et par conséquent T est borné. $\square$

Définition 1.2.5. [4] (Type des convergences)

Une suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'opérateurs linéaires bornés sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ et soit $T \in B(\mathcal{H})$.

a) La suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge **uniformement** vers T si

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|T_n - T\|_{B(\mathcal{H})} = 0$$

b) La suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge **fortement** vers T si

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|T_n x - T x\|_{B(\mathcal{H})} = 0$$

c) La suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge **faiblement** vers T si

$$\langle T_n x, y \rangle - \langle T x, y \rangle \longrightarrow_{n \rightarrow +\infty} 0$$

1.2.2 Adjoint d'un opérateur linéaire borné

Théorème 1.2.3. [32] Soient $\mathcal{H}$ et $\mathcal{K}$ deux espaces de Hilbert $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ il existe un opérateur unique continu de $\mathcal{K}$ dans $\mathcal{H}$ noté T^* .

Définition 1.2.6. L'unique opérateur linéaire $T^* \in \mathcal{L}(\mathcal{K}, \mathcal{H})$ tel que :

$\forall x \in \mathcal{H}, \forall y \in \mathcal{K} : \langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle$ est appelé l'adjoint de T .

Exemple 3. Soit

$$\begin{aligned} A : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longrightarrow (x, 0) \end{aligned}$$

On pose $X = (x_1, y_1), Y = (x_2, y_2)$

On a $\langle AX, Y \rangle = \langle X, A^*Y \rangle$, alors $\langle AX, Y \rangle = \langle (x_1, 0), (x_2, y_2) \rangle = x_1 x_2$.

D'autre part : on pose

$$A^*Y = Z = (z_1, z_2)$$

On a : $\langle X, A^*Y \rangle = \langle (x_1, y_1), (z_1, z_2) \rangle = x_1 z_1 + y_1 z_2$

Donc $z_1 = x_2, z_2 = 0$ d'où $A^*Y = A^*(x_2, y_2) = (x_2, 0)$

Donc $A^*(x, y) = (x, 0)$

Proposition 1.2.1. Soient $\mathcal{H}$ et $\mathcal{K}$ deux espaces de Hilbert et soit $T \in B(\mathcal{H})$ alors, l'application $T \mapsto T^*$ est isométrique de $B(\mathcal{H})$ dans $B(\mathcal{H})$ de plus :

$$1) (T^*)^* = T$$

$$2) \|T^*\| = \|T\|$$

$$3) \|T^*T\| = \|T\|^2$$

preuve : 1) On montre que : $\langle Tx, y \rangle = \langle (T^*)^*x, y \rangle, \forall x \in \mathcal{H}, \forall y \in \mathcal{K}$ On a :

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle = \overline{\langle T^*y, x \rangle} = \overline{\langle y, (T^*)^*x \rangle} = \langle (T^*)^*y, x \rangle \text{ D'où } (T^*)^* = T$$

2) On a d'après la preuve de théorème précédent $\|T^*\| \leq \|T\| \|T\| = \|(T^*)^*\|$
donc $\|T^*\| = \|T\|$

3) On a $\|T^*T\| \leq \|T^*\| \|T\| = \|T\|^2$

D'autre part, en utilisant $\forall x \in \mathcal{H}$:

$$\|Tx\|^2 = \langle Tx, Tx \rangle = \langle T^*Tx, x \rangle \leq \|T^*Tx\| \|x\| \leq \|T^*T\| \|x\|^2$$

$$\text{Et on sait que : } \|T\|^2 = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|^2}{\|x\|^2} \leq \sup_{x \neq 0} \|T^*T\| \|x\|^2 \leq \|T^*T\|$$

$$\text{Donc } \|T^*T\| = \|T\|^2$$

□

Proposition 1.2.2. [32] Soient $S, T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ on a :

$$1) (\alpha T + \beta S)^* = \overline{\alpha} T^* + \overline{\beta} S^*$$

$$2) (TS)^* = S^*T^*$$

$$3) \text{ Si } T \text{ est inversible } T^* \text{ est inversible et } (T^*)^{-1} = (T^{-1})^*.$$

Lemme 1.2.1. [4] soient $\mathcal{H}, \mathcal{K}$ deux espaces de Hilbert et $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ on a :

$$i) \ker T = (\text{Im } T^*)^\perp.$$

$$ii) \ker T^* = (\text{Im } T)^\perp.$$

$$iii) \ker T^* = 0 \Leftrightarrow \overline{\text{Im } T} = \mathcal{K}.$$

Lemme 1.2.2. Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert complexe, et soit $T \in B(\mathcal{H})$ inversible alors T^* est inversible et satisfait : $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.

preuve . $TT^{-1} = T^{-1}T = I$ (T est inversible) d'où $(TT^{-1})^* = I^* = I = (T^{-1})^*T^* = T^*(T^{-1})^* = I$
Alors T^* est inversible et $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$. □

1.2.3 L'inverse d'un opérateur linéaire borné

Définition 1.2.7. (Inversibilité)

Soient E et F deux espaces normés, $A \in \mathcal{L}(E, F)$ l'opérateur A est dit inversible si pour tout $y \in F$ l'équation $Ax = y$ admet une seule solution.

Définition 1.2.8. [8] (Opérateur inversé)

On dit que $A \in \mathcal{L}(E, F)$ est inversible. S'il existe $S \in \mathcal{L}(F, E)$ tel que

$$AS = I_E$$

et

$$SA = I_F$$

On appelle l'inverse de A est noté par A^{-1} .

Théorème 1.2.4. L'opérateur A^{-1} inverse d'un opérateur linéaire A est aussi linéaire.

Remarque 1.2.2. $A \in \mathcal{L}(E, F)$ est inversible s'il est injectif et A^{-1} est continu (borné).

Définition 1.2.9. [15] (Similarité)

Soient A, B deux opérateurs dans $B(\mathcal{H})$, on dit que A, B Sont similaires si et seulement il existe un opérateur inversible T tel que

$$B = TAT^{-1}.$$

Définition 1.2.10. Si T est un opérateur linéaire borné, La trace de T est la somme des éléments diagonaux de La matrice de T dans une base quelconque. on note trT .

Remarque 1.2.3. [8] Si $T \in B(\mathcal{H})$ La trace de l'opérateur inverse de T

$$TrT^{-1} = \frac{1}{TrT}$$

1.2.4 Les commutateurs

Soit E un espace vectoriel normé complexe de dimension infinie.

Définition 1.2.11. [14]

1) Un élément X de $B(E)$ est appelé commutateur s'il existe T et B de $B(E)$, tels que

$$X = TB - BT.$$

2) Le commutant de $T \in B(E)$ est l'ensemble défini par

$$\{T\}' = \{B \in B(E), TB = BT\}.$$

3) Le bicommutant de $A \in B(E)$ est l'ensemble défini par

$$\{A\}'' = \{C \in B(E), CB = BC, \forall B \in A'\}.$$

Proposition 1.2.3. i) $\{A\}'' = \{\{A\}'\}'$

ii) $\{A\}'$ est une sous-algèbre de $B(E)$.

iii) $\{A\}''$ est une sous-algèbre commutative de $B(E)$.

iv) Tout polynome de A appartient à $\{A\}''$.

1.2.5 Racine carrée d'un opérateur linéaire borné

Opérateurs positifs

Définition 1.2.12. On dit qu'un opérateur T sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ est positif, il vérifie :

$$\langle x, Tx \rangle \geq 0, \forall x \in \mathcal{H}$$

on écrit $T \geq B$ si $T - B$ est positif.

En utilisant l'identité de polarisation on voit qu'un opérateur positif est nécessairement auto-adjoint.

Définition 1.2.13. Soit T un opérateur positif dans $B(\mathcal{H})$, on dit que $S \in B(\mathcal{H})$ est la racine carrée de T si : $S^2 = T$.

Théorème 1.2.5. Soit T un opérateur linéaire borné positif, alors il existe un unique opérateur positif S tel que : $S^2 = T$.

De plus : si T commute avec B , alors B commute avec S on note $S = T^{\frac{1}{2}}$.

Exemple 4. 1) L'opérateur $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ est la racine carrée de l'opérateur $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$

2) Soit $T \in B(\mathcal{H})$ défini par :

$$T : L^2[0, 1] \rightarrow L^2[0, 1]$$

$$Tf(x) = xf(x)$$

$$\langle Tf, f \rangle = \int_0^1 xf(x)\overline{f(x)}dx = \int_0^1 x|f(x)|^2dx \geq 0$$

Alors on a : T est positif, donc il existe S tel que $S^2 = T$, on remarque que :

$$S : L^2[0, 1] \rightarrow L^2[0, 1]$$

$$Sf(x) = (x)^{\frac{1}{2}}f(x)$$

alors :

$$S^2f(x) = S(Sf(x)) = S((x)^{\frac{1}{2}}f(x))$$

$$(x)^{\frac{1}{2}}(x)^{\frac{1}{2}}f(x) = xf(x) = Tf(x).$$

Théorème 1.2.6. (Décomposition polaire d'un opérateur linéaire borné)

Soit $T \in B(\mathcal{H})$ et inversible, alors $T = UR$ où R est positif et U est unitaire.

preuve : Puisque T est inversible, T^* est aussi, donc T^*T est inversible.

Puisque $T^*T \geq 0$ alors $T^*T^{\frac{1}{2}} = |T|$ existe, et elle est même inversible, on prend :

$$R = T^*T^{\frac{1}{2}} \text{ et } U = TR^{-1}$$

donc il reste de montrer que U est unitaire on a :

$$U^*U = (TR^{-1})^*(TR)^* = (R^{-1})^*T^*TR^{-1}$$

$$(R^{-1})^* = (R^{-1})^* \text{ car } R \text{ positif} \quad R^{-1}(T^*T)R^{-1} = I, \quad (\text{car } T^*T = R^2)$$

□

1.2.6 Opérateurs unitaires, Isométriques, Auto-adjoints

Opérateur unitaire

Définition 1.2.14. Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert, $U \in B(\mathcal{H})$ On dit que U est un opérateur unitaire si : U est inversible et

$$U^{-1} = U^*$$

Proposition 1.2.4. Soient $U, V \in B(\mathcal{H})$ des opérateurs unitaires. Alors :

- i) U est isométrique .
- ii) $\|U\| = 1$
- iii) U^{-1} et U^* sont unitaires.
- iv) UV est unitaire.

preuve. (i) Pour tout $V \in \mathcal{H}$, on a bien :

$$\|UV\|^2 = \langle UV, UV \rangle = \langle U^*UV, V \rangle = \langle V, V \rangle = \|V\|^2.$$

(ii) Si $\|UV\| = \|V\|$ pour tout $V \in \mathcal{H}$, alors :

$$\|U\| = \sup_{V \in \mathcal{H}} \frac{\|UV\|}{\|V\|} = 1$$

(iii) C'est une conséquence immédiate de la proposition précédent.

(iv) On a bien $(UV)^{-1} = U^{-1}V^{-1} = V^*U^* = (UV)^*$.

Pour contre, une application linéaire isométrique n'est pas forcément unitaire.

□

Opérateur isométrie

Définition 1.2.15. On dit que $A \in B(\mathcal{H})$ un opérateur isométrie (ou isométrique) si :

$$A^*A = I ; \text{ où bien : } \|Ax\| = \|x\|$$

Opérateur auto-adjoint

Définition 1.2.16. [32] Soient $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ deux espaces de Hilbert et $T \in B(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$. L'opérateur adjoint de T est l'opérateur linéaire $T^* : \mathcal{H}_2 \mapsto \mathcal{H}_1$ caractérisé par

$$\langle T^*y, x \rangle_{\mathcal{H}_1} = \langle y, Tx \rangle_{\mathcal{H}_2}$$

Pour tout $x \in \mathcal{H}_1, y \in \mathcal{H}_2$ on dit que T est **symétrique** ou que T est **hermitien**.

Exemple 5. Soit $A \in \mu_2(\mathbb{R})$ tq

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

d'où

$$A^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On remarque que : $A = A^*$ donc est auto-adjoint.

Théorème 1.2.7. [15] (**Norme d'un opérateur auto-adjoint**)

Si T est un opérateur auto-adjoint alors

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} |\langle Tx, x \rangle|$$

Proposition 1.2.5. Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert complexe, et $T \in \mathcal{H}$ auto-adjoint alors :

$$\langle Tx, x \rangle = \langle x, Tx \rangle \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathcal{H}$$

preuve : En effet $\langle Tx, x \rangle = \langle x, Tx \rangle$ comme T est auto-adjoint, donc :

$$\langle x, Tx \rangle = \overline{\langle Tx, x \rangle}$$

□

Corollaire 1.2.1. Si $\mathcal{H}$ est un espace de Hilbert, et $T \in B(\mathcal{H})$ un opérateur auto-adjoint alors

$$\langle Tx, x \rangle = 0 \Rightarrow T = 0, \forall x \in \mathcal{H}$$

Proposition 1.2.6. [1] Si T_1 et T_2 deux opérateurs auto-adjoint alors

- 1) $\alpha T_1 + \beta T_2$ est un opérateur auto-adjoint, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$
- 2) $T_1 T_2$ est un opérateur auto-adjoint si $T_1 T_2 = T_2 T_1$
- 3) Si T est un opérateur quelconque alors, $T^* T$, $T T^*$ et $T^* + T$ sont auto-adjoints.

1.3 Théorie Spectrale

1.3.1 Spectre des opérateurs linéaires bornés

Définition 1.3.1. [32] Soit T un opérateur linéaire borné sur un espace de Hilbert complexe :

- Le nombre $\lambda \in \mathbb{C}$ s'appelle **un point régulier** de l'opérateur T , si $(T - \lambda I)$ est inversible de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{H}$ et $(T - \lambda I)^{-1} \in B(\mathcal{H})$.

- L'ensemble des points régulier de l'opérateur T s'appelle **l'ensemble résolvant** et note par $\rho(T)$ tel que

$$\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda I \text{ inversible}\}$$

- La complémentaire de $\rho(T)$ on note par $\sigma(T)$ est appelé le spectre de l'opérateur T , et enfin **la résolvante** de T défini par :

$$R_\lambda(T) \doteq \{(T - \lambda I)^{-1}, \lambda \in \rho(T)\}$$

Définition 1.3.2. [14] Pour $T \in B(\mathcal{H})$

- Si $\lambda \in \sigma(T)$ et $\exists \varphi \in \mathcal{H}, \varphi \neq 0$ tel que $T\varphi = \lambda\varphi$ on dit que φ est un **vecteur propre** de T associé à la valeur propre λ .
- L'ensemble des valeurs propres de T est appelé **spectre ponctuel**, noté $\sigma_p(T)$ et défini par :

$$\sigma_p(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (T - \lambda I) \text{ non injectif}\} = \{\lambda \in \mathbb{C} : \text{Ker}(T - \lambda I) \neq \{0\}\}.$$

- Si $\lambda \in \sigma(T)/\sigma_p(T)$ et $\overline{\text{Im}(T - \lambda I)} = \mathcal{H}$, on dit que λ est dans **le spectre continue** de T noté $\sigma_c(T)$ donc est défini par :

$$\sigma_c(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda I \text{ injectif et } \overline{\text{Im}(T - \lambda I)} = \mathcal{H}\}.$$

- Si $\lambda \in \sigma(T)/\sigma_p(T)$ et $\overline{\text{Im}(T - \lambda I)} \neq \mathcal{H}$, on dit que : λ appartient au **spectre résident** noté $\sigma_r(T)$ telque :

$$\sigma_r(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda I \text{ injectif et } \overline{\text{Im}(T - \lambda I)} \neq \mathcal{H}\}$$

$$= \{\lambda \in \sigma(T)/\sigma_p(T), \overline{\text{Im}(T - \lambda I)} \neq \mathcal{H}\}.$$

- Le spectre **approché** de $T \in B(\mathcal{H})$ est l'ensemble

$$\sigma_r(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \exists (x_n) \subset X; \|(x_n)\| = 1 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} (T - \lambda I)(x_n) = 0\}.$$

Remarque 1.3.1. $\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \sigma_c(T) \cup \sigma_r(T)$

Définition 1.3.3. [2] (**Rayon spectrale**)

Soit T opérateur borné dans $B(\mathcal{H})$, le rayon spectral de T est $r(T)$ où

$$r(T) = \sup_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda|$$

Théorème 1.3.1. Soit $\mathcal{H}$ est un espace de Hilbert complexe et $T \in B(\mathcal{H})$ alors on a :

- La limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\|T^n\|)^{\frac{1}{n}}$ existe et elle égale à $r(T)$
 (i.e $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\|T^n\|)^{\frac{1}{n}} = \inf_{n \geq 1} (\|T^n\|)^{\frac{1}{n}}$)
- Si T est un opérateur auto-adjoint, alors : $r(T) = \|T\|$.

1.3.2 Rayon spectral

Définition 1.3.4. Pour une paire (A, B) d'opérateurs dans $\mathcal{L}(X, Y)$, le spectre $\sigma(A, B)$ du crayon opérateur linéaire $(A - \lambda B)$, ou du la paire (A, B) , est défini par :

$$\begin{aligned}\sigma(A, B) &= \{\lambda \in \mathbb{C} \text{ telque } (A - \lambda B) \text{ est non inversible}\} \\ &= \{\lambda \in \mathbb{C} \text{ telque } 0 \in \sigma(A - \lambda B)\}.\end{aligned}$$

- L'ensemble des valeurs propres de (A, B) est appelé **spectre ponctuel**, noté $\sigma_p(A, B)$ et défini par :

$$\sigma_p(A, B) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (A - \lambda B) \text{ est non injective}\}$$

- Si $\lambda \in \sigma(A, B) / \sigma_p(A, B)$ on dit que λ est dans **le spectre continu** de (A, B) noté $\sigma_c(A, B)$ donc est défini par :

$$\sigma_c(A, B) = \{\lambda \in \mathbb{C} : N(A - \lambda B) = \{0\}, \overline{R(A - \lambda B)} = Y \text{ et } R(A - \lambda B) \neq Y\}$$

- La troisième partie est **le spectre résiduel** de $(A - \lambda B)$ est l'ensemble $\sigma_r(A, B)$ de tous les scalaires tels que $(A - \lambda B)$ a un inverse sur sa rang qui n'est pas densément défini :

$$\sigma_r(A, B) = \{\lambda \in \mathbb{C} : N(A - \lambda B) = \{0\}, \overline{R(A - \lambda B)} \subsetneq Y\}$$

Exemple 6. 1) Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Alors $\det(A - \lambda B) = 3(2 - \lambda)$ et $\sigma(A, B) = \{2\}$.

2) Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Alors $\det(A - \lambda B) = 3$ et $\sigma(A, B) = \emptyset$ et $\sigma_r(A, B) = \mathbb{C}$.

3) Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Alors $\det(A - \lambda B) = 0$ et $\sigma(A, B) = \mathbb{C}$ et $\sigma_r(A, B) = \emptyset$.

CHAPITRE 2

Les fonctions analytiques et la transformation de Fourier

Dans ce chapitre, nous avons parlé sur les fonctions analytiques, le Calcul intégrale de contour et la transformation de Fourier.

2.1 Les fonctions holomorphes

La dérivation par rapport à une variable complexe est formellement identique à la dérivation par rapport à une variable réelle .

2.1.1 Dérivabilité

Soient $E \subseteq \mathbb{C}$ un ensemble, $z_0 \in E$ un de ses points et $g : E \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction. Les énoncés suivants sont alors équivalents :

1) Pour toute suite $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de points de E distincts de z_0 ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = z_0 \text{ implique } \lim_{n \rightarrow +\infty} g(z_n) = L.$$

2) A chaque $\epsilon > 0$ correspond $\delta > 0$ tels que

$$z \in E \text{ et } 0 < |z - z_0| < \delta \text{ impliquent } |g(z) - L| < \epsilon.$$

Lorsqu'ils sont satisfaits, on écrit

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} g(z) = L.$$

Soient $D \subseteq \mathbb{C}$ un domaine, $z_0 \in D$ un de ses points et $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction.

On dit que f est dérivable en z_0 si

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

existe.

$$\left(Ici \ g(z) = \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right)$$

On pose alors

$$f'(z) = \frac{df}{dz}(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

La fonction est dite **holomorphe** dans D si elle est dérivable en chaque point de D . Une fonction est dite holomorphe en un point si elle est holomorphe dans un disque ouvert centré en ce point. Les règles du calcul différentiel concernant sommes, différences, produits, quotients et compositions (lorsqu'elles sont définies) sont bien entendu encore valables et une fonction dérivable en un point y est nécessairement continue.

Théorème 2.1.1. *Soit*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k, \quad |z| < R.$$

Alors f est holomorphe dans le disque $D(0, R)$ et

$$f'(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} k a_k z^{k-1}, \quad |z| < R.$$

preuve : Le rayon de convergence de la série dérivée est le même que celui de la série originale. En particulier,

$$\phi(r) = \sum_{k=2}^{+\infty} (k-1)^2 |a_k| r^{k-2} < +\infty$$

pour tout $r < R$. Soient donc $r < R$ et $z, z_0 \in D(0, r)$. Alors, en vertu de l'identité

$$A^k - B^k = (A - B)(A^{k-1} + A^{k-2}B + A^{k-3}B^2 + \dots + B^{k-1})$$

on a que

$$\begin{aligned}
 \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - \sum_{k=1}^{+\infty} k a_k z_0^{k-1} &= \sum_{k=2}^{+\infty} a_k \left(\frac{z^k - z_0^k}{z - z_0} - k z_0^{k-1} \right) \\
 &= \sum_{k=2}^{+\infty} a_k \left(\sum_{p=0}^{k-1} z^{k-1-p} z_0^p - k z_0^{k-1} \right) = \sum_{k=2}^{+\infty} a_k \left(\sum_{p=0}^{k-2} \left(z^{k-1-p} - z_0^{k-1-p} \right) z_0^p \right) \\
 &= \sum_{k=2}^{+\infty} a_k \left(\sum_{p=0}^{k-2} (z - z_0) \left(\sum_{q=0}^{k-2-p} z^{k-2-p-q} z_0^q \right) z_0^p \right)
 \end{aligned}$$

de telle sorte que

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - \sum_{k=1}^{+\infty} k a_k z_0^{k-1} \right| &\leq |z - z_0| \sum_{k=2}^{+\infty} |a_k| \left(\sum_{p=0}^{k-2} \left(\sum_{q=0}^{k-2-p} r^{k-2-p-q} \right) \right) \\
 &\leq |z - z_0| \phi(r).
 \end{aligned}$$

C.Q.F.D. □

Remarque 2.1.1. On a en particulier

$$a_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(0)$$

(formule de Taylor pour les coefficients d'une série entière).

2.2 Le Calcul intégrale

Le Calcul intégrale des fonctions complexes est au coeur de leur théorie.

2.2.1 Propriétés des courbes

Une **courbe différentiable** $\mathcal{C}$ est définie par une fonction $t \mapsto z(t)$ d'un intervalle $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ vers $\mathbb{C}$ admettant une dérivée $z'(t) = x'(t) + i y'(t)$ continue et non nulle :

$$\mathcal{C} = \{z \mid z = z(t), a \leq t \leq b\}.$$

Une **courbe différentiable par morceaux** ou un **chemin** est obtenue en recollant un nombre fini de courbes différentiables $\mathcal{C}_k$ dont l'extrémité $z_k(b_k)$ de l'une coïncide avec l'origine de la suivante $z_{k+1}(a_{k+1})$:

$$\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2 = \{z \mid z = z_1(t) \text{ ou } z = z_2(t), z_1(b_1) = z_2(a_2)\}.$$

Il est toujours possible (mais rarement nécessaire) de reparamétriser l'ensemble de ces courbes au moyen d'un seul intervalle $[a, b]$ et d'une fonction continument dérivable par morceaux. Dans ce cours, les chemins rencontrés seront presque tous formés d'arcs de cercle et de segments de droite. Soit C un chemin. On supposera que $z(t_1) \neq z(t_2)$ si $a < t_1 < t_2 < b$ (courbe de Jordan) et lorsque $z(a) = z(b)$, on dira que le chemin est fermé. Un chemin fermé partage le plan en deux domaines disjoints, un domaine borné, l'intérieur de C et un domaine non borné, son extérieur. La démonstration rigoureuse de ce fait « vident » est trop compliquée pour être présentée dans ce cours (théorème de Jordan) - consulter [3], page 267, à ce propos.

Exemple 7. Le cercle unité est une courbe fermée qui peut être paramétrée par

$$z = e^{it} \quad , \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Son intérieur est le disque $D(0, 1)$.

Toute fonction $s \mapsto t$ d'un intervalle $[c, d]$ sur $[a, b]$ admettant une dérivée continue et telle que $t'(s) > 0$ constitue un **reparamétrage admissible** de la courbe C :

$$C = \{z \mid z = z(t(s)) = z_1(s), \quad c \leq s \leq d, \quad t'(s) > 0\}.$$

Lorsque $t'(s) < 0$, on obtient une courbe dénotée par $-C$:

$$-C = \{z \mid z = z(t(s)) = z_1(s), \quad c \leq s \leq d, \quad t'(s) < 0\}.$$

Un paramétrage d'une courbe γ induit un **sens de parcours**. La tangente à la courbe C en $z_0 = z(t_0)$ est

$$T = \{z \mid z = z(t_0) + z'(t_0)(t - t_0), \quad t \in \mathbb{R}\}.$$

et sa normale est

$$T = \{z \mid z = z(t_0) + iz'(t_0)(t - t_0), \quad t \in \mathbb{R}\}.$$

Les « vecteurs » $z'(t_0) = (x'(t_0); y'(t_0))$ et $iz'(t_0) = (-y'(t_0); x'(t_0))$ sont toujours orthogonaux et orientés comme les « vecteurs » $1 = (1, 0)$ et $i = (0, 1)$.

Une courbe fermée est dite parcourue **dans le sens positif** si le vecteur $iz'(t)$ pointe vers son intérieur. Cela signi

e qu'au voisinage de chaque point z_0 (dans un disque $D(z_0, r)$ assez petit), l'intérieur de C et le vecteur $iz'(t_0)$ sont situés dans le même des deux demi-plans déterminés par la tangente en z_0 . Un reparamétrage admissible ($z'_1(s) = z'(t)t'(s)$ avec $t'(s) > 0$) préserve, bien entendu, le sens de parcours.

La **longueur** de la courbe C est

$$L_C = \int_C |dz| = \int_a^b |z'(t)| dt.$$

Comme il se doit, elle ne dépend pas du paramétrage retenu :

$$\int_a^b |z'(t)| dt = \int_a^b |z'_1(t)| |s'(t)| dt = \int_c^d |z'_1(s)| ds.$$

Remarque 2.2.1. En coordonnées cartésiennes, on écrit

$$|dz| = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

alors qu'en coordonnées polaires,

$$|dz| = \sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2}.$$

2.3 Intégrales curvilignes

Soient $D \subseteq \mathbb{C}$ un domaine, $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue et $\mathcal{C}$ une courbe différentiable contenue dans D , paramétrée par $z = z(t)$, $a \leq t \leq b$.

Par définition,

$$\int_{\mathcal{C}} f(z) dz = \int_a^b f(z(t)) z'(t) dt.$$

Si $z = z(t(s)) = z_1(s)$, $c \leq s \leq d$, $t'(s) > 0$ est un autre paramétrage admissible, on a bien sur que

$$\int_{\mathcal{C}} f(z) dz = \int_c^d f(z_1(s)) z'_1(s) ds.$$

Si, au contraire, $z = z(t(s)) = z_1(s)$, $c \leq s \leq d$, $t'(s) < 0$, on a

$$\int_{-\mathcal{C}} f(z) dz = - \int_{\mathcal{C}} f(z) dz.$$

L'intégrale curviligne de f le long d'un chemin $\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2$ est définie par

$$\int_{\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2} f(z) dz = \int_{\mathcal{C}_1} f(z) dz + \int_{\mathcal{C}_2} f(z) dz.$$

L'intégrale curviligne jouit donc des propriétés fondamentales de linéarité :

$$\int_{\mathcal{C}} (\alpha_1 f_1(z) + \alpha_2 f_2(z)) dz = \alpha_1 \int_{\mathcal{C}} f_1(z) dz + \alpha_2 \int_{\mathcal{C}} f_2(z) dz,$$

d'additivité

$$\int_{\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2} f(z) dz = \int_{\mathcal{C}_1} f(z) dz + \int_{\mathcal{C}_2} f(z) dz.$$

et satisfait l'inégalité

$$\left| \int_C f(z) dz \right| \leq \int_C |f(z)| |dz| \leq \sup\{|f(z)| \mid z \in C\} L_C.$$

Considérons le cas d'une fonction f admettant une primitive F holomorphe dans D . Pour tout chemin C d'origine z_1 et d'extrémité z_2 , on a

$$\int_C f(z) dz = \int_a^b f(z(t)) z'(t) dt = \int_a^b F'(z(t)) z'(t) dt = F(z(t)) \Big|_a^b = F(z_2) - F(z_1).$$

Il est donc raisonnable d'écrire

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z) dz = F(z_2) - F(z_1)$$

dans ce cas. En particulier, pour tout chemin fermé C ,

$$\int_C f(z) dz = 0.$$

Exemple 8. Pour tout $n \in \mathbb{N}_0$

$$\int_{z_1}^{z_2} z^n dz = \frac{z_2^{n+1} - z_1^{n+1}}{n+1}. \quad (2.1)$$

2.4 Les théorèmes de Cauchy

La suite de la théorie est basée sur le théorème suivant, la démonstration présentée ici s'inspire de celle d'Edouard Goursat.

Théorème 2.4.1. (Cauchy) Soient $D \subseteq \mathbb{C}$ un domaine, $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe et C un chemin fermé contenu ainsi que son intérieur dans D . Alors

$$\int_C f(z) dz = 0.$$

preuve : Soit

$$I = \left| \int_C f(z) dz \right|.$$

Considérons d'abord le cas où C est un triangle parcouru dans le sens positif.

Au moyen des milieux de ses cotés, subdivisons-le en quatre autres triangles C_k . Les segments

parcourus deux fois le sont dans des sens opposés de telle sorte que

$$\int_C f(z)dz = \sum_{k=1}^4 \int_{C_k} f(z)dz.$$

Il s'ensuit que pour au moins l'un de ces triangles, appelons-le T_1 , on a

$$\frac{I}{4} \leq \left| \int_{\tau_1} f(z)dz \right|.$$

Le périmètre de ce triangle est $L_C/2$. En recommençant ce procédé, on obtient une suite de triangles emboîtés τ_n tels que

$$\frac{I}{4^n} \leq \left| \int_{\tau_n} f(z)dz \right|.$$

et que

$$L(\tau_n) = \frac{L_C}{2^n}.$$

L'intersection de ces triangles est un point z_0 où f est holomorphe. On peut tracer autour de ce point un disque $D(z_0, r)$ assez petit pour qu'en tous ces points, on ait

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + r(z)(z - z_0)$$

avec

$$|r(z)| < \epsilon$$

et contenant tous les triangles à partir d'un certain rang. On aura alors, pour ces triangles,

$$\frac{I}{4^n} \leq \left| \int_{\tau_n} f(z)dz \right| = \left| \int_{\tau_n} r(z)(z - z_0)dz \right| \leq \epsilon \frac{L(C)^2}{4^n}$$

ce qui implique $I = 0$.

□

Le cas où C est un polygone se déduit du cas précédent par triangulation.

Dans le cas général, la fonction f étant continue et en vertu du cas $n = 0$ de (2.1), l'intégrale

$$\int_C f(z)dz$$

est la limite d'une suite de sommes

$$S_n = \sum_{k=1}^n f(z_k)(z_k - z_{k-1}),$$

Théorème 2.4.2. (Cauchy) Soient $D \subseteq \mathbb{C}$ un domaine, $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe et C un chemin fermé contenu ainsi que son intérieur dans D . Alors, pour tout z dans l'intérieur de C ,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta,$$

le chemin C étant parcouru dans le sens positif.

preuve : La fonction

$$g(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$$

étant holomorphe dans le domaine $D \setminus \{z\}$, le théorème de Cauchy implique

$$0 = \int_C g(\zeta) d\zeta + \int_{\mathcal{L}} g(\zeta) d\zeta - \int_{C_r} g(\zeta) d\zeta - \int_{\mathcal{L}} g(\zeta) d\zeta$$

ou

$$C_r = \{\zeta \mid \zeta = z + re^{it}, -\pi \leq t \leq \pi\}$$

de telle sorte que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(z + re^{it}) dt.$$

Le premier membre de la double équation précédente est indépendant de r et

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(z + re^{it}) dt = f(z).$$

□

Théorème 2.4.3. (Cauchy) Soient $D \subseteq \mathbb{C}$ un domaine et $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Alors sa dérivée $f' : D \rightarrow \mathbb{C}$ est holomorphe. De plus, si C un chemin fermé contenu ainsi que son intérieur dans D , pour tout z dans l'intérieur de C ,

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta,$$

le chemin C étant parcouru dans le sens positif.

preuve : Soient $z \in D, r > 0$ tel que $D(z, 3r) \subseteq D$ et $|h| < r$. Alors

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{2r}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z - h)(\zeta - z)} d\zeta$$

ce qui montre que, laissant $h \rightarrow 0$,

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{2r}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta$$

La démonstration de la relation

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{2r}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z - h)(\zeta - z)} d\zeta$$

se fait comme dans le théorème précédent. $\square$

Remarque 2.4.1. Par récurrence sur n , on voit par un raisonnement semblable que l'on a pour la n^{me} dérivée $f^{(n)}$ et sous les memes hypothèses, la relation

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta.$$

Autrement dit, on peut dériver sous le signe intégral autant de fois que l'on veut.

Un domaine D est simplement connexe s'il possède la propriété suivante : si C est un chemin fermé contenu dans D , son intérieur est aussi contenu dans D .

2.5 Propriétés analytiques des fonctions holomorphes

Bien que formellement identiques, la dérivation par rapport à une variable complexe et la dérivation par rapport à une variable réelle entraînent des conséquences bien différentes pour les fonctions impliquées.

2.5.1 L'analycité

Théorème 2.5.1. (Taylor) Soient $D \subseteq \mathbb{C}$ un domaine contenant le disque $\overline{D}(z_0, r)$ et $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Alors

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (z - z_0)^k, \quad |z - z_0| < r$$

ou

$$a_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta,$$

C_r désignant le cercle de centre z_0 et de rayon r parcouru dans le sens positif.

De façon générale, on dit d'une fonction ϕ qu'elle est **analytique** si elle peut localement s'exprimer comme la somme d'une série entière de son argument (ou de ses arguments). Il peut s'agir d'une fonction $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, d'une fonction $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, d'une fonction $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ etc ... Toute fonction holomorphe dans un domaine y est donc analytique. Une fonction holomorphe dans le plan tout entier est dite **entière**. Une telle fonction peut s'écrire comme la somme d'une série entière en z convergeant pour tout $z \in \mathbb{C}$.

Théorème 2.5.2. (Liouville)

Une fonction entière et bornée est nécessairement une constante.

2.5.2 La propriété des zéros isolés

Soit $D \subseteq \mathbb{C}$ un domaine et $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. La fonction admet un zéro d'ordre ou de **multiplicité** $m \geq 1$ en $z_0 \in D$ si son développement de Taylor y est de la forme

$$f(z) = \sum_{k=m}^{+\infty} a_k (z - z_0)^k \quad a_m \neq 0.$$

Théorème 2.5.3. Les zéros d'une fonction holomorphe sont isolés.

Le principe du prolongement analytique exprime que deux fonctions holomorphes dans un même domaine D qui coïncident sur un ensemble de points admettant un point d'accumulation dans D doivent coïncider partout dans D . Par exemple deux fonctions entières coïncidant sur l'axe réel coïncident partout.

Théorème 2.5.4. Soient $D \subseteq \mathbb{C}$ un domaine symétrique par rapport à l'axe réel et $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe, réelle sur l'axe réel. Alors

$$f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$$

2.5.3 La propriété du module maximum

Théorème 2.5.5. Soit $D \subseteq \mathbb{C}$ un domaine et $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe, non constante. Alors le module $|f|$ de f n'a pas de maximum local dans D ni de minimum local sauf aux points où f s'annule.

Théorème 2.5.6. (Schwarz) Soit f une fonction holomorphe dans le disque unité, telle que $|f(z)| \leq 1$ et s'annulant à l'origine. Alors

$$|f(z)| \leq |z|, \quad |z| < 1$$

avec égalité en un point $z \neq 0$ si et seulement si $f(z) = cz$, $|c| = 1$.

2.6 La Transformée de Fourier

La Transformée de Fourier (TF) est une extension pour les fonctions non périodiques du Développement en Série de Fourier (DSF) des fonctions périodiques.

La transformée (continue) de Fourier (également appelée intégrale de Fourier) associe à une fonction $F(x)$ (à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) une autre fonction notée $F(F(x))(\xi)$ ou plus simplement $\widehat{F}(\xi)$; ξ est une variable indépendante de x , appelée variable duale.

$$\mathcal{F} : F(x) \mapsto \widehat{F}(\xi) \equiv \mathcal{F}(F(x))(\xi)$$

Lorsque la fonction $F(x)$ représente un signal e.g. une image, une onde sonore, électromagnétique (x désignant la variable de temps ou d'espace), sa transformée de Fourier $\widehat{F}(\xi)$ est son spectre avec ξ qui représente la fréquence ou la pulsation.

Notons que la variable duale est ici continue et non discrète comme c'était le cas avec les séries de Fourier (l'indice n). Notons aussi qu'une intégrale n'est rien d'autre qu'une « somme continue »...

Les transformées - intégrales de Fourier constituent un pilier de "l'analyse de Fourier" qui ont par la suite constitué une base majeure de diverses branches mathématiques (e.g. l'analyse harmonique 1 et ses liens forts avec des outils mathématiques modernes) et de l'analyse du signal (jusqu'aux ondelettes).

Aussi cette transformation mathématique peut être très utile pour résoudre certaines équations différentielles car bien plus simple à résoudre dans l'espace de Fourier i.e l'espace fréquentiel.

2.7 Définitions et fondamentaux

2.7.1 Définition de la transformée de Fourier $\mathcal{F}(\cdot)$

Définition 2.7.1. Soit une fonction $F(x)$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ (ou $\mathbb{R}$), F intégrable sur $\mathbb{R}$ au sens $F \in L^1(\mathbb{R})$: l'intégrale généralisée $\int_{-\infty}^{+\infty} |F(x)| dx$ est finie i.e. convergente.

La transformée de Fourier de F est la fonction $\mathcal{F}(F) = \widehat{F}$ définie par :

$$\mathcal{F}(F) : \xi \mapsto \widehat{F}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(x) e^{-i\xi x} dx \quad (2.2)$$

où e^{iz} désigne l'exponentielle complexe.

Notons que même pour F à valeurs dans $\mathbb{R}$, $\widehat{F}$ est (a-priori) à valeurs dans $\mathbb{C}$.

La transformation de Fourier $\widehat{F}$ est un opérateur qui transforme une fonction $F(x)$ sur $\mathbb{R}$, intégrable, en une autre fonction $\widehat{F}(\xi)$; ξ est appelée variable duale.

2.7.2 Remarques et premières propriétés

1. Il est possible de choisir une définition légèrement différente pour la transformation de Fourier; cela n'est qu'une question de convention dont les conséquences ne se sont que des facteurs multiplicatifs dans les formules à venir (notamment dans l'expression de la transformée de Fourier inverse). Typiquement selon les communautés scientifiques, e.g. mécaniciens, électroniciens, physiciens quantiques etc, on considérera les définitions suivantes : $\widehat{F}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(x) e^{-2\pi i \xi x} dx$ ou encore $\widehat{F}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(x) e^{-i\xi x} dx$.
2. On peut définir la transformée de Fourier pour une fonction F à plusieurs variables : $F(x_1, \dots, x_n)$. Si on note $(\cdot, \cdot)$ le produit scalaire de $\mathbb{R}^n$, $(x, \xi) = \sum_{j=1}^n x_j \xi_j$, alors on a :

$$\widehat{F}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} F(x) e^{-i(\xi, x)} dx \quad (2.3)$$

Typiquement en traitement d'images, on effectue des transformations de Fourier à deux dimensions.

Par ailleurs la transformée de Fourier d'une fonction radiale est radiale.

Pour des raisons de clarté et sans perte importante de généralité, ce cours se limite aux fonctions à une seule variable.

3. Les situations types sont les suivantes :

- (a) la variable primale x est le temps (s); dans ce cas, la variable duale ξ a la dimension d'une fréquence (Hz). $\widehat{F}(\xi)$ représente alors le spectre fréquentiel du signal $F(x)$.

- (b) la variable primale x est une position (m) ; dans ce cas, la variable duale ξ a la dimension de l'inverse d'une longueur. ξ désigne ce que l'on appelle le vecteur d'onde.

Un exemple physique remarquable sont les phénomènes de diffraction qui donnent une image de l'espace dual du réseau ; ils sont en quelque sorte une « machine naturelle à transformation de Fourier ».

Le **théorème de Riemann-Lebesgue** (également appelé lemme intégral de Riemann-Lebesgue) stipule les points suivants.

- La transformée de Fourier $\widehat{F}(\xi)$ est une fonction continue (alors que $F(x)$ ne l'est pas forcément!).
- A l'infini, la transformée de Fourier $\widehat{F}$ tend vers 0 :

$$\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} \widehat{F}(\xi) = 0 \quad (2.4)$$

- On a l'estimation : $\|\widehat{F}\|_{\infty} \leq \|f\|_1$

2.7.3 La transformée inverse $\mathcal{F}^{-1}(\cdot)$

Pour tout transformée de fonction (Fourier, Laplace et d'autres moins usuelles), il est indispensable pour l'usage de « l'outil mathématique » que l'on sache à l'espace originel. Dans le cas présent, il est nécessaire de savoir caractériser une - la transformée inverse $\mathcal{F}^{-1}$ qui vérifierait : $\mathcal{F}^{-1} \circ \mathcal{F}(F(x)) = \mathcal{F}^{-1}(\widehat{F}(\xi)) = F(x)$.

Expression de $\mathcal{F}^{-1}(\cdot)$

Si $\widehat{F}(\xi)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, on peut montrer (ça n'est pas trivial du tout !) que :

$$F(x) = \mathcal{F}^{-1}(\widehat{F})(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{F}(\xi) e^{+i\xi x} d\xi \quad (2.5)$$

On remarque que l'expression de la transformée inverse $\mathcal{F}^{-1}$ est très semblable à celle de la transformation directe $\mathcal{F}$. En effet seul change le signe de l'exponentielle complexe : $+i$ au lieu de $-i$! (Modulo le facteur multiplicatif $\frac{1}{2\pi}$, facteur qui dépend de la définition choisie de $\mathcal{F}$).

Cette transformation inverse implique qu'à partir des variations fréquentielles on peut retrouver les variations temporelles.

A noter que cette transformation inverse permet de remonter à F en tout point x que si F est continue sur $\mathbb{R}$, et au sens presque partout sinon.

Notons également que $\widehat{F}(\xi)$ n'appartient pas nécessairement à $L^1(\mathbb{R})$! Un exemple est le sinus cardinal sinc qui est continue, borné, qui tend vers 0 à l'infini mais qui n'est pas dans $L^1(\mathbb{R})$.

CHAPITRE 3

Les équations d'opérateurs dans les espaces fonctionnelles

Dans ce chapitre, nous présentons des solutions d'équations d'opérateurs dans quelque espace fonctionnelle (espace Banach) ensuite, nous consacrons dans l'espace de Hilbert .

3.1 Les équations d'opérateurs de type $AX - XB = Y$

[21]

Soit H et K deux espaces de banach, et soit $A : K \rightarrow K$, $B : H \rightarrow H$ et $Y : H \rightarrow K$ des opérateurs donnés. Considérer l'équation de l'opérateur

$$AX - XB = Y. \quad (3.1)$$

Dans (3.1) l'inconnue est un opérateur X de H en K . notez que l'équation (3.1) est résoluble si et seulement s'il existe un opérateur $X : H \rightarrow K$ tel que l'identité de matrice d'opérateurs suivante soit vraie :

$$\begin{bmatrix} I_K & X \\ 0 & I_H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & Y \\ 0 & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_K & -X \\ 0 & I_H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

Les différents facteurs de (3.2) agissent comme des opérateurs linéaires bornés sur $K \oplus H$.

De (3.2) on voit que le problème à résoudre (3.1) à voir avec la similarité des opérateurs. en effet, les premier et troisième facteurs du membre gauche de (3.2) sont inversibles et

$$\begin{bmatrix} I_K & X \\ 0 & I_H \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} I_K & -X \\ 0 & I_H \end{bmatrix}$$

Ainsi les opérateurs

$$\begin{bmatrix} A & Y \\ 0 & B \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

sont semblables chaque fois que l'équation (3.1) est résoluble. Si les espaces H et K sont de dimension finie, alors l'énoncé inverse est également vrai (voir Gohberg-Lancaster-Rodman [1], page 342). Dans le cas de dimension infinie, on ne sait pas si la similarité des opérateurs dans (3.3) implique que (3.1) est résoluble.

Théorème 3.1.1. *Supposons que les spectres des opérateurs $A : K \rightarrow K$ et $B : H \rightarrow H$ soient disjoints. Alors l'équation d'opérateur (3.1) a une solution unique $X : H \rightarrow K$ qui est donnée par*

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_A} (\lambda - A)^{-1} Y (\lambda - B)^{-1} d\lambda \\ &= \frac{-1}{2\pi i} \int_{\Gamma_B} (\lambda - A)^{-1} Y (\lambda - B)^{-1} d\lambda \end{aligned} \quad (3.4)$$

où Γ_A et Γ_B sont des contours de Cauchy autour de $\sigma(A)$ et $\sigma(B)$, respectivement, qui séparent $\sigma(A)$ de $\sigma(B)$.

preuve : Le fait que $\sigma(A)$ et $\sigma(B)$ soient des ensembles compacts disjoints permet de choisir les contours de Cauchy Γ_A et Γ_B comme indiqué. Supposons d'abord que $X \in B(\mathcal{H})$ est une solution de (3.1). Puis

$$X(\lambda - B) - (\lambda - A)X = Y, \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

et donc

$$(\lambda - A)^{-1} X - X(\lambda - B)^{-1} = (\lambda - A)^{-1} Y (\lambda - B)^{-1} \quad (3.5)$$

pour chaque $\lambda \in \rho(A) \cap \rho(B)$. En particulier, l'identité (3.5) est vraie pour $\lambda \in \Gamma_A$. Ensuite, utilisez que $\sigma(A)$ est à l'intérieur de Γ_A et $\sigma(B)$ est en dehors de Γ_A , et intégrez (3.5) sur Γ_A . on voit que Y est donné par la première identité dans (3.4). Si nous remplaçons dans l'argument ci-dessus Γ_A par Γ_B , alors nous obtenons la deuxième identité dans (3.4).

Il reste à montrer que (3.1) est résoluble. Pour ce faire, soit Y l'opérateur linéaire borné de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{H}$ défini par la première identité dans (3.4). Puis

$$\begin{aligned} AX &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_A} A(\lambda - A)^{-1} Y (\lambda - B)^{-1} d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_A} (A - \lambda + \lambda)(\lambda - A)^{-1} Y (\lambda - B)^{-1} d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_A} \lambda(\lambda - A)^{-1} Y (\lambda - B)^{-1} d\lambda - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_A} Y (\lambda - B)^{-1} d\lambda \end{aligned}$$

Notez que la deuxième intégrale de la dernière identité est égale à l'opérateur zéro. Ainsi

$$\begin{aligned} AX &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_A} (\lambda - A)^{-1} Y (\lambda - B)^{-1} (\lambda - B + B) d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_A} (\lambda - A)^{-1} Y d\lambda + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_A} (\lambda - A)^{-1} Y (\lambda - B)^{-1} d\lambda \\ &= C + XB \end{aligned}$$

il s'ensuit que X est solution de (3.1). □

Considérons l'espace de Banach $\mathcal{L}(H, K)$ de tous les opérateurs linéaires bornés de H dans K et définissons $J : \mathcal{L}(H, K) \longrightarrow \mathcal{L}(H, K)$ par $J(X) = AX - XB$, où A et B sont comme au début de cette section. Évidemment, J est un opérateur linéaire borné. Le théorème précédente nous dit que J est inversible si $\sigma(A) \cap \sigma(B) = \emptyset$. Remarquons que

$$(J - \lambda I)(X) = (A - \lambda)X - XB, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Il s'ensuit que $J - \lambda I$ est inversible, chaque fois que $\sigma(A - \lambda) \cap \sigma(B) = \emptyset$, et donc

$$\sigma(J) \subset \{\alpha - \beta \mid \alpha \in \sigma(A), \beta \in \sigma(B)\} \quad (3.6)$$

D.C.Kleinecke (voir Introduction de Lumer-Rosenblum [1]) a montré que le spectre de J est égal au membre droit de (3.6).

3.2 Les équations d'opérateurs généralisées

[21]

Dans cette section, nous considérons l'équation de l'opérateur

$$A_1 X G_2 - G_1 X A_2 = Y. \quad (3.7)$$

Ici $A_1, G_1 : H_1 \rightarrow K_1$ et $A_2, G_2 : H_2 \rightarrow K_2$ sont donnés des opérateurs agissant entre les espaces de Banach. Le problème est pour un $Y \in \mathcal{L}(H_2, K_1)$ donné de trouver $X \in \mathcal{L}(K_2, H_1)$ tel que (3.7) soit vérifié. L'équation d'opérateur considérée dans la section 3.1 est un cas particulier de (3.7). En fait, pour obtenir l'équation (3.1.1) à partir de (3.7), nous devons prendre $K_1 = K_2$ et G_1, G_2 devant être les opérateurs d'identité sur H_1 et H_2 , respectivement. le théorème suivant est l'analogue du théorème (3.1.1)

Théorème 3.2.1. Si les spectres des crayons $\lambda G_1 - A_1$ et $\lambda G_2 - A_2$ sont disjoints, alors pour toute main droite $Y \in \mathcal{L}(H_2, K_1)$ l'équation (3.7) a une solution unique $X \in \mathcal{L}(K_2, H_1)$. Plus précisément, si Γ est un contour de Cauchy tel que $\sigma(G_1, A_1)$ est dans le domaine intérieur de Γ , et $\sigma(G_2, A_2)$ est dans le domaine extérieur de Γ , ensuite

$$X = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (\lambda G_1 - A_1)^{-1} Y (\lambda G_2 - A_2)^{-1} d\lambda. \quad (3.8)$$

preuve : Puisque $\sigma(G_1, A_1) \cap \sigma(G_2, A_2) = \emptyset$, le point ∞ ne peut pas être dans les deux spectres. Ainsi, sans perte de généralité, nous pouvons supposer que $\infty \notin \sigma(G_1, A_1)$ Alors $\sigma(G_1, A_1)$ est un sous-ensemble compact de $\mathbb{C}$ qui se trouve dans l'ensemble ouvert $V = \mathbb{C} \setminus \sigma(G_2, A_2)$ choisissez un domaine de Cauchy borné Δ tel que $\sigma(G_1, A_1) \subset \Delta \subset \overline{\Delta} \subset V$, et soit Γ la frontière orientée de Δ . Alors Γ est un contour de Cauchy, $\sigma(G_1, A_1)$ est dans le domaine intérieur de Γ et $\sigma(G_2, A_2)$ est dans le domaine extérieur de Γ . Il suffit donc de prouver la deuxième partie du théorème, c'est-à-dire qu'il faut montrer que (3.8) donne l'unique solution de (3.7). Rappelons que de la position des spectres il résulte que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} G_1 (\lambda G_1 - A_1)^{-1} d\lambda = I, \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (\lambda G_2 - A_2)^{-1} G_2 d\lambda = 0. \quad (3.9)$$

où je représente maintenant l'opérateur d'identité sur Y_1 .

Soit X donné par (3.8). Alors $X \in \mathcal{L}(K_2, H_1)$ et à cause de (4.21)

$$\begin{aligned}
 A_1 X G_2 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} A_1 (\lambda G_1 - A_1)^{-1} Y (\lambda G_2 - A_2)^{-1} G_2 d\lambda \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} -Y (\lambda G_2 - A_2)^{-1} G_2 d\lambda + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \lambda G_1 (\lambda G_1 - A_1)^{-1} Y (\lambda G_2 - A_2)^{-1} G_2 d\lambda \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} G_1 (\lambda G_1 - A_1)^{-1} Y (\lambda G_2 - A_2)^{-1} (\lambda G_2 - A_2 + A_2) d\lambda \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} G_1 (\lambda G_1 - A_1)^{-1} Y d\lambda + G_1 Z A_2 \\
 &= Y + G_1 X A_2
 \end{aligned}$$

Donc X est une solution de (3.7)

Inversement, si X est une solution de (3.7). Puis

$$\begin{aligned}
 Y &= A_1 Z G_2 - \lambda G_1 X G_2 + \lambda G_1 X G_2 - G_1 X A_2 \\
 &= -(\lambda G_1 - A_1) X G_2 + G_1 X (\lambda G_2 - A_2).
 \end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (\lambda G_1 - A_1)^{-1} Y (\lambda G_2 - A_2)^{-1} d\lambda \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} X G_2 (\lambda G_2 - A_2)^{-1} d\lambda + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (\lambda G_1 - A_1)^{-1} G_1 X d\lambda \\
 &= X.
 \end{aligned}$$

Ici, nous avons utilisé l'analogue de (3.9) avec l'ordre de G_v et $(\lambda G_v - A_v)^{-1}$ interchangé ($v = 1, 2$). Nous avons maintenant prouvé que l'équation (3.7) est uniquement résoluble et son unique solution est donnée par (3.8). □

Corollaire 3.2.1. . Soient $T_1 : X_1 \rightarrow X_1$ et $T_2 : X_2 \rightarrow X_2$ des opérateurs linéaires bornés agissant entre des espaces de Banach et avec des spectres dans le disque unitaire ouvert. Alors pour tout $Y \in \mathcal{L}(H_2, H_1)$ l'équation

$$T_1 X T_2 - X = Y \quad (3.10)$$

a une solution unique $X \in \mathcal{L}(H_2, H_1)$, à savoir

$$X = - \sum_{v=0}^{\infty} T_1^v Y T_2^v. \quad (3.11)$$

preuve : on applique le Théorème (3.2.1) avec $\lambda G_1 - A_1 = \lambda I_1 - T_1$ et $\lambda G_2 - A_2 = \lambda T_2 - I_2$. Ici I_v désigne l'opérateur identité sur X_v ($v = 1, 2$). Évidemment, $\sigma(G_1, A_1) = \sigma(T_1)$. et

$$\sigma(G_2, A_2) = \{\lambda^{-1} | \lambda \in \sigma(T_2)\},$$

où nous utilisons la convention que $0^{-1} = \infty$. Puisque $\sigma(T_1)$ et $\sigma(T_2)$ sont dans le disque unité ouvert, les spectres $\sigma(G_1, A_1)$ et $\sigma(G_2, A_2)$ sont disjoints, et le théorème (3.2.1) implique que (3.10) a une solution unique qui est donnée par

$$X = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Theta} (\lambda I_1 - T_1)^{-1} Y (\lambda T_2 - I_2)^{-1} d\lambda \quad (3.12)$$

Ici Θ est le cercle unitaire doté de l'orientation dans le sens inverse des aiguilles d'une montre. Mais

$$(\lambda I_1 - T_1)^{-1} = \sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda^v} T_1^{v-1}, \quad \lambda \in \Theta$$

$$(\lambda T_2 - I_2)^{-1} = - \sum_{v=0}^{\infty} \lambda^v T_2^v, \quad \lambda \in \Theta$$

parce que $\sigma(T_1)$ et $\sigma(T_2)$ sont dans le disque d'unité ouvert. Il s'ensuit que le membre de droite de (3.12) est égal au membre de droite de (3.11). □

3.3 Équation aux différences homogènes

[21]

Dans cette section, nous considérons l'équation aux différences

$$\begin{cases} Gx_{n+1} = Ax_n, & n = 0, 1, 2, \dots, \\ x_0 = y. \end{cases} \quad (3.13)$$

Ici G et A sont des opérateurs linéaires bornés agissant sur un espace de Banach H et y est un vecteur donné dans H . On supposera que le pinceau $\lambda G - A$ est régulier. Si $G = I$, l'opérateur d'identité sur H , ou plus généralement, si G est inversible, alors (3.13) est toujours résoluble et la solution générale de (3.13) est donnée par

$$x_n = (G^{-1}A)^n y, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.14)$$

Si G n'est pas inversible, la situation est différente et dans ce cas il peut arriver que (3.13) ne soit jamais résoluble pour $y \neq 0$. Par exemple, soit G l'opérateur zéro et A l'opérateur identité sur H . Alors le crayon $\lambda G - A$ est régulier, mais (3.13) n'est résoluble que pour $y = 0$, et dans ce dernier cas la solution est la triviale, à savoir $x_n = 0$ ($n = 0, 1, 2, \dots$).

Théorème 3.3.1. Soit $\lambda G - A$ un crayon d'opérateur linéaire régulier agissant sur H . Si le spectre $\sigma(G, A)$ appartient au disque unitaire ouvert, alors pour chaque y dans H l'équation (3.13) est résoluble et l'unique solution $x_0, x_1, x_2, \dots$ converge vers zéro. Inversement, si pour chaque y de H l'équation (3.13) est résoluble et que sa solution $x_0, x_1, x_2, \dots$ converge vers zéro, alors $\sigma(G, A)$ appartient au disque unitaire fermé. Si, en plus, $\dim H < \infty$, alors $\sigma(G, A)$ appartient au disque d'unité ouvert.

preuve : Soit D le disque unité ouvert, et supposons que $\sigma(G, A) \subset D$. En particulier $\infty \notin \sigma(G, A)$, et donc G est inversible. Mais alors l'équation (3.13) peut être résolue pour chaque $y \in H$ et étant donné y la solution générale de (3.13) est décrite par (3.14). Notons que $\sigma(G^{-1}A) = \sigma(G, A)$. Puisque $\sigma(G^{-1}A)$ est compact et appartient à D , il existe $0 < \rho < 1$ tel que

$$\sigma(G^{-1}A) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| < \rho\}.$$

Soit Γ le cercle de centre 0 et de rayon ρ , et soit l'orientation sur Γ dans le sens inverse des aiguilles d'une montre. Ensuite, par le calcul opérationnel,

$$\begin{aligned} \|(G^{-1}A)^n\| &= \left\| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \lambda^n (\lambda - G^{-1}A)^{-1} d\lambda \right\| \\ &\leq \rho^{n+1} \left(\max_{\lambda \in \Gamma} \|(\lambda G - A)^{-1} G\| \right) \\ &\longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty). \end{aligned}$$

Ainsi (3.14) implique que pour chaque $y \in H$ la solution de (3.13) tend vers zéro si $n \longrightarrow \infty$. Ensuite, supposons que pour chaque $y \in H$ l'équation (3.13) est résoluble et que les solutions tendent vers zéro si $n \longrightarrow \infty$. On veut montrer que $\sigma(G, A) \subset \overline{D}$. Prenons $y \in H$.

Puisque (3.13) est résoluble, il existe $x \in H$ tel que $Gx = Ay$. Ceci vaut pour chaque y . Par conséquent $ImA \subset ImG$, et donc $Im(\lambda G - A) \subset ImG$. Maintenant, utilisez que $\lambda G - A$ est régulier. Donc pour certains $\lambda_0 \in D$ l'opérateur $\lambda_0 G - A$ est inversible, et donc $ImG = H$. Nos hypothèses impliquent aussi que $KerG = (0)$. Supposons que non, c'est-à-dire $KerG \neq (0)$. Alors nous pouvons construire une solution $x_0, x_1, x_2, \dots$ de (3.13) telle que $\|x_j\| \geq j$ pour $j = 0, 1, 2, \dots$. En effet, supposons que nous ayons construit $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$ tel que $Gx_{j+1} = Ax_j$ pour $j = 0, 1, \dots, n-1$ et $\|x_j\| \geq j$ pour $j = 0, 1, \dots, n$. Puisque $ImG = H$, il existe $x \in H$ tel que $Gx = Ax_n$.

Choisissez $z \in KerG$ tel que $\|x + z\| \geq n + 1$, et définir $x_{n+1} = x + z$. En procédant ainsi, on obtient la solution désirée. Mais l'existence d'une telle solution contredit nos hypothèses. Donc $KerG = (0)$. Nous avons maintenant prouvé que G est inversible. $\square$

Puisque G est inversible, la solution de (3.13) est donnée par (3.14). Alors nos hypothèses pour chacun $y \in H$

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} (G^{-1}A)^n y = 0$$

on peut utiliser le principe de délimitation uniforme pour montrer que

$$M := \sup_n \|(G^{-1}A)^n\| < \infty$$

Soit $\lambda \in \sigma(G, A)$. Alors $\lambda \in \sigma(G^{-1}A)$ et, par le théorème d'application spectrale, le point λ^n appartient à $\sigma((G^{-1}A)^n)$. D'après (3.3), cela implique que pour $n = 0, 1, 2, \dots$, ce qui n'est possible que si $|\lambda| \leq 1$. Cela prouve que $\sigma(G, A) \subset D$.

Enfin, supposons en plus que $\dim H < \infty$. Prenons $\lambda_0 \in \sigma(G, A)$, et que $|\lambda_0| = 1$. Alors λ_0 soit une valeur propre de $G^{-1}A$, c'est-à-dire qu'il existe $y \neq 0$ tel $AG^{-1}Ay = \lambda_0 y$. Mais cela implique que

$$\|(G^{-1}A)^n y\| = \|\lambda_0^n y\| = \|y\| \neq 0$$

pour n , et donc $(G^{-1}A)^n y$ ne tend pas vers zéro si $n \longrightarrow \infty$. C'est une contradiction, il s'ensuit que $\sigma(G, A) \subset D$.

Soit A un opérateur linéaire borné sur l'espace de Banach $\mathcal{H}$. La différence

$$x_{n+1} = Ax_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.15)$$

être asymptotiquement stable si toute solution $x_0, x_1, \dots$ de (3.15) converge vers zéro si Puisque (3.15) est résoluble pour chaque valeur initiale $x_0 = y$ dans H , le théorème (3.3.1) donne le corollaire suivant

Corollaire 3.3.1. Si $\sigma(A)$ se trouve dans le disque d'unité ouvert D , l'équation (3.15) s'agrafe. Inversement, si (3.15) est asymptotiquement stable, alors $\sigma(A)$ appartient au disque unitaire ouvert. Si, de plus, H est dimensionnelle finie, alors la stabilité asymptotique de (3.15) à $\sigma(A) \subset D$.

3.4 La solution d'équation $AX - XB = Y$ dans le cas les opérateurs Auto Adjoint

Dans les cas où l'équation a une solution unique pour tout Y , c'est-à-dire lorsque l'application $X \rightarrow AX - XB$ est inversible, les représentations intégrales de la solution sont donnés, ainsi que les estimations de la norme de la solution en termes de Y . Les résultats sont, en fait, les extensions à la dimension infinie cas, de ceux donnés par Bhatia et Rosenthal.

Il est bien connu que si $\sigma(A) \cap \sigma(B) = \emptyset$ l'équation

$$AX - XB = Y \quad (3.16)$$

a une solution unique pour tout Y . C'est une conséquence du fait que pour un opérateur $\Delta_{A,B} : B(H) \rightarrow B(H)$ $\Delta_{A,B}(X) = AX - XB$, il y a $\sigma(\Delta_{A,B}) \subset \sigma(A) - \sigma(B)$, [31]. Il est également possible de trouver une formule explicite pour cette solution en termes de Y .

Dans certains cas où les spectres de A et B sont dans un certain sens régulièrement distribué, nous pouvons obtenir d'autres formules.

Proposition 3.4.1. On a :

a) Si $\sigma(A) \subset \{z \mid \operatorname{Re} z > 0\}$ et $\sigma(B) \subset \{z \mid \operatorname{Re} z < 0\}$ Puis $X = \int_0^{+\infty} e^{-tA} Y e^{tB} dt$

b) Si $\sigma(A) \subset \{z \mid |z| > \rho\}$ et $\sigma(B) \subset \{z \mid |z| < \rho\}$ Puis $X = \sum_{n=0}^{+\infty} A^{-n-1} Y B^n$.

preuve : Les spectres sont des ensembles compacts. Donc $\sigma(A)$ et $\sigma(B)$ sont séparés par une bande de largeur d positive, dans le premier cas. Dans le second cas, $\sigma(B)$ est contenu dans un disque de rayon ρ_1 , et $\sigma(B)$ est contenu dans le complément d'un disque de rayon ρ_2 . On en déduit que pour tout $t > 0$ il y a $\|e^{-tA} Y e^{tB}\| \leq e^{-td}$, et aussi que pour tout $n \geq 0$ il y a $\|A^{-n-1} Y B^n\| \leq (\rho_1/\rho_2)^n$. De ces inégalités, il s'ensuit que ce qui précède intégrale et la série converge. De plus, on peut vérifier directement :

$$a) \quad AX - XB = \int_0^{+\infty} Ae^{-tA} Y e^{tB} - e^{-tA} Y e^{tB} B dt = \int_0^{+\infty} \frac{d}{dt} (-e^{-tA} Y e^{tB}) dt = Y$$

$$b) \quad AX - XB = \sum_{n=0}^{+\infty} A^{-n} Y B^n - \sum_{n=0}^{+\infty} A^{-n-1} Y B^{n+1} = Y.$$

En considérant la proposition précédente, partie a), on peut conjecturer que pour A et B autoadjoints sont valables $X = \int_{-\infty}^{+\infty} Ae^{-itA} Y e^{itB} dt$. Malheureusement, cette intégrale ne converge pas nécessairement. Néanmoins le théorème suivant tient. $\square$

Théorème 3.4.1. Si $A = A^*$ et $B = B^*$ et $\sigma(A) \cap \sigma(B) = \emptyset$ alors solution de l'équation (3.16) est donnée par $X = \int_{-\infty}^{+\infty} Ae^{-itA} Y e^{itB} f(t) dt$, où $f \in L^1(\mathbb{R})$ tel que sa transformée de Fourier $\widehat{f}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t\tau} f(\tau) d\tau = 1/t$ dans un voisinage de $\sigma(A) - \sigma(B)$.

Pour la démonstration de ce théorème, nous avons besoin d'un lemme.

Lemme 3.4.1. Soit X solution de l'équation (3.16), (avec $\sigma(A) \cap \sigma(B) = \emptyset$), et soit X_n la solution de l'équation $A_n X_n - X_n B = Y$. Si $A_n \rightarrow A$ dans $B(H)$ alors $X_n \rightarrow X$ dans $B(H)$ ainsi que.

preuve : Soit Γ une réunion de courbes fermées vérifiant la solution de (3.16). Pour n grand il y a tient $\sigma(A) \subset \text{int}\Gamma$, [20]. Maintenant par la proposition précédente, on a

$$\|X_n - X\| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \|(A_n - \lambda I)^{-1} - (A - \lambda I)^{-1}\| \|Y\| \|(B - \lambda I)^{-1}\| d|\lambda|$$

Pourtant $(A_n - \lambda I)^{-1} - (A - \lambda I)^{-1} = (A_n - \lambda I)^{-1} (A - A_n) (A - \lambda I)^{-1}$ et donc

$$\|X_n - X\| \leq \frac{1}{2\pi} M_n M N \|Y\| \|A_n - A\| \text{length}(\Gamma),$$

où $M_n = \max_{\Gamma} \|(A_n - \lambda I)^{-1}\|$, $M = \max_{\Gamma} \|(A - \lambda I)^{-1}\|$, $N = \max_{\Gamma} \|(B - \lambda I)^{-1}\|$.

La preuve est complète. $\square$

Remarque 3.4.1. La preuve précédente est basée sur la proposition précédent. Ainsi, on peut se poser la question de savoir si l'union des courbes fermées Γ . toujours existe ou non, c'est-à-dire si la preuve précédente peut échouer à certaines occasions ou non.

Cependant, les propriétés des ensembles compacts en ligne réelle assurent qu'une telle union de courbes fermées existe toujours, sous les hypothèses du Lemme (3.4.1). A savoir, si $\sigma(A)$, $\sigma(B)$ sont contenus dans un intervalle $[a, b]$, et $d = \text{dist}(\sigma(A); \sigma(B))$ alors on peut choisir Γ de longueur totale inférieure ou égale à $2(b-a) + [(b-a)/d]\epsilon$ (ϵ arbitrairement petit), puisque $(\sigma(A) \cup \sigma(B))^c$ est un ouvert sans connexe composantes de longueur inférieure à d .

Preuve du théorème : Supposons que A et B soient des opérateurs diagonaux, c'est-à-dire des opérateurs avec des spectres de points purs. Soit $Au = \alpha u$ et $Bv = \beta v$. On obtient facilement

$$\begin{aligned} \langle u, Ae^{-itA} Y e^{itB} v \rangle &= e^{it(\beta-\alpha)} \alpha \langle u, Y v \rangle \quad \text{et} \\ \langle u, e^{-itA} Y e^{itB} B v \rangle &= e^{it(\beta-\alpha)} \beta \langle u, Y v \rangle \quad \text{et également} \\ \langle u, AX - XB v \rangle &= (\alpha - \beta) \langle u, Y v \rangle, \end{aligned}$$

puisque $\alpha - \beta \in \sigma(A) - \sigma(B)$. Les vecteurs propres d'un opérateur diagonal couvrent l'espace entier et le résultat dans ce cas suit.

Supposons maintenant que l'opérateur B est diagonal et que l'opérateur A n'est pas diagonal. Pour tout $\epsilon > 0$ il existe des opérateurs A_0 et P tels que $A = A_0 + P$, A_0 est diagonal et $\|P\|_{C_2} < \epsilon$ (et clairement $\|P\|_{B(H)} < \epsilon$). Soit X_0 satisfait la équation $A_0 X_0 - X_0 B = Y$, et soit X la solution de l'équation (3.16). Puis pour un choix approprié de ϵ , l'expression $\|X_0 - X\|$ peut être rendue arbitrairement petite, par lemme. Ainsi $X = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} X_0 = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itA_0} Y e^{itB} f(t) dt$.

Mais aussi

$$\|X_0 - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itA} Y e^{itB} f(t) dt\| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \|e^{-itA_0} Y e^{itA}\| \|Y\| \|e^{itB}\| |f(t)| dt.$$

Le dernier intégrande est inférieur ou égal à $2\|Y\| |f(t)|$, et en tenant compte du fait que $\|e^{-itA_0} Y e^{itA}\|$, point par point, le théorème de convergence de dominance nous donne

$$\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itA_0} Y e^{itB} f(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itA} Y e^{itB} f(t) dt,$$

ainsi que. D'où $X = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itA} Y e^{itB} f(t) dt$. De la même manière l'hypothèse que B est diagonal peut être omis. La preuve est complète. $\square$

Les représentations intégrales obtenues ici, permettent d'estimer la norme de la solution en fonction de Y et $\delta = \text{dist}(\sigma(A), \sigma(B))$.

Corollaire 3.4.1. On a :

- a) Si les spectres des opérateurs normaux A et B sont séparés par un bande dont la largeur est supérieure ou égale à δ , alors l'inégalité

$$|||X||| \leq \frac{1}{\delta} |||Y||| \quad (3.17)$$

- b) Si le spectre de B appartient à un cercle de centre a et de rayon ρ , et si le spectre de A se situe à l'extérieur d'un cercle de centre a et de rayon $\rho + \delta$ alors l'inégalité (3.17) détient.

preuve : Les normes de X et Y dans l'équation (3.16) ne seront pas modifiées si A et B sont remplacés par $e^{i\theta} A - a$ et $e^{i\theta} B - b$. Maintenant les représentations intégrales de La proposition (3.4.1) nous donne le résultat. $\square$

Corollaire 3.4.2. Sous les hypothèses du théorème (3.4.1). il y a $|||X||| \leq \frac{c}{\delta} |||Y|||$ dans toute norme unitairement invariante, où $c = \inf_{f \in \Phi} \|f\|_{L^1(\mathbb{R})}$, et $\Phi = \{f \in L^1(\mathbb{R}) \mid \widehat{f}(s) = \frac{1}{s} \text{ quartier de } (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)\}$.

preuve : Soit f_δ une fonction de $L^1(\mathbb{R})$ telle que $\widehat{f}(s) = \frac{1}{t}$ sur l'ensemble $\{t \mid |z| > \delta\} \supset \sigma(A) - \sigma(B)$. Puis

$$|||X||| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |||Y||| |f_\delta(t)| dt = |||Y||| \int_{-\infty}^{+\infty} (|f_\delta(\tau/\delta)|/\delta) d\tau.$$

Notons $f(t) = f_\delta(t/\delta)$. Alors $\widehat{f}(s) = \delta \widehat{f_\delta}(s\delta) = \delta \frac{1}{s\delta} = \frac{1}{s}$ pour tout s telle que $|s\delta| > \delta$, i.e $|s| > 1$. Ainsi

$$\|X\| \leq \|Y\| \frac{\|f\|_{L^1}}{\delta},$$

pour tout $f \in \Phi$. En prenant l'infimum, on obtient le résultat. $\square$

Remarque 3.4.2. La constante c du corollaire précédent est égale à $\frac{\pi}{2}$, comme indiqué dans [29].

Remarque 3.4.3. Tous les résultats de cette note ont été énoncés dans [7] et [6] et ont également été prouvés dans le cas de dimension finie. Cependant, la partie dimensionnelle infinie de la preuve est omis dans les deux ouvrages [7] et [6].

Théorème 3.4.2. Soit A et B sont opérateurs normaux avec $\sigma(A) \cap \sigma(B) = \emptyset$. Soit $A = A_1 + iA_2$ et $B = B_1 + iB_2$, telque A_1 et A_2 sont des opérateurs normaux, et sont donc B_1 et B_2 . Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$ sa transformation de Fourier $\widehat{f}(s_1, s_2) = \frac{1}{s_1 + is_2}$ n'importe quand $s_1 + is_2 \in \sigma(A) - \sigma(B)$. Alors la solution d'équation $AX - XB = Y$ peut être exprimé comme

$$X = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(t_1 A_1 + t_2 A_2)} Y e^{i(t_1 B_1 + t_2 B_2)} f(t_1, t_2) dt_1 dt_2.$$

3.5 La solution en série

Dans le théorème suivant on donne la forme de la solution dans le cas opératoriel de l'équation de Sylvester après la démonstration de la convergence de la série $\sum_{n=0}^{\infty} A^{-n-1} Y B^n$.

Théorème 3.5.1. [7] Soient A et B deux opérateurs dans $B(\mathcal{H})$, tels que

$$\sigma(B) \subset \{z, |z| < \rho\} \quad \text{et} \quad \sigma(A) \subset \{z, |z| > \rho\}$$

ou ρ est un nombre réel strictement positif. Alors pour tout opérateur Y dans $B(\mathcal{H})$ une solution de l'équation $AX - XB = Y$ est donnée par

$$X = \sum_{n=0}^{+\infty} A^{-n-1} Y B^n.$$

preuve : On démontre que la série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} A^{-n-1} Y B^n \text{ est convergente,}$$

puis on vérifie que la solution X donnée par l'expression

$$X = \sum_{n=0}^{+\infty} A^{-n-1} Y B^n$$

est une solution de notre équation $AX - XB = Y$.

Soit le nombre réel strictement positif ρ qui vérifie

$\sigma(B) \subset \{z, |z| < \rho\}$ et $\sigma(A) \subset \{z, |z| > \rho\}$, alors

$$\sigma(A^{-1}) \subset \{z, |z| > \rho^{-1}\}.$$

Donc, d'après la formule du rayon spectral $\exists N > 0 : \forall n \geq N$ tel que

$$\|B^n\| \leq \rho_1^n \text{ et } \|A^{-n}\| \leq \rho^{-n} \text{ avec } \rho_1 < \rho.$$

Alors, pour $n \geq N$, on a

$$\|A^{-n-1} Y B^n\| \leq \|A^{-n}\| \|A^{-1} Y\| \|B^n\| \leq \rho^{-n} \|A^{-1} Y\| \rho_1^n = \|A^{-1} Y\| (\rho_1 \rho^{-1})^n.$$

D'où la convergence de la série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} A^{-n-1} Y B^n.$$

Vérifions maintenant que

$$X = \sum_{n=0}^{+\infty} A^{-n-1} Y B^n$$

est une solution de notre équation, on a

$$\begin{aligned} AX - XB &= A \left(\sum_{n=0}^{+\infty} A^{-n-1} Y B^n \right) - \left(\sum_{n=0}^{+\infty} A^{-n-1} Y B^n \right) B \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} A^{-n} Y B^n - \sum_{n=0}^{+\infty} A^{-n-1} Y B^{n+1} \\ &= Y + \sum_{n=1}^{+\infty} A^{-n} Y B^n - \sum_{n=1}^{+\infty} A^{-n} Y B^n = Y. \end{aligned}$$

□

Théorème 3.5.2. [27] Si l'espace $\mathcal{H}$ est un espace de Hilbert de dimension infinie, A et B sont deux opérateurs dans $B(\mathcal{H})$ tel que A est inversible, on suppose qu'il existe une suite (a_n) de réels strictement positifs, si pour tout x de $\mathcal{H}$ les séries de termes généraux $a_n \|A^{*(-n)} x\|^2$ et $a_n^{-1} \|B^{(n)} x\|^2$ sont convergentes, alors pour tout Y dans $B(\mathcal{H})$ la série $\sum_{n=0}^{+\infty} A^{-n-1} Y B^n$ est ultra faiblement convergente dans $B(\mathcal{H})$ et sa limite X est une solution de l'équation de Sylvester $AX - XB = Y$.

preuve : La preuve est analogue à la preuve de la proposition 1.4 dans [[11] Cassier, J.O.T 2005].

Soient $x, y \in \mathcal{H}$,

$$\begin{aligned} \left| \left\langle \sum_{m_1}^{m_2} A^{-n-1} Y B^n y, x \right\rangle \right| &\leq \sqrt{\sum_{m_1}^{m_2} a_n \langle A^{(-n-1)} A^{*(-n-1)} x, x \rangle} \sqrt{\sum_{m_1}^{m_2} a_n^{-1} \langle B^{*n} Y^* Y B^n y, y \rangle} \\ &\leq \|Y\| \sqrt{\sum_{m_1}^{m_2} a_n \langle A^{(-n-1)} A^{*(-n-1)} x, x \rangle} \sqrt{\sum_{m_1}^{m_2} a_n^{-1} \langle B^{*n} B^n y, y \rangle} \end{aligned}$$

On voit donc que la série $\sum_{k=0}^{+\infty} \langle A^{-(k+1)} Y B^k x \mid y \rangle$ est de Cauchy, donc convergente, ce qui permet de définir X en posant

$$\langle Xx \mid y \rangle = \sum_{k=0}^{+\infty} \langle A^{-(k+1)} Y B^k x \mid y \rangle.$$

De plus, avec le théorème de Banach Steinhaus et les hypothèses, on voit que

$$\sup \left\| \sum_{k=0}^n A^{-(k+1)} Y B^k \right\| < +\infty.$$

Ceci entraîne la convergence de $\sum_{k=0}^n A^{-(k+1)} Y B^k$ pour la topologie “* faible” de $B(\mathcal{H})$, c'est à dire la topologie ultra faible.

On vérifie ensuite que X est bien une solution de l'équation de Sylvester $AX - XB = Y$.

Sous les mêmes hypothèses du théorème précédent on obtient ce résultat. $\square$

Remarque 3.5.1. On obtient le théorème de Bhatia [7] comme corollaire. En effet si

$$\sigma(B) \subset \{z, |z| < \rho\} \quad \text{et} \quad \sigma(A) \subset \{z, |z| > \rho\}$$

avec $\rho > 0$. Alors les séries $\sum_{k=0}^{\infty} a^{2k} A^{-k} A^{*(-k)}$ et $\sum_{k=0}^{\infty} a^{-2k} B^{*(k)} B^k$ sont même convergentes pour la norme de $B(\mathcal{H})$, pour $r(B) < a < \rho$. D'où la convergence pour les hypothèses du théorème (3.5.2) avec $a_n = a^{2n}$

Théorème 3.5.3. [27] Si l'espace $\mathcal{H}$ est un espace de Hilbert de dimension infinie, A et B sont deux opérateurs dans $B(H)$, on suppose qu'il existe une fonction mesurable strictement positive sur $\mathbb{R}_+$ telle que les intégrales $\int_0^{\infty} \|e^{-tA} x\|^2 f(t) dt$ et $\int_0^{\infty} \|e^{tB} x\|^2 (f(t))^{-1} dt$ sont convergentes pour tout x de $\mathcal{H}$, alors pour tout Y de $B(H)$, l'opérateur $X = \int_0^{\infty} e^{-tA} Y e^{tB} dt$ est bien défini et est solution de l'équation de Sylvester $AX - XB = Y$

preuve : D'après ([11] Cassier, J.O.T 2005) l'intégrale d'opérateur $X = \int_0^{\infty} e^{-tA} Y e^{tB} dt$ est bien définie au sens de Bochner et on a

$$\begin{aligned} \|X\| &\leq \sqrt{\left\| \int_{n=0}^{+\infty} f(t) e^{-tA} e^{tA^*} dt \right\|} \sqrt{\left\| \int_{n=0}^{+\infty} (f(t))^{-1} e^{tB^*} Y^* Y e^{tB} dt \right\|} \\ &\leq \|Y\| \sqrt{\left\| \int_{n=0}^{+\infty} f(t) e^{-tA} e^{tA^*} dt \right\|} \sqrt{\left\| \int_{n=0}^{+\infty} (f(t))^{-1} e^{tB^*} e^{tB} dt \right\|} \end{aligned}$$

Comme les intégrales $\int_{n=0}^{+\infty} f(t) \|e^{-tA} x\|^2 dt$ et $\int_{n=0}^{+\infty} (f(t))^{-1} \|e^{tB} x\|^2 dt$ sont convergentes pour tout x de $\mathcal{H}$, alors l'opérateur $\int_0^{\infty} e^{-tA} Y e^{tB} dt$ est bien défini pour tout x de $\mathcal{H}$, on vérifie que X donnée par cet opérateur est une solution de l'équation $AX - XB = Y$. $\square$

Remarque 3.5.2. Ces deux derniers théorèmes, nous donnent aussi une estimation à priori de la solution de l'équation $AX - XB = Y$ en fonction de Y .

CHAPITRE 4

L'équation $AX - XB = Y$ dans $B(\mathcal{H})$

Dans ce chapitre, nous avons parlé sur l'application de la solution cas générale de Sylvester et Stein et enfin l'application de la solution d'équation dans les maladies Variole des Singes .

4.1 Solutions intégrales de contour d'équations de type Sylvester

Dans cette note, nous utilisons des intégrales de contour pour étudier les équations matricielles

$$AXB - CXD = Y \quad (4.1)$$

$$AX - X^*D = Y \quad (4.2)$$

$$AXB - X^* = Y \quad (4.3)$$

Les conditions d'unicité des solutions de (4.1) - (4.3) impliquent des crayons matriciels et leurs spectres. Soit le pinceau $\lambda C - A$ régulier, soit $\det(zC - A) \neq 0$ pour un certain $z \in \mathbb{C}$. On pose

$$\sigma(\lambda C - A) = \{z; \det(zC - A) = 0\} \cup \{z; \det(C - z^{-1}A) = 0\}$$

Alors $0 \in \sigma(\lambda C - A)$ est équivalent à $\det A = 0$. Par convention $\frac{1}{\infty} = 0$ et $\frac{1}{0} = \infty$. Ainsi $\infty \in \sigma(\lambda C - A)$ si et seulement si $\det C = 0$. Un contour dans le plan complexe signifiera toujours une courbe fermée simple orientée positivement.

4.2 L'équation de Sylvester généralisée

On sait (voir [13]) que l'équation (4.1) a une solution unique si et seulement si les crayons matriciels

$$\lambda C - A \text{ et } \lambda B - D \text{ sont réguliers ,} \quad (4.4)$$

et

$$\sigma(\lambda C - A) \cap \sigma(\lambda B - D) = \emptyset. \quad (4.5)$$

Dans ce qui suit nous donnons une description explicite de la solution unique de (4.1).

Théorème 4.2.1. *Si les conditions (4.4) et (4.5) sont satisfaites alors il existe un contour γ tel que $\sigma(\lambda C - A)$ soit intérieur à γ et $\sigma(\lambda B - D)$ soit en dehors de γ . L'unique solution de (4.1) est donnée par*

$$X = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} (\lambda C - A)^{-1} Y (\lambda B - D)^{-1} d\lambda. \quad (4.6)$$

preuve : Soient T et W des matrices complexes $n \times n$ non singulières qui transforment le faisceau régulier $\lambda B - D$ en forme canonique de Weierstrass (voir [[19], Section XII]). Puis

$$T(\lambda B - D)W = \lambda \tilde{B} - \tilde{D} = \lambda \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} D_0 & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{pmatrix}$$

, où N est nilpotent. On a $\sigma(\lambda B - D) = \sigma(\lambda \tilde{B} - \tilde{D})$. Fixer $\tilde{X} = XT^{-1}$ et $\tilde{Y} = YW$. Alors X est une solution de (4.1) si et seulement si $\tilde{X}$ est une solution de $A\tilde{X}\tilde{B} - C\tilde{X}\tilde{D} = \tilde{Y}$, et il n'est pas difficile de voir que l'on peut supposer que B et D ont la forme

$$B = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} D_0 & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{pmatrix},$$

où $\sigma(N) = \{0\}$. Si les faisceaux $\lambda C - A$ et $\lambda B - D$ sont réguliers alors (voir [28], [24]) l'identité (4.1) est équivalente à

$$(\lambda C - A)^{-1} CX - XB(\lambda B - D)^{-1} = (\lambda C - A)^{-1} Y (\lambda B - D)^{-1} \quad (4.7)$$

Grâce à (4.5) on a $\infty \notin \sigma(\lambda C - A) \cap \sigma(\lambda B - D)$. Supposons $\infty \notin \sigma(\lambda C - A)$, soit $\det C \neq 0$. Alors (4.7) peut s'écrire

$$(\lambda I - C^{-1}A)^{-1} X - X \begin{pmatrix} (\lambda I_r - D_0)^{-1} & 0 \\ 0 & N(\lambda N - I_{n-r})^{-1} \end{pmatrix} = (\lambda C - A)^{-1} Y (\lambda B - D)^{-1}. \quad (4.8)$$

L'hypothèse (4.5) implique qu'il existe un contour γ entourant l'ensemble $\sigma(C^{-1}A) = \sigma(\lambda C - A)$ et laissant $\sigma(\lambda B - D)$ à l'extérieur. En particulier, il n'y a pas de valeur propre de D_0 à l'intérieur de γ . Notons que $(\lambda N - I_{n-r})^{-1}$ est une matrice polynomiale. Par conséquent, le calcul spectral pour les matrices donne

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} (\lambda I - C^{-1}A)^{-1} d\lambda = I_n$$

et

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} (\lambda I_r - D_0)^{-1} d\lambda = 0 \text{ et } \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} (\lambda D - I_{n-r})^{-1} d\lambda = 0.$$

Alors (4.6) découle immédiatement de (4.8). Supposons maintenant $\infty \notin \sigma(\lambda B - D)$. Puis $\det B \neq 0$. Dans ce cas on considère l'équation $D^T X^T C^T - B^T X^T A^T = -Y^T$ et représentent

X^T conformément à (4.6). On obtient

$$X = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} (\lambda C - A)^{-1} Y (\lambda B - D)^{-1} d\lambda,$$

où β est un contour tel que $\sigma(\lambda B - D)$ est à l'intérieur de β et $\sigma(\lambda C - A)$ est à l'extérieur de β . Soit $-\beta$ la courbe fermée simple orientée en sens inverse de β . Alors on a (4.6) avec $\gamma = -\beta$. $\square$

4.3 L'équation de type Stein

4.3.1 L'équation $AX - X^*D = Y$

Dans [10] et [[26], p. 223] il a été montré que l'équation $(X; X^*)$

$$AX - X^*D = Y \tag{4.9}$$

a une solution unique si et seulement si le crayon

$$A - \lambda D^* \text{ est régulier} \tag{4.10}$$

et

$$\sigma(A - \lambda D^*) \cap \sigma(D - \lambda A^*) = \emptyset. \tag{4.11}$$

La condition (4.3.1) signifie que $z \in \sigma(A - \lambda D^*)$ implique $\frac{1}{\lambda} \notin \sigma(A - \lambda D^*)$. Le résultat suivant donne une solution intégrale de contour de (4.9).

Théorème 4.3.1. Soient (4.10) et (4.3.1) satisfaites. Alors il existe un contour γ tel que $\sigma(D - \lambda A^*)$ est à l'intérieur de γ et $\sigma(A - \lambda D^*)$ est à l'extérieur de γ . L'unique solution de (4.9) est donnée par

$$X = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} (\lambda D^* - A)^{-1} (Y + Y^*) (D - \lambda A^*)^{-1} A^* d\lambda \tag{4.12}$$

preuve : Notez que (4.9) est équivalent à

$$(A - \lambda D^*)X - X^*(D - \lambda A^*) = Y + Y^*. \tag{4.13}$$

Donc, si $A - \lambda D^*$ est régulier alors (4.13) peut s'écrire

$$X(\lambda A^* - D)^{-1} - (\lambda D^* - A)^{-1} X^* = (\lambda D^* - A)^{-1} (Y + Y^*) (D - \lambda A^*)^{-1} \tag{4.14}$$

Supposons $\det A \neq 0$. Alors (4.3.1) implique qu'il existe un contour γ tel que $\sigma(\lambda A^* - D) = \sigma(\lambda I - D(A^*)^{-1})$ est à l'intérieur de γ et $\sigma(A - \lambda D^*)$ est en dehors de γ . Puis

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} X(\lambda A^* - D)^{-1} d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} X(A^*)^{-1} (\lambda I - D(A^*)^{-1})^{-1} d\lambda = X(A^*)^{-1}$$

et

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} (\lambda D^* - A)^{-1} X^* d\lambda = 0$$

Donc (4.12) découle de l'identité (4.14). Supposons $\det A = 0$. Alors nous obtenir (4.12) par un argument de perturbation. On considère l'équation $\tilde{A}X - X^*D = Y$ où $\tilde{A} = A + \epsilon I, \epsilon > 0$. Si ϵ est suffisamment petit alors $\det \tilde{A} \neq 0$, $\tilde{A} - \lambda D^*$ est régulier, et $\sigma(\tilde{A} - zD^*) \cap \sigma(D - \lambda \tilde{A}^*) = \emptyset$. $\square$

4.3.2 L'équation $AXB - X^* = Y$

Zhou, Lam et Duan [36] ont étudié l'équation

$$AXB - X^* = Y. \quad (4.15)$$

En utilisant les produits de Kronecker et la matrice de permutation vec, le résultat suivant a été démontré dans [[36], p.1390, Lemma 13].

Lemme 4.3.1. La condition $\sigma(\lambda I - B^*A) \cap \sigma(I - \lambda BA^*) = \emptyset$, ou de manière équivalente,

$$1 \notin \sigma(AB^*) \cap \sigma(A^*B), \quad (4.16)$$

est nécessaire et suffisante pour l'existence d'une unique solution de (4.15).

Nous appliquons le corollaire précédemment mentionné pour dériver une solution intégrale de contour de (4.15).

Théorème 4.3.2. Supposons (4.16). Soit γ un contour dont les valeurs propres sont B^*A à l'intérieur et l'ensemble $\{1/\bar{z}; z \in \sigma(B^*A), \lambda \neq 0\}$ à l'extérieur.

Puis

$$X = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} (\lambda I - B^*A)^{-1} (Y + B^*YA^*) (\lambda BA^* - I)^{-1} d\lambda \quad (4.17)$$

est l'unique solution de (4.15).

preuve : Soit W le membre de droite de (4.17). Alors W satisfait le Stein équation

$$B^*AWBA^* - W = Y^* + B^*YA^*. \quad (4.18)$$

(par le corollaire ??). Il découle de [[36], Théorème 7], qui traite de l'équation (4.18), que W est une solution de (4.15). Nous pouvons le montrer directement comme suit. Définir $P = AWB$ et $Q = W^*$. Puis

$$P = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} (\lambda I - AB^*)^{-1} (Y^* + B^*YA^*) B (\lambda A^*B - I)^{-1} d\lambda$$

est la solution de

$$(AB^*)P(A^*B) - P = A(Y^* + B^*YA^*)B,$$

et (4.18) donne

$$(AB^*)Q(A^*B) - Q = Y + AY^*B.$$

Posons $S = P - Q - Y$. Alors $(AB^*)S(A^*B) - S = 0$. Donc (4.16) implique $S = 0$. D'où $AWB - W^* - Y = 0$. $\square$

4.4 L'équation d'opérateurs de type $(A + i\gamma)X - X(B + i\zeta) = Y$

Soit $B(H_2, H_1)$ l'espace des opérateurs linéaires bornés de H_1 à H_2 où H_1 et H_2 sont deux espaces de Hilbert quelconques et notons également $B(H, H)$ simplement comme $B(H)$. $\sigma(A)$ désigne le spectre de A pour $A \in B(H)$.

Certaines limites de perturbation intéressantes et utiles sont étroitement liées à la solution de l'équation de Sylvester $AX - XB = Y$ qui se présente en plusieurs d'autres contextes. Comme expliqué dans [30], pour tout $Y \in B(H_2, H_1)$, l'équation $AX - XB = Y$ a une solution unique $X \in B(H_2, H_1)$ si A et B sont des éléments de $B(H_1)$ et $B(H_2)$, respectivement, tels que $\sigma(A)$ et $\sigma(B)$ sont disjoints. Dans [5], quelques estimations pour la norme de X et le nombre $\delta = \text{dist}(\sigma(A), \sigma(B))$ sont trouvés, quand A et B sont tous les deux normaux ou, encore plus spécialement, hermitiens ou unitaire. Généralement, si Y appartient à un sous-espace Ω de $B(H_2, H_1)$ qui est le domaine d'une norme symétrique $||| \cdot |||$, alors X appartient aussi à Ω et

$$\delta |||X||| \leq c |||Y|||$$

où c est une constante universelle.

Plus des formes spéciales de la solution X ont été obtenues par Bhatia et Rosental [6]. Comme l'intégrale $\int_0^\infty e^{-itA} Y e^{itB} dt$ n'est pas convergente, on insère une fonction servant de facteur de convergence, de sorte que l'intégrale

$$X = \int_{-\infty}^\infty e^{-itA} Y e^{itB} f(t) dt \quad (4.19)$$

convergerait. Pour les opérateurs hermitiens A et B , ils ont utilisé cette intégrale, qui est un opérateur bien défini pour chaque $f \in L^1(\mathbb{R})$, puisque pour chaque t les exponentielles apparaissant ci-dessus sont des opérateurs unitaires. Puis ils ont prouvé que X est une solution, si f est une fonction quelconque de $L^1(\mathbb{R})$ telle que $\widehat{f}(s) = \frac{1}{s}$ chaque fois que $s \in \sigma(A) \setminus \sigma(B)$.

L'objectif principal est d'introduire de nouvelles représentations de la solution X pour les équations $AX - XB = Y$ et $(A + i\gamma)X - X(B + i\zeta) = Y$ sous différentes conditions des opérateurs A et B où $\gamma, \zeta \in \mathbb{R}$. les limites sur la solution X sont trouvées en utilisant la norme usuelle $\|\cdot\|$ et la norme symétrique $||| \cdot |||$. Pour trouver la borne en utilisant la norme symétrique, le théorème suivant est utilisé :

Théorème 4.4.1. [5] Supposons que les opérateurs $S_x \in \Omega$ dépendent continuellement de $x \in (0, \infty)$ par rapport à la topologie des opérateurs faibles sur $B(H_2, H_1)$. Supposer aussi que $|||S_x||| \leq f(x)$, où f est une fonction continue satisfaisant $\|f\|_1 = \int_0^\infty |f(x)| dx < \infty$. Alors, l'intégrale de Riemann impropre $\int_0^\infty S_x dx = T$ existe dans la topologie des opérateurs faibles, $T \in \Omega$, et $|||T||| \leq \|f\|_1$.

Partant du théorème donné par Bhatia et Rosenthal, le général cas de (4.19) est établi. En utilisant cette solution, la constante c dans

$$|||X||| \leq \frac{c}{\delta} |||Y|||$$

est estimée, où $\text{dist}(\sigma(A + i\gamma), \sigma(B + i\zeta)) \geq \delta > 0$.

4.4.1 Calcul opérationnel

Soit f une fonction à valeurs complexes qui est holomorphe dans une région bornée G qui inclut $\sigma(T)$. Alors $f(T)$ est défini par

$$f(T) = \frac{1}{2\pi i} \int_{b(D')} \frac{f(w)}{T - w} dw, \quad (4.20)$$

où T est un opérateur borné et D' est un domaine de Cauchy tel que $D' \subset G$ (Voir [34]).

Théorème 4.4.2. Si $w \notin \sigma(A + i\gamma) \setminus \sigma(B + i\zeta)$, Puis

$$(T - w)^{-1}Y = \frac{1}{2\pi i} \int_{b(D)} (A + i\gamma - \lambda - w)^{-1}Y(\lambda - B - i\zeta)^{-1}d\lambda \quad (4.21)$$

est satisfaite pour un domaine de Cauchy D qui satisfait $\sigma(A + i\gamma - w) \cap \overline{D} = \emptyset$ et $\sigma(B + i\zeta) \subset D$.

preuve : Puisque $w \notin \sigma(A + i\gamma) \setminus \sigma(B + i\zeta)$, les ensembles $\sigma(A + i\gamma - w)$ et $\sigma(B + i\zeta)$ seront disjoints. Il existe donc un ouvert borné G contenant $\sigma(B + i\zeta)$ et disjoint de $\sigma(A + i\gamma - w)$. Nous concluons donc à l'existence d'un Domaine de Cauchy D tel que $\sigma(A + i\gamma - w) \cap \overline{D} = \emptyset$ et $\sigma(B + i\zeta) \subset D$ (Voir [34]).

Soit X une solution de l'équation de l'opérateur

$$(T - w)X = (A + i\gamma)X - X(B + i\zeta) - wX = Y.$$

Si $\lambda \in b(D)$, alors $\lambda \in \sigma(A + i\gamma - w) \cap \sigma(B + i\zeta)$, et

$$X(\lambda - B - i\zeta) + (A + i\gamma - \lambda - w)X = Y$$

, donc

$(A + i\gamma - \lambda - w)^{-1}X + X(\lambda - B - i\zeta)^{-1} = (A + i\gamma - \lambda - w)^{-1}Y(\lambda - B - i\zeta)^{-1}$. Si nous intégrons les deux côtés sur $b(D)$, nous trouvons

$$X = (T - w)^{-1}Y = \frac{1}{2\pi i} \int_{b(D)} (A + i\gamma - \lambda - w)^{-1}Y(\lambda - B - i\zeta)^{-1}d\lambda$$

puisque

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{b(D)} (A + i\gamma - \lambda - w)^{-1}X d\lambda = 0 \text{ et } \frac{1}{2\pi i} \int_{b(D)} X(\lambda - B - i\zeta)^{-1}d\lambda = X.$$

La preuve du lemme suivant est donnée par Rosenblum dans [30]. □

Lemme 4.4.1. . Soit G un ouvert borné contenant $\sigma(A + i\gamma) \setminus \sigma(B + i\zeta)$. Alors il existe des domaines de Cauchy D et D' tels que $\sigma(A + i\gamma) \setminus \sigma(B + i\zeta) \subset D'$ et $\sigma(B + i\zeta) \subset D$; en outre

a) si $w \in b(D')$, alors $w \notin \sigma(A + i\gamma) \setminus \sigma(B + i\zeta)$ et $\sigma(A + i\gamma - w) \cap \overline{D} = \emptyset$;

b) si $\lambda \in b(D)$, alors $\sigma(A + i\gamma - \lambda) \subset D'$.

Théorème 4.4.3. Si $f(\lambda)$ est une fonction à valeurs complexes holomorphe dans une région G qui inclut $\sigma(A + i\gamma) \setminus \sigma(B + i\zeta)$, alors

$$f(\lambda)Y = \int_{b(D)} (A + i\gamma - \lambda)^{-1} Y (z - B - i\zeta)^{-1} dz$$

où D est comme dans le lemme (4.4.1).

preuve : A partir de l'équation (4.20), on peut écrire

$$f(T)Y = \frac{-1}{2\pi i} \int_{b(D')} f(w)(T - w)^{-1} Y dw,$$

où D est comme dans le lemme (4.4.1). En utilisant (4.21),

$$f(T)Y = \frac{-1}{2\pi i} \int_{b(D')} f(w) \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{b(D)} (A + i\gamma - \lambda - w)^{-1} Y (\lambda - B - i\zeta)^{-1} d\lambda \right] dw.$$

Si on change l'ordre de l'intégration, on obtient

$$f(T)Y = \frac{-1}{2\pi i} \int_{b(D)} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{b(D')} f(w)(A + i\gamma - \lambda - w)^{-1} dw \right] Y (\lambda - B - i\zeta)^{-1} d\lambda.$$

$f(w)$ est holomorphe dans D' , donc

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{b(D')} f(w)(A + i\gamma - \lambda - w)^{-1} dw = -f(A + i\gamma - \lambda)$$

et

$$f(T)Y = \frac{1}{2\pi i} \int_{b(D)} f(A + i\gamma - \lambda) Y (\lambda - B - i\zeta)^{-1} d\lambda.$$

□

Théorème 4.4.4. Si t est un nombre complexe,

$$e^{-tT} Y = e^{-t(A+i\gamma)} Y e^{t(B+i\zeta)}.$$

preuve : Si on pose $f(\lambda) = e^{-t\lambda}$ dans le théorème (4.4.3), on voit facilement que

$$\begin{aligned} e^{-tT} Y &= \frac{1}{2\pi i} \int_{b(D)} e^{-t(A+i\gamma-\lambda)} Y (\lambda - B - i\zeta)^{-1} d\lambda \\ &= -e^{-t(A+i\gamma)} Y \frac{1}{2\pi i} \int_{b(D)} \frac{e^{t\lambda}}{(B + i\zeta) - \lambda} d\lambda \\ &= e^{-t(A+i\gamma)} Y e^{t(B+i\zeta)}. \end{aligned}$$

□

Lemme 4.4.2. Soient A et B des opérateurs bornés avec $\frac{1}{2}(A + A^*) \geq a$, $\frac{1}{2}(B + B^*) \leq b$ et $a - b > 0$. Alors

$$\|e^{-(A+i\gamma)t} Y e^{(B+i\zeta)t}\| \leq \|Y\| e^{(a-b)t} \quad (4.22)$$

et

$$\int_0^\infty \|e^{-(A+i\gamma)t} Y e^{(B+i\zeta)t}\| dt \leq (a-b)^{-1} \|Y\|$$

preuve : Rappelons [23] que $\|e^A\| \leq e^a$ si A est un opérateur borné et $\frac{1}{2}(A + A^*) \leq a$ une. En utilisant la preuve similaire, il est facile de voir que $\|e^{-(A+i\gamma)t}\| \leq e^{-a}$ et $\|e^{(B+i\zeta)t}\| \leq e^b$ puisque $\frac{1}{2}[(A + i\gamma) + (A + i\gamma)^*] \geq a$ et $\frac{1}{2}[(B + i\zeta) + (B + i\zeta)^*] \leq b$ respectivement. Si nous prenons l'intégrale pour $0 \leq t < \infty$, nous obtenons

$$\int_0^\infty \|e^{-(A+i\gamma)t} Y e^{(B+i\zeta)t}\| dt \leq \|Y\| \int_0^\infty e^{-(a-b)t} dt = (a-b)^{-1} \|Y\|.$$

□

4.4.2 Principaux résultats

Théorème 4.4.5. Soient A, B et Y des opérateurs bornés avec $\frac{1}{2}(A + A^*) \leq a$, $\frac{1}{2}(B + B^*) \leq b$ et $a - b > 0$. Alors l'opérateur borné

$$X = \int_0^\infty e^{-(A+i\gamma)t} Y e^{(B+i\zeta)t} dt$$

est la solution de l'équation $(A + i\gamma)X - X(B + i\zeta) = Y$ et $\|X\| \leq (a-b)^{-1} \|Y\|$.

preuve : Puisque l'inégalité (4.22) est vraie, l'intégrale $\int_0^\infty e^{-(A+i\gamma)t} Y e^{(B+i\zeta)t} dt$ est absolument convergent et désigne un opérateur borné X où

$$\|X\| \leq (a-b)^{-1} \|Y\|.$$

Si X est l'opérateur défini par cette intégrale, alors

$$\begin{aligned} (A + i\gamma)X - X(B + i\zeta) &= \int_0^\infty \left((A + i\gamma)e^{-(A+i\gamma)t} Y e^{(B+i\zeta)t} - e^{-(A+i\gamma)t} Y e^{(B+i\zeta)t} (B + i\zeta) \right) dt \\ &= \int_0^\infty \frac{d}{dt} (-e^{-(A+i\gamma)t} Y e^{(B+i\zeta)t}) dt \\ &= Y \end{aligned}$$

Donc X est la solution de l'équation.

□

Le théorème suivant donne une expression de la solution de $(A + i\gamma)X - X(B + i\zeta) = Y$ lorsque les spectres de $A + i\gamma$ et $B + i\zeta$ sont disjoints.

Théorème 4.4.6. Soit Γ une réunion de contours fermés dans le plan de total nombres d'enroulement 1 autour de $\sigma(A + i\gamma)$ et 0 autour de $\sigma(B + i\zeta)$. Ensuite la solution de l'équation $(A + i\gamma)X - X(B + i\zeta) = Y$ peut être exprimé comme

$$X = \frac{-1}{2\pi i} \int_\Gamma (A + i\gamma - \xi)^{-1} Y (B + i\zeta - \xi)^{-1} d\xi.$$

preuve : Si $(A + i\gamma)X - X(B + i\zeta) = Y$, alors pour tout nombre complexe ξ , on a
 $(A + i\gamma - \xi)X - X(B + i\zeta - \xi) = Y$. Si $A + i\gamma - \xi$ et $B + i\zeta - \xi$ sont inversibles, cela donne

$$X(B + i\zeta - \xi)^{-1} - (A + i\gamma - \xi)^{-1}X = (A + i\gamma - \xi)^{-1}Y(B + i\zeta - \xi)^{-1}.$$

On en déduit le résultat si on intègre sur Γ en notant que $\int_{\Gamma}(B + i\zeta - \xi)^{-1}d\xi = 0$
 et $\int_{\Gamma}(A + i\gamma - \xi)^{-1}d\xi = 2\pi iI$. □

Théorème 4.4.7. Soient A, B des opérateurs bornés et $\gamma, \zeta \in \mathbb{R}$ tels que $(A + i\gamma)$ et $(B + i\zeta)$ sont des opérateurs hermitiens et $\sigma(A + i\gamma) \cap \sigma(B + i\zeta) = \emptyset$. Soit f une fonction quelconque dans $L^1(\mathbb{R})$ telle que la transformée de Fourier $\widehat{f}$ a la propriété lorsque $\widehat{f}(s) = \frac{1}{s + i(\zeta - \gamma)}$ lorsque $s \in \sigma(A + i\gamma) \setminus \sigma(B + i\zeta)$. Alors, la solution de l'équation $AX - XB = Y$ peut s'exprimer comme

$$X = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-it(A+i\gamma)} Y e^{it(B+i\zeta)} f(t) dt. \quad (4.23)$$

preuve : Considérons d'abord le cas de dimension finie. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ des valeurs propres de A et B de vecteurs propres u et v respectivement.

On voit ça

$$(A + i\gamma)^* = (A + i\gamma) \implies A^* = A + 2i\gamma$$

et on obtient

$$\begin{aligned} \langle A e^{-it(A+i\gamma)} Y e^{it(B+i\zeta)} v, u \rangle &= \langle Y e^{it(B+i\zeta)} v, e^{it(A^*-i\gamma)} A^* u \rangle \\ &= \langle Y e^{it(\beta+i\zeta)} v, e^{it(\alpha+i\gamma)} (\alpha + 2i\gamma) \rangle \\ &= e^{-it(\alpha-i\gamma)+it(\beta+i\zeta)} (\alpha - 2i\gamma) \langle Y v, u \rangle. \end{aligned} \quad (4.24)$$

De même, on obtient l'identité

$$\langle e^{-it(A+i\gamma)} Y e^{it(B+i\zeta)} B v, u \rangle = \beta e^{-it(\alpha-i\gamma)+it(\beta+i\zeta)} \langle Y v, u \rangle. \quad (4.25)$$

si X donne par (4.23), on a

$$\begin{aligned} \langle (AX - XB)v, u \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \langle Y v, u \rangle e^{-it(\alpha-\beta-i\gamma-i\zeta)} (\alpha - \beta - 2i\gamma) f(t) dt \\ &= \langle Y v, u \rangle (\alpha - \beta - 2i\gamma) \widehat{f}(\alpha - \beta - i\gamma - i\zeta) \\ &= \langle Y v, u \rangle (\alpha - \beta - 2i\gamma) \frac{1}{\alpha - \beta - i\gamma - i\zeta + i(\zeta - \gamma)} \\ &= \langle Y v, u \rangle \end{aligned}$$

en utilisant (4.24) et (4.25). Puisque les vecteurs propres de A et B couvrent tout l'espace, cela montre que $AX - XB = Y$. □

Le même argument prouve le théorème lorsque l'espace est de dimension infinie mais que A et B ont des spectres de points purs. Le cas général découle de ceci par un argument de continuité standard (les opérateurs avec des spectres de points purs sont denses dans l'espace des opérateurs hermitiens [[35] Page 24]).

Partant de ce théorème, on démontre le théorème suivant qui est plus général :

Théorème 4.4.8. Soient A et B des opérateurs sur un espace de Hilbert qui sont les limites de la norme des opérateurs à spectre ponctuel pur et $\sigma(A^*) \cap \sigma(B) = \emptyset$. Soit S un sous-ensemble fermé de $\mathbb{C}$ et μ une mesure de Borel sur S . Soient ϕ et ψ deux fonctions mesurables sur S . Si $|\phi(\lambda\bar{\alpha})| |\psi(\lambda\beta)| |f(\lambda)| \in L^1(\mu)$ et $\int_S \phi(\lambda\bar{\alpha})\psi(\lambda\beta)f(\lambda)d\mu(\lambda) = \frac{1}{\bar{\alpha}-\beta}$ pour tout $\alpha \in \sigma(A^*)$, $\beta \in \sigma(B)$ alors

$$X = \int_S \phi(\lambda A)Y\psi(\lambda B)f(\lambda)d\mu(\lambda) \quad (4.26)$$

est une solution de $AX - XB = Y$.

preuve : Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ des valeurs propres de A^* et B de vecteurs propres u et v respectivement, de sorte que

$$A^*u = \alpha u, Bv = \beta v.$$

En les utilisant, on obtient

$$\begin{aligned} \langle A\phi(\lambda A)Y\psi(\lambda B)v, u \rangle &= \langle Y\psi(\lambda B)v, \phi(\bar{\lambda}A^*)A^*u \rangle \\ &= \langle Y\psi(\lambda B)v, \phi(\bar{\lambda}\alpha)\alpha u \rangle \\ &= \bar{\alpha}\phi(\lambda\bar{\alpha})\psi(\lambda\beta)\langle Yv, u \rangle. \end{aligned}$$

Une considération similaire montre que

$$\langle \phi(\lambda A)Y\psi(\lambda B)Bv, u \rangle = \beta\phi(\lambda\bar{\alpha})\psi(\lambda\beta)\langle Yv, u \rangle.$$

Donc, si X est donné par (4.26), alors

$$\begin{aligned} \langle (AX - XB)v, u \rangle &= \int_S \phi(\lambda\bar{\alpha})\psi(\lambda\beta)(\bar{\alpha} - \beta)f(\lambda)\langle Yv, u \rangle d\mu(\lambda) \\ &= (\bar{\alpha} - \beta) \int_S \phi(\lambda\bar{\alpha})\psi(\lambda\beta)f(\lambda)\langle Yv, u \rangle d\mu(\lambda) \\ &= (\bar{\alpha} - \beta) \frac{1}{\bar{\alpha} - \beta} \langle Yv, u \rangle \\ &= \langle Yv, u \rangle. \end{aligned}$$

Dans le cas où les vecteurs propres de A^* et B couvrent tout l'espace, cela montre que $AX - XB = Y$. Le cas général est établi en passant au limite. $\square$

Les théorèmes suivants donnent les preuves de l'inégalité

$$|||X||| \leq \frac{c}{\delta} |||Y||| \quad (4.27)$$

dans certaines situations particulières pour une petite constante c . Parfois, c peut être aussi bas comme 1.

Théorème 4.4.9. Supposons que $A + i\gamma - \frac{1}{2}\delta$ et $-B - i\zeta - \frac{1}{2}\delta$ soient quasi-macréatifs. Alors, pour $Y \in \Omega$, l'équation $(A + i\gamma)X - X(B + i\zeta) = Y$ admet une unique solution $X \in \Omega$ et $\delta |||X||| \leq |||Y|||$.

preuve : Opérateurs fermés quasi-m-accrétifs densément définis

$$A_1 = A + i\gamma - \frac{1}{2}\delta$$

et

$$B_1 = -B - i\zeta - \frac{1}{2}\delta$$

génère des semi-groupes fortement continus

$$U_1(t) = e^{-tA_1}$$

et

$$V_1(t) = e^{-tB_1}$$

qui sont bornés [25]. Si nous fixons

$$U(t) = e^{-\frac{\delta}{2}t} U_1(t)$$

et

$$V(t) = e^{-\frac{\delta}{2}t} U_1(t),$$

on obtient les inégalités

$$\|e^{-t(A+i\gamma)}\| \leq e^{-\delta t/2}, \|e^{t(B+i\zeta)}\| \leq e^{-\delta t/2}. \quad (4.28)$$

D'après le théorème (4.4.5), l'équation $(A + i\gamma)X - X(B + i\zeta) = Y$ admet une unique solution donnée par

$$X = \int_0^\infty e^{-(A+i\gamma)t} Y e^{t(B+i\zeta)} dt. \quad (4.29)$$

En utilisant (4.28), on a

$$\|e^{-(A+i\gamma)t} Y e^{t(B+i\zeta)}\| \leq \|e^{-(A+i\gamma)t}\| \|Y\| \|e^{t(B+i\zeta)}\| \leq \|Y\| e^{-\delta t},$$

et donc en utilisant le théorème (4.4.1), nous trouvons que

$$\|X\| \leq \|Y\| \int_0^\infty e^{-\delta t} dt = \frac{\|Y\|}{\delta}$$

où $X \in \Omega$.

□

Exemple 9. Définir

$$A + i = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}, \quad B + i = \begin{pmatrix} -i + 1 & -i \\ i & 1 + i \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$$

ce qui rend

$$\delta = \text{dist}(\sigma(A + i\gamma), \sigma(B + i\zeta)) = \sqrt{2}$$

et

$$Y = (A + i\gamma)X - X(B + i\zeta) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Alors $\delta\|X\| > \|Y\|$ pour la norme habituelle. Mais l'inégalité (4.27) avec $c = 1$ tient si $\|\cdot\|$ est la norme de la trace classe.

A moins de restreindre le choix de la norme, il faudra chercher des conclusions avec constante $c > 1$.

Théorème 4.4.10. Soient A, B et $\gamma, \zeta \in \mathbb{R}$ tels que $(A + i\gamma)$ et $(B + i\zeta)$ sont des opérateurs hermitiens avec $\text{dist}(\sigma(A + i\gamma), \sigma(B + i\zeta)) \geq \delta > 0$. Alors la solution de l'équation $AX - XB = Y$ satisfait

$$|||X||| \leq \frac{c}{\delta} |||Y|||$$

où

$$c = \inf \left\{ \|f\|_{L^1} : f \in L^1(\mathbb{R}), \widehat{f}(s) = \frac{1}{s + i(\zeta - \gamma)}, \text{ telque } |s| \geq \sqrt{\delta^2 + 4\zeta\gamma} \right\}.$$

preuve : Soit f_δ une fonction quelconque de $L^1(\mathbb{R})$ telle que $\widehat{f}(s) = \frac{1}{s + i(\zeta - \gamma)}$ à chaque fois $|s| \geq \sqrt{\delta^2 + 4\zeta\gamma}$. En utilisant le théorème (4.4.7)

$$X = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-it(A+i\gamma)} Y e^{it(B+i\zeta)} f_\delta(t) dt$$

et donc

$$|||X||| \leq \frac{1}{\delta} |||Y||| \int_{-\infty}^{\infty} |f_\delta(t)| dt$$

puisque $f(t) = f_\delta(t/\delta)$. □

4.5 La solution d'équation Lypunov des maladies Variole des Singes

La variole est une maladie infectieuse qui se transmet d'une personne à une autre. Parmi les symptômes qui caractérisent cette maladie : une éruption sous forme de bulles noires remplies de liquide trouble. Dans le passé, avant le développement de la vaccination contre la variole, cette maladie était répandue dans le monde entier et se distinguait comme une maladie saisonnière plus fréquente en hiver et au début du printemps. À l'heure actuelle, et en raison de l'extinction du virus, nous ne voyons pas d'infections par cette maladie naturellement, car cette maladie a été vaincue à la suite d'une campagne mondiale de vaccination qui a débuté en 1967 sous la supervision de l'Organisation mondiale de la santé. On a appris que le dernier patient infecté par la variole était en 1977 en Somalie (Afrique).

évolution de la maladie :

les jours	les cas de maladie
0	Le développement de la maladie
10 - 12	infection par le virus
12 - 14	l'apparition des premiers signes
14 - 16	l'apparition de la première éruption cutanée
20 - 22	la contamination des bulles
après 22 jour	l'apparition des furoncles

Avec plus de cas de monkeypox enregistrés en Europe et en Amérique du Nord, les problèmes de santé mondiaux découlent d'une nouvelle vague pandémique après la pandémie de coronavirus. Mais la plupart des estimations indiquent que cette maladie rare et émergente n'est pas très dangereuse et que les patients s'en remettent automatiquement.

Maladie du monkeypox :

Monkeypox est une maladie virale zoonotique rare qui trouve son origine chez les animaux sauvages tels que les rongeurs et les primates, et est parfois transmise des animaux aux humains. La première infection humaine connue a été découverte en 1970. Bien que la variole ait été éradiquée depuis 1980, la variole du singe apparaît encore sporadiquement dans certaines parties du continent africain. Le virus a été détecté pour la première fois en 1958 à l'Institut national des sérums à Copenhague, au Danemark, lors de l'enquête sur une maladie semblable à la variole dans Monkeys Research, depuis lors, le nom (monkeypox) a fait surface. L'Organisation mondiale de la santé a déclaré que "la découverte de foyers de monkeypox en mai 2022 dans de nombreux pays où le virus n'est pas endémique sans lien direct avec les voyages dans les zones endémiques, est inhabituelle". Prévention avant exposition au virus La vaccination active, que l'ensemble de la population recevait systématiquement jusqu'à il y a 20 ans, est le moyen le plus efficace de prévenir cette maladie.

Prophylaxie post-exposition :

Il n'y a pas de remède contre cette maladie, la vaccination est donc le seul moyen disponible pour combattre le virus. Recevoir la vaccination pendant les premiers jours (jusqu'à quatre jours) après l'exposition à un patient infectieux (avec la maladie), peut réduire considérablement le risque de la maladie et même la prévenir. La vaccination et le suivi médical de toutes les personnes qui sont en contact direct avec des patients atteints de la maladie ou qui vivent avec eux depuis l'apparition de la chaleur peuvent empêcher la propagation du virus.

La nature de la solution à l'équation des maladies Variole de Singe

Dans cette recherche, nous étudions la solution de l'équation effective des tumeurs polypes, qui se présente sous la forme

$$A^*XA + tAXA = Y \quad (4.30)$$

Où A représente une influence connue définie dans l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$ et représente les facteurs causals et auxiliaires du Variole (facteur hormonal, facteur nutritionnel, relation entre facteur hormonal et facteur nutritionnel, facteur héréditaire, virus, ...).

Et Y est aussi un effet bien connu défini dans l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$ et représente les rapports des facteurs qui contribuent au Variole (sexe, âge, exposition aux radiations, utilisation de sédatifs, stress psychologique, facteurs qui affaiblissent l'immunité,...). t est un nombre réel positif appelé facteur de contrôle et X est l'influenceur inconnu. Cet influenceur représente le traitement en termes de quantité et de qualité pour le patient.

Nous avons également montré la nature de la solution de cette équation affectant des types particuliers d'influences. De plus, nous présenterons certaines caractéristiques et observations car elles sont très importantes dans l'étude moderne des systèmes d'équations différentielles médicales (de la vie).

La solution mathématique de l'équation des maladies Variole de Singe

si $A = I$:

la solution de (4.30) est :

$$X = \frac{1}{1+t} Y$$

si $A \neq I$:

on a :

$$AXB - CXD = Y$$

$$(\lambda C - A) \text{ et } (\lambda B - D)$$

sont réguliers .

$$\sigma(\lambda C - A) \cap \sigma(\lambda B - D) = \emptyset$$

$$X = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (\lambda C - A)^{-1} Y (\lambda B - D)^{-1} d\lambda.$$

on prend :

$$A = A^*, B = A = C = D$$

Si

$$\sigma(\lambda t A - A^*) \cap \sigma(\lambda A - A) = \emptyset$$

la solution

$$X = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (\lambda t A - A^*)^{-1} Y (\lambda A - A)^{-1} d\lambda.$$

Si A Auto Adjoint et Y Auto Adjoint la nature de solution dans ce cas

$$A^* X A + t A X A = Y$$

$$(A^* X A + t A X A)^* = (Y)^*$$

$$A^* X^* A + t A^* X^* A^* = (Y)^*$$

donc

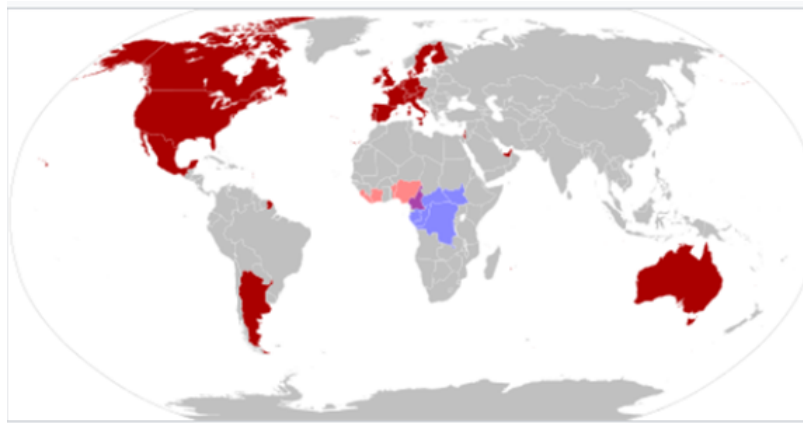
$$A^* X^* A + t A X^* A = Y$$

Alors X est une solution Auto Adjoint

4.5.1 Clarification des images pour la variole

Virus de la variole du singe





Une carte de la propagation du virus dans le monde. 

-  Clade ouest-africain endémique
-  Clade centrafricain endémique
-  Les deux clades
-  Cas de variole du singe de 2022

developpement diffusion de maladie variole internationnal

Conclusion

L'essentiel du ce travail présenté dans ce mémoire consiste aux les solution des équations opérateurs sous forme intégrale et ces applications.

Dans le cas des opérateurs Auto-Adjoints et normaux nous donnons un résultat important indiqué dans le schéma suivant et les inclusions sont tous appropriés :
opérateur normal $\subset$ opérateur quasinormal $\subset$ opérateur sous-normal $\subset$ opérateur hyponormal.

- Si les spectres $\lambda G_1 - A_1$ et $\lambda G_2 - A_2$ sont disjoints, alors pour toute main droite $Y \in \mathcal{L}(H_2, K_1)$ l'équation (3.7) a une solution unique $X \in \mathcal{L}(K_2, H_1)$. Plus précisément, si Γ est un contour de Cauchy tel que $\sigma(G_1, A_1)$ est dans le domaine intérieur de Γ , et $\sigma(G_2, A_2)$ est dans le domaine extérieur de Γ , ensuite

$$X = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (\lambda G_1 - A_1)^{-1} Y (\lambda G_2 - A_2)^{-1} d\lambda.$$

et on a vu le cas particulier ou $G_1 = I$.

- Soit A et B sont des opérateurs normaux avec $\sigma(A) \cap \sigma(B) = \emptyset$. Soit $A = A_1 + iA_2$ et $B = B_1 + iB_2$, telque A_1 et A_2 sont des opérateurs normaux, et sont donc B_1 et B_2 . Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$ sa transformation de Fourier $\widehat{f}(s_1, s_2) = \frac{1}{s_1 + is_2}$ n'importe quand $s_1 + is_2 \in \sigma(A) - \sigma(B)$. Alors la solution d'équation $AX - XB = Y$ peut être exprimé comme

$$X = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(t_1 A_1 + t_2 A_2)} Y e^{i(t_1 B_1 + t_2 B_2)} f(t_1, t_2) dt_1 dt_2.$$

- l'équation $AX - XB = Y$ sous les condutions sur le spectre de A et B on a :

a) Si $\sigma(A) \subset \{z \mid \operatorname{Re} z > 0\}$ et $\sigma(B) \subset \{z \mid \operatorname{Re} z < 0\}$ Alors $X = \int_0^{+\infty} e^{-tA} Y e^{tB} dt$

b) Si $\sigma(A) \subset \{z \mid |z| > \rho\}$ et $\sigma(B) \subset \{z \mid |z| < \rho\}$ Alors $X = \sum_{n=0}^{+\infty} A^{-n-1} Y B^n$.

et dans ces cas de sylvester, stein et lypunov on a arrivé à une forme de la solution pour chaque cas.

- L'équation de maladie variole des singes :

$$A^*XA + tAXA = Y$$

on a arrivé à une solution appropriée sous la forme

$$X = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (\lambda tA - A^*)^{-1} Y (\lambda A - A)^{-1} d\lambda.$$

Prespectives

1) Quelles sont les conditions atteintes par les opérateurs A, B, Y ? Peut-il être la solution de l'équation d'opérateur $A^*XB + CXD = Y$ dans le cas infini, soit être l'opérateur hyponormal paranormal...

2) Le cas où

$$A = B = D$$

et

$$C = tA$$

l'équation de Lyapunov $A^*XA + tAXA = Y$ pour les maladies de variole des singes, l'opérateur inconnu (X) à trouver, identifié et connu dans les équations de Lyapunov. Quant aux opérateurs connus (A, Y) dans l'équation, quelles sont les conditions sur les opérateurs dans le cas hyponormal pour admettre ces équations solutions dans $B(\mathcal{H})$?

Bibliographie

- [1] G. Aubrun, Théorie des Opérateurs M1 Mathématiques, Université de la Réunion.
- [2] W. A. Arveson, Short Course on Spectral Theory (Graduate texts in mathematics, 209), 2002 Springer-Verlag New York.
- [3] D. J. Bender, Lyapunov-like equations and reachability/observability Gramians for descriptor systems, IEEE Trans. Automat. Control 32(4) (1987), 343-348.
- [4] S. K Berberian, Introduction to Hilbert space. 1971, New York.
- [5] R. Bhatia, C. Davies and A. McIntosh, Perturbation of spectral subspaces and solution of linear operator equations, Linear Algebra Appl., 52/53 (1997), 45-67.
- [6] R. Bhatia, P. Rosenthal, How and why to solve the operator equation $AX - XB = Y$, Bull. London Math. Soc., 29(1) (1997), 1-21.
- [7] R. Bhatia, Matrix Analysis, Springer-Verlag, New York, (1997), graduate texts in mathematics.
- [8] H. Brezis, Analyse Fonctionnelle Théorie et applications, Masson Paris New York Barcelone Milan Mexico Sao Paulo 1987.
- [9] J. A. Brooke, P. Busch and D. B. Pearson, Commutativity up to a factor of bounded operators in complex Hilbert space, R. Soc. Lond. Proc. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci., boucle fermée /58/2017(2002), 109 - 118.
- [10] R. Byers, D. Kressner, Structured condition numbers for invariant subspaces, SIAM J. Matrix Anal. Appl. 28(2) (2006), 326-347.
- [11] G. Cassier, Generalized Toeplitz operators, restriction to invariant subspaces and similarity problems, Journal of Operator theory, 53 :01 (2005), p. 49-89.
- [12] Ch. Y. Chiang, A note on the T-Stein matrix equation, Abstr. Appl. Anal. 2013, Article ID 824641, 8 pages.

-
- [13] K. W. E. Chu, The solution of the matrix equations $AXB - CXD = E$ and $(YA - DZ; YC - BZ) = (E, F)$, Linear Algebra Appl. 93 (1987), 93-105.
 - [14] J. B Conway, A Course in functional Analysis, Springer, 1990 (2nd edition).
 - [15] J. B Conway, A Course in Operator Theory, (1999) .
 - [16] C. Davis, W. Kahan, The rotation of eigenvectors by a perturbation - III, SIAM J. Numer. Anal, 7 (1970), 1-46.
 - [17] F. M. Dopico, F. De Teràn, Consistency and efficient solution of the Sylvester equation for congruence, Electron. J. Linear Algebra 22 (2011), 849-863.
 - [18] M. A. Epton, Methods for the solution of $AXD - BXC = E$ and its application in the numerical solution of implicit ordinary differential equations, BIT 20 (1980), 341-345.
 - [19] F. R. Gantmacher, The Theory of Matrices, Vol. II, Chelsea Publishing Company, New York 1959.
 - [20] I. C Gohberg, M. G Krein, Introduction to the theory of linear nonselfadjoint operators Transl. Math. Monographs Providence R.I. 1969
 - [21] I. Gohberg, S. Goldberg and Marinus A. Kaashoek, Classes of Linear Operators Vol. I, Operator Theory Advances and Applications Vol 49, Editor I. Gohberg.
 - [22] L. Hariz Bekkar, A. Mansour, Solvability of Sylvester Operator Equation With Bounded Subnormal Operators in Hilbert Spaces, Korean J. Math. 27 (2019), No. 2, pp. 515-523.
 - [23] E. Heinz, Beiträge zur störungstheorie der spektralzerlegung, Math. Ann., 123 (1951), 415-438.
 - [24] V. Hernández, M. Gasso, Explicit solution of the matrix equation $AXB - CXD = E$, Linear Algebra Appl. 121 (1989), 333-344.
 - [25] T. Kato, Perturbation Theory for Linear Operators, Springer-Verlag, New York, 1980.
 - [26] D. Kressner, Ch. Schroder and D. S. Watkins, Implicit QR algorithms for palindromic and even eigenvalue problems, Numer. Algorithms 51(2) (2009), 209-238.
 - [27] A. Mansour, Résolution de deux types d'équations opératoriels et interactions. Equations aux dérivées partielles [math.AP]. Université de Lyon, 2016.
 - [28] S. K. Mitra, The matrix equation $AXB + CXD = E$, SIAM J. Appl. Math. 32 (1977), 823-825.
 - [29] B. Sz Nagy, Ueber die Ungleichung von H. Bohr Math. Nachr. 9(1953)255- 259

- [30] M. Rosenblum, On the operator equation $BX - XA = Q$, Duke Math. J., 23 (1956), 263-270.
- [31] W. Rudin, Functional Analysis (in Russian) "Mir" Moscow 1975.
- [32] V. S. Sunder, Operators on Hilbert space, May 14, 2074. INDIA.
- [33] G. W. Stewart, J. Sun, Matrix Perturbation Theory, Academic Press, Boston, 1990.
- [34] A.E. Taylor, Spectral theory of closed distributive operators, Acta Mathematica, 84 (1951), 189-224.
- [35] K. Yosida, Functional Analysis, Springer-Verlag, New York, 1980.
- [36] B. Zhou, J. Lam and G.-R. Duan, Toward solution of matrix equation $X = Af(X)B + C$, Linear Algebra Appl. 435(6) (2011), 1370-1398.