



République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de
la Recherche Scientifique

Université Echahid Hamma Lakhdar El Oued

Faculté des Sciences Exactes

Mémoire de fin d'étude

MASTER ACADEMIQUE

Domaine: Mathématiques et Informatique

Filière: Mathématiques

Spécialité: Mathématiques fondamentales

Thème

Étude mathématique du θ -schéma pour les EDP
parabolique linéaire

Présenté par: Ahmadi Sara
Ahmed Salah Zineb

Soutenu publiquement devant le jury composé de

Président	Aissaoui Adel	Pr	Univ El Oued
Rapporteur	Beggas Mohammed	M.C.A	Univ El Oued
Examineur	Doudi Nadjat	M.C.B	Univ El Oued

Année universitaire 2022 - 2023

REMERCIEMENTS

Elhamdou Lillah, qui nous a inspiré la patience et la persévérance pour achever ce travail qui n'aurait été fini qu'avec sa grâce et son succès. Nous le remercions d'une reconnaissance digne de sa majesté et de la grandeur de son autorité.

Sans oublier à ce stade d'exprimer nos sincères remerciements et notre gratitude au encadreur, **Dr Beggas Mohammed**, qui a travaillé pour nous guider et nous éclairer d'une manière qui garantit notre succès.

Nous exprimons également nos sincères remerciements aux membres du jury d'avoir accepté la lecture de ce modeste travail.

Ainsi qu'à tous nos professeurs qui nous ont accompagnés tout au long de notre parcours académique, qui ne nous ont pas épargné avec leurs précieux conseils et leurs précieux indications.

Grand merci aussi à tous les agents de la faculté des sciences exactes, département des mathématiques.

NOTATIONS

$C^k(\Omega)$	L'espace des fonctions continûment dérivables jusqu'à l'ordre k
$L^p(\Omega)$	Espaces de Lebesgue.
∇	Gradient.
Δ	Laplacien.
$M_{(n,p)}(\mathbb{K})$	Ensemble des matrices de type (n,p) .
I_n	Matrice identité d'ordre n .
$\rho(A)$	Rayon spectrale de A .
E.D.P	Équation aux dérivées partielles.
E.D.O	Équations différentielles ordinaires.
C.I	Condition initiale.
C.L	Conditions aux limites.
P_c	Problème continu.
P_h	Problème discret.
Δx	Le pas en espace.
Δt	Le pas en temps.

ϵ_i Erreur de consistance.
C.F.L La condition de Courant-Friedrichs-Lewy.
 e_i^n L'erreur globale.

TABLE DES FIGURES

3.1	Maillage en dimension 1	22
3.2	Maillage en dimension 2	27

TABLE DES MATIÈRES

Notations	iii
Introduction	x
1 Préliminaires	1
1.1 Espaces fonctionnels	1
1.1.1 Espace $C^k(\Omega)$ ($0 \leq k \leq \infty$)	1
1.1.2 Espaces des Lebesgue $L^p(\Omega)$	2
1.2 Opérateurs différentiels	2
1.2.1 Gradient d'un vecteur	2
1.2.2 Divergence d'un vecteur	3
1.2.3 Laplacien	3
1.3 Combinaison convexe	3
1.4 Formules de Taylor et développements limités	3
1.4.1 Formule de Taylor	3
1.4.2 Développements limités	4
1.5 Rappel sur les matrices	4

1.5.1	Propriété d'une matrice carrée	5
1.5.2	Matrice particulière	6
1.5.3	Les valeurs propres et le rayon spectrale	8
1.5.4	Les valeurs propres de matrice tridiagonale symétrique	8
1.5.5	Les valeurs propres de matrice tridiagonale par blocs symétrique	9
1.5.6	Norme matricielle	9
2	EDP paraboliques linéaires	11
2.1	Généralités	11
2.1.1	EDP linéaire du 1 ^{ère} ordre en dimension 2	13
2.1.2	EDP linéaire du second ordre en dimension n	13
2.1.3	Classification d'une EDP linéaire d'ordre 2 en dimension n	14
2.1.4	Conditions aux limites	15
2.1.5	Problèmes aux limites	15
2.1.6	Problème bien posé	15
2.2	Problèmes paraboliques	16
2.2.1	Équation de la chaleur	16
2.2.1.1	L'équation de la chaleur dans un domaine non borné D1	17
2.2.1.2	Le problème de la chaleur dans un domaine borné D1	17
2.2.1.3	Existence et unicité de la solution	17
2.2.1.4	Principe du maximum	18
2.2.1.5	L'équation de la chaleur dans un domaine borné D2	18
2.2.2	Équation d'advection-diffusion	18
2.2.2.1	L'équation d'advection-diffusion D1	19
2.2.2.2	L'équation d'advection-diffusion D2	19
2.2.3	La différence entre l'équation de la chaleur et advection-diffusion	20
3	Principe de la méthode des différences finies	21
3.1	Maillage	22
3.2	Différences finies en dimension 1	22
3.2.1	Discrétisation de domaine	22

3.2.2	Approximation des dérivés premières	23
3.2.3	Approximation des dérivées secondes	24
3.3	Différences finies en dimension 2	26
3.3.1	Discrétisation de domaine	26
3.3.2	Approximation des dérivés premières	27
3.3.3	Approximation des dérivées secondes	28
3.3.4	Discrétisation de temps	29
3.3.5	Approximation des les dérivées par rapport au temps	29
3.4	Le principe de la méthode des différences finies	29
3.4.1	Consistance du schéma numérique	30
3.4.1.1	Erreur de consistance	30
3.4.1.2	Consistance de schéma numérique	30
3.4.1.3	Ordre de consistance du schéma	30
3.4.2	Stabilité du schéma numérique	30
3.4.2.1	Stabilité en norme L^∞ ($p = \infty$)	31
3.4.2.2	Stabilité en norme L^2 ($p = 2$) (au sens Von Neumann)	31
3.4.2.3	Stabilité en norme L^2 (Stabilité matricielle)	32
3.4.2.4	La condition de Courant-Friedrichs-Lewy (C.F.L)	32
3.4.3	La convergence	33
4	Étude de θ-schéma pour l'équation de la chaleur dimension 1	34
4.1	Le problème continue en D1	35
4.2	Le problème discret	35
4.2.1	La discrétisation	35
4.2.2	θ -schéma pour l'équation de la chaleur en D1	35
4.2.3	Consistance	36
4.2.4	Stabilité	38
4.2.4.1	Stabilité en norme L^∞	38
4.2.4.2	Stabilité en norme L^2	40
4.2.5	Convergence	46
4.2.5.1	Estimation d'erreur	46

4.3	Résumé des résultats obtenus (tableau)	48
5	Étude de θ-schéma pour l'équation de la chaleur D2	49
5.1	Le problème continue en D2	49
5.2	Le problème discret	50
5.2.1	La discrétisation	50
5.2.2	θ -schéma pour l'équation de la chaleur en D2	50
5.2.3	Consistance	51
5.2.4	Stabilité	53
5.2.4.1	Stabilité en norme L^∞	53
5.2.4.2	Stabilité en norme L^2	56
5.2.5	Convergence	66
5.2.5.1	Estimation d'erreur	66
5.3	Résumé des résultats obtenus (tableau)	69
	Conclusion	70
	Bibliographie	72

INTRODUCTION

Les équations aux dérivées partielles sont un outil de modélisation de base, ont été étudiées par les mathématiciens depuis le dix-huitième siècle, de nombreux phénomènes physiques, mécaniques, biologiques et technologiques modernes ont été conçus à travers eux. Ces équations s'accordent avec la traduction mathématique des lois de la physique comme l'équation de la chaleur.

Les équations aux dérivées partielles se divisent en trois classes (elliptique - parabolique - hyperbolique), seules quelques-unes de ces équations peuvent être résolues par des méthodes analytiques complexes et il est plus facile de développer des solutions approchées par des méthodes numériques (différences finies, éléments finies, volumes finies). Voir [23], [11], [19].

Au dix-huitième siècle la méthode des différences finies faisait partie des travaux de nombreux mathématiciens. Le principe fondamental de la méthode consiste à la compensation des dérivées dans le problème continu aux différences finies sur des points finis et précisés nous n'abordons que les principes pratiques de cette méthode, c'est-à-dire la construction de ce qu'on appelle schémas numériques (schéma d'Euler explicite-d'Euler implicite - Crank-Nicholson - θ -schéma). Et ça a ses avantages et ses inconvénients :

- **Avantages** : grande simplicité d'écriture et faible coût de calcul.

• **Inconvénient** : limitation de la géométrie des domaines des calculs (simple, non complexe), difficultés de prise en compte des conditions aux limites et en général absence de résultats de majoration d'erreurs. Voir [20], [1], [14].

Que sont donc les équations aux dérivées partielles ? Comment appliquer la méthode des différences finies pour trouver une solution approchée ?

Peut-être que ces questions et d'autres ont été la raison qui nous a poussés dans l'esprit de recherche et notre choix de cette mémoire sous le titre : **étude mathématique de θ -schéma pour l'EDP parabolique linéaire**.

L'objectif de ce travail est d'étudier θ -schéma pour l'EDP parabolique linéaire, en choisissant l'équation de la chaleur comme modèle type dans ses première et seconde dimensions en étudiant la consistance, la stabilité, et la convergence.

Dans cette mémoire, nous avons adopté un plan qui se divise en une introduction et cinq chapitres.

Dans le premier chapitre, intitulé : préliminaires, nous avons cité de quelques définitions, propriétés, et des rappels sur les matrices.

Quant au deuxième chapitre, intitulé : EDP parabolique linéaire, ce chapitre est consacré à l'étude des équations aux dérivées partielles et de leurs propriétés.

Le troisième chapitre intitulé : principe de la méthode des différences finies, nous avons présenté la méthode des différences finies avec l'introduction du principe de cette méthode. Finalement les quatrième et cinquième chapitres sont l'objet d'étude, nous avons étudiés la discrétisation de θ -schéma pour l'équation de la chaleur en dimension 1 et 2 respectivement en vérifiant toutes les conditions de consistance, de stabilité et de convergence.

CHAPITRE

1

PRÉLIMINAIRES

Ce chapitre est consacré à un rappel sur les espaces fonctionnels, les opérateurs différentiels la formule de Taylor et les matrices que nous utiliserons par la suite.

1.1 Espaces fonctionnels

1.1.1 Espace $C^k(\Omega)$ ($0 \leq k \leq \infty$)

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 1$), $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$.

Longueur de α : $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$.

Définition 1.1.1.

On note par $C^k(\Omega)$ l'espace des fonctions dérivables jusqu'à l'ordre k , dont les dérivées d'ordre k sont continues. c'est-à-dire :

$$f \in C^k(\Omega) \Leftrightarrow \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leq k, D^\alpha f \text{ existe et continue.}$$

On note par $C^\infty(\Omega)$ l'espace des fonctions indéfiniment continument dérivables. c'est-à-dire :

$$f \in C^\infty(\Omega) \Leftrightarrow \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, D^\alpha f \text{ existe et continue.}$$

1.1.2 Espaces des Lebesgue $L^p(\Omega)$

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Définition 1.1.2.

L'espaces de lebesgue pour $1 \leq p < +\infty$ sont définie comme suite :

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; \ f \text{ mesurable et } \int_{\Omega} |f(x)|^p dx < +\infty \right\},$$

muni de la norme :

$$\| f \|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

• $p = +\infty$:

$$L^\infty(\Omega) = \{ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \text{ f mesurable et } \exists C > 0 \text{ telle que } |f(x)| < C \text{ p.p sur } \Omega \}.$$

On définit et on note la norme dans $L^\infty(\Omega)$ par :

$$\| f \|_{L^\infty(\Omega)} = \inf \{ C; |f(x)| < C \text{ p.p sur } \Omega \} = \supess f.$$

1.2 Opérateurs différentiels

1.2.1 Gradient d'un vecteur

Soit u une fonction scalaire, $u = u(x, y, z)$

$$\overrightarrow{grad}(u) = \nabla u = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} \end{pmatrix}.$$

1.2.2 Divergence d'un vecteur

Soit u une fonction vectorielle de trois variables (x, y, z) définie sur un domaine Ω de $\mathbb{R}^3$ et à valeurs u_1, u_2, u_3 . On appelle divergence du vecteur u et on note $\operatorname{div}(u)$ ou $\nabla \cdot u$ le scalaire :

$$\operatorname{div}(u) = \nabla \cdot u = \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial u_3}{\partial z} .$$

1.2.3 Laplacien

Soit u fonction de trois variable $u = u(x, y, z)$.

On appelle Laplacien de u et on note Δu le scalaire :

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} .$$

1.3 Combinaison convexe

Soient $x_1, \dots, x_k$ un nombre fini de points de $\mathbb{R}^n$, et $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ réels, on dit que

$$x = \sum_{j=1}^k \lambda_j x_j ,$$

est une combinaison convexe des points $x_1, \dots, x_k$. Si :

1. $\lambda_j \geq 0 \quad \forall j = 1, \dots, k$.
2. $\sum_{j=1}^k \lambda_j = 1$.

1.4 Formules de Taylor et développements limités

1.4.1 Formule de Taylor

Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^n sur $[a, b]$ et dont la dérivée $n + 1$ ième existe sur $]a, b[$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que :

$$f(b) = f(a) + (b - a)f'(a) + \frac{(b - a)^2}{2!}f''(a) + \dots + \frac{(b - a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \frac{(b - a)^{n+1}}{(n + 1)!}f^{(n+1)}(c).$$

Cette égalité peut encore s'écrire avec $h = b - a$,

$$f(a + h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2!}f''(a) + \dots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a + \theta h),$$

avec $0 < \theta < 1$.

1.4.2 Développements limités

Une fonction $f(x)$ définie au voisinage de $x = x_0$ admet un développement limité d'ordre n , si'il existe un polynôme de degré n ,

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \dots + a_n(x - x_0)^n,$$

tel que

$$f(x) = P_n(x) + \epsilon \cdot (x - x_0)^n,$$

où ϵ tend vers 0 lorsque x tend vers x_0 .

1.5 Rappel sur les matrices

Définition 1.5.1.

On appelle une matrice dans $\mathbb{K}$ de type (n, p) un tableau rectangulaire A d'éléments de $\mathbb{K}$ ayant n lignes et p colonnes.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}$$

On note a_{ij} l'élément qui se trouve à la ligne numéro i et la colonne j et on note la matrice A par $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$. L'ensemble des matrices de type (n, p) est noté $\mathcal{M}_{(n,p)}(\mathbb{K})$.

* Pour $n = p$, on dit que A est une matrice carrée d'ordre n et on note $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

* A matrice carré, La suite des éléments $\{a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{nn}\}$ est appelé la diagonale principale de A .

1.5.1 Propriété d'une matrice carrée

La matrice $A = (a_{ij})$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

- **Transposé d'une matrice**

La transposée de A notée A^t , dont les lignes sont formées des colonnes de A .

- **Matrice symétrique**

On dit que A est symétrique si et seulement si : $A = A^t$.

- **Inverse d'une matrice**

On dit que A inversible s'il existe une matrice notée $A^{-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I_n.$$

I_n est la matrice identité.

A^{-1} est appelée inverse de A .

- **Matrice définie positive**

A symétrique, on dit que A est définie positive si et seulement si :

$$\forall X \neq 0, \quad X^t A X > 0.$$

Exemple 1.5.1.

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & \cdots & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

A est symétrique .

$$\forall X \neq 0 \quad (X = (x_1, \dots, x_n)).$$

$$X^t A X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \\ & -1 & 2 & -1 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= (2x_1 - x_2)x_1 + (-x_1 + 2x_2 - x_3)x_2 + \dots + (-x_{n-1} + 2x_n)x_n \\ &= 2x_1^2 - x_2x_1 - x_1x_2 + 2x_2^2 + \dots - x_{n-1}x_n + 2x_n^2 \\ &= 2x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 + \dots - 2x_{n-1}x_n + 2x_n^2 \\ &= x_1^2 + (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + \dots + (x_{n-1} - x_n)^2 + x_n^2 \\ &= x_1^2 + \sum_{i=1}^{n-1} (x_i - x_{i+1})^2 + x_n^2 > 0. \end{aligned}$$

Donc A est définie positive.

Théorème 1.5.1. [13]

Une matrice carrée A symétrique définie positive est inversible et son inverse est symétrique définie positive.

1.5.2 Matrice particulière

• Matrice unité

La matrice unité noté I est définie par :

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

• Matrice diagonale

C'est une matrice carrée telle que :

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ \neq 0 & \text{si } i = j \end{cases}$$

- **Matrice Tridiagonale**

Soit A une matrice carré $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On dit que A est tridiagonale si les seuls éléments non nuls se trouvent sur la diagonale ou adjacents à la diagonale, c'est-à-dire $a_{ij} = 0$; $|i - j| > 1$.

Schématiquement A est de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & 0 \\ a_{21} & & & \\ \vdots & & \ddots & \\ & & & a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

- **Matrice définies par blocs**

La matrice A est dite définie par bloc :

$$A = [A_{ij}] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1p} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{np} \end{bmatrix},$$

où $A_{ij} \in \mathcal{M}_{(n_i, p_j)}(\mathbb{R})$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, p$.

- **Matrice tridiagonale par blocs**

Soit la matrice tridiagonale A tel que :

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & 0 \\ A_{21} & & & \\ \vdots & & \ddots & \\ & & & A_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & A_{n,n-1} & A_{n,n} \end{pmatrix}$$

où les A_{ij} sont de sous-matrices de A .

1.5.3 Les valeurs propres et le rayon spectrale

Les valeurs propre

Soient $A \in M_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors :

$$\lambda \text{ est une valeur propre de } A \iff \det(A - \lambda I_n) = 0.$$

Le rayon spectrale de A est le plus grand des modules des valeurs propres de A

$$\rho(A) = \max_{i=1, \dots, n} |\lambda_i|,$$

λ_i est une valeur propre de A .

1.5.4 Les valeurs propres de matrice tridiagonale symétrique

Lemme 1.5.1. [19]

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, telle que :

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 0 & \dots & 0 \\ b & a & b & 0 & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & b & a & b \\ 0 & \dots & \dots & b & a \end{pmatrix}$$

Les valeurs propre de A sont données par :

$$\lambda_k = a + 2b \cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right),$$

et $k = 1, \dots, n$.

Exemple 1.5.2.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \dots & \dots & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de A est :

$$\begin{aligned}\lambda_k &= 2 - 2\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right) = 2 - 2\left(\cos^2\left(\frac{k\pi}{2(n+1)}\right) - \sin^2\left(\frac{k\pi}{2(n+1)}\right)\right) \\ &= 2 - 2\left(1 - 2\sin^2\left(\frac{k\pi}{2(n+1)}\right)\right) \\ &= 4\sin^2\left(\frac{k\pi}{2(n+1)}\right) .\end{aligned}$$

1.5.5 Les valeurs propres de matrice tridiagonale par blocs symétrique

Corollaire 1.5.1. [2]

$\forall T \in \mathcal{M}_{(n,k)}(\mathbb{R})$ et $\forall A, B \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R})$.

$$T = \begin{pmatrix} A & B & 0 & \cdots & 0 \\ B & A & B & 0 & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & B & A & B \\ 0 & \cdots & \cdots & B & A \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 \\ b & a & b & 0 & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & b & a & b \\ 0 & \cdots & \cdots & b & a \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} c & d & 0 & \cdots & 0 \\ d & c & d & 0 & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & d & c & d \\ 0 & \cdots & \cdots & d & c \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de T est :

$$\lambda_{pq} = a + 2b\cos\left(\frac{p\pi}{k+1}\right) + 2\left(c + 2d\cos\left(\frac{p\pi}{k+1}\right)\right)\cos\left(\frac{q\pi}{n+1}\right),$$

$$1 \leq p \leq k \text{ et } 1 \leq q \leq n.$$

1.5.6 Norme matricielle

On appelle norme matricielle $\| \cdot \|$ définie de $M_n(\mathbb{K})$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) vérifiant les propriétés suivantes, $\forall A \in M_n(\mathbb{K})$:

1. $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$.
2. $\|\alpha A\| = |\alpha| \|A\| \quad \forall \alpha \in \mathbb{K}$.
3. $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|, \quad \forall (A, B) \in M_n(\mathbb{K})^2$. (inégalité triangulaire)
4. $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|, \quad \forall (A, B) \in M_n(\mathbb{K})^2$.

Par exemple :

$$\|A\|_1 = \max_{j=1, \dots, n} \sum_{i=1}^n |a_{i,j}|.$$

$$\|A\|_\infty = \max_{i=1, \dots, n} \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|.$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^t A)}.$$

Remarque 1.5.1.

Si la matrice A symétrique alors :

$$\|A\|_2 = \rho(A).$$

CHAPITRE

2

EDP PARABOLIQUES LINÉAIRES

Les équations aux dérivées partielles (EDP) interviennent dans la description de très nombreux problèmes de l'électronique, physique, chimie, sciences de la terre, biologie...etc. par exemple équations des ondes, poisson, chaleur....etc.

Dans ce chapitre nous intéressons aux EDP paraboliques linéaires .

2.1 Généralités

Ω ouvert $\subset \mathbb{R}^n$. une fonction $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ de plusieurs variables.

$$\begin{aligned} u : \Omega \subset \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, x_2, \dots, x_n) &\longmapsto u(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned}$$

Définition 2.1.1.

F est une fonction de plusieurs variables réelles.

Une EDP (équations aux dérivées partielles) est une relation entre :

1. Les variables indépendantes $(x_1, x_2, \dots, x_n)$.
2. La fonction "inconnue" u .
3. Un nombre fini de dérivées partielles de u .

$$F\left(x_1, x_2, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 x_2}, \dots\right) = 0. \quad (2.1)$$

- L'équation (2, 1) est considérée dans un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.
- Les solutions de l'EDP (2, 1) sont les fonctions qui vérifient cette équation dans Ω .
- l'ordre de dérivation le plus élevé est appelé l'ordre de l'EDP.
- La dimension d'une équation aux dérivées partielles est le nombre des variables indépendantes de la fonction inconnue u . L'équation (2, 1) est donc de dimension n .

Remarque 2.1.1.

Notons que si $n = 1$ alors l'EDP est une équation différentielle ordinaire (EDO).

Définition 2.1.2.

1. Une équation aux dérivées partielles est linéaire si et seulement si :

L'équation peut s'écrire comme :

$$L(u) = f. \quad (2.2)$$

L est un opérateur linéaire par rapport à u et ses dérivées partielles.

2. Si $f = 0$ on dit que l'équation homogène.

Exemple 2.1.1.

1. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0$ (d'ordre 2, linéaire, homogène).
2. $\frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y)$ (d'ordre 2, non linéaire, non homogène).

2.1.1 EDP linéaire du 1^{ère} ordre en dimension 2

On a :

$$\begin{aligned} u : \Omega \subset \mathbb{R}^2 &\longmapsto \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto u(x, y) \end{aligned}$$

La forme la plus générale pour une EDP linéaire du 1^{ère} ordre dans $\mathbb{R}^2$ est :

$$\begin{aligned} a(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} + c(x, y)u &= d(x, y), \\ a, b, c, d &\in C^1(\Omega). \end{aligned}$$

$a^2 + b^2 \neq 0$ (au moins un des coefficients a ou b ne s'annule pas sur Ω).

2.1.2 EDP linéaire du second ordre en dimension n

Une EDP linéaire du second ordre dans $\mathbb{R}^n$, s'écrit sous la forme générale suivant :

$$\begin{aligned} u : \Omega \subset \mathbb{R}^n &\longmapsto \mathbb{R} \\ X = (x_1, x_2, \dots, x_n) &\longmapsto u(x_1, x_2, \dots, x_n). \end{aligned}$$

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(X) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(X) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(X)u = f(X), \quad (2.3)$$

$a_{ij}(X) = a_{ji}(X)$ donc $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ matrice symétrique .

• L'EDP (2.3) du seconde ordre en dimension 2

On a :

$$\begin{aligned} u : \Omega \subset \mathbb{R}^2 &\longmapsto \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto u(x, y) \end{aligned}$$

$$a(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + e(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} + f(x, y)u = g(x, y) \quad (2.4)$$

$$a, b, c, d, e, f, g \in C^2(\Omega) \quad / \quad a^2 + b^2 + c^2 \neq 0 \text{ sur } \Omega.$$

2.1.3 Classification d'une EDP linéaire d'ordre 2 en dimension n

L'EDP (2.3) linéaire d'ordre 2 en dimension n .

Notons que $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ une matrice symétrique elle est donc diagonalisable et $(\lambda_i(X))_{i=1}^n$ / $X = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ les valeurs propres de A .

On dit que :

1. L'EDP (2.3) est **elliptique** si et seulement si toutes les valeurs propres de A sont non nulles et de même signe.
2. L'EDP (2.3) est **hyperbolique** si et seulement si toutes les valeurs propres de A sont non nulles et de même signe sauf une valeur de signe opposé.
3. L'EDP (2.3) est **parabolique** si et seulement si toutes les valeurs propres de A sont non nulles et de même signe et une valeur est nulle.

• **Cas particulier** : la classification d'une EDP (2.4) (en dimension 2).

1. Si $b^2 - ac < 0$, l'EDP est **elliptique**.
2. Si $b^2 - ac > 0$, l'EDP est **hyperbolique**.
3. Si $b^2 - ac = 0$, l'EDP est **parabolique**.

Exemple 2.1.2.

a)

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y),$$

$$b^2 - ac = (xy)^2 - (x^2)(y^2) = 0 \rightarrow \text{L'EDP parabolique.}$$

b) Équation du corde Vibrante.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,$$

$$b^2 - ac = 0^2 - (-1)(1) = 1 > 0 \rightarrow \text{alors L'EDP hyperbolique.}$$

c) Équation de laplace $\Delta u = 0$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0,$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \implies \det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \implies (1 - \lambda)^3 = 0,$$

$\implies \lambda_{1,2,3} = 1$ alors l'EDP est elliptique.

2.1.4 Conditions aux limites

- On appelle condition de **Dirichlet** une condition ou on impose la valeur de la fonction recherchée (u) sur le bord $\partial\Omega$. (condition du type 1).
- On appelle condition de **Neumann** une condition ou on impose la valeur de la dérivée normale de la fonction recherchée (u) sur le bord $\partial\Omega$ (condition du type 2).
- On appelle condition de **Fourier-Robin** une condition ou on impose une relation entre la valeur de la dérivée normale de la fonction recherchée (u) et sa valeur sur le bord $\partial\Omega$ (condition du type 3).

2.1.5 Problèmes aux limites

(EDP + Conditions aux limites) $\implies$ Problème aux limites.

Remarque 2.1.2.

Si l'EDP modélise un problème d'évolution, on ajoute la condition initiale qui dépende du temps.

2.1.6 Problème bien posé

Soit (P) un problème aux limites.

Proposition 2.1.1. [6]

On dit que (P) bien posé si :

1. Il existe une solution de (P) satisfaisant les conditions aux frontières.
2. La solution doit-être unique.

3. La solution doit-être stable par rapport aux conditions aux frontières imposées.

Remarque 2.1.3.

Un problème qui n'est pas bien posé est dit mal posé.

Exemple 2.1.3.

$$\begin{cases} -u''(x) = 1, & \text{sur }]0, 1[, \\ u'(0) = u'(1) = 0. \end{cases}$$

$$-u''(x) = 1 \implies -u'(x) = x + c_1 \implies -u(x) = \frac{1}{2}x^2 + c_1x + c_2$$

$$\implies u(x) = -\frac{1}{2}x^2 - c_1x - c_2 \implies u'(0) = -c_1 \implies c_1 = 0$$

$$u'(1) = -1 - c_1 = 0 \implies c_1 = -1 .$$

Alors c'est problème est mal posé .

2.2 Problèmes paraboliques

2.2.1 Équation de la chaleur

• Le phénomène

L'équation de la chaleur est une équation aux dérivées partielles décrivant le phénomène physique de condition thermique. Elle a été initialement introduite par Jean Baptiste Joseph.

En dimension 1, on considère une barre mince de longueur L constituée d'un matériau homogène (fer, cuivre, aluminium, béton, verre ...) et isolée thermiquement sur toute sa longueur et à l'extrémité droite. On traitera d'abord le cas d'une barre de fer. On cherche donc l'évolution au cours du temps de la température u dans cette barre.

• Modélisation mathématique

Soit Ω (ouvert) en domaine de $\mathbb{R}^n (n \geq 1)$ $u(x, t)$ un champ de température sur ce domaine.

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \alpha \Delta u = f(x, t), \quad \forall x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, \quad t \in [0, T],$$

$$\alpha > 0 \quad / \quad \alpha = \frac{k}{\rho c},$$

k le coefficient de conductivité thermique.

ρ la mase volumique.

c la valeur spécifique de matériari considéré.

Pour que le problème soit mathématiquement bien posé , il faut en général spécifier :

Une condition initiale :

$$\forall x \in \Omega, \quad u(0, x) = u_0(x).$$

Une condition aux limites :

La condition aux limites sur le bord du domaine par exemple de type **Dirichlet** :

$$\forall x \in \partial\Omega, \quad u(t, x) = g \quad / \quad g \text{ étant un fonction fixé .}$$

Si $g = 0$ on dit que les conditions de Dirichlet homogène .

2.2.1.1 L'équation de la chaleur dans un domaine non borné D1

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = f(x, t) & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{C.I.} \end{cases}$$

2.2.1.2 Le problème de la chaleur dans un domaine borné D1

On considère le problème de la chaleur continue sur $[0, 1] \in \mathbb{R}$ avec des conditions aux limites de Dirichlet homogène.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t), & x \in]0, 1[, t \in]0, T[, \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, \dots\dots\dots\text{C.L} & , t \in]0, T[, \\ u(x, 0) = u_0(x), \dots\dots\dots\text{C.I} & , x \in]0, 1[. \end{cases} \quad (2.5)$$

2.2.1.3 Existence et unicité de la solution

Théorème 2.2.1. [15]

Si $u_0 \in C([0, 1], \mathbb{R})$ alors il existe une unique fonction $u \in C^2([0, 1] \times]0, T[, \mathbb{R}) \cap C([0, 1] \times [0, T], \mathbb{R})$ qui vérifie (2.5).

De plus, si $u \in C^\infty([0, 1] \times]0, T[, \mathbb{R})$, ceci est appelé, effet “régularisant” de l'équation de la chaleur.

2.2.1.4 Principe du maximum

Proposition 2.2.1. [15]

Soit u la solution de problème (2.5), sous les hypothèses du théorème 2.2.1 on a :

1. Si $u_0(x) \geq 0$ pour tout $x \in [0, 1]$, alors $u(x, t) \geq 0$, pour tout $t \geq 0$, pour tout $x \in]0, 1[$.
2. $\|u\|_{L^\infty([0,1[\times]0,T[)} \leq \|u_0\|_{L^\infty([0,1])}$.

2.2.1.5 L'équation de la chaleur dans un domaine borné D2

L'équation de la chaleur sur $[0, 1]^2 \in \mathbb{R}^2$ avec des conditions aux limites de Dirichlet homogène.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, y, t) - \alpha \Delta u(x, y, t) = f(x, y, t), & \text{pour } t \in]0, T[\text{ et } (x, y) \in]0, 1[^2, \\ u(x, y, 0) = u_0(x, y), & \text{pour } (x, y) \in]0, 1[^2, \\ u(0, y, t) = u(1, y, t) = 0, & \text{pour } t \in [0, T], \\ u(x, 0, t) = u(x, 1, t) = 0, & \text{pour } t \in [0, T]. \end{cases}$$

2.2.2 Équation d'advection-diffusion

• Le phénomène

Une équation qui décrit des phénomènes physiques dans lesquels des particules, de l'énergie ou des quantités physiques sont transférées dans un système physique par les processus d'advection et de diffusion.

Les phénomènes d'advection- diffusion ont de larges applications, cela se voit dans :

Physique : le mouvement des électrons et des photons...etc.

Génie biomédical : thermorégulation, perfusion et micro-fluidique ...etc.

Chimie : diffusion moléculaire (transfert de masse).

Biologie : bactéries, virus...etc.

Météorologie : vapeur d'eau, la combustion ...etc.

• Modélisation mathématique

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^3$.

L'équation d'advection-diffusion dans le cas le plus généralisé en trois dimensions.

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \gamma \Delta u + \nabla \cdot (\beta u) = f, \quad x \in \Omega, t \in [0, T]. \quad (2.6)$$

- u la variable d'intérêt (concentration de la masse transférée).
- γ constante de la diffusivité pour la masse considérée.
- β la vitesse du fluide porteur selon l'axe considéré.
- f la source.

Pour résoudre cette équation, nous avons besoin une condition initiale et des conditions aux bords :

Condition initiale : $u(x, 0) = u_0(x) \quad / \quad x \in \Omega$ avec $u_0(x)$ donné .

Et des conditions aux bords : $u(x, t) = 0, x \in \partial\Omega, t \in [0, T]$.

2.2.2.1 L'équation d'advection-diffusion D1

On considère le problème d'advection-diffusion continue sur $[0, 1] \in \mathbb{R}$ avec des conditions aux limites de Dirichlet homogène

$$(P_c) \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \gamma \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) + \beta \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = f & x \in [0, 1], t \in [0, T], \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{..... C.I , } x \in]0, 1[, \\ u(0, t) = u(1, t) = 0 & \text{..... C.L , } t \in]0, T[. \end{cases}$$

2.2.2.2 L'équation d'advection-diffusion D2

L'équation d'advection-diffusion sur $[0, 1]^2 \in \mathbb{R}^2$ avec des conditions aux limites de Dirichlet homogène.

$$T > 0 \quad / \quad X = (x, y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2.$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \gamma \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \beta_1 \frac{\partial u}{\partial x} + \beta_2 \frac{\partial u}{\partial y} = f(x, y, t), & \text{pour } t \in]0, T[\text{ et } (x, y) \in]0, 1[^2, \\ u(x, y, 0) = u_0(x, y), & \text{pour } (x, y) \in]0, 1[^2, \\ u(0, y, t) = u(1, y, t) = 0, & \text{pour } t \in [0, T], \\ u(x, 0, t) = u(x, 1, t) = 0, & \text{pour } t \in [0, T]. \end{cases}$$

2.2.3 La différence entre l'équation de la chaleur et advection-diffusion

Dans (2.6) si $\beta = 0$ et $\gamma = \alpha$ l'équation advection diffusion coïncide avec l'équation de la chaleur.

CHAPITRE

3

PRINCIPE DE LA MÉTHODE DES DIFFÉRENCES FINIES

La méthode des différences finies est une techniques de recherche de solution approchée pour les équations aux dérivées partielles qui consiste à résoudre un système de relations (schéma numérique) liant les valeurs des fonctions inconnues en certains points suffisamment proches les uns des autres.

Le principe fondamental de la méthode consiste à la compensation des dérivées dans le problème continu au différences finies sur des points finis et précisés. Cette méthode fait partie de plusieurs travaux des mathématiciens du dix-huitième siècle .

3.1 Maillage

Définition 3.1.1.

On appelle maillage un ensemble des points isolés (nœuds) dans le domaine de définition sur lequel on va appliquer la méthode des différences finies. Le maillage comprend également des points trouvés sur la frontière du domaine (ou au moins proche de cette frontière) afin de pouvoir imposer les conditions initiales ou la condition au limite, avec une précision suffisante. Pour une application définie sur un segment de $\mathbb{R}$, on ajoutera en général les deux extrémités du segment, mais pour un maillage en dimension supérieure nous serons amenés à choisir éventuellement des points du contour du domaine de définition.

Définition 3.1.2.

On appelle pas de maillage la distance entre deux nœuds voisins situés sur une droite parallèle à l'un des axes.

3.2 Différences finies en dimension 1

3.2.1 Discrétisation de domaine

$$\Omega = [a, b] \quad \partial\Omega = \{a, b\}.$$

Le maillage : $x_i = a + i\Delta x$.

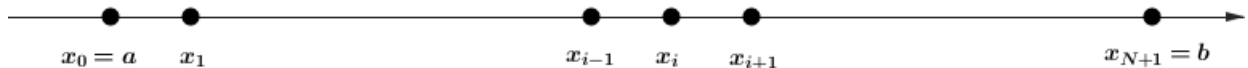


FIGURE 3.1 – Maillage en dimension 1

Notation 3.2.1.

On note u_i la valeur discrète de $u(x)$ au point x_i , soit $u_i = u(x_i)$. De même pour la dérivée de $u(x)$ au noeud x_i on note :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=x_i} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i = u'_i.$$

Cette notation s'utilise de façon équivalente pour toutes les dérivées d'ordre successif de la grandeur u .

3.2.2 Approximation des dérivés premières

La fonction u est connue aux points x_i du domaine d'analyse .

• Différences finies en avant

A l'aide de la formule de Taylor on développe la fonction u jusqu'à l'ordre 2

$$u(x_i + \Delta x) = u(x_i) + \Delta x u'(x_i) + \frac{\Delta x^2}{2!} u''(\xi),$$

ξ abscisse d'un point se trouvant dans le voisinage de x_i . Avec $x_i < \xi < x_i + \Delta x$.

La forme résolu est

$$u'(x_i) = \frac{u(x_i + \Delta x) - u(x_i)}{\Delta x} - \frac{\Delta x}{2} u''(\xi)$$

$$= \frac{u(x_i + \Delta x) - u(x_i)}{\Delta x} + O(\Delta x).$$

$$u'(x_i) \simeq \frac{u(x_i + \Delta x) - u(x_i)}{\Delta x}.$$

Donc

$$u'_i = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i \simeq \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x}.$$

• Différences finies en arrière

A l'aide de la formule de Taylor on développe la fonction u jusqu'à l'ordre 2

$$u(x_i - \Delta x) = u(x_i) - \Delta x u'(x_i) + \frac{\Delta x^2}{2!} u''(\xi),$$

Avec

$$x_i - \Delta x < \xi < x_i \quad .$$

$$u'(x_i) = \frac{u(x_i) - u(x_i - \Delta x)}{\Delta x} + \frac{\Delta x}{2} u''(\xi)$$

$$= \frac{u(x_i) - u(x_i - \Delta x)}{\Delta x} + O(\Delta x).$$

$$u'(x_i) \simeq \frac{u(x_i) - u(x_i - \Delta x)}{\Delta x}.$$

Donc

$$u_i^{(1)} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_i \simeq \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta x}.$$

• Différences finies centrées

A l'aide de la formule de Taylor on développe la fonction u jusqu'à l'ordre 3

$$u(x_i + \Delta x) = u(x_i) + \Delta x u^{(1)}(x_i) + \frac{\Delta x^2}{2!} u^{(2)}(x_i) + \frac{\Delta x^3}{3!} u^{(3)}(\xi_1),$$

$$x_i < \xi_1 < x_i + \Delta x.$$

Et

$$u(x_i - \Delta x) = u(x_i) - \Delta x u^{(1)}(x_i) + \frac{\Delta x^2}{2!} u^{(2)}(x_i) - \frac{\Delta x^3}{3!} u^{(3)}(\xi_2),$$

$$x_i - \Delta x < \xi_2 < x_i \quad .$$

$$u^{(1)}(x_i) = \frac{u(x_i + \Delta x) - u(x_i - \Delta x)}{2\Delta x} + O(\Delta x^2).$$

Donc

$$u_i^{(1)} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_i \simeq \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta x}.$$

3.2.3 Approximation des dérivées secondes

• Différences finies en avant

On écrit le développement de Taylor de $u(x_i + \Delta x)$ et $u(x_i + 2\Delta x)$:

$$u(x_i + \Delta x) = u(x_i) + \Delta x u^{(1)}(x_i) + \frac{\Delta x^2}{2!} u^{(2)}(x_i) + \frac{\Delta x^3}{3!} u^{(3)}(\xi_1),$$

$$x_i < \xi_1 < x_i + \Delta x.$$

Et

$$u(x_i + 2\Delta x) = u(x_i) + 2\Delta x u^{(1)}(x_i) + \frac{4\Delta x^2}{2!} u^{(2)}(x_i) + \frac{8\Delta x^3}{3!} u^{(3)}(\xi_2),$$

$$x_i < \xi_2 < x_i + 2\Delta x.$$

$$u(x_i + 2\Delta x) - 2u(x_i + \Delta x) = -u(x_i) + \Delta x^2 u^{(2)}(x_i) + O(\Delta x^3).$$

$$u^{(2)}(x_i) = \frac{u(x_i + 2\Delta x) - 2u(x_i + \Delta x) + u(x_i)}{\Delta x^2} + O(\Delta x).$$

Alors

$$u^{(2)}(x_i) \simeq \frac{u(x_i + 2\Delta x) - 2u(x_i + \Delta x) + u(x_i)}{\Delta x^2}.$$

Donc

$$u_i^{(2)} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_i \simeq \frac{u_{i+2} - 2u_{i+1} + u_i}{\Delta x^2}.$$

• Différences finies en arrière

On considère le développement de Taylor de $u(x_i - \Delta x)$ et $u(x_i - 2\Delta x)$,

$$u(x_i - \Delta x) = u(x_i) - \Delta x u^{(1)}(x_i) + \frac{\Delta x^2}{2!} u^{(2)}(x_i) - \frac{\Delta x^3}{3!} u^{(3)}(\xi_1),$$

$$x_i - \Delta x < \xi_1 < x_i.$$

$$u(x_i - 2\Delta x) = u(x_i) - 2\Delta x u^{(1)}(x_i) + \frac{4\Delta x^2}{2!} u^{(2)}(x_i) - \frac{8\Delta x^3}{3!} u^{(3)}(\xi_2),$$

$$x_i - 2\Delta x < \xi_2 < x_i.$$

$$2u(x_i - \Delta x) - u(x_i - 2\Delta x) = u(x_i) - \Delta x^2 u^{(2)}(x_i) + O(\Delta x^3),$$

$$u^{(2)}(x_i) = \frac{u(x_i) - 2u(x_i - \Delta x) + u(x_i - 2\Delta x)}{\Delta x^2} + O(\Delta x).$$

Alors

$$u^{(2)}(x_i) \simeq \frac{u(x_i) - 2u(x_i - \Delta x) + u(x_i - 2\Delta x)}{\Delta x^2}.$$

Donc

$$u_i^{(2)} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_i \simeq \frac{u_{i-2} - 2u_{i-1} + u_i}{\Delta x^2}.$$

• **Différences finies centrées**

On considère le développement de Taylor de $u(x_i + \Delta x)$ et $u(x_i - \Delta x)$,

$$u(x_i + \Delta x) = u(x_i) + \Delta x u^{(1)}(x_i) + \frac{\Delta x^2}{2!} u^{(2)}(x_i) + \frac{\Delta x^3}{3!} u^{(3)}(x_i) + \frac{\Delta x^4}{4!} u^{(4)}(\xi_1),$$

$$x_i < \xi_1 < x_i + \Delta x.$$

Et

$$u(x_i - \Delta x) = u(x_i) - \Delta x u^{(1)}(x_i) + \frac{\Delta x^2}{2!} u^{(2)}(x_i) - \frac{\Delta x^3}{3!} u^{(3)}(x_i) + \frac{\Delta x^4}{4!} u^{(4)}(\xi_2),$$

$$x_i - \Delta x < \xi_2 < x_i.$$

$$u(x_i + \Delta x) + u(x_i - \Delta x) = 2u(x_i) + \Delta x^2 u^{(2)}(x_i) + O(\Delta x^4),$$

$$u^{(2)}(x_i) = \frac{u(x_i + \Delta x) + u(x_i - \Delta x) - 2u(x_i)}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2).$$

Alors

$$u^{(2)}(x_i) \simeq \frac{u(x_i + \Delta x) + u(x_i - \Delta x) - 2u(x_i)}{\Delta x^2}.$$

Donc

$$u_i^{(2)} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_i \simeq \frac{u_{i+1} + u_{i-1} - 2u_i}{\Delta x^2}.$$

3.3 Différences finies en dimension 2

3.3.1 Discrétisation de domaine

Dans ce cas on discrétise le domaine rectangulaire par des maillages formés de grilles perpendiculaires $\Omega = [a, b] \times [c, d]$ / soit $(x, y) \in [a, b] \times [c, d]$.

On prend Δx et Δy les pas discrétisation des intervalles $[a, b] \times [c, d]$ respectivement .

• **Discrétisation d'intervalle $[a, b]$**

$\Delta x = \frac{b-a}{n_x}$ (n_x étant le nombre d'intervalle sur $[a, b]$).

$$x_i = a + i\Delta x \quad , \quad i \in \{1, 2, \dots, n_x\}.$$

• **Discrétisation d'intervalle** $[c, d]$

$\Delta y = \frac{d - c}{n_y}$ (n_y étant le nombre d'intervalle sur $[c, d]$).

$$y_j = c + j\Delta y \quad , \quad j \in \{1, 2, \dots, n_y\}.$$

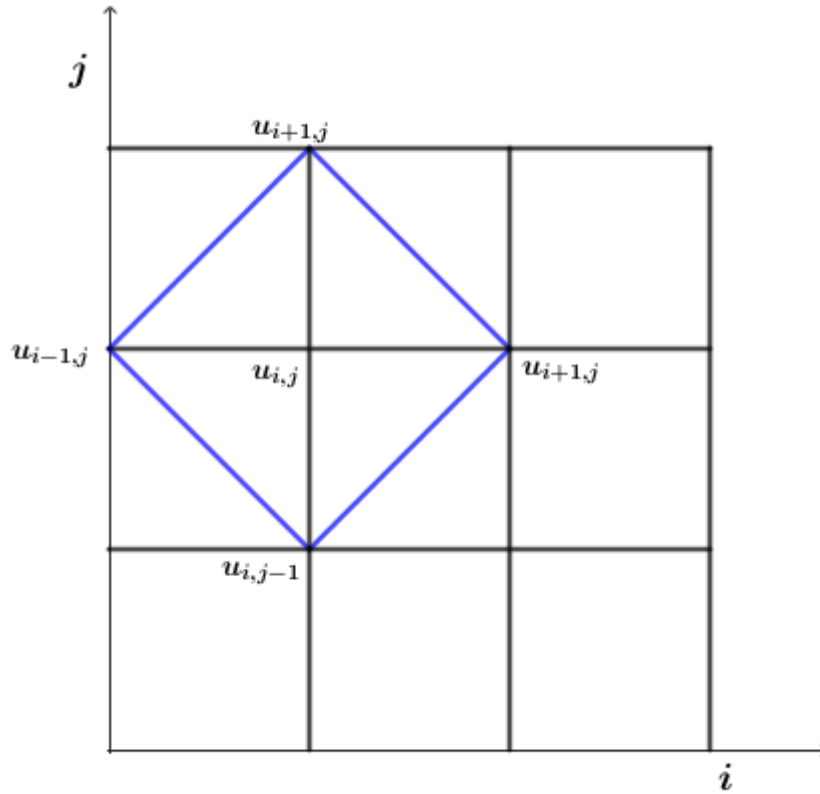


FIGURE 3.2 – Maillage en dimension 2

3.3.2 Approximation des dérivés premières

De la même manière que dans le cas en dimension 1 .

On obtient dimension 2 les approximations suivantes :

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_i, y_j) \simeq \begin{cases} \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta x} & \text{en avant.} \\ \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{\Delta x} & \text{en arrière.} \\ \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2\Delta x} & \text{centrée.} \end{cases}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x_i, y_j) \simeq \begin{cases} \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\Delta y} & \text{en avant.} \\ \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{\Delta y} & \text{en arrière.} \\ \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2\Delta y} & \text{centrée.} \end{cases}$$

3.3.3 Approximation des dérivés secondes

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j) \simeq \begin{cases} \frac{u_{i+2,j} + u_{i,j} - 2u_{i+1,j}}{\Delta x^2} & \text{en avant.} \\ \frac{u_{i,j} + u_{i-2,j} - 2u_{i-1,j}}{\Delta x^2} & \text{en arrière.} \\ \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{\Delta x^2} & \text{centrée.} \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i, y_j) \simeq \begin{cases} \frac{u_{i,j+2} + u_{i,j} - 2u_{i,j+1}}{\Delta y^2} & \text{en avant.} \\ \frac{u_{i,j} + u_{i,j-2} - 2u_{i,j-1}}{\Delta y^2} & \text{en arrière.} \\ \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{\Delta y^2} & \text{centrée.} \end{cases}$$

3.3.4 Discrétisation de temps

La discrétisation consiste à donner un ensemble de points t^n , $n = 0, \dots, M + 1$. de l'intervalle $]0, T[$ et un ensemble de points x_i , $i = 0, \dots, N + 1$ de l'intervalle $[a, b]$.

$$\Delta x = \frac{b - a}{N + 1} \text{ (le pas de discrétisation en espace) .}$$

$$x_i = a + i\Delta x \quad , \quad i = 0, \dots, N + 1. \quad / \quad x_0 = a \quad \text{et} \quad x_{N+1} = b.$$

$$\Delta t = \frac{T - 0}{M + 1} = \frac{T}{M + 1} \text{ (le pas de discrétisation en temps) .}$$

$$t^n = 0 + n\Delta t = n\Delta t \quad , \quad n = 0, \dots, M + 1. \quad / \quad t^0 = 0 \quad \text{et} \quad t^{M+1} = T.$$

Les inconnues discrètes sont notées : u_i^n .

3.3.5 Approximation des les dérivées par rapport au temps

- Schéma d'Euler explicite

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t^n) \simeq \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t}.$$

- Schéma d'Euler implicite

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t^n) \simeq \frac{u_i^n - u_i^{n-1}}{\Delta t}.$$

- Schéma d'Euler centrée

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t^n) \simeq \frac{u_i^{n+1} - u_i^{n-1}}{2\Delta t}.$$

3.4 Le principe de la méthode des différences finies

La méthode des différences finies est basé sur le trois axes suivant :

3.4.1 Consistance du schéma numérique

3.4.1.1 Erreur de consistance

On appelle erreur de consistance est la différence entre le problème exacte et le problème discrétisée :

$$\epsilon_i = Lu - L_h u.$$

L c'est l'opérateur différentiel du (Pc) .

L_h c'est l'opérateur différentiel du (Ph) .

3.4.1.2 Consistance de schéma numérique

On dit que le schéma est consistant si :

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \max_{i=1, \dots, N} |\epsilon_i| = 0.$$

3.4.1.3 Ordre de consistance du schéma

On dit qu'un schéma numérique à N points de discrétisation est d'ordre $p \in \mathbb{N}$ s'il existe une constante $c \in \mathbb{R}$ indépendante de la solution exacte telle que l'erreur de consistance vérifie :

$$\max_{i=1, \dots, N} |\epsilon_i| \leq c \Delta x^p.$$

Remarque 3.4.1.

Le schéma est d'ordre p en espace et d'ordre q en temps si l'erreur de consistance vérifie :

$$\epsilon_i^n = O(\Delta x^p) + O(\Delta t^q).$$

3.4.2 Stabilité du schéma numérique

On s'intéresse à l'étude de stabilité selon la norme de convergence uniforme L^∞ et la norme L^2 (au sens Von Neumann et matricielle).

Définition 3.4.1.

Un schéma des différences finies est dit stable pour les normes L^p s'il existe une constante $k > 0$ indépendante de pas lorsque ces valeurs tendent vers zéro telle que :

$$\|u^n\|_p \leq k \|u^0\|_p, \text{ pour } 1 \leq p \leq \infty, \text{ et } n \geq 0,$$

quelle que soit la donnée initiale u^0 .

Si cette inégalité a lieu sous une condition, on dit que le schéma est **conditionnellement stable**.

3.4.2.1 Stabilité en norme L^∞ ($p = \infty$)

La stabilité en norme L^∞ est très liée avec le principe du maximum discret.

Définition 3.4.2.

Un schéma aux différences finies vérifie le principe du maximum discret si pour tout $n \geq 0$ et tout $1 \leq i \leq N - 1$ on a :

$$\min_{0 \leq i \leq N} (u_i^0) \leq u_i^n \leq \max_{0 \leq i \leq N} (u_i^0),$$

quelle que soit la donnée initiale u^0 .

3.4.2.2 Stabilité en norme L^2 ($p = 2$) (au sens Von Neumann)

La norme L^2 se prête bien à l'étude de la stabilité grâce à l'outil très puissant de l'analyse de Fourier.

Dans le cas des conditions aux limites périodiques on peut utiliser une méthode d'analyse de Fourier, plutôt que de décrire en détails cette méthode, on rappelle une condition nécessaire très simple, dite de Von Neumann.

•Condition de stabilité de von Neumann

On considère une solution discrète particulière sous la forme d'un mode de Fourier.

pour $k \in \mathbb{Z}$,

$$u_j^n = A(k)^n \exp(2i\pi k x_j), \quad \text{avec } x_j = j\Delta x.$$

En injectant cette solution dans la définition du schéma on trouve une formule pour le coefficient d'amplification $A(k) \in \mathbb{C}$.

On appelle condition de stabilité de Von Neumann l'inégalité :

$$|A(k)| \leq 1 \quad \text{pour tout mode } k \in \mathbb{Z}.$$

Si la condition de stabilité de Von Neumann est satisfaite (avec éventuellement des restrictions sur Δx et Δt), alors le schéma est stable pour la norme L^2 , si non il est instable.

3.4.2.3 Stabilité en norme L^2 (Stabilité matricielle)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Pour la forme matricielle de schéma des différences finies est comme ceci :

$$u^{n+1} = Au^n.$$

On dit que c'est stable en norme matricielle L^2 si :

$$\|A\|_2 \leq 1.$$

3.4.2.4 La condition de Courant-Friedrichs-Lewy (C.F.L)

La condition C.F.L porte le nom de trois mathématiciens allemands (Richard Courant, Kurt Friedrichs et Hans Lewy) qui ont publié en 1928 un article concernant l'analyse d'équations aux dérivées partielles et leur approximation numérique. Cet article mettait en évidence une condition nécessaire pour qu'un algorithme de calcul produise une solution cohérente. Cet article très en avance sur son temps a trouvé un intérêt majeur avec le développement des ordinateurs permettant la mise en œuvre de différentes méthodes numériques de résolution consistant à discrétiser le domaine de travail en pas de temps Δt et en pas d'espace Δx .

3.4.3 La convergence

$u(x_i, t^n)$ la solution exacte. / u_i^n la solution numérique.

- L'erreur globale est définie par :

$$e_i^n = \sup_{i,n} |u_i^n - u(x_i, t^n)|.$$

- Un schéma est convergent si l'erreur globale tend vers 0 (ou si la solution numérique u_i^n tend vers la solution exacte $u(x_i, t^n)$) quand les pas de discrétisation tendent vers 0.

Théorème 3.4.1. (*Théorème de Lax*) [6]

Dans un problème au limite linéaire bien posé un schéma numérique consistante, la stabilité est une condition nécessaire et suffisante pour la convergence.

CHAPITRE

4

ÉTUDE DE θ -SCHEMA POUR L'ÉQUATION DE LA CHALEUR DIMENSION 1

Dans ce chapitre, nous étudierons le θ -schéma pour l'équation de la chaleur en dimension 1. Notre étude est basé sur la consistance du θ -schéma, la stabilité en norme L^2 (au sens Von Neumann, matricielle), L^∞ et la convergence.

4.1 Le problème continue en D1

Considérons l'équation de la chaleur en D1 dans $[0, 1] \times [0, T]$.

$$(Pc) \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & x \in]0, 1[, t \in]0, T[, \\ u(0, t) = u(1, t) = 0 & t \in [0, T], \\ u(x, 0) = u_0(x) & x \in [0, 1]. \end{cases}$$

Pour l'existence et l'unicité de la solution voir le deuxième chapitre théorème 2.2.1.

4.2 Le problème discret

4.2.1 La discrétisation

- Discrétisation en temps

$$t^n = n\Delta t \quad , \quad n \in [0, N + 1] \quad / \quad t^0 = 0 \quad \text{et} \quad t^{N+1} = T.$$

- Discrétisation en espace

$$x_i = i\Delta x \quad , \quad i \in [0, M + 1] \quad / \quad x_0 = 0 \quad \text{et} \quad x_{M+1} = 1.$$

4.2.2 θ -schéma pour l'équation de la chaleur en D1

On définit θ -schéma par :

$\theta \in [0, 1]$.

$$\begin{cases} \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = \alpha \theta \frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{(\Delta x)^2} + \alpha(1 - \theta) \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{(\Delta x)^2}, \\ u_0(x_i) = u_i^0 \quad \forall i = 0 \dots M + 1, \\ u_0^n = u_{M+1}^n = 0 \quad \forall n = 0 \dots N + 1. \end{cases} \quad (4.1)$$

- Cas particuliers

► Si $\theta = 0$ le problème (4.1) devient :

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = \alpha \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{(\Delta x)^2}.$$

Alors, on obtient le schéma d'Euler explicite.

► Si $\theta = 1$ le problème (4.1) devient :

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = \alpha \frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{(\Delta x)^2}.$$

Alors, on obtient le schéma d'Euler implicite.

► Si $\theta = \frac{1}{2}$ le problème (4.1) devient :

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = \frac{1}{2}\alpha \left(\frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{(\Delta x)^2} + \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{(\Delta x)^2} \right).$$

Alors, on obtient le schéma de Crank-Nicholson.

Remarque 4.2.1.

Le θ -schéma est un schéma globale où a chaque valeur de θ on obtient un schéma aux différences finies.

4.2.3 Consistance

La consistance de θ -schéma suivant la valeur de θ est donnée par la proposition suivante :

Proposition 4.2.1.

La consistance de θ -schéma est :

1. D'ordre 1 en temps et 2 en espace si $\theta \neq \frac{1}{2}$.
2. D'ordre 2 en temps et en espace si $\theta = \frac{1}{2}$.

Démonstration 4.2.1.

On utiliser la formule de Taylor :

$$\bullet \quad \frac{u(x_i, t^{n+1}) - u(x_i, t^n)}{\Delta t} = \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t^n) + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, t^n) + O(\Delta t^2).$$

Puis

$$\begin{aligned}
\bullet \quad & \frac{u(x_{i+1}, t^n) - 2u(x_i, t^n) + u(x_{i-1}, t^n)}{\Delta x^2} = \frac{1}{\Delta x} \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x_i, t^n) + \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t^n) + \frac{\Delta x^2}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_i, t^n) \right. \\
& \left. + O(\Delta x^3) - \frac{\partial u}{\partial x}(x_i, t^n) + \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t^n) - \frac{\Delta x^2}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_i, t^n) + O(\Delta x^3) \right) \\
& = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t^n) + O(\Delta x^2).
\end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned}
\bullet \quad & \frac{u(x_{i+1}, t^{n+1}) - 2u(x_i, t^{n+1}) + u(x_{i-1}, t^{n+1})}{\Delta x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t^{n+1}) + O(\Delta x^2) \\
& = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t^{n+1}) + O(\Delta x^2) \\
& = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t^n) + \frac{\Delta t}{\alpha} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, t^n) + O(\Delta x^2 + \Delta t^2).
\end{aligned}$$

En remplaçant tous ces termes dans le schéma, on obtient l'erreur de consistance en (x_i, t^n) :

$$\begin{aligned}
\epsilon_i^n &= \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t^n) + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, t^n) - \theta \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t^n) - \Delta t \theta \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, t^n) - \alpha(1 - \theta) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t^n) \\
&+ O(\Delta x^2 + \Delta t^2)
\end{aligned}$$

$$= (1 - \theta) \left(\frac{\partial u}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)(x_i, t^n) + \Delta t \left(\frac{1}{2} - \theta \right) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, t^n) + O(\Delta x^2 + \Delta t^2).$$

$$\text{Dans lequel } \left(\frac{\partial u}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) = 0.$$

$$\epsilon_i^n = \Delta t \left(\frac{1}{2} - \theta \right) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, t^n) + O(\Delta x^2 + \Delta t^2).$$

- Si $\theta \neq \frac{1}{2}$ alors :

$$\max_{i,n} |\epsilon_i^n| = O(\Delta x^2 + \Delta t).$$

.

Alors le schéma est consistant d'ordre 1 en temps et 2 en espace.

- Si $\theta = \frac{1}{2}$ alors :

$$\max_{i,n} |\epsilon_i^n| = O(\Delta x^2 + \Delta t^2).$$

Alors le schéma est consistant d'ordre 2 en temps et en espace.

4.2.4 Stabilité

Bien que tous les normes sont équivalentes car la dimension est finie, nous avons voulu montrer que la condition de la stabilité en norme L^2 et L^∞ , ne pas le même.

4.2.4.1 Stabilité en norme L^∞

Proposition 4.2.2.

Pour $0 \leq \theta \leq 1$ le θ -schéma est L^∞ -stable sous la condition C.F.L $\alpha r \leq \frac{1}{2(1-\theta)}$,

$$r = \frac{\Delta t}{\Delta x^2} .$$

Démonstration 4.2.2.

On a :

$$\begin{aligned} \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} &= \alpha \theta \frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{(\Delta x)^2} + \alpha(1-\theta) \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{(\Delta x)^2}, \\ u_i^{n+1} &= u_i^n + \frac{\Delta t \alpha \theta}{\Delta x^2} (u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}) + \frac{\Delta t \alpha (1-\theta)}{\Delta x^2} (u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n) . \end{aligned}$$

On pose $r = \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$.

$$u_i^{n+1} = u_i^n + r\alpha\theta(u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}) + r\alpha(1-\theta)(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n)$$

$$u_i^{n+1} - r\alpha\theta u_{i+1}^{n+1} + 2r\alpha\theta u_i^{n+1} - r\alpha\theta u_{i-1}^{n+1} = r\alpha(1-\theta)(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n) + u_i^n$$

$$(1 + 2r\alpha\theta)u_i^{n+1} - r\alpha\theta u_{i+1}^{n+1} - r\alpha\theta u_{i-1}^{n+1} = (1 - 2r\alpha(1-\theta))u_i^n + r\alpha(1-\theta)u_{i+1}^n + r\alpha(1-\theta)u_{i-1}^n .$$

Pour $\theta \in [0, 1]$ alors :

$$(1 + 2r\alpha\theta) \geq 0 \quad \text{et} \quad r\alpha\theta \geq 0 \quad \text{et} \quad r\alpha(1-\theta) \geq 0.$$

$$\text{Mais } (1 - 2r\alpha(1-\theta)) \geq 0 \text{ si } r\alpha \leq \frac{1}{2(1-\theta)} ,$$

et on a :

$$(1 + 2r\alpha\theta) + (-r\alpha\theta) + (-r\alpha\theta) = 1,$$

$$(1 - 2r\alpha(1-\theta)) + r\alpha(1-\theta) + r\alpha(1-\theta) = 1.$$

Sous la condition $r\alpha \leq \frac{1}{2(1-\theta)}$ on a :

$$|(1 + 2r\alpha\theta)u_i^{n+1}| = |r\alpha\theta u_{i+1}^{n+1} + r\alpha\theta u_{i-1}^{n+1} + (1 - 2r\alpha(1-\theta))u_i^n + r\alpha(1-\theta)u_{i+1}^n + r\alpha(1-\theta)u_{i-1}^n|$$

$$(1 + 2r\alpha\theta) |u_i^{n+1}| \leq r\alpha\theta |u_{i+1}^{n+1}| + r\alpha\theta |u_{i-1}^{n+1}| + (1 - 2r\alpha(1-\theta)) |u_i^n| + r\alpha(1-\theta) |u_{i+1}^n| + r\alpha(1-\theta) |u_{i-1}^n| .$$

Passant en $\|\cdot\|_\infty$:

$$\begin{aligned} (1 + 2r\alpha\theta) \|u^{n+1}\|_\infty &\leq r\alpha\theta \|u^{n+1}\|_\infty + r\alpha\theta \|u^{n+1}\|_\infty + (1 - 2r\alpha(1-\theta)) \|u^n\|_\infty \\ &+ r\alpha(1-\theta) \|u^n\|_\infty + r\alpha(1-\theta) \|u^n\|_\infty \\ (1 + 2r\alpha\theta) \|u^{n+1}\|_\infty - r\alpha\theta \|u^{n+1}\|_\infty - r\alpha\theta \|u^{n+1}\|_\infty &\leq (1 - 2r\alpha(1-\theta)) \|u^n\|_\infty + \\ r\alpha(1-\theta) \|u^n\|_\infty + r\alpha(1-\theta) \|u^n\|_\infty . \end{aligned}$$

Donc :

$$\|u^{n+1}\|_\infty \leq \|u^n\|_\infty .$$

Par récurrence on obtient :

$$\begin{aligned} \|u^{n+1}\|_\infty &\leq \|u^n\|_\infty \\ &\leq \|u^{n-1}\|_\infty \leq \dots \leq \|u^0\|_\infty . \end{aligned}$$

Donc le θ -schéma est L^∞ -stable sous la condition C.F.L $\alpha r \leq \frac{1}{2(1-\theta)}$, et le principe de maximum discret satisfait.

4.2.4.2 Stabilité en norme L^2

Proposition 4.2.3.

Le θ -schéma est :

1. Inconditionnellement L^2 -stable si $\theta \geq \frac{1}{2}$.
2. L^2 -stable sous la condition C.F.L $\alpha r \leq \frac{1}{2(1-2\theta)}$ si $\theta < \frac{1}{2}$,

$$r = \frac{\Delta t}{\Delta x^2}.$$

Démonstration 4.2.3.

Afin de démontrer cette proposition, nous avons utilisé deux méthodes (stabilité matricielle - stabilité au sens Von Neumann).

• Stabilité matricielle

Nous avons :

$$(1 + 2r\alpha\theta)u_i^{n+1} - r\alpha\theta u_{i+1}^{n+1} - r\alpha\theta u_{i-1}^{n+1} = (1 - 2r\alpha(1-\theta))u_i^n + r\alpha(1-\theta)u_{i+1}^n + r\alpha(1-\theta)u_{i-1}^n .$$

Nous fixons n et faisons varier i , nous obtenons le système linéaire suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} (1 + 2r\alpha\theta)u_1^{n+1} - r\alpha\theta u_2^{n+1} - r\alpha\theta u_0^{n+1} = (1 - 2r\alpha(1-\theta))u_1^n + r\alpha(1-\theta)u_2^n + r\alpha(1-\theta)u_0^n, \\ (1 + 2\alpha\theta r)u_2^{n+1} - \alpha\theta r u_3^{n+1} - \alpha\theta r u_1^{n+1} = (1 - 2\alpha r(1-\theta))u_2^n + \alpha r(1-\theta)u_3^n + \alpha r(1-\theta)u_1^n, \\ (1 + 2r\alpha\theta)u_3^{n+1} - r\alpha\theta u_4^{n+1} - r\alpha\theta u_2^{n+1} = (1 - 2r\alpha(1-\theta))u_3^n + r\alpha(1-\theta)u_4^n + r\alpha(1-\theta)u_2^n, \\ \vdots \\ \vdots \\ (1 + 2\alpha\theta r)u_M^{n+1} - \alpha\theta r u_{M+1}^{n+1} - \alpha\theta r u_{M-1}^{n+1} = (1 - 2\alpha r(1-\theta))u_M^n + \alpha r(1-\theta)u_{M+1}^n + \alpha r(1-\theta)u_{M-1}^n. \end{array} \right.$$

Alors la forme matricielle est : $\Rightarrow Bu^{n+1} = Cu^n$,

$$B = \begin{pmatrix} (1 + 2\alpha\theta r) & -\alpha\theta r & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -\alpha\theta r & (1 + 2\alpha\theta r) & -\alpha\theta r & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & -\alpha\theta r & (1 + 2\alpha\theta r) & -\alpha\theta r \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -\alpha\theta r & (1 + 2\alpha\theta r) \end{pmatrix},$$

et la matrice C est :

$$\begin{pmatrix} (1 - 2\alpha r(1 - \theta)) & \alpha r(1 - \theta) & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \alpha r(1 - \theta) & (1 - 2\alpha r(1 - \theta)) & \alpha r(1 - \theta) & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & \alpha r(1 - \theta) & (1 - 2\alpha r(1 - \theta)) & \alpha r(1 - \theta) \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \alpha r(1 - \theta) & (1 - 2\alpha r(1 - \theta)) \end{pmatrix},$$

et :

$$B = (I_M + \alpha\theta r A) \quad / \quad C = (I_M - \alpha r(1 - \theta)A),$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & \cdots & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad I_M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Le schéma est bien défini si B est inversible .

La matrice B est une somme de deux matrices symétrique et définie positive alors elle est symétrique définie positive et par conséquent elle est inversible .

Et alors le système $Bu^{n+1} = Cu^n$ admet une solution unique.

Donc :

$$u^{n+1} = B^{-1}Cu^n.$$

Pour avoir la stabilité en norme matricielle il faut et il suffit que :

$$\|B^{-1}C\|_2 \leq 1,$$

et nous avons :

$$\|B^{-1}C\|_2 \leq \|B^{-1}\|_2 \|C\|_2.$$

$$\|B^{-1}\|_2 = \rho(B^{-1}) \text{ (car } B \text{ symétrique)} \quad \text{et} \quad \|C\|_2 = \rho(C) \text{ (car } C \text{ symétrique)}.$$

$$\text{Les valeurs propres de } A \text{ est : } \lambda_k = 4\sin^2 \frac{k\pi}{2(M+1)}.$$

$$\rho(B^{-1}) = \max_{1 \leq k \leq M} \left| \frac{1}{1 + 4\alpha\theta r \sin^2 \frac{k\pi}{2(M+1)}} \right|.$$

$$\rho(C) = \max_{1 \leq k \leq M} \left| 1 - 4\alpha r (1 - \theta) \sin^2 \frac{k\pi}{2(M+1)} \right|.$$

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{1 + 4\alpha\theta r \sin^2 \frac{k\pi}{2(M+1)}} \times (1 - 4\alpha r (1 - \theta) \sin^2 \frac{k\pi}{2(M+1)}) \right| &= \left| \frac{1 - 4\alpha r (1 - \theta) \sin^2 \frac{k\pi}{2(M+1)}}{1 + 4\alpha\theta r \sin^2 \frac{k\pi}{2(M+1)}} \right| \\ &= \frac{\left| 1 - 4\alpha r (1 - \theta) \sin^2 \frac{k\pi}{2(M+1)} \right|}{\left| 1 + 4\alpha\theta r \sin^2 \frac{k\pi}{2(M+1)} \right|}. \end{aligned}$$

• Si $\theta \geq \frac{1}{2}$

Alors $1 - \theta \leq \theta$,

$$\left| 1 - 4\alpha r (1 - \theta) \sin^2 \frac{k\pi}{2(M+1)} \right| \leq 1 + 4\alpha r (1 - \theta) \sin^2 \frac{k\pi}{2(M+1)} \leq 1 + 4\alpha\theta r \sin^2 \frac{k\pi}{2(M+1)},$$

et comme :

$$1 + 4\alpha\theta r \sin^2 \frac{k\pi}{2(M+1)} \geq 1.$$

Alors :

$$\frac{\left| 1 - 4\alpha r(1 - \theta) \sin^2 \frac{k\pi}{2(M+1)} \right|}{\left| 1 + 4\alpha \theta r \sin^2 \frac{k\pi}{2(M+1)} \right|} \leq 1.$$

Donc $\rho(B^{-1})\rho(C) \leq 1 \implies \|B^{-1}\|_2 \|C^{-1}\|_2 \leq 1$.

Par récurrence

$$\begin{aligned} \|u^{n+1}\|_2 &\leq \|B^{-1}\|_2 \|C\|_2 \|u^n\|_2 \\ &\leq \|u^n\|_2 \leq \|u^{n-1}\|_2 \leq \dots \leq \|u^0\|_2. \end{aligned}$$

Le θ -schéma est inconditionnellement L^2 -stable si $\theta \geq \frac{1}{2}$.

• Si $\theta < \frac{1}{2}$

$$\frac{\left| 1 - 4\alpha r(1 - \theta) \sin^2 \frac{k\pi}{2(M+1)} \right|}{\left| 1 + 4\alpha \theta r \sin^2 \frac{k\pi}{2(M+1)} \right|} \leq 1.$$

Si et seulement si :

$$1 - 4\alpha r(1 - \theta) \sin^2 \frac{k\pi}{2(M+1)} \leq 1 + 4\alpha \theta r \sin^2 \frac{k\pi}{2(M+1)},$$

et

$$\begin{aligned} 4\alpha r(1 - \theta) \sin^2 \frac{k\pi}{2(M+1)} - 1 &\leq 1 + 4\alpha \theta r \sin^2 \frac{k\pi}{2(M+1)} \\ 4\alpha r \sin^2 \frac{k\pi}{2(M+1)} - 1 &\leq 1 + 8\alpha \theta r \sin^2 \frac{k\pi}{2(M+1)} \\ 4\alpha r \sin^2 \frac{k\pi}{2(M+1)} - 2 &\leq 8\alpha \theta r \sin^2 \frac{k\pi}{2(M+1)} \\ 2\alpha r \sin^2 \frac{k\pi}{2(M+1)} - 1 &\leq 4\alpha \theta r \sin^2 \frac{k\pi}{2(M+1)} \\ 2\alpha r \sin^2 \frac{k\pi}{2(M+1)} (1 - 2\theta) &\leq 1 \\ \alpha r &\leq \frac{1}{2(1 - 2\theta)}. \end{aligned}$$

Donc sous la condition $\alpha r \leq \frac{1}{2(1 - 2\theta)}$.

$$\rho(B^{-1})\rho(C) \leq 1 \implies \|B^{-1}\|_2 \|C^{-1}\|_2 \leq 1.$$

Par récurrence

$$\begin{aligned} \|u^{n+1}\|_2 &\leq \|B^{-1}\|_2 \|C\|_2 \|u^n\|_2 \\ &\leq \|u^n\|_2 \leq \|u^{n-1}\|_2 \leq \dots \leq \|u^0\|_2. \end{aligned}$$

Le θ -schéma est L^2 -stable si $\theta < \frac{1}{2}$ sous la condition C.F.L $\alpha r \leq \frac{1}{2(1-2\theta)}$.

• **Stabilité au sens Von Neumann**

On a :

$$(1 + 2r\alpha\theta)u_i^{n+1} - r\alpha\theta u_{i+1}^{n+1} - r\alpha\theta u_{i-1}^{n+1} = (1 - 2r\alpha(1 - \theta))u_i^n + r\alpha(1 - \theta)u_{i+1}^n + r\alpha(1 - \theta)u_{i-1}^n.$$

La solution discrète particulière $u_j^n = A(k)^n e^{2i\pi k x_j}$.

$$x_{j+1} = x_j + \Delta x \quad \text{et} \quad x_{j-1} = x_j - \Delta x.$$

$$\begin{aligned} (1 + 2r\alpha\theta)A(k)^{n+1}e^{2i\pi k x_j} - r\alpha\theta A(k)^{n+1}e^{2i\pi k x_{j+1}} - r\alpha\theta A(k)^{n+1}e^{2i\pi k x_{j-1}} = \\ (1 - 2r\alpha(1 - \theta))A(k)^n e^{2i\pi k x_j} + r\alpha(1 - \theta)A(k)^n e^{2i\pi k x_{j+1}} + r\alpha(1 - \theta)A(k)^n e^{2i\pi k x_{j-1}}. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} A(k)((1 + 2r\alpha\theta) - r\alpha\theta e^{2i\pi k \Delta x} - r\alpha\theta e^{-2i\pi k \Delta x}) &= 1 - 2r\alpha(1 - \theta) + r\alpha(1 - \theta)e^{2i\pi k \Delta x} \\ &+ r\alpha(1 - \theta)e^{-2i\pi k \Delta x} \end{aligned}$$

$$A(k) = \frac{1 - 2r\alpha(1 - \theta) + r\alpha(1 - \theta)e^{2i\pi k \Delta x} + r\alpha(1 - \theta)e^{-2i\pi k \Delta x}}{1 + 2r\alpha\theta - r\alpha\theta e^{2i\pi k \Delta x} - r\alpha\theta e^{-2i\pi k \Delta x}}$$

$$= \frac{1 - 2r\alpha(1 - \theta) + 2\cos(2\pi k \Delta x)r\alpha(1 - \theta)}{1 + 2r\alpha\theta - 2r\alpha\theta \cos(2\pi k \Delta x)}$$

$$= \frac{1 - 2r\alpha(1 - \theta) + 2r\alpha(1 - \theta)(1 - 2\sin^2(\pi k \Delta x))}{1 + 2r\alpha\theta - 2r\alpha\theta(1 - 2\sin^2(\pi k \Delta x))}$$

$$= \frac{1 - 4r\alpha(1 - \theta)\sin^2(\pi k \Delta x)}{1 + 4r\alpha\theta\sin^2(\pi k \Delta x)}$$

$$|A(k)| = \frac{|1 - 4r\alpha(1 - \theta)\sin^2(\pi k \Delta x)|}{|1 + 4r\alpha\theta\sin^2(\pi k \Delta x)|}.$$

Si La condition de stabilité de Von Neumann ($|A(k)| \leq 1$) satisfaite, on dit que le θ -schéma est L^2 -stable.

• Si $\theta \geq \frac{1}{2}$

Alors $1 - \theta \leq \theta$.

$$\begin{aligned} |1 - 4r\alpha(1 - \theta)\sin^2(\pi k\Delta x)| &\leq 1 + 4r\alpha(1 - \theta)\sin^2(\pi k\Delta x) \\ &\leq 1 + 4r\alpha\theta\sin^2(\pi k\Delta x), \end{aligned}$$

et comme $1 + 4r\alpha\theta\sin^2(\pi k\Delta x) \geq 1$.

On obtient $|A(k)| \leq 1$.

• Si $\theta < \frac{1}{2}$

$|A(k)| \leq 1$ si et seulement si :

$$1 - 4r\alpha(1 - \theta)\sin^2(\pi k\Delta x) \leq 1 + 4r\alpha\theta\sin^2(\pi k\Delta x),$$

et :

$$\begin{aligned} 4r\alpha(1 - \theta)\sin^2(\pi k\Delta x) - 1 &\leq 1 + 4r\alpha\theta\sin^2(\pi k\Delta x) \\ 4r\alpha\sin^2(\pi k\Delta x) - 4r\alpha\theta\sin^2(\pi k\Delta x) - 1 &\leq 1 + 4r\alpha\theta\sin^2(\pi k\Delta x) \\ 4r\alpha\sin^2(\pi k\Delta x) - 2 &\leq 8r\alpha\theta\sin^2(\pi k\Delta x) \\ 2r\alpha\sin^2(\pi k\Delta x) - 1 &\leq 4r\alpha\theta\sin^2(\pi k\Delta x) \\ 2r\alpha\sin^2(\pi k\Delta x)(1 - 2\theta) &\leq 1. \end{aligned}$$

Alors :

$$2r\alpha(1 - 2\theta) \leq 1.$$

$$r\alpha \leq \frac{1}{2(1 - 2\theta)} \dots\dots \text{C.F.L}$$

Alors le θ -schéma est L^2 -stable (au sens Von Neumann) sous la condition C.F.L

$$r\alpha \leq \frac{1}{2(1 - 2\theta)} \text{ si } \theta < \frac{1}{2}.$$

4.2.5 Convergence

D'après le théorème de Lax on obtient les resultats de convergence suivant :

• Si $\frac{1}{2} \leq \theta \leq 1$ le θ -schéma est consistant et inconditionnellement L^2 -stable donc elle est convergente.

• Si $0 \leq \theta < \frac{1}{2}$ le θ -schéma est consistant et L^2 -stable sous la condition C.F.L

$\alpha r \leq \frac{1}{2(1-2\theta)}$ donc elle convergente sous la même condition.

• Si $0 \leq \theta \leq 1$ le θ -schéma est consistant et L^∞ -stable sous la condition C.F.L $\alpha r \leq \frac{1}{2(1-\theta)}$ donc elle convergente sous la même condition.

4.2.5.1 Estimation d'erreur

On a :

u_i^n la solution numérique et $u(x_i, t^n)$ la solution exacte.

$$\begin{aligned} \epsilon_i^n &= \frac{u(x_i, t^{n+1}) - u(x_i, t^n)}{\Delta t} - \alpha(1-\theta) \left(\frac{u(x_{i+1}, t^n) - 2u(x_i, t^n) + u(x_{i-1}, t^n)}{\Delta x^2} \right) \\ &\quad - \alpha\theta \left(\frac{u(x_{i+1}, t^{n+1}) - 2u(x_i, t^{n+1}) + u(x_{i-1}, t^{n+1})}{\Delta x^2} \right), \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$\text{et} \quad \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} - \alpha(1-\theta) \left(\frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2} \right) - \alpha\theta \left(\frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2} \right) = 0. \quad (4.2)$$

Alors par (4.2)-(4.1)

$$\begin{aligned} &\frac{e_i^{n+1} - e_i^n}{\Delta t} - \alpha(1-\theta) \left(\frac{e_{i+1}^n - 2e_i^n + e_{i-1}^n}{\Delta x^2} \right) - \alpha\theta \left(\frac{e_{i+1}^{n+1} - 2e_i^{n+1} + e_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2} \right) + \epsilon_i^n = 0 \\ e_i^{n+1} &= e_i^n + \alpha(1-\theta) \frac{\Delta t}{\Delta x^2} (e_{i+1}^n - 2e_i^n + e_{i-1}^n) + \alpha\theta \frac{\Delta t}{\Delta x^2} (e_{i+1}^{n+1} - 2e_i^{n+1} + e_{i-1}^{n+1}) - \Delta t \epsilon_i^n. \end{aligned}$$

On pose $r = \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$.

$$(1 + 2\alpha\theta r)e_i^{n+1} = (1 - 2\alpha r(1-\theta))e_i^n + \alpha r(1-\theta)e_{i+1}^n + \alpha r(1-\theta)e_{i-1}^n + \alpha\theta r e_{i+1}^{n+1} + \alpha\theta r e_{i-1}^{n+1} - \Delta t \epsilon_i^n.$$

Car $\theta \in [0, 1]$ alors :

$$(1 + 2\alpha\theta r) \geq 0 \text{ et } \alpha r(1-\theta) \geq 0 \text{ et } \alpha\theta r \geq 0,$$

$$(1 - 2\alpha r(1 - \theta)) \geq 0 \text{ si } \alpha r \leq \frac{1}{2(1 - \theta)}.$$

On a supposé $\alpha r \leq \frac{1}{2(1 - \theta)}$ d'où l'estimation :

$$(1 + 2\alpha\theta r)|e_i^{n+1}| \leq (1 - 2\alpha r(1 - \theta))|e_i^n| + \alpha r(1 - \theta)|e_{i+1}^n| + \alpha r(1 - \theta)|e_{i-1}^n| \\ + \alpha\theta r|e_{i+1}^{n+1}| + \alpha\theta r|e_{i-1}^{n+1}| + \Delta t|\epsilon_i^n|.$$

$$(1 + 2\alpha\theta r)|e_i^{n+1}| \leq (1 - 2\alpha r(1 - \theta))\|e^n\|_\infty + \alpha r(1 - \theta)\|e^n\|_\infty + \alpha r(1 - \theta)\|e^n\|_\infty \\ + \alpha\theta r\|e^{n+1}\|_\infty + \alpha\theta r\|e^{n+1}\|_\infty + \Delta t\|\epsilon^n\|_\infty.$$

$$(1 + 2\alpha\theta r)\|e^{n+1}\|_\infty \leq (1 - 2\alpha r(1 - \theta))\|e^n\|_\infty + \alpha r(1 - \theta)\|e^n\|_\infty + \alpha r(1 - \theta)\|e^n\|_\infty + \\ \alpha\theta r\|e^{n+1}\|_\infty + \alpha\theta r\|e^{n+1}\|_\infty + \Delta t(c_1\Delta t(\frac{1}{2} - \theta) + c_2(\Delta t^2 + \Delta x^2)) \quad / \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

$$\|e^{n+1}\|_\infty \leq \|e^n\|_\infty + \Delta t(c_1\Delta t(\frac{1}{2} - \theta) + c_2(\Delta t^2 + \Delta x^2)) \\ \leq \|e^0\|_\infty + T(c_1\Delta t(\frac{1}{2} - \theta) + c_2(\Delta t^2 + \Delta x^2)) \quad / \quad \|e^0\|_\infty = 0, \\ = T(c_1\Delta t(\frac{1}{2} - \theta) + c_2(\Delta t^2 + \Delta x^2)).$$

Donc le θ -schéma est converge sous la condition $\alpha r \leq \frac{1}{2(1 - \theta)}$C.F.L

4.3 Résumé des résultats obtenus (tableau)

Nous résumons l'étude de θ -schéma pour l'équation de la chaleur en D1 dans le tableau suivant :

L'intervalle de θ	$0 \leq \theta < \frac{1}{2}$	$\theta = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} < \theta \leq 1$
Erreur de consistance	$O(\Delta x^2 + \Delta t)$	$O(\Delta x^2 + \Delta t^2)$	$O(\Delta x^2 + \Delta t)$
Stabilité en norme L^2	Stable sous C.F.L $\alpha r \leq \frac{1}{2(1 - 2\theta)}$	Inconditionnellement stable	
Convergence	Convergente sous C.F.L $\alpha r \leq \frac{1}{2(1 - 2\theta)}$	Convergente	
Stabilité en norme L^∞	Stable sous la condition C.F.L $\alpha r \leq \frac{1}{2(1 - \theta)}$		
Convergence	Convergente sous C.F.L $\alpha r \leq \frac{1}{2(1 - \theta)}$		

CHAPITRE

5

ÉTUDE DE θ -SCHEMA POUR L'ÉQUATION DE LA CHALEUR D2

Dans ce chapitre, nous faisons la même étude qu'au précédent chapitre, mais cette fois pour l'équation de la chaleur en dimension 2, en suivant le même démarche.

5.1 Le problème continue en D2

L'équation de la chaleur dans $[0, 1]^2 \subset \mathbb{R}^2$ avec des conditions aux limites de Dirichlet homogène.

$$(P_C) \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, y, t) - \alpha \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y, t) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y, t) \right) = 0, & \text{pour } t \in]0, T[\text{ et } (x, y) \in]0, 1[^2, \\ u(x, y, 0) = u_0(x, y), & \text{pour } (x, y) \in]0, 1[^2, \\ u(0, y, t) = u(1, y, t) = 0, & \text{pour } t \in [0, T], \\ u(x, 0, t) = u(x, 1, t) = 0, & \text{pour } t \in [0, T]. \end{cases}$$

Pour l'existence et l'unicité de la solution le théorème 2.2.1 dans le deuxième chapitre est valable pour notre problème dans $[0, 1]^2 \subset \mathbb{R}^2$.

5.2 Le problème discret

5.2.1 La discrétisation

- Discrétisation en temps

$$t^n = n\Delta t \quad , \quad n \in [0, N+1] \quad / \quad t^0 = 0 \quad \text{et} \quad t^{N+1} = T.$$

- Discrétisation en espace

$$\begin{aligned} x_i = i\Delta x \quad , \quad i \in [0, M+1] \quad / \quad x_0 = 0 \quad \text{et} \quad x_{M+1} = 1. \\ y_j = j\Delta y \quad , \quad j \in [0, l+1] \quad / \quad y_0 = 0 \quad \text{et} \quad y_{l+1} = 1. \end{aligned}$$

5.2.2 θ -schéma pour l'équation de la chaleur en D2

On définit θ -schéma par : $\theta \in [0, 1]$.

$$\begin{cases} \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\Delta t} = \alpha \theta \left(\frac{u_{i+1,j}^{n+1} - 2u_{i,j}^{n+1} + u_{i-1,j}^{n+1}}{(\Delta x)^2} + \frac{u_{i,j+1}^{n+1} - 2u_{i,j}^{n+1} + u_{i,j-1}^{n+1}}{(\Delta y)^2} \right) \\ \quad + \alpha(1 - \theta) \left(\frac{u_{i+1,j}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n}{(\Delta x)^2} + \frac{u_{i,j+1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n}{(\Delta y)^2} \right), \\ u_0(x_i, y_j) = u_{i,j}^0 \quad \forall i = 0 \dots M+1, \forall j = 0 \dots l+1, \\ u_{i,0}^n = u_{i,l+1}^n = u_{0,j}^n = u_{M+1,j}^n = 0 \quad \forall n = 0 \dots N+1. \end{cases} \quad (5.1)$$

• **Cas particuliers**

► Si $\theta = 0$ le problème (5.1) devient :

$$\frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\Delta t} = \alpha \frac{u_{i+1,j}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n}{(\Delta x)^2} + \alpha \frac{u_{i,j+1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n}{(\Delta y)^2} .$$

Alors, on obtient le schéma d'Euler explicite.

► Si $\theta = 1$ le problème (5.1) devient :

$$\frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\Delta t} = \alpha \frac{u_{i+1,j}^{n+1} - 2u_{i,j}^{n+1} + u_{i-1,j}^{n+1}}{(\Delta x)^2} + \alpha \frac{u_{i,j+1}^{n+1} - 2u_{i,j}^{n+1} + u_{i,j-1}^{n+1}}{(\Delta y)^2} .$$

Alors, on obtient le schéma d'Euler implicite

► Si $\theta = \frac{1}{2}$ le problème (5.1) devient :

$$\begin{aligned} \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\Delta t} &= \frac{1}{2}\alpha \left(\frac{u_{i+1,j}^{n+1} - 2u_{i,j}^{n+1} + u_{i-1,j}^{n+1}}{(\Delta x)^2} + \frac{u_{i,j+1}^{n+1} - 2u_{i,j}^{n+1} + u_{i,j-1}^{n+1}}{(\Delta y)^2} \right) \\ &+ \frac{1}{2}\alpha \left(\frac{u_{i+1,j}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n}{(\Delta x)^2} + \frac{u_{i,j+1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n}{(\Delta y)^2} \right). \end{aligned}$$

Alors, on obtient le schéma de Crank-Nicholson.

Remarque 5.2.1.

Le θ -schéma est un schéma globale où a chaque valeur de θ on obtient un schéma aux différences finies.

5.2.3 Consistance

La consistance de θ -schéma suivant la valeur de θ est donnée par la proposition suivante :

Proposition 5.2.1.

La consistane de θ -schéma :

1. D'ordre 1 en temps et d'ordre 2 en espace si $\theta \neq \frac{1}{2}$.
2. D'ordre 2 en temps et d'ordre 2 en espace si $\theta = \frac{1}{2}$.

Démonstration 5.2.1.

On utilise la formule de Taylor :

- $$\frac{u(x_i, y_j, t^{n+1}) - u(x_i, y_j, t^n)}{\Delta t} = \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, y_j, t^n) + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, y_j, t^n) + O(\Delta t^2).$$

Puis

- $$\frac{u(x_{i+1}, y_j, t^{n+1}) - 2u(x_i, y_j, t^{n+1}) + u(x_{i-1}, y_j, t^{n+1})}{\Delta x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j, t^{n+1}) + O(\Delta x^2)$$

$$= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j, t^n) + \Delta t \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2}(x_i, y_j, t^n) + O(\Delta t^2 + \Delta x^2).$$

- $$\frac{u(x_i, y_{j+1}, t^{n+1}) - 2u(x_i, y_j, t^{n+1}) + u(x_i, y_{j-1}, t^{n+1})}{\Delta y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i, y_j, t^{n+1}) + O(\Delta y^2)$$

$$= \frac{1}{\alpha} \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, y_j, t^{n+1}) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j, t^{n+1}) + O(\Delta y^2)$$

$$= \frac{1}{\alpha} \left(\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, y_j, t^n) + \Delta t \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, y_j, t^n) + O(\Delta t^2) \right) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j, t^n) - \Delta t \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2}(x_i, y_j, t^n)$$

$$+ O(\Delta t^2 + \Delta y^2).$$

- $$\frac{u(x_{i+1}, y_j, t^n) - 2u(x_i, y_j, t^n) + u(x_{i-1}, y_j, t^n)}{\Delta x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j, t^n) + O(\Delta x^2).$$

- $$\frac{u(x_i, y_{j+1}, t^n) - 2u(x_i, y_j, t^n) + u(x_i, y_{j-1}, t^n)}{\Delta y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i, y_j, t^n) + O(\Delta y^2).$$

En remplaçant tous ces termes dans le schéma, on obtient l'erreur de consistance :

$$\begin{aligned} \epsilon_{i,j}^n &= \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, y_j, t^n) + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, y_j, t^n) - \alpha \theta \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j, t^n) + \Delta t \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2}(x_i, y_j, t^n) + \frac{1}{\alpha} \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, y_j, t^n) \right. \\ &+ \frac{\Delta t}{\alpha} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, y_j, t^n) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j, t^n) - \Delta t \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2}(x_i, y_j, t^n) \left. \right) - \alpha(1 - \theta) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j, t^n) \right. \\ &+ \left. \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i, y_j, t^n) \right) + O(\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta t^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, y_j, t^n) + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, y_j, t^n) - \theta \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, y_j, t^n) - \theta \Delta t \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, y_j, t^n) - \alpha(1-\theta) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j, t^n) \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i, y_j, t^n) \right) + O(\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta t^2) \\
&= (1-\theta) \left(\frac{\partial u}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)(x_i, y_j, t^n) + \Delta t \left(\frac{1}{2} - \theta \right) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, y_j, t^n) + O(\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta t^2).
\end{aligned}$$

Dans lequel :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = 0.$$

$$\epsilon_{i,j}^n = \Delta t \left(\frac{1}{2} - \theta \right) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, y_j, t^n) + O(\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta t^2).$$

• Si $\theta \neq \frac{1}{2}$ alors

$$\max_{i,j,n} |\epsilon_{i,j}^n| = O(\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta t).$$

.

Alors le schéma est consistant d'ordre 1 en temps et 2 en x et en y .

• Si $\theta = \frac{1}{2}$ alors

$$\max_{i,j,n} |\epsilon_{i,j}^n| = O(\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta t^2).$$

.

Alors le schéma est consistant d'ordre 2 en temps et d'ordre 2 en x et en y .

5.2.4 Stabilité

Bien que tous les normes sont équivalentes car la dimension est finie, nous avons voulu montrer que la condition de la stabilité en norme L^2 et L^∞ , ne pas le même.

5.2.4.1 Stabilité en norme L^∞

Proposition 5.2.2.

Pour $0 \leq \theta \leq 1$ le θ -schéma est L^∞ -stable sous la condition C.F.L :

$$\alpha \Delta t \left(\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} \right) \leq \frac{1}{2(1-\theta)}.$$

Démonstration 5.2.2.

On a :

$$\begin{aligned} \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\Delta t} &= \alpha \theta \left(\frac{u_{i+1,j}^{n+1} - 2u_{i,j}^{n+1} + u_{i-1,j}^{n+1}}{(\Delta x)^2} + \frac{u_{i,j+1}^{n+1} - 2u_{i,j}^{n+1} + u_{i,j-1}^{n+1}}{(\Delta y)^2} \right) + \alpha(1-\theta) \left(\frac{u_{i+1,j}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n}{(\Delta x)^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{u_{i,j+1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n}{(\Delta y)^2} \right) \\ u_{i,j}^{n+1} &= u_{i,j}^n + \Delta t \alpha \theta \left(\frac{u_{i+1,j}^{n+1} - 2u_{i,j}^{n+1} + u_{i-1,j}^{n+1}}{(\Delta x)^2} + \frac{u_{i,j+1}^{n+1} - 2u_{i,j}^{n+1} + u_{i,j-1}^{n+1}}{(\Delta y)^2} \right) \\ &\quad + \Delta t \alpha (1-\theta) \left(\frac{u_{i+1,j}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n}{(\Delta x)^2} + \frac{u_{i,j+1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n}{(\Delta y)^2} \right). \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} &(1 + 2\alpha\theta \frac{\Delta t}{\Delta x^2} + 2\alpha\theta \frac{\Delta t}{\Delta y^2})u_{i,j}^{n+1} - \alpha\theta \frac{\Delta t}{\Delta x^2}u_{i+1,j}^{n+1} - \alpha\theta \frac{\Delta t}{\Delta x^2}u_{i-1,j}^{n+1} - \alpha\theta \frac{\Delta t}{\Delta y^2}u_{i,j+1}^{n+1} - \alpha\theta \frac{\Delta t}{\Delta y^2}u_{i,j-1}^{n+1} \\ &= (1 - 2\alpha(1-\theta) \frac{\Delta t}{\Delta x^2} - 2\alpha(1-\theta) \frac{\Delta t}{\Delta y^2})u_{i,j}^n + \alpha(1-\theta) \frac{\Delta t}{\Delta x^2}u_{i+1,j}^n + \alpha(1-\theta) \frac{\Delta t}{\Delta x^2}u_{i-1,j}^n \\ &\quad + \alpha(1-\theta) \frac{\Delta t}{\Delta y^2}u_{i,j+1}^n + \alpha(1-\theta) \frac{\Delta t}{\Delta y^2}u_{i,j-1}^n. \\ \text{Pour } \theta \in [0, 1] \text{ alors } &(1 + 2\alpha\theta \frac{\Delta t}{\Delta x^2} + 2\alpha\theta \frac{\Delta t}{\Delta y^2}) \geq 0 \quad \text{et} \quad \alpha\theta \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \geq 0 \quad \text{et} \\ &\alpha\theta \frac{\Delta t}{\Delta y^2} \geq 0 \quad \text{et} \quad \alpha(1-\theta) \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \geq 0 \quad \text{et} \quad \alpha(1-\theta) \frac{\Delta t}{\Delta y^2} \geq 0. \\ \text{Mais } &(1 - 2\alpha(1-\theta) \frac{\Delta t}{\Delta x^2} - 2\alpha(1-\theta) \frac{\Delta t}{\Delta y^2}) \geq 0 \quad \text{si} \quad 2\alpha(1-\theta)\Delta t \left(\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} \right) \leq 1 \end{aligned}$$

$$\alpha\Delta t \left(\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} \right) \leq \frac{1}{2(1-\theta)},$$

et on a :

$$\begin{aligned} &(1 + 2\alpha\theta \frac{\Delta t}{\Delta x^2} + 2\alpha\theta \frac{\Delta t}{\Delta y^2}) + (-\alpha\theta \frac{\Delta t}{\Delta x^2}) + (-\alpha\theta \frac{\Delta t}{\Delta x^2}) + (-\alpha\theta \frac{\Delta t}{\Delta y^2}) + (-\alpha\theta \frac{\Delta t}{\Delta y^2}) = 1, \\ \text{et :} & \\ &(1 - 2\alpha(1-\theta) \frac{\Delta t}{\Delta x^2} - 2\alpha(1-\theta) \frac{\Delta t}{\Delta y^2}) + \alpha(1-\theta) \frac{\Delta t}{\Delta x^2} + \alpha(1-\theta) \frac{\Delta t}{\Delta x^2} + \alpha(1-\theta) \frac{\Delta t}{\Delta y^2} \\ &\quad + \alpha(1-\theta) \frac{\Delta t}{\Delta y^2} = 1. \end{aligned}$$

Donc sous la condition : $\alpha\Delta t(\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2}) \leq \frac{1}{2(1-\theta)}$,

$$\begin{aligned} |(1 + 2\alpha\theta\frac{\Delta t}{\Delta x^2} + 2\alpha\theta\frac{\Delta t}{\Delta y^2})u_{i,j}^{n+1}| &= |\alpha\theta\frac{\Delta t}{\Delta x^2}u_{i+1,j}^{n+1} + \alpha\theta\frac{\Delta t}{\Delta x^2}u_{i-1,j}^{n+1} + \alpha\theta\frac{\Delta t}{\Delta y^2}u_{i,j+1}^{n+1} + \alpha\theta\frac{\Delta t}{\Delta y^2}u_{i,j-1}^{n+1} \\ &+ (1 - 2\alpha(1-\theta)\frac{\Delta t}{\Delta x^2} - 2\alpha(1-\theta)\frac{\Delta t}{\Delta y^2})u_{i,j}^n + \alpha(1-\theta)\frac{\Delta t}{\Delta x^2}u_{i+1,j}^n + \alpha(1-\theta)\frac{\Delta t}{\Delta x^2}u_{i-1,j}^n \\ &+ \alpha(1-\theta)\frac{\Delta t}{\Delta y^2}u_{i,j+1}^n + \alpha(1-\theta)\frac{\Delta t}{\Delta y^2}u_{i,j-1}^n|. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1 + 2\alpha\theta\frac{\Delta t}{\Delta x^2} + 2\alpha\theta\frac{\Delta t}{\Delta y^2})|u_{i,j}^{n+1}| &\leq \alpha\theta\frac{\Delta t}{\Delta x^2}|u_{i+1,j}^{n+1}| + \alpha\theta\frac{\Delta t}{\Delta x^2}|u_{i-1,j}^{n+1}| + \alpha\theta\frac{\Delta t}{\Delta y^2}|u_{i,j+1}^{n+1}| \\ &+ \alpha\theta\frac{\Delta t}{\Delta y^2}|u_{i,j-1}^{n+1}| + (1 - 2\alpha(1-\theta)\frac{\Delta t}{\Delta x^2} - 2\alpha(1-\theta)\frac{\Delta t}{\Delta y^2})|u_{i,j}^n| + \alpha(1-\theta)\frac{\Delta t}{\Delta x^2}|u_{i+1,j}^n| \\ &+ \alpha(1-\theta)\frac{\Delta t}{\Delta x^2}|u_{i-1,j}^n| + \alpha(1-\theta)\frac{\Delta t}{\Delta y^2}|u_{i,j+1}^n| + \alpha(1-\theta)\frac{\Delta t}{\Delta y^2}|u_{i,j-1}^n|. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1 + 2\alpha\theta\frac{\Delta t}{\Delta x^2} + 2\alpha\theta\frac{\Delta t}{\Delta y^2})|u_{i,j}^{n+1}| &- \alpha\theta\frac{\Delta t}{\Delta x^2}|u_{i+1,j}^{n+1}| - \alpha\theta\frac{\Delta t}{\Delta x^2}|u_{i-1,j}^{n+1}| - \alpha\theta\frac{\Delta t}{\Delta y^2}|u_{i,j+1}^{n+1}| \\ &- \alpha\theta\frac{\Delta t}{\Delta y^2}|u_{i,j-1}^{n+1}| \leq (1 - 2\alpha(1-\theta)\frac{\Delta t}{\Delta x^2} - 2\alpha(1-\theta)\frac{\Delta t}{\Delta y^2})|u_{i,j}^n| + \alpha(1-\theta)\frac{\Delta t}{\Delta x^2}|u_{i+1,j}^n| \\ &+ \alpha(1-\theta)\frac{\Delta t}{\Delta x^2}|u_{i-1,j}^n| + \alpha(1-\theta)\frac{\Delta t}{\Delta y^2}|u_{i,j+1}^n| + \alpha(1-\theta)\frac{\Delta t}{\Delta y^2}|u_{i,j-1}^n|. \end{aligned}$$

Passant en $\|\cdot\|_\infty$:

$$\begin{aligned} (1 + 2\alpha\theta\frac{\Delta t}{\Delta x^2} + 2\alpha\theta\frac{\Delta t}{\Delta y^2})\|u^{n+1}\|_\infty &- \alpha\theta\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\|u^{n+1}\|_\infty - \alpha\theta\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\|u^{n+1}\|_\infty - \alpha\theta\frac{\Delta t}{\Delta y^2}\|u^{n+1}\|_\infty \\ &- \alpha\theta\frac{\Delta t}{\Delta y^2}\|u^{n+1}\|_\infty \leq (1 - 2\alpha(1-\theta)\frac{\Delta t}{\Delta x^2} - 2\alpha(1-\theta)\frac{\Delta t}{\Delta y^2})\|u^n\|_\infty + \alpha(1-\theta)\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\|u^n\|_\infty \\ &+ \alpha(1-\theta)\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\|u^n\|_\infty + \alpha(1-\theta)\frac{\Delta t}{\Delta y^2}\|u^n\|_\infty + \alpha(1-\theta)\frac{\Delta t}{\Delta y^2}\|u^n\|_\infty. \end{aligned}$$

Donc :

$$\|u^{n+1}\|_\infty \leq \|u^n\|_\infty.$$

Par récurrence on obtient :

$$\begin{aligned} \|u^{n+1}\|_\infty &\leq \|u^n\|_\infty \\ &\leq \|u^{n-1}\|_\infty \leq \dots \leq \|u^0\|_\infty. \end{aligned}$$

Pour $0 \leq \theta \leq 1$ le θ -schéma L^∞ -stable sous la condition C.F.L :

$$\alpha \Delta t \left(\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} \right) \leq \frac{1}{2(1-\theta)} \quad ,$$

et le principe de maximum discrét satisfait.

5.2.4.2 Stabilité en norme L^2

Proposition 5.2.3.

Le θ -schéma est :

1. Inconditionnellement L^2 -stable si $\theta \geq \frac{1}{2}$.
2. L^2 -stable sous la condition C.F.L $\alpha \Delta t \left(\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} \right) \leq \frac{1}{2(1-2\theta)}$ si $\theta < \frac{1}{2}$.

Démonstration 5.2.3.

Afin de démontrer cette proposition, nous avons utilisé deux méthodes (stabilité matricielle - stabilité au sens Von Neumann).

• Stabilité matricielle

Nous avons :

$$\begin{aligned} & (1 + 2\alpha\theta \frac{\Delta t}{\Delta x^2} + 2\alpha\theta \frac{\Delta t}{\Delta y^2}) u_{i,j}^{n+1} - \alpha\theta \frac{\Delta t}{\Delta x^2} u_{i+1,j}^{n+1} - \alpha\theta \frac{\Delta t}{\Delta x^2} u_{i-1,j}^{n+1} - \alpha\theta \frac{\Delta t}{\Delta y^2} u_{i,j+1}^{n+1} - \alpha\theta \frac{\Delta t}{\Delta y^2} u_{i,j-1}^{n+1} \\ &= (1 - 2\alpha(1-\theta) \frac{\Delta t}{\Delta x^2} - 2\alpha(1-\theta) \frac{\Delta t}{\Delta y^2}) u_{i,j}^n + \alpha(1-\theta) \frac{\Delta t}{\Delta x^2} u_{i+1,j}^n + \alpha(1-\theta) \frac{\Delta t}{\Delta x^2} u_{i-1,j}^n \\ &+ \alpha(1-\theta) \frac{\Delta t}{\Delta y^2} u_{i,j+1}^n + \alpha(1-\theta) \frac{\Delta t}{\Delta y^2} u_{i,j-1}^n . \end{aligned}$$

Nous fixons n et faisons varier i et j , nous obtenons le système linéaire suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l}
\text{Pour } i = 1 \text{ et } j = 1 \\
(1 + 2\alpha\theta \frac{\Delta t}{\Delta x^2} + 2\alpha\theta \frac{\Delta t}{\Delta y^2})u_{1,1}^{n+1} - \alpha\theta \frac{\Delta t}{\Delta x^2}u_{2,1}^{n+1} - \alpha\theta \frac{\Delta t}{\Delta x^2}u_{0,1}^{n+1} - \alpha\theta \frac{\Delta t}{\Delta y^2}u_{1,2}^{n+1} - \alpha\theta \frac{\Delta t}{\Delta y^2}u_{1,0}^{n+1} \\
= (1 - 2\alpha(1 - \theta) \frac{\Delta t}{\Delta x^2} - 2\alpha(1 - \theta) \frac{\Delta t}{\Delta y^2})u_{1,1}^n + \alpha(1 - \theta) \frac{\Delta t}{\Delta x^2}u_{2,1}^n + \alpha(1 - \theta) \frac{\Delta t}{\Delta x^2}u_{0,1}^n \\
+ \alpha(1 - \theta) \frac{\Delta t}{\Delta y^2}u_{1,2}^n + \alpha(1 - \theta) \frac{\Delta t}{\Delta y^2}u_{1,0}^n, \\
\text{Pour } i = 2 \text{ et } j = 1 \\
(1 + 2\alpha\theta \frac{\Delta t}{\Delta x^2} + 2\alpha\theta \frac{\Delta t}{\Delta y^2})u_{2,1}^{n+1} - \alpha\theta \frac{\Delta t}{\Delta x^2}u_{3,1}^{n+1} - \alpha\theta \frac{\Delta t}{\Delta x^2}u_{1,1}^{n+1} - \alpha\theta \frac{\Delta t}{\Delta y^2}u_{2,2}^{n+1} - \alpha\theta \frac{\Delta t}{\Delta y^2}u_{2,0}^{n+1} \\
(1 - 2\alpha(1 - \theta) \frac{\Delta t}{\Delta x^2} - 2\alpha(1 - \theta) \frac{\Delta t}{\Delta y^2})u_{2,1}^n + \alpha(1 - \theta) \frac{\Delta t}{\Delta x^2}u_{3,1}^n + \alpha(1 - \theta) \frac{\Delta t}{\Delta x^2}u_{1,1}^n \\
+ \alpha(1 - \theta) \frac{\Delta t}{\Delta y^2}u_{2,2}^n + \alpha(1 - \theta) \frac{\Delta t}{\Delta y^2}u_{2,0}^n, \\
\vdots \\
\vdots \\
\text{Pour } i = M \text{ et } j = l \\
(1 + 2\alpha\theta \frac{\Delta t}{\Delta x^2} + 2\alpha\theta \frac{\Delta t}{\Delta y^2})u_{M,l}^{n+1} - \alpha\theta \frac{\Delta t}{\Delta x^2}u_{M+1,l}^{n+1} - \alpha\theta \frac{\Delta t}{\Delta x^2}u_{M-1,l}^{n+1} - \alpha\theta \frac{\Delta t}{\Delta y^2}u_{M,l+1}^{n+1} - \alpha\theta \frac{\Delta t}{\Delta y^2}u_{M,l-1}^{n+1} \\
= (1 - 2\alpha(1 - \theta) \frac{\Delta t}{\Delta x^2} - 2\alpha(1 - \theta) \frac{\Delta t}{\Delta y^2})u_{M,l}^n + \alpha(1 - \theta) \frac{\Delta t}{\Delta x^2}u_{M+1,l}^n + \alpha(1 - \theta) \frac{\Delta t}{\Delta x^2}u_{M-1,l}^n \\
+ \alpha(1 - \theta) \frac{\Delta t}{\Delta y^2}u_{M,l+1}^n + \alpha(1 - \theta) \frac{\Delta t}{\Delta y^2}u_{M,l-1}^n.
\end{array} \right.$$

Donc la forme matricielle est :

$$(I_M + \theta\Delta t B)u^{n+1} = (I_M - (1 - \theta)\Delta t B)u^n,$$

et les vecteurs $u^n = (u_{1,1}^n, u_{2,1}^n, \dots, u_{M,1}^n, u_{1,2}^n, \dots, u_{M,2}^n, \dots, u_{1,l}^n, \dots, u_{M,l}^n)^t$,

$u^{n+1} = (u_{1,1}^{n+1}, u_{2,1}^{n+1}, \dots, u_{M,1}^{n+1}, u_{1,2}^{n+1}, \dots, u_{M,2}^{n+1}, \dots, u_{1,l}^{n+1}, \dots, u_{M,l}^{n+1})^t$,

et :

$$B = \frac{\alpha}{\Delta y^2} \begin{pmatrix} D_M & -I_M & 0 & \dots & 0 \\ -I_M & D_M & -I_M & 0 & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -I_M & D_M & -I_M \\ 0 & \dots & \dots & -I_M & D_M \end{pmatrix}$$

$$D_M = \begin{pmatrix} 2(\frac{\Delta y^2}{\Delta x^2} + 1) & -\frac{\Delta y^2}{\Delta x^2} & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{\Delta y^2}{\Delta x^2} & 2(\frac{\Delta y^2}{\Delta x^2} + 1) & -\frac{\Delta y^2}{\Delta x^2} & 0 & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -\frac{\Delta y^2}{\Delta x^2} & 2(\frac{\Delta y^2}{\Delta x^2} + 1) & -\frac{\Delta y^2}{\Delta x^2} \\ 0 & \dots & \dots & -\frac{\Delta y^2}{\Delta x^2} & 2(\frac{\Delta y^2}{\Delta x^2} + 1) \end{pmatrix}$$

La matrice B d'ordre Ml et D_M , I_M (la matrice identité) d'ordre M .

On pose : $C_1 = (I_M + \theta \Delta t B)$ et $C_2 = (I_M - (1 - \theta) \Delta t B)$.

Nous avons :

$$D_M = \frac{\Delta y^2}{\Delta x^2} \begin{pmatrix} 2 + 2\frac{\Delta x^2}{\Delta y^2} & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 + 2\frac{\Delta x^2}{\Delta y^2} & -1 & 0 & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -1 & 2 + 2\frac{\Delta x^2}{\Delta y^2} & -1 \\ 0 & \dots & \dots & -1 & 2 + 2\frac{\Delta x^2}{\Delta y^2} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\Delta y^2}{\Delta x^2} \left[\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \dots & \dots & -1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\frac{\Delta x^2}{\Delta y^2} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 2\frac{\Delta x^2}{\Delta y^2} & 0 & \dots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 2\frac{\Delta x^2}{\Delta y^2} \end{pmatrix} \right].$$

Proposition 5.2.4.

Le résultat suivant est une adaptation où proposition [19]

On a : $E = L + F$, $L \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $F \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$$E = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & -1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \cdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix}.$$

Supposons $a \geq 0$ la matrice E est symétrique définie positive.

Démonstration 5.2.4.

La matrice E est clairement symétrique, montrons qu'elle est définie positive.

$\forall X \neq 0 \quad (X = (x_1, \dots, x_n)).$

Tout d'abord, l'hypothèse $a \geq 0$ entraîne :

$$X^t E X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \\ & -1 & 2 & -1 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & \cdots & & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\ + \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \cdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$= x_1^2 + \sum_{i=1}^{n-1} (x_i - x_{i+1})^2 + x_n^2 + \sum_{i=1}^n a_i x_i^2 > x_1^2 + \sum_{i=1}^{n-1} (x_i - x_{i+1})^2 + x_n^2 > 0.$$

Donc E est définie positive.

Puisque $2\frac{\Delta x^2}{\Delta y^2} > 0$ alors la matrice D_M est symétrique définie positive alors la matrice B et C_1 aussi symétrique définie positive, donc C_1 est inversible.

Alors le système $C_1 u^{n+1} = C_2 u^n$ admet une solution unique.

$$u^{n+1} = C_1^{-1} C_2 u^n.$$

Pour avoir la stabilité en norme L^2 il faut et il suffit que : $\|C_1^{-1} C_2\|_2 \leq 1$.

On a :

$$\|C_1^{-1} C_2\|_2 \leq \|C_1^{-1}\|_2 \|C_2\|_2.$$

$$\|C_1^{-1}\|_2 = \rho(C_1^{-1}) \text{ (car } C_1 \text{ symétrique)} \quad \text{et} \quad \|C_2\|_2 = \rho(C_2) \text{ (car } C_2 \text{ symétrique)}.$$

Les valeurs propre de B est :

$$\begin{aligned} \lambda_{pq} &= \frac{\alpha}{\Delta y^2} \left(2\left(\frac{\Delta y^2}{\Delta x^2} + 1\right) - 2\frac{\Delta y^2}{\Delta x^2} \cos\left(\frac{p\pi}{M+1}\right) - 2\cos\left(\frac{q\pi}{l+1}\right) \right) / \quad 1 \leq p \leq M \text{ et } 1 \leq q \leq l \\ &= \frac{\alpha}{\Delta y^2} \left(2\left(\frac{\Delta y^2}{\Delta x^2} + 1\right) - 2\frac{\Delta y^2}{\Delta x^2} (\cos^2(\frac{p\pi}{2(M+1)}) - \sin^2(\frac{p\pi}{2(M+1)})) - 2(\cos^2(\frac{q\pi}{2(l+1)}) - \sin^2(\frac{q\pi}{2(l+1)})) \right) \\ &= \frac{\alpha}{\Delta y^2} \left(2\left(\frac{\Delta y^2}{\Delta x^2} + 1\right) - 2\frac{\Delta y^2}{\Delta x^2} (1 - 2\sin^2(\frac{p\pi}{2(M+1)})) - 2(1 - 2\sin^2(\frac{q\pi}{2(l+1)})) \right) \\ &= \frac{\alpha}{\Delta y^2} \left(2\frac{\Delta y^2}{\Delta x^2} + 2 - 2\frac{\Delta y^2}{\Delta x^2} + 4\frac{\Delta y^2}{\Delta x^2} \sin^2(\frac{p\pi}{2(M+1)}) - 2 + 4\sin^2(\frac{q\pi}{2(l+1)}) \right) \\ &= \frac{\alpha}{\Delta y^2} \left(4\frac{\Delta y^2}{\Delta x^2} \sin^2(\frac{p\pi}{2(M+1)}) + 4\sin^2(\frac{q\pi}{2(l+1)}) \right) \\ &= 4\frac{\alpha}{\Delta x^2} \sin^2(\frac{p\pi}{2(M+1)}) + 4\frac{\alpha}{\Delta y^2} \sin^2(\frac{q\pi}{2(l+1)}). \end{aligned}$$

$$\rho(C_1^{-1}) = \max_{\substack{1 \leq p \leq M \\ 1 \leq q \leq l}} \left| \frac{1}{1 + 4\alpha\theta \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \sin^2(\frac{p\pi}{2(M+1)}) + 4\alpha\theta \frac{\Delta t}{\Delta y^2} \sin^2(\frac{q\pi}{2(l+1)})} \right|.$$

$$\rho(C_2) = \max_{\substack{1 \leq p \leq M \\ 1 \leq q \leq l}} \left| 1 - 4\alpha(1-\theta) \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \sin^2(\frac{p\pi}{2(M+1)}) - 4\alpha(1-\theta) \frac{\Delta t}{\Delta y^2} \sin^2(\frac{q\pi}{2(l+1)}) \right|.$$

Nous avons :

$$\left| \frac{1 - 4\alpha(1-\theta) \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \sin^2(\frac{p\pi}{2(M+1)}) - 4\alpha(1-\theta) \frac{\Delta t}{\Delta y^2} \sin^2(\frac{q\pi}{2(l+1)})}{1 + 4\alpha\theta \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \sin^2(\frac{p\pi}{2(M+1)}) + 4\alpha\theta \frac{\Delta t}{\Delta y^2} \sin^2(\frac{q\pi}{2(l+1)})} \right|$$

$$= \frac{|1 - 4\alpha(1-\theta) \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \sin^2(\frac{p\pi}{2(M+1)}) - 4\alpha(1-\theta) \frac{\Delta t}{\Delta y^2} \sin^2(\frac{q\pi}{2(l+1)})|}{|1 + 4\alpha\theta \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \sin^2(\frac{p\pi}{2(M+1)}) + 4\alpha\theta \frac{\Delta t}{\Delta y^2} \sin^2(\frac{q\pi}{2(l+1)})|}.$$

• Si $\theta \geq \frac{1}{2}$

Alors $1 - \theta \leq \theta$ donc :

$$\left| 1 - 4\alpha(1-\theta) \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \sin^2(\frac{p\pi}{2(M+1)}) - 4\alpha(1-\theta) \frac{\Delta t}{\Delta y^2} \sin^2(\frac{q\pi}{2(l+1)}) \right|$$

$$\leq 1 + 4\alpha(1-\theta) \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \sin^2(\frac{p\pi}{2(M+1)}) + 4\alpha(1-\theta) \frac{\Delta t}{\Delta y^2} \sin^2(\frac{q\pi}{2(l+1)})$$

$$\leq 1 + 4\alpha\theta \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \sin^2(\frac{p\pi}{2(M+1)}) + 4\alpha\theta \frac{\Delta t}{\Delta y^2} \sin^2(\frac{q\pi}{2(l+1)}).$$

Donc :

$$\frac{|1 - 4\alpha(1-\theta) \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \sin^2(\frac{p\pi}{2(M+1)}) - 4\alpha(1-\theta) \frac{\Delta t}{\Delta y^2} \sin^2(\frac{q\pi}{2(l+1)})|}{|1 + 4\alpha\theta \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \sin^2(\frac{p\pi}{2(M+1)}) + 4\alpha\theta \frac{\Delta t}{\Delta y^2} \sin^2(\frac{q\pi}{2(l+1)})|} \leq 1.$$

Donc $\rho(C_1^{-1})\rho(C_2) \leq 1 \implies \|C_1^{-1}\|_2 \|C_2\|_2 \leq 1$.

Par récurrence

$$\begin{aligned} \|u^{n+1}\|_2 &\leq \|C_1^{-1}\|_2 \|C_2\|_2 \|u^n\|_2 \\ &\leq \|u^n\|_2 \leq \|u^{n-1}\|_2 \leq \dots \leq \|u^0\|_2. \end{aligned}$$

Le θ -schéma est inconditionnellement L^2 -stable si $\theta \geq \frac{1}{2}$.

• Si $\theta < \frac{1}{2}$

$$\frac{|1 - 4\alpha(1 - \theta)\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\sin^2(\frac{p\pi}{2(M+1)}) - 4\alpha(1 - \theta)\frac{\Delta t}{\Delta y^2}\sin^2(\frac{q\pi}{2(l+1)})|}{|1 + 4\alpha\theta\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\sin^2(\frac{p\pi}{2(M+1)}) + 4\alpha\theta\frac{\Delta t}{\Delta y^2}\sin^2(\frac{q\pi}{2(l+1)})|} \leq 1.$$

Si et seulement si :

$$\begin{aligned} 1 - 4\alpha(1 - \theta)\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\sin^2(\frac{p\pi}{2(M+1)}) - 4\alpha(1 - \theta)\frac{\Delta t}{\Delta y^2}\sin^2(\frac{q\pi}{2(l+1)}) \\ \leq 1 + 4\alpha\theta\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\sin^2(\frac{p\pi}{2(M+1)}) + 4\alpha\theta\frac{\Delta t}{\Delta y^2}\sin^2(\frac{q\pi}{2(l+1)}), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} 4\alpha(1 - \theta)\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\sin^2(\frac{p\pi}{2(M+1)}) + 4\alpha(1 - \theta)\frac{\Delta t}{\Delta y^2}\sin^2(\frac{q\pi}{2(l+1)}) - 1 \\ \leq 1 + 4\alpha\theta\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\sin^2(\frac{p\pi}{2(M+1)}) + 4\alpha\theta\frac{\Delta t}{\Delta y^2}\sin^2(\frac{q\pi}{2(l+1)}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4\alpha\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\sin^2(\frac{p\pi}{2(M+1)}) - 4\alpha\theta\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\sin^2(\frac{p\pi}{2(M+1)}) + 4\alpha\frac{\Delta t}{\Delta y^2}\sin^2(\frac{q\pi}{2(l+1)}) \\ - 4\alpha\theta\frac{\Delta t}{\Delta y^2}\sin^2(\frac{q\pi}{2(l+1)}) - 1 \leq 1 + 4\alpha\theta\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\sin^2(\frac{p\pi}{2(M+1)}) + 4\alpha\theta\frac{\Delta t}{\Delta y^2}\sin^2(\frac{q\pi}{2(l+1)}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4\alpha\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\sin^2(\frac{p\pi}{2(M+1)}) + 4\alpha\frac{\Delta t}{\Delta y^2}\sin^2(\frac{q\pi}{2(l+1)}) \leq 2 + 8\alpha\theta\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\sin^2(\frac{p\pi}{2(M+1)}) + 8\alpha\theta\frac{\Delta t}{\Delta y^2}\sin^2(\frac{q\pi}{2(l+1)}) \\ 2\alpha\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\sin^2(\frac{p\pi}{2(M+1)}) + 2\alpha\frac{\Delta t}{\Delta y^2}\sin^2(\frac{q\pi}{2(l+1)}) \leq 1 + 4\alpha\theta\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\sin^2(\frac{p\pi}{2(M+1)}) + 4\alpha\theta\frac{\Delta t}{\Delta y^2}\sin^2(\frac{q\pi}{2(l+1)}) \end{aligned}$$

$$2\alpha\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\sin^2(\frac{p\pi}{2(M+1)})(1 - 2\theta) + 2\alpha\frac{\Delta t}{\Delta y^2}\sin^2(\frac{q\pi}{2(l+1)})(1 - 2\theta) \leq 1$$

$$2\alpha \frac{\Delta t}{\Delta x^2}(1-2\theta) + 2\alpha \frac{\Delta t}{\Delta y^2}(1-2\theta) \leq 1$$

$$\alpha \Delta t \left(\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} \right) \leq \frac{1}{2(1-2\theta)} \dots \dots \dots \text{C.F.L}$$

$$\text{Donc sous la condition } \alpha \Delta t \left(\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} \right) \leq \frac{1}{2(1-2\theta)}.$$

$$\rho(C_1^{-1})\rho(C_2) \leq 1 \implies \|C_1^{-1}\|_2 \|C_2\|_2 \leq 1.$$

Par récurrence

$$\begin{aligned} \|u^{n+1}\|_2 &\leq \|C_1^{-1}\|_2 \|C_2\|_2 \|u^n\|_2 \\ &\leq \|u^n\|_2 \leq \|u^{n-1}\|_2 \leq \dots \leq \|u^0\|_2. \end{aligned}$$

Le θ -schéma L^2 -stable si $\theta < \frac{1}{2}$ sous la condition C.F.L :

$$\alpha \Delta t \left(\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} \right) \leq \frac{1}{2(1-2\theta)} \quad .$$

• Stabilité au sens Von Neumann

La solution discrète particulière est : $u_{j,l}^n = A(K)^n e^{2i\pi k_1 x_j} e^{2i\pi k_2 y_l}$. $K = (k_1, k_2)$.

On a :

$$\begin{aligned} &(1 + 2\alpha\theta \frac{\Delta t}{\Delta x^2} + 2\alpha\theta \frac{\Delta t}{\Delta y^2})u_{j,l}^{n+1} - \alpha\theta \frac{\Delta t}{\Delta x^2}u_{j+1,l}^{n+1} - \alpha\theta \frac{\Delta t}{\Delta x^2}u_{j-1,l}^{n+1} - \alpha\theta \frac{\Delta t}{\Delta y^2}u_{j,l+1}^{n+1} - \alpha\theta \frac{\Delta t}{\Delta y^2}u_{j,l-1}^{n+1} \\ &= (1 - 2\alpha(1-\theta) \frac{\Delta t}{\Delta x^2} - 2\alpha(1-\theta) \frac{\Delta t}{\Delta y^2})u_{j,l}^n + \alpha(1-\theta) \frac{\Delta t}{\Delta x^2}u_{j+1,l}^n + \alpha(1-\theta) \frac{\Delta t}{\Delta x^2}u_{j-1,l}^n \\ &+ \alpha(1-\theta) \frac{\Delta t}{\Delta y^2}u_{j,l+1}^n + \alpha(1-\theta) \frac{\Delta t}{\Delta y^2}u_{j,l-1}^n. \end{aligned}$$

En remplaçant la solution particulier, nous trouvons :

$$\begin{aligned} &(1 + 2\alpha\theta \frac{\Delta t}{\Delta x^2} + 2\alpha\theta \frac{\Delta t}{\Delta y^2})A(K)^{n+1}e^{2i\pi k_1 x_j}e^{2i\pi k_2 y_l} - \alpha\theta \frac{\Delta t}{\Delta x^2}A(K)^{n+1}e^{2i\pi k_1 x_{j+1}}e^{2i\pi k_2 y_l} \\ &- \alpha\theta \frac{\Delta t}{\Delta x^2}A(K)^{n+1}e^{2i\pi k_1 x_{j-1}}e^{2i\pi k_2 y_l} - \alpha\theta \frac{\Delta t}{\Delta y^2}A(K)^{n+1}e^{2i\pi k_1 x_j}e^{2i\pi k_2 y_{l+1}} - \alpha\theta \frac{\Delta t}{\Delta y^2}A(K)^{n+1}e^{2i\pi k_1 x_j}e^{2i\pi k_2 y_{l-1}} \\ &= (1 - 2\alpha(1-\theta) \frac{\Delta t}{\Delta x^2} - 2\alpha(1-\theta) \frac{\Delta t}{\Delta y^2})A(K)^ne^{2i\pi k_1 x_j}e^{2i\pi k_2 y_l} + \alpha(1-\theta) \frac{\Delta t}{\Delta x^2}A(K)^ne^{2i\pi k_1 x_{j+1}}e^{2i\pi k_2 y_l} \\ &+ \alpha(1-\theta) \frac{\Delta t}{\Delta x^2}A(K)^ne^{2i\pi k_1 x_{j-1}}e^{2i\pi k_2 y_l} + \alpha(1-\theta) \frac{\Delta t}{\Delta y^2}A(K)^ne^{2i\pi k_1 x_j}e^{2i\pi k_2 y_{l+1}} \\ &+ \alpha(1-\theta) \frac{\Delta t}{\Delta y^2}A(K)^ne^{2i\pi k_1 x_j}e^{2i\pi k_2 y_{l-1}}, \end{aligned}$$

et on a :

$$x_{j+1} = x_j + \Delta x \quad \text{et} \quad y_{l+1} = y_l + \Delta y.$$

$$x_{j-1} = x_j - \Delta x \quad \text{et} \quad y_{l-1} = y_l - \Delta y.$$

$$\begin{aligned} & (1 + 2\alpha\theta \frac{\Delta t}{\Delta x^2} + 2\alpha\theta \frac{\Delta t}{\Delta y^2})A(K) - \alpha\theta \frac{\Delta t}{\Delta x^2}A(K)e^{2i\pi k_1 \Delta x} - \alpha\theta \frac{\Delta t}{\Delta x^2}A(K)e^{-2i\pi k_1 \Delta x} - \alpha\theta \frac{\Delta t}{\Delta y^2}A(K)e^{2i\pi k_2 \Delta y} \\ & - \alpha\theta \frac{\Delta t}{\Delta y^2}A(K)e^{-2i\pi k_2 \Delta y} = (1 - 2\alpha(1 - \theta) \frac{\Delta t}{\Delta x^2} - 2\alpha(1 - \theta) \frac{\Delta t}{\Delta y^2}) + \alpha(1 - \theta) \frac{\Delta t}{\Delta x^2}e^{2i\pi k_1 \Delta x} \\ & + \alpha(1 - \theta) \frac{\Delta t}{\Delta x^2}e^{-2i\pi k_1 \Delta x} + \alpha(1 - \theta) \frac{\Delta t}{\Delta y^2}e^{2i\pi k_2 \Delta y} + \alpha(1 - \theta) \frac{\Delta t}{\Delta y^2}e^{-2i\pi k_2 \Delta y}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & A(K)((1 + 2\alpha\theta \frac{\Delta t}{\Delta x^2} + 2\alpha\theta \frac{\Delta t}{\Delta y^2}) - \alpha\theta \frac{\Delta t}{\Delta x^2}e^{2i\pi k_1 \Delta x} - \alpha\theta \frac{\Delta t}{\Delta x^2}e^{-2i\pi k_1 \Delta x} - \alpha\theta \frac{\Delta t}{\Delta y^2}e^{2i\pi k_2 \Delta y} \\ & - \alpha\theta \frac{\Delta t}{\Delta y^2}e^{-2i\pi k_2 \Delta y}) = (1 - 2\alpha(1 - \theta) \frac{\Delta t}{\Delta x^2} - 2\alpha(1 - \theta) \frac{\Delta t}{\Delta y^2}) + \alpha(1 - \theta) \frac{\Delta t}{\Delta x^2}e^{2i\pi k_1 \Delta x} \\ & + \alpha(1 - \theta) \frac{\Delta t}{\Delta x^2}e^{-2i\pi k_1 \Delta x} + \alpha(1 - \theta) \frac{\Delta t}{\Delta y^2}e^{2i\pi k_2 \Delta y} + \alpha(1 - \theta) \frac{\Delta t}{\Delta y^2}e^{-2i\pi k_2 \Delta y}. \end{aligned}$$

$$A(K) =$$

$$\frac{(1 + 2\alpha(1 - \theta) \frac{\Delta t}{\Delta x^2} - 2\alpha(1 - \theta) \frac{\Delta t}{\Delta y^2}) + \alpha(1 - \theta) \frac{\Delta t}{\Delta x^2}(2\cos(2\pi k_1 \Delta x)) + \alpha(1 - \theta) \frac{\Delta t}{\Delta y^2}(2\cos(2\pi k_2 \Delta y))}{(1 + 2\alpha\theta \frac{\Delta t}{\Delta x^2} + 2\alpha\theta \frac{\Delta t}{\Delta y^2}) - \alpha\theta \frac{\Delta t}{\Delta x^2}(2\cos(2\pi k_1 \Delta x)) - \alpha\theta \frac{\Delta t}{\Delta y^2}(2\cos(2\pi k_2 \Delta y))}.$$

Nous avons

$$1 - \cos(2\pi k \Delta x) = 2\sin^2(k\pi \Delta x).$$

Alors :

$$A(K) = \frac{1 - 4\alpha(1 - \theta) \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \sin^2(k_1 \pi \Delta x) - 4\alpha(1 - \theta) \frac{\Delta t}{\Delta y^2} \sin^2(k_2 \pi \Delta y)}{1 + 4\alpha\theta \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \sin^2(k_1 \pi \Delta x) + 4\alpha\theta \frac{\Delta t}{\Delta y^2} \sin^2(k_2 \pi \Delta y)},$$

et :

$$|A(K)| = \frac{|1 - 4\alpha(1 - \theta) \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \sin^2(k_1 \pi \Delta x) - 4\alpha(1 - \theta) \frac{\Delta t}{\Delta y^2} \sin^2(k_2 \pi \Delta y)|}{|1 + 4\alpha\theta \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \sin^2(k_1 \pi \Delta x) + 4\alpha\theta \frac{\Delta t}{\Delta y^2} \sin^2(k_2 \pi \Delta y)|}.$$

Si La condition de stabilité de Von Neumann ($|A(K)| \leq 1$) satisfaite, on dit que le θ -schéma est L^2 -stable (au sens Von Neumann).

• Si $\theta \geq \frac{1}{2}$

Alors $1 - \theta \leq \theta$

$$\begin{aligned} & |1 - 4\alpha(1 - \theta) \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \sin^2(k_1 \pi \Delta x) - 4\alpha(1 - \theta) \frac{\Delta t}{\Delta y^2} \sin^2(k_2 \pi \Delta y)| \\ & \leq 1 + 4\alpha(1 - \theta) \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \sin^2(k_1 \pi \Delta x) + 4\alpha(1 - \theta) \frac{\Delta t}{\Delta y^2} \sin^2(k_2 \pi \Delta y) \\ & \leq 1 + 4\alpha\theta \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \sin^2(k_1 \pi \Delta x) + 4\alpha\theta \frac{\Delta t}{\Delta y^2} \sin^2(k_2 \pi \Delta y). \end{aligned}$$

Donc : $|A(K)| \leq 1$.

• Si $\theta < \frac{1}{2}$

$|A(K)| \leq 1$ si et seulement si :

$$\begin{aligned} & 1 - 4\alpha(1 - \theta) \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \sin^2(k_1 \pi \Delta x) - 4\alpha(1 - \theta) \frac{\Delta t}{\Delta y^2} \sin^2(k_2 \pi \Delta y) \\ & \leq 1 + 4\alpha\theta \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \sin^2(k_1 \pi \Delta x) + 4\alpha\theta \frac{\Delta t}{\Delta y^2} \sin^2(k_2 \pi \Delta y), \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} & 4\alpha(1 - \theta) \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \sin^2(k_1 \pi \Delta x) + 4\alpha(1 - \theta) \frac{\Delta t}{\Delta y^2} \sin^2(k_2 \pi \Delta y) - 1 \\ & \leq 1 + 4\alpha\theta \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \sin^2(k_1 \pi \Delta x) + 4\alpha\theta \frac{\Delta t}{\Delta y^2} \sin^2(k_2 \pi \Delta y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 4\alpha \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \sin^2(k_1 \pi \Delta x) - 4\alpha\theta \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \sin^2(k_1 \pi \Delta x) + 4\alpha \frac{\Delta t}{\Delta y^2} \sin^2(k_2 \pi \Delta y) - 4\alpha\theta \frac{\Delta t}{\Delta y^2} \sin^2(k_2 \pi \Delta y) \\ & \leq 2 + 4\alpha\theta \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \sin^2(k_1 \pi \Delta x) + 4\alpha\theta \frac{\Delta t}{\Delta y^2} \sin^2(k_2 \pi \Delta y) \end{aligned}$$

$$4\alpha \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \sin^2(k_1 \pi \Delta x) + 4\alpha \frac{\Delta t}{\Delta y^2} \sin^2(k_2 \pi \Delta y) \leq 2 + 8\alpha\theta \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \sin^2(k_1 \pi \Delta x) + 8\alpha\theta \frac{\Delta t}{\Delta y^2} \sin^2(k_2 \pi \Delta y)$$

$$2\alpha \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \sin^2(k_1 \pi \Delta x) + 2\alpha \frac{\Delta t}{\Delta y^2} \sin^2(k_2 \pi \Delta y) \leq 1 + 4\alpha\theta \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \sin^2(k_1 \pi \Delta x) + 4\alpha\theta \frac{\Delta t}{\Delta y^2} \sin^2(k_2 \pi \Delta y)$$

$$2\alpha \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \sin^2(k_1 \pi \Delta x)(1 - 2\theta) + 2\alpha \frac{\Delta t}{\Delta y^2} \sin^2(k_2 \pi \Delta y)(1 - 2\theta) \leq 1$$

$$\begin{aligned}
2\alpha \frac{\Delta t}{\Delta x^2}(1-2\theta) + 2\alpha \frac{\Delta t}{\Delta y^2}(1-2\theta) &\leq 1 \\
2\alpha \Delta t(1-2\theta) \left(\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} \right) &\leq 1 \\
\alpha \Delta t \left(\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} \right) &\leq \frac{1}{2(1-2\theta)} \dots\dots\dots \text{C.F.L}
\end{aligned}$$

Si $\theta < \frac{1}{2}$ le θ -schéma est L^2 -stable (au sens Von Neumann) sous la condition C.F.L

$$\alpha \Delta t \left(\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} \right) \leq \frac{1}{2(1-2\theta)} .$$

5.2.5 Convergence

D'après le théorème de Lax on obtient les resultats de convergence suivant :

• **Si** $\frac{1}{2} \leq \theta \leq 1$ le θ -schéma est consistant et inconditionnellement L^2 -stable donc elle est convergente .

• **Si** $0 \leq \theta < \frac{1}{2}$ le θ -schéma est consistant et L^2 -stable sous la condition C.F.L

$\alpha \Delta t \left(\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} \right) \leq \frac{1}{2(1-2\theta)}$ donc elle convergente sous la même condition.

• **Si** $0 \leq \theta \leq 1$ le θ -schéma est consistant et L^∞ -stable sous la condition C.F.L

$\alpha \Delta t \left(\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} \right) \leq \frac{1}{2(1-\theta)}$ donc elle convergente sous la même condition.

5.2.5.1 Estimation d'erreur

On a

u_i^n la solution numérique et $u(x_i, t^n)$ la solution exacte.

$$\begin{aligned}
\epsilon_{i,j}^n &= \frac{u(x_i, y_j, t^{n+1}) - u(x_i, y_j, t^n)}{\Delta t} - \alpha(1-\theta) \left(\frac{u(x_{i+1}, y_j, t^n) - 2u(x_i, y_j, t^n) + u(x_{i-1}, y_j, t^n)}{\Delta x^2} + \right. \\
&\quad \left. \frac{u(x_i, y_{j+1}, t^n) - 2u(x_i, y_j, t^n) + u(x_i, y_{j-1}, t^n)}{\Delta y^2} \right) - \alpha\theta \left(\frac{u(x_{i+1}, y_j, t^{n+1}) - 2u(x_i, y_j, t^{n+1}) + u(x_{i-1}, y_j, t^{n+1})}{\Delta x^2} \right. \\
&\quad \left. + \frac{u(x_i, y_{j+1}, t^{n+1}) - 2u(x_i, y_j, t^{n+1}) + u(x_i, y_{j-1}, t^{n+1})}{\Delta y^2} \right), \tag{5.1}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
&\frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\Delta t} - \alpha(1-\theta) \left(\frac{u_{i+1,j}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n}{\Delta x^2} + \frac{u_{i,j+1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n}{\Delta y^2} \right) - \alpha\theta \left(\frac{u_{i+1,j}^{n+1} - 2u_{i,j}^{n+1} + u_{i-1,j}^{n+1}}{\Delta x^2} \right. \\
&\quad \left. + \frac{u_{i,j+1}^{n+1} - 2u_{i,j}^{n+1} + u_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta y^2} \right) = 0. \tag{5.2}
\end{aligned}$$

Alors par (5.2)-(5.1)

$$\begin{aligned}
&\frac{e_{i,j}^{n+1} - e_{i,j}^n}{\Delta t} - \alpha(1-\theta) \left(\frac{e_{i+1,j}^n - 2e_{i,j}^n + e_{i-1,j}^n}{\Delta x^2} + \frac{e_{i,j+1}^n - 2e_{i,j}^n + e_{i,j-1}^n}{\Delta y^2} \right) - \alpha\theta \left(\frac{e_{i+1,j}^{n+1} - 2e_{i,j}^{n+1} + e_{i-1,j}^{n+1}}{\Delta x^2} \right. \\
&\quad \left. + \frac{e_{i,j+1}^{n+1} - 2e_{i,j}^{n+1} + e_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta y^2} \right) + \epsilon_{i,j}^n = 0 \\
e_{i,j}^{n+1} &= e_{i,j}^n + \alpha(1-\theta)\Delta t \left(\frac{e_{i+1,j}^n - 2e_{i,j}^n + e_{i-1,j}^n}{\Delta x^2} + \frac{e_{i,j+1}^n - 2e_{i,j}^n + e_{i,j-1}^n}{\Delta y^2} \right) + \alpha\theta\Delta t \left(\frac{e_{i+1,j}^{n+1} - 2e_{i,j}^{n+1} + e_{i-1,j}^{n+1}}{\Delta x^2} \right. \\
&\quad \left. + \frac{e_{i,j+1}^{n+1} - 2e_{i,j}^{n+1} + e_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta y^2} \right) - \Delta t \epsilon_{i,j}^n = 0 \\
(1 + 2\alpha\theta \frac{\Delta t}{\Delta x^2} + 2\alpha\theta \frac{\Delta t}{\Delta y^2})e_{i,j}^{n+1} &= (1 - 2\alpha(1-\theta) \frac{\Delta t}{\Delta x^2} - 2\alpha(1-\theta) \frac{\Delta t}{\Delta y^2})e_{i,j}^n + \alpha(1-\theta) \frac{\Delta t}{\Delta x^2} e_{i+1,j}^n \\
&\quad + \alpha(1-\theta) \frac{\Delta t}{\Delta x^2} e_{i-1,j}^n + \alpha(1-\theta) \frac{\Delta t}{\Delta y^2} e_{i,j+1}^n + \alpha(1-\theta) \frac{\Delta t}{\Delta y^2} e_{i,j-1}^n + \alpha\theta \frac{\Delta t}{\Delta x^2} e_{i+1,j}^{n+1} + \alpha\theta \frac{\Delta t}{\Delta x^2} e_{i-1,j}^{n+1} \\
&\quad + \alpha\theta \frac{\Delta t}{\Delta y^2} e_{i,j+1}^{n+1} + \alpha\theta \frac{\Delta t}{\Delta y^2} e_{i,j-1}^{n+1} - \Delta t \epsilon_{i,j}^n.
\end{aligned}$$

Car $\theta \in [0, 1]$ alors :

$$(1 + 2\alpha\theta \frac{\Delta t}{\Delta x^2} + 2\alpha\theta \frac{\Delta t}{\Delta y^2}) \geq 0 \text{ et } \alpha(1-\theta) \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \geq 0 \text{ et } \alpha(1-\theta) \frac{\Delta t}{\Delta y^2} \geq 0 \text{ et } \alpha\theta \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \geq 0$$

et $\alpha\theta\frac{\Delta t}{\Delta y^2} \geq 0$,

Mais $(1 - 2\alpha(1 - \theta)\frac{\Delta t}{\Delta x^2} - 2\alpha(1 - \theta)\frac{\Delta t}{\Delta y^2}) \geq 0$ si $\alpha\Delta t(\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2}) \leq \frac{1}{2(1 - \theta)}$.

On a supposé $\alpha\Delta t(\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2}) \leq \frac{1}{2(1 - \theta)}$ d'où l'estimation :

$$\begin{aligned} (1 + 2\alpha\theta\frac{\Delta t}{\Delta x^2} + 2\alpha\theta\frac{\Delta t}{\Delta y^2})|e_{i,j}^{n+1}| &\leq (1 - 2\alpha(1 - \theta)\frac{\Delta t}{\Delta x^2} - 2\alpha(1 - \theta)\frac{\Delta t}{\Delta y^2})|e_{i,j}^n| + \alpha(1 - \theta)\frac{\Delta t}{\Delta x^2}|e_{i+1,j}^n| \\ &+ \alpha(1 - \theta)\frac{\Delta t}{\Delta x^2}|e_{i-1,j}^n| + \alpha(1 - \theta)\frac{\Delta t}{\Delta y^2}|e_{i,j+1}^n| + \alpha(1 - \theta)\frac{\Delta t}{\Delta y^2}|e_{i,j-1}^n| + \alpha\theta\frac{\Delta t}{\Delta x^2}|e_{i+1,j}^{n+1}| + \alpha\theta\frac{\Delta t}{\Delta x^2}|e_{i-1,j}^{n+1}| \\ &+ \alpha\theta\frac{\Delta t}{\Delta y^2}|e_{i,j+1}^{n+1}| + \alpha\theta\frac{\Delta t}{\Delta y^2}|e_{i,j-1}^{n+1}| + \Delta t|\epsilon_{i,j}^n|. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1 + 2\alpha\theta\frac{\Delta t}{\Delta x^2} + 2\alpha\theta\frac{\Delta t}{\Delta y^2})|e_{i,j}^{n+1}| &\leq (1 - 2\alpha(1 - \theta)\frac{\Delta t}{\Delta x^2} - 2\alpha(1 - \theta)\frac{\Delta t}{\Delta y^2})\|e^n\|_\infty \\ &+ \alpha(1 - \theta)\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\|e^n\|_\infty + \alpha(1 - \theta)\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\|e^n\|_\infty + \alpha(1 - \theta)\frac{\Delta t}{\Delta y^2}\|e^n\|_\infty + \alpha(1 - \theta)\frac{\Delta t}{\Delta y^2}\|e^n\|_\infty \\ &+ \alpha\theta\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\|e^{n+1}\|_\infty + \alpha\theta\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\|e^{n+1}\|_\infty + \alpha\theta\frac{\Delta t}{\Delta y^2}\|e^{n+1}\|_\infty + \alpha\theta\frac{\Delta t}{\Delta y^2}\|e^{n+1}\|_\infty + \Delta t\|\epsilon^n\|_\infty. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1 + 2\alpha\theta\frac{\Delta t}{\Delta x^2} + 2\alpha\theta\frac{\Delta t}{\Delta y^2})\|e^{n+1}\|_\infty &\leq (1 - 2\alpha(1 - \theta)\frac{\Delta t}{\Delta x^2} - 2\alpha(1 - \theta)\frac{\Delta t}{\Delta y^2})\|e^n\|_\infty \\ &+ \alpha(1 - \theta)\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\|e^n\|_\infty + \alpha(1 - \theta)\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\|e^n\|_\infty + \alpha(1 - \theta)\frac{\Delta t}{\Delta y^2}\|e^n\|_\infty + \alpha(1 - \theta)\frac{\Delta t}{\Delta y^2}\|e^n\|_\infty \\ &+ \alpha\theta\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\|e^{n+1}\|_\infty + \alpha\theta\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\|e^{n+1}\|_\infty + \alpha\theta\frac{\Delta t}{\Delta y^2}\|e^{n+1}\|_\infty + \alpha\theta\frac{\Delta t}{\Delta y^2}\|e^{n+1}\|_\infty \\ &+ \Delta t(c_1\Delta t(\frac{1}{2} - \theta) + c_2(\Delta t^2 + \Delta x^2 + \Delta y^2)). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|e^{n+1}\|_\infty &\leq \|e^n\|_\infty + \Delta t(c_1\Delta t(\frac{1}{2} - \theta) + c_2(\Delta t^2 + \Delta x^2 + \Delta y^2)) \\ &\leq \|e^0\|_\infty + T(c_1\Delta t(\frac{1}{2} - \theta) + c_2(\Delta t^2 + \Delta x^2 + \Delta y^2)) \quad / \quad \|e^0\|_\infty = 0, \\ &= T(c_1\Delta t(\frac{1}{2} - \theta) + c_2(\Delta t^2 - \Delta x^2 + \Delta y^2)). \quad / c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Donc le θ -schéma est converge sous la condition :

$$\alpha\Delta t(\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2}) \leq \frac{1}{2(1-\theta)} \dots\dots \text{C.F.L}$$

5.3 Résumé des résultats obtenus (tableau)

Nous résumons l'étude de θ -schéma pour l'équation de la chaleur en D2 dans le tableau suivant :

L'intervalle de θ	$0 \leq \theta < \frac{1}{2}$	$\theta = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} < \theta \leq 1$
Erreur de consistance	$O(\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta t)$	$O(\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta t^2)$	$O(\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta t)$
Stabilité en norme L^2	Stable sous C.F.L $\alpha \Delta t \left(\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} \right) \leq \frac{1}{2(1 - 2\theta)}$	Inconditionnellement stable	
Convergence	Convergente sous la condition C.F.L $\alpha \Delta t \left(\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} \right) \leq \frac{1}{2(1 - 2\theta)}$		
Stabilité en norme L^∞	Stable sous la condition C.F.L $\alpha \Delta t \left(\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} \right) \leq \frac{1}{2(1 - \theta)}$		
Convergence	Convergente sous C.F.L $\alpha \Delta t \left(\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} \right) \leq \frac{1}{2(1 - \theta)}$		

CONCLUSION

Au terme de ce mémoire après avoir donnée une généralité sur des EDP parabolique linéaire, une présentation de la méthode des différences finies, nous avons procédé à l'étude mathématique de θ -schéma en l'appliquant à l'équation de la chaleur comme modèle des EDP parabolique linéaire.

Les plus importants résultats auxquels nous sommes parvenus suivant les valeurs de $\theta \in [0, 1]$ peuvent être tirés comme suit :

► **Consistance**

- Si $\theta \neq \frac{1}{2}$ d'ordre 1 en temps et d'ordre 2 en x pour l'équation D1, et d'ordre 1 en temps et d'ordre 2 en x et en y pour l'équation D2.

- Si $\theta = \frac{1}{2}$ d'ordre 2 en temps et d'ordre 2 en x pour l'équation D1, et d'ordre 2 en temps et d'ordre 2 en x et en y pour l'équation D2.

► **Stabilité :**

- L^∞ -stable qu'elle que soit $\theta \in [0, 1]$ sous la condition C.F.L $\left(\alpha \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2(1-\theta)} \right)$ pour l'équation D1 et $\left(\alpha \Delta t \left(\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} \right) \leq \frac{1}{2(1-\theta)} \right)$ pour l'équation D2.

- Inconditionnellement L^2 -stable si $\theta \geq \frac{1}{2}$, et si $\theta < \frac{1}{2}$ L^2 -stable sous la condition C.F.L pour l'équation D1 $\left(\alpha \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2(1-2\theta)}\right)$ et $\left(\alpha \Delta t \left(\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2}\right) \leq \frac{1}{2(1-2\theta)}\right)$ pour l'équation D2.

► **Convergence :**

Le résultat de convergence de θ -schéma dépend de la stabilité de la norme utilisé et selon le valeur de θ .

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Adalet, H. Méthodes Numériques pour les EDOs et EDP. (2020).
- [2] Ahmed, D. A. H. On the characteristic polynomial, eigenvalues for block tridiagonal matrices. Journal of Discrete Mathematical Sciences and Cryptography, 25(6), 1745-1756. (2022).
- [3] Allaire, G., Blanc, X., Despres, B., et Golse, F. Transport et diffusion. (2018).
- [4] Allaire, G. Analyse numérique et optimisation : une introduction à la modélisation mathématique et à la simulation numérique. Editions Ecole Polytechnique. (2005).
- [5] Bassouidi, K., & Khelladi, M.F. Etude Numérique des phénomènes d'advection-diffusion (UNIVERSITE AHMED DRAIA-ADRAR). (2022).
- [6] Beggas, M. Cours Méthode des différences finies pour les équations aux dérivées partielles M1. (2019).
- [7] Champagnat, N. Différences finies et analyse numérique matricielle. (2010).
- [8] Christophe, B. Calcul scientifique. (2020).
- [9] Courant-Friedrich-Levy/CFL(condition de)(HU), De wikipédia.
[http://wikydro.developpement-durable.gouv.fr/index.php/
Courant-Friedrich-Levy/_CFL_\(condition_de\)_\(HU\)](http://wikydro.developpement-durable.gouv.fr/index.php/Courant-Friedrich-Levy/_CFL_(condition_de)_(HU)). (2022,09,25).

- [10] Sorbonne Université. Cours, Analyse Convexe. M1(4M057). (2017).
- [11] David, C., & Gosselet, P. Équation aux dérivées partielles-2e éd. : Cours et exercices corrigés. Dunod. (2015).
- [12] David ; M. Résolution pratique des équations aux dérivées partielles.
- [13] Erhel, J. Cours d'optimisation ENSAI Rennes. (2019).
- [14] Gloria, F. EDP linéaires. (2016).
- [15] Herbin, R. Université Aix Marseille 1 Master de mathématiques Analyse numérique des équations aux dérivées partielles. (2008).
- [16] Herbin, R. Licence de mathématiques Cours d'Analyse numérique. (2016).
- [17] Imen, M. Cours d'Algebre I et II. (2019).
- [18] Kilani, I., Kouki, R., & Beldi, M. Analyse mathématique et regard didactique sur les formules de Taylor en vue d'une meilleure conceptualisation Mathematical analysis and didactic look at Taylor's formulas for a better conceptualization Análise matemática e olhar didático sobre as fórmulas de Taylor á vista de uma melhor.
- [19] Lucquin, B. Équations aux dérivées partielles et leurs approximations : niveau M1. Ellipses Éd. Marketing. (2004).
- [20] Sabit, S., Senouci, P. A., & abderrahmane Larabi, P. Notions sur les équations aux dérivées partielles.
- [21] Scheid, J. F. méthode numériques pour la dynamique des fluides. Institut E. Cartan UMR, 7502, 2011-2012. (2007).
- [22] Sébastien , D., & Laurène, J. Introduction aux méthodes numériques de résolution des équations aux dérivées partielles (EDP). (2017).
- [23] Stavroulakis ; I. P., & Tersian, S. A. Partial differential equations : An introduction wiyh Mathematica and MAPLE. World Scientific. (2004).
- [24] Taki eddine, O. Équations aux dérivées partielles. (2019).

Résumé:

Au terme de ce mémoire après avoir donnée une généralité sur des EDP parabolique linéaire, une présentation de la méthode des différences finies nous avons procédé à l'étude mathématique de θ -schéma en l'appliquant à l'équation de la chaleur comme modèle des EDP parabolique linéaire.

les mots clés: Les équations aux dérivées partielles linéaires - équation de la chaleur – différences finies - θ -schéma.

Abstract:

At the end of this dissertation, after having given a generality on linear parabolic PDEs, a presentation of the finite difference method, we proceeded to the mathematical study of θ -scheme by applying it to the heat equation as a model of Linear parabolic PDE.

Keywords: partial differential equation linear - heat equation - finite difference - θ -scheme.

ملخص:

يهدف هذا العمل إلى الدراسة الرياضية لـ θ -مخطط على المعادلات التفاضلية الجزئية المكافئة الخطية، من خلال اختيار معادلة الحرارة كنموذج لهذه المعادلات وقد تم دراسة المسألة المتقطعة بواسطة θ -مخطط.

الكلمات المفتاحية: المعادلات التفاضلية الجزئية الخطية - معادلة الحرارة - الفروق المنتهية θ -مخطط .