



N° d'ordre :

N° de série :

**République Algérienne Démocratique et Populaire**

**Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la  
Recherche Scientifique**

**UNIVERSITÉ HAMMA LAKHDAR D'EL OUED**

**FACULTÉ DES SCIENCES ET DE TECHNOLOGIE**

**Mémoire de fin d'étude**

**MASTER ACADEMIQUE**

Domaine: Mathématiques et Informatique

Filière: Mathématiques

Spécialité: Mathématiques fondamentales

**Thème**

**Étude Théorique de Quelques Problèmes  
Piézoélectriques**

Présenté par: Hamima Meriem  
Tercha Rabia

Soutenu devant le jury composé de

Abdelaziz Azeb Ahmed

MCB

Rapporteur

Univ. d'El Oued

Brahim Ben Ali

MCB

Président

Univ. d'El Oued

Tedjani Hadj Ammar

MCB

Examineur

Univ. d'El Oued

Année universitaire 2014 – 2015

# Remerciements

*Tout d'abord, nous tenons à remercier Allah, le clément et le miséricordieux de nous avoir donné la force et le courage de mener à bien ce travail.*

*Nous tenons à adresser notre remerciements à l'encadreur Monsieur Azeb Ahmed ABDELAZIZ, qui a dirigé notre travail avec beaucoup de patience et à ses conseils pour faire un travail parfait.*

*Nous remercions également les membres du jury qui ont bien voulu lire notre travail et d'accepter à nos discussions.*

*Nous voudraient remercier aux les deux familles HAMIMA et TERCHA.*

*Tercha Rabia et Hamima Meriem*

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>ii</b>
<b>Notations</b>	<b>iv</b>
<b>Liste des figures</b>	<b>v</b>
<b>1 Modélisation et Outils Mathématiques</b>	<b>1</b>
1.1 Modélisation . . . . .	1
1.1.1 Cadre physique-Modèle mathématique . . . . .	1
1.1.2 Lois de comportement piézoélectrique avec endommagement . . . . .	5
1.1.3 Conditions aux limites de contact et lois de frottement . . . . .	6
1.1.4 Conditions électriques à la surface de contact . . . . .	7
1.2 Outils Mathématiques . . . . .	10
1.2.1 Cadre fonctionnel vectoriel . . . . .	10
1.2.2 Espaces des fonctions à valeurs vectorielles . . . . .	11
1.2.3 Eléments d'analyse non linéaire dans les espaces de Hilbert . . . . .	14
1.2.4 Compléments divers . . . . .	16
<b>2 Problème électro-élasto-viscoplastique</b>	<b>18</b>
2.1 Formulation mécanique du problème et hypothèses . . . . .	18
2.2 Formulation variationnelle . . . . .	22
2.3 Existence et unicité de la solution . . . . .	23
<b>3 Problème électro-viscoélastique</b>	<b>33</b>
3.1 Formulation mécanique du problème et hypothèses . . . . .	33
3.2 Formulation variationnelle . . . . .	36
3.3 Existence et unicité de la solution . . . . .	38
<b>Bibliographie</b>	<b>45</b>

# Introduction

Les matériaux piézoélectriques sont largement utilisés que les commutateurs et actionneurs dans de nombreux systèmes d'ingénierie, en radioélectronique, électroacoustique et équipements de mesure. Cependant, il y a très peu de mathématique résultats concernant les problèmes de contact impliquant des matériaux piézoélectriques et donc, il est nécessaire d'étendre les résultats sur les modèles pour le contact avec les organes déformables qui comprend le couplage entre les propriétés mécaniques et électriques. modèles généraux pour les matériaux élastiques ayant des effets piézo-électriques peuvent être trouvés dans [6], [10]. Un quasistatique problème de contact pour les matériaux de fraction électrique élastiques a été considérée dans [7, 14]. Un problème de contact avec frottement de glissement dépendant des matériaux électro-élastique a été étudiée dans [18]. Problèmes de contact avec frottement ou l'adhérence des matériaux électro-viscoélastique ont été étudiés récemment dans [9, 13, 20, 21].

Dans ce mémoire nous étudient théoriquement deux problèmes de contact l'un avec frottement et l'autre sans frottement entre un corps piézoélectrique déformable et une fondation. Sous l'hypothèse des petites transformations, nous analysons des processus quasistatiques et dynamiques pour des matériaux électro -viscoélastiques et électro- élasto -viscoplastiques. Le premier chapitre est consacré à rappeler les différents modèles mécaniques de contact étudiés ainsi que quelques outils mathématiques nécessaires dans le mémoire. Le deuxième chapitre est destiné à l'étude d'un problème quasistatique de contact électro-élasto-viscoplastique avec asure, endommagement et frottement. Le troisième chapitre est dédié à l'analyse d'un problème dynamique en électro-viscoélasticité avec asure , endommagement et sans frottement.

Le but de ce mémoire est la preuve de l'existence et l'unicité d'une solution faible pour les problèmes étudiés.

# Notations

Soit  $\Omega$  est un domaine de  $\mathbb{R}^d (d = 2, 3)$  on note par

$\bar{\Omega}$	l'adhérence de $\Omega$ ,
$\Gamma$	la frontière de $\Omega$ supposée régulière,
$mes\Gamma_1$	la mesure de Lebesgue $(d - 1)$ dimensionnelle de $\Gamma_1$ ,
$\Gamma_i (i = \overline{1, 3})$	une partie mesurable de $\Gamma$ ,
$\nu$	la normale unitaire sortante à $\Gamma$ ,
$v_\nu, v_\tau$	les composantes normales et tangentielles du champ vectoriel $v$ ,
$\sigma_\nu, \sigma_\tau$	les composantes normales et tangentielles du champ tensoriel $\sigma$ ,
$C^1(\bar{\Omega})$	l'espace des fonctions réelles continuellement différentiables sur $\bar{\Omega}$ ,
$H$	l'espace $L^2(\Omega)^d$ ,
$\mathcal{H}$	l'espace $L^2(\Omega)_s^{d \times d}$ ,
$H_1$	l'espace $H^1(\Omega)^d$ ,
$\mathcal{H}_1$	l'espace $\{\sigma \in \mathcal{H}, Div\sigma = (\sigma_{ij,j}) \in H\}$ ,
$H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$	l'espace de sobolev d'ordre $\frac{1}{2}$ sur $\Gamma$ ,
$H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$	l'espace dual de $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ ,
$W$	l'espace $\{\zeta \in H^1(\Omega) \mid \zeta = 0 \text{ sur } \Gamma_a\}$ ,
$\mathcal{W}$	l'espace $\{D = (D_i) \mid D_i \in L^2(\Omega), D_{i,i} \in L^2\}$ .

Si  $X$  est un espace de Hilbert réel, on utilise les notations suivantes :

$(\cdot, \cdot)_X$	le produit scalaire sur $X$ ,
$\langle \cdot, \cdot \rangle_{X' \times X}$	le produit de dualité entre $X$ et $X'$ ,
$\ \cdot\ _X$	la norme sur $X$ ,
$x_n \rightarrow x$	la convergence forte de la suite $(x_n)$ vers l'élément $x$ dans $X$ ,

Si de plus  $[0, T]$  un intervalle de temps,  $k \in \mathbb{N}$  et  $1 \leq p \leq +\infty$ , on note par

$C(0, T; H)$	l'espace des fonctions continues de $[0, T]$ dans $H$ ,
$C^1(0, T; H)$	l'espace des fonctions continûment dérivables sur $[0, T]$ dans $H$ ,
$L^p(0, T; H)$	l'espace des fonctions mesurables sur $[0, T]$ dans $H$ ,
$\ \cdot\ _{L^p(0, T; H)}$	la norme de $L^p(0, T; H)$ ,
$W^{k,p}(0, T; H)$	l'espace de Sobolev de paramètres $k$ et $p$ ,
$\ \cdot\ _{W^{k,p}(0, T; H)}$	la norme de $W^{k,p}(0, T; H)$ .

Autre notations :

$\operatorname{Div} f$	la divergence de $f$ ,
$\nabla f$	le gradient de $f$ ,
$\partial f$	le sous différentiel de $f$ ,
$\mathbb{S}^d$	l'espace des tenseurs d'ordre deux symétriques sur $\mathbb{R}^d$ ,
"."	le produit scalaire sur $\mathbb{R}^d$ et $\mathbb{S}^d$ ,
" $\ \cdot\ $ "	la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^d$ et $\mathbb{S}^d$ ,
$C$	une constante générique strictement positive,
$\Lambda^n$	puissance $n$ de l'opérateur $\Lambda$ ,
p.p.	presque partout,
$\chi_K$	fonction indicatrice de $K$ .

# Liste des figures

1.1	Cadre physique . . . . .	3
1.2	Représentation graphique de la fonction $\delta$ . . . . .	8
1.3	Représentation graphique de la fonction $\psi$ . . . . .	8

# Chapitre 1

## Modélisation et Outils Mathématiques

Afin de faciliter la lecture de ce mémoire, il nous est paru nécessaire de présenter dans le premier chapitre le cadre physique et fonctionnels dans lesquels on va travailler. Nous précisons d'abord le cadre physique et le modèle mathématique correspondant utilisé dans ce mémoire, ensuite nous décrivons les lois de comportement, les conditions de contact et les différentes lois de frottement qui interviennent dans tout le mémoire.

Après un bref rappel de la mécanique des milieux continus, nous introduisons quelques préliminaires mathématiques qui seront utilisés partout dans ce mémoire. Nous commençons d'abord par les espaces de type Sobolev associés aux opérateurs divergence et déformation utilisés en mécanique, ainsi que leurs principales propriétés, notamment les théorèmes de trace. Nous rappelons ensuite les propriétés des espaces des fonctions à valeurs vectorielles et les espaces liés à l'effet piézoélectrique.

Enfin, nous passons en revue quelques résultats fondamentaux d'analyse fonctionnelle non linéaire dans les espaces de Hilbert, quelques résultats sur les opérateurs fortement monotones et de Lipschitz, les équations et les inéquations variationnelles d'évolution.

### 1.1 Modélisation

Cette section représente un bref rappel de la mécanique des milieux continus où nous allons introduire le cadre physique et son modèle mathématique utilisé dans ce mémoire ; il est destiné à rappeler l'équation de mouvement de Cauchy, à décrire les lois de comportement électro-élasto-viscoplastiques et électro-viscoélastiques. Par ailleurs, nous précisons dans ce chapitre les conditions aux limites de contact.

#### 1.1.1 Cadre physique-Modèle mathématique

Dans cette section, nous allons introduire le cadre physique et le modèle mathématique des problèmes utilisés dans ce mémoire.

## Cadre physique

Nous considérons un corps matériel piézoélectrique déformable qui occupe un domaine borné  $\Omega \subset \mathbb{R}^d (d = 2, 3)$  avec une frontière régulière  $\Gamma$ , partitionnée en trois parties mesurables  $\Gamma_1, \Gamma_2$  et  $\Gamma_3$ , correspondant aux conditions aux limites mécaniques, d'une part, et en deux parties mesurables  $\Gamma_a$  et  $\Gamma_b$  correspondant aux conditions aux limites électriques, d'autre part, telles que  $mes(\Gamma_1) > 0, mes(\Gamma_a) > 0$  et  $\Gamma_3 \subseteq \Gamma_b$ . On note par  $\nu$  la normale unitaire sortante à  $\Gamma$ . Le corps est encastré sur  $\Gamma_1$  dans une structure fixe. Sur  $\Gamma_2$  agissent des tractions surfaciques de densité  $f_2$  et dans  $\Omega$  agissent des forces volumiques de densité  $f_0$  et des charges électriques de densité volumiques  $q_0$ . On suppose que  $f_2$  et  $f_0$  varient très lentement par rapport au temps.

Le corps est soumis à l'action de potentiel nul sur la partie  $\Gamma_a$  de la frontière ainsi qu'à l'action des charges électriques de densité surfacique  $q_2$ , agissent sur la partie  $\Gamma_b$ . Soit  $T > 0$  et soit  $[0, T]$  l'intervalle de temps en question. Le corps est en contact avec ou sans frottement avec une fondation conductive (ou isolatrice) sur la partie  $\Gamma_3$ . Nous supposons que le matériau peut être endommagé durant le contact. On étudie l'évolution de ces propriétés dans l'intervalle de temps  $[0, T]$ , sous l'hypothèse des petites transformations.

Nous désignons par  $\mathbb{S}^d (d = 2, 3)$  l'espace des tenseurs symétriques d'ordre deux sur  $\mathbb{R}$ ; "." et  $\|\cdot\|$  représentent respectivement le produit scalaire et la norme euclidienne sur  $\mathbb{R}^d$  et  $\mathbb{S}^d$ . Ainsi,

$$\begin{aligned} u \cdot v &= u_i v_i; \quad \|v\| = (v, v)^{1/2}, \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^d, \\ \sigma \cdot \tau &= \sigma_{ij} \tau_{ij}; \quad \|\tau\| = (\tau, \tau)^{1/2}, \quad \forall \sigma, \tau \in \mathbb{S}^d, \end{aligned}$$

avec la convention de l'indice muet. Pour un vecteur  $u$ , nous désignons par  $v_\nu$  et  $v_\tau$  les composantes normale et tangentielle

$$v_\nu = v \cdot \nu, \quad v_\tau = v - v_\nu \nu. \quad (1.1)$$

On note par  $u = u(x, t)$  le champ des déplacements,  $\sigma = \sigma(x, t)$  le champ des contraintes,  $\varphi = \varphi(x, t)$  le champ potentiel électrique et par  $\varepsilon(u)$  le champ des déformations linéarisées. Pour simplifier les notations, nous n'indiquons pas explicitement la dépendance des fonctions par rapport à  $x \in \bar{\Omega}$  et  $t \in [0, T]$ .

Pour un champ des contraintes  $\sigma$ , nous notons par  $\sigma_\nu$  et  $\sigma_\tau$  les composantes normale et tangentielle à la frontière donnés par

$$\sigma_\nu = (\sigma \nu)_\nu, \quad \sigma_\tau = (\sigma \nu)_\tau, \quad (1.2)$$

En utilisant (1.1) et (1.2), nous obtenons la relation

$$(\sigma \nu) \cdot u = \sigma_\nu u_\nu + \sigma_\tau u_\tau, \quad (1.3)$$

qui va intervenir tout au long de ce mémoire pour établir les formulations variationnelles des problèmes mécaniques de contact.

En outre,  $\dot{u}$  désigne le champ des vitesses et  $\ddot{u}$  désigne le champ des accélérations. Nous rappelons que les opérateurs de déformation et de divergence sont donnés par

$$\varepsilon(u) = (\varepsilon_{ij}(u)), \quad \varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad \text{Div } \sigma = (\sigma_{ij,j}) \quad \leq i, j \leq d. \quad (1.4)$$

Notons qu'ici et tout au long de la thèse, un indice qui suit une virgule indique une dérivation partielle par rapport à la composante correspondante à la variable spatiale. Dans ce mémoire, le champ électrique est donné par

$$E(\varphi) = -\nabla\varphi, \quad \text{ou } E(\varphi) = (E_i(\varphi)), \quad E_i(\varphi) = -\varphi_{,i}, \quad 1 \leq i \leq d. \quad (1.5)$$

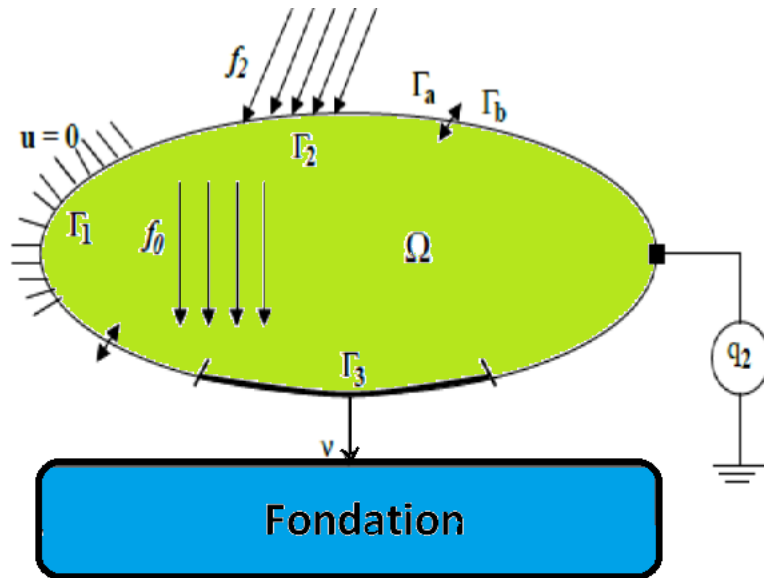


FIGURE 1.1 – Cadre physique

## Modèle mathématique

Le modèle mathématique étudié dans ce mémoire, décrit l'évolution d'un corps dans le cadre physique donné. Les fonctions inconnues du problème sont le champ des déplacements  $u : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ , le champ des contraintes  $\sigma : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{S}^d$ , le champ potentiel électrique  $\varphi : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ , le champ des déplacements électriques  $D : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$  et champ d'endommagement  $\beta : \Gamma_3 \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ .

On sait qu'en général, l'évolution d'un corps matériel est décrite par l'équation de mouvement de Cauchy.

$$\text{Div } \sigma + f_0 = \rho \ddot{u} \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (1.6)$$

où  $\rho : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$  désigne la densité de masse. Le processus d'évolution défini par (1.6) s'appelle processus dynamique. Dans certaines situations, cette équation peut encore se simplifier. Par exemple, dans le cas où le champ des vitesses  $\dot{u}$  varie très lentement par rapport au temps, le terme  $\rho \ddot{u}$  peut être négligé. Dans ce cas, le processus s'appelle quasistatique et l'équation (1.6) s'appelle l'équation d'équilibre et devient

$$\text{Div } \sigma + f_0 = 0 \quad \text{dans } \Omega \times (0, T),$$

L'évolution du corps piézoélectrique est décrite par l'équation d'équilibre pour le champ de déplacements électriques.

$$\text{div } D = q_0 \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (1.7)$$

où "div" est l'opérateur de divergence pour les vecteurs,  $\text{div } D = (D_i, i)$ , et  $q_0$  représente la densité des charges électriques volumiques.

Puisque le corps est encastré sur  $\Gamma_1$ , le champ des déplacements s'annule

$$u = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1 \times (0, T). \quad (1.8)$$

Les conditions aux limites en tractions est

$$\sigma_\nu = f_2 \quad \text{sur } \Gamma_2 \times (0, T), \quad (1.9)$$

le potentiel électrique s'annule sur la partie  $\Gamma_a$  de la frontière

$$\varphi = 0 \quad \text{sur } \Gamma_a \times (0, T), \quad (1.10)$$

tandis que sur  $\Gamma_b$ , une charge électrique de densité  $q_2$  est prescrite,

$$D \cdot \nu = q_2 \quad \text{sur } \Gamma_b \times (0, T). \quad (1.11)$$

Ce modèle piézoélectrique (1.6)-(1.11) sera complété ultérieurement par les conditions aux limites sur la surface de contact  $\Gamma_3$ .

### 1.1.2 Lois de comportement piézoélectrique avec endommagement

Les matériaux piézoélectrique sont caractérisés par le couplage des propriétés mécaniques et électriques. Ce couplage conduit à l'apparition d'un potentiel électrique lorsque l'application des contraintes mécaniques, et inversement, des contraintes mécaniques sont générées lorsqu'un potentiel électrique est appliqué. Un matériau piézoélectrique dont les propriétés mécaniques sont élasto-viscoplastique est appelé matériau électro-élasto-viscoplastique. Nous obtenons une loi de comportement électro-élasto-viscoplastique avec endommagement comme suit

$$\begin{cases} \sigma = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}) + \mathcal{B}\varepsilon(u) - \mathcal{E}^*E(\varphi) \\ \quad + \int_0^t \mathcal{G}(\sigma(s) - \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}(s)) + \mathcal{E}^*E(\varphi(s)), \varepsilon(u(s)), \beta(s)) ds, \\ D = \mathcal{E}\varepsilon(u) + BE(\varphi) \end{cases} \quad (1.12)$$

où les opérateurs  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  sont des tenseur d'ordre quatre et non linéaires ; leurs composantes  $a_{ijkl}$  et  $b_{ijkl}$  s'appellent coefficients de viscosité et élasticité respectivement, et  $\mathcal{G}$  représente une fonction constitutive non linéaire qui décrit le comportement viscoplastique du matériau.  $B$  représente le tenseur de la primitivité électrique. L'endommagement  $\beta$  pour la loi (1.12) causé par des déformations viscoplastiques, est donné par l'inclusion différentielle suivante

$$\dot{\beta} - k\Delta\beta + \partial\Psi_K(\beta) \ni S((\sigma - \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}) + \mathcal{E}^*E(\varphi), \varepsilon(u), \beta) \quad (1.13)$$

L'ensemble des fonctions d'endommagement admissibles  $K$  défini par

$$K = \{\beta \in H^1(\Omega) \mid 0 \leq \beta \leq 1 \text{ p.p dans } \Omega\}$$

Ici et ci-dessous,  $k$  est une constante strictement positive, qui représente le coefficient de diffusion microfissuré,  $\partial\Psi$  est le sous différentiel de la fonction indicatrice  $\Psi_K$  et  $S$  est une fonction constitutive donnée ; qui représente la source de l'endommagement dans le système.

Nous utiliserons la loi de comportement (1.12) dans le deuxième chapitre de ce mémoire.

Lorsque  $\mathcal{G} = 0$ , et pour l'endommagement  $\beta$  causé par des déformations élastiques, (1.12) se réduit à une loi de comportement de matériau électro-viscoélastique avec endommagement

$$\begin{cases} \sigma(t) = \mathcal{A}(\varepsilon(\dot{u}(t))) + \mathcal{B}(\varepsilon(u(t)), \beta(t)) - \mathcal{E}^*E(\varphi(t)), \\ D = \mathcal{E}\varepsilon(u) + BE(\varphi), \end{cases} \quad (1.14)$$

où l'endommagement  $\beta$  est donné par l'inclusion différentielle suivante

$$\dot{\beta} - k\Delta\beta + \partial\Psi_K(\beta) \ni S(\varepsilon(u), \beta). \quad (1.15)$$

Nous utiliserons le loi de comportement (1.14) dans le troisième chapitre. Finalement, afin de compléter le modèle mathématique qui décrit l'évolution du corps, il faut préciser les conditions aux limites sur  $\Gamma_3$ , c'est l'objet des conditions de contact et lois avec ou sans frottement que nous décrirons dans le paragraphe suivant.

### 1.1.3 Conditions aux limites de contact et lois de frottement

Les conditions aux limites sur la surface de contact sont d'écrites à la fois en direction de la normale et dans le plan tangent, ces dernières étant appelées condition de frottement. En direction de la normale nous pouvons distinguer le contact unilatéral (lorsque l'obstacle est rigide), bilatéral (lorsqu'il n'y a pas de séparation entre le corps et l'obstacle), de compliance normale où assure (lorsque l'obstacle est déformable). A part le cas limite lorsque la contrainte tangentielle est nulle (le cas sans frottement).

#### Condition de contact avec assure avec où sans frottement.

Nous avons maintenant de d'écrire les conditions aux limites sur la surface de contact  $\Gamma_3$ . Nous introduisons la fonction de l'usure  $w : \Gamma_3 \times [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}_+$  qui mesure l'usure de la surface. L'usure est identifié comme le profondeur normale du matériau qui est perdue. le corps est en contact bilatéral avec la fondation, il en résulte que

$$v_\nu = -w \text{ sur } \Gamma_3. \quad (1.16)$$

Ainsi, l'emplacement du contact se développe avec l'usure. Nous rappelons que l'effet de l'usure est sur  $\Gamma_3$  et donc, il est naturel de penser que  $v_\nu \leq 0$  sur  $\Gamma_3$ , donc  $w > 0$  sur  $\Gamma_3$ . L'évolution de l'usure de la surface de contact est régie par une version simplifiée de la loi d'Archard

$$\dot{w} = -k_1 \sigma_\nu |\dot{u}_\tau - v^*|,$$

où  $k_1 > 0$  est un coefficient d'usure,  $v^*$  est la vitesse tangentielle de la fondation et  $|\dot{u}_\tau - v^*|$  représente la vitesse de glissement entre la surface de contact et la fondation. Nous supposons que le mouvement de la fondation est uniforme, à savoir,  $v^*$  ne varie pas dans le temps. on a la loi de Archard

$$\dot{w} = -k_1 v^* \sigma_\nu. \quad (1.17)$$

L'utilisation de la loi simple (1.17) évite certains difficultés mathématique dans l'étude du problème quasistatique de contact électro-élasto-viscoplastique. Soit  $\zeta = k_1 v^*$  et  $\alpha = 1/\zeta$ ; En utilisant (1.16) et (1.17), nous avons

$$\sigma_\nu = \alpha \dot{w} \quad (1.18)$$

Nous modélisons le contact avec frottement sec de Coulomb entre le corps de l'électro-viscoélastique et la fondation comme suit

$$\|\sigma_\tau\| = \mu |\sigma_\nu|, \quad \sigma_\tau = -\lambda (\dot{u}_\tau - v^*), \quad \lambda \geq 0, \quad (1.19)$$

où  $\mu > 0$  est le coefficient de frottement. Naturellement, si  $\dot{w} \geq 0$ . Ainsi, il résulte de (1.16) et (1.17) que  $\dot{w} \leq 0$  et  $\sigma_\nu \leq 0$  sur  $\Gamma_3$ . Ainsi, les conditions (1.18) et (1.19) impliquent

$$-\sigma_\nu = \alpha \|\dot{w}\|, \quad \|\sigma_\tau\| = -\mu \sigma_\nu, \quad \sigma_\tau = -\lambda (\dot{u}_\tau - v^*), \quad \lambda \geq 0, \quad (1.20)$$

Dans le cas sans frottement, les mouvements tangentiels sont libres et la loi (1.19) devient

$$-\sigma_\nu = \alpha \|\dot{w}\|, \quad \sigma_\tau = 0 \quad (1.21)$$

### 1.1.4 Conditions électriques à la surface de contact

Dans cette section nous allons énoncer les conditions de contact électrique, associées aux problèmes électro-mécaniques, sur la partie  $\Gamma_3$  de la surface. Nous supposons que la fondation est électriquement conductive et son potentiel est maintenu à  $\varphi_0$ . La condition électrique sur  $\Gamma_3$  est donnée par

$$D \cdot \nu = \psi(u_\nu - l)\delta(\varphi - \varphi_0) \text{ sur } \Gamma_3 \times (0, T). \quad (1.22)$$

où  $\psi$  et  $\delta$  sont des fonctions données qui seront décrites ultérieurement. Cette condition représente une condition régularisée qui peut être obtenue à partir des considérations suivantes.

Lorsqu'il n'y a pas de contact en un point sur la surface (i.e.  $u_\nu < l$ ), l'interstice entre le corps et la base est supposé être isolant (disons qu'il est rempli d'air) et la composante normale du champ de déplacement électrique s'annule pour qu'il n'y ait aucune charge électrique libre sur la surface. Ainsi,

$$u_\nu < l \Rightarrow D \cdot \nu = 0. \quad (1.23)$$

Durant le processus de contact, (i.e. quand  $u_\nu > l$ ) la composante normale du champ de déplacement électrique où la charge électrique libre est supposé être proportionnelle à la différence de potentiel entre la surface du corps et la fondation, avec une constante positive  $k$  comme facteur de proportionnalité. Ainsi,

$$u_\nu \geq l \Rightarrow D \cdot \nu = k(\varphi - \varphi_0). \quad (1.24)$$

Combinons (1.23), (1.24) pour obtenir

$$D \cdot \nu = k \chi_{[0, \infty)}(u_\nu - l) (\varphi - \varphi_0), \quad (1.25)$$

où  $\chi_{[0, \infty)}$  est la fonction caractéristique de l'intervalle  $[0, \infty)$ , qui est donnée par

$$\chi_{[0, \infty)}(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } r < 0, \\ 1 & \text{si } r \geq 0. \end{cases}$$

La condition (1.25) décrit le contact électrique parfait. Pour la rendre plus réaliste, nous la régularisons par la condition (1.22) dans laquelle  $\delta$  est une fonction de troncation,

$$\delta(s) = \begin{cases} -L_\delta & \text{si } s < -L_\delta, \\ s & \text{si } -L_\delta \leq s \leq L_\delta, \\ L_\delta & \text{si } s > L_\delta, \end{cases} \quad (1.26)$$

où  $L_\delta$  est une constante positive très grande. De cette façon, la différence  $\varphi - \varphi_0$  est remplacée par  $\delta(\varphi - \varphi_0)$ . Notons que cette troncation ne pose aucune limitation pratique sur l'applicabilité du modèle puisque  $L_\delta$  peut être arbitrairement grand (voir figure 1.2) et donc dans les applications  $\delta(\varphi - \varphi_0) = \varphi - \varphi_0$ . Les raisons de la régularisation (1.22) de (1.25) sont mathématiques. Premièrement, nous avons besoin d'éviter les discontinuités dans les charges électriques lorsque le contact

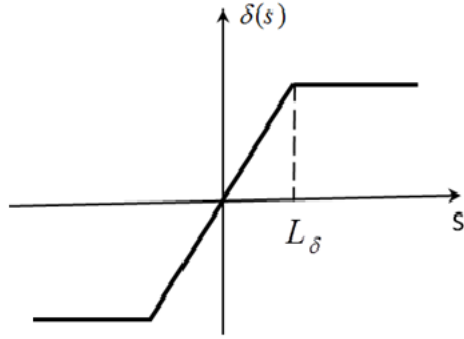


FIGURE 1.2 – Représentation graphique de la fonction  $\delta$

est établi et donc nous régularisons la fonction  $k\chi_{[0,\infty)}$  dans (1.25) par une fonction Lipschitzienne  $\psi$ . Un choix possible est l'exemple suivant :

$$\psi(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } r < 0, \\ k\lambda r & \text{si } 0 \leq r \leq \frac{1}{\lambda}, \\ k & \text{si } r > \frac{1}{\lambda}, \end{cases} \quad (1.27)$$

où  $\lambda > 0$  est un paramètre assez grand.

Ce choix veut dire que durant le processus du contact, la conductivité électrique augmente avec

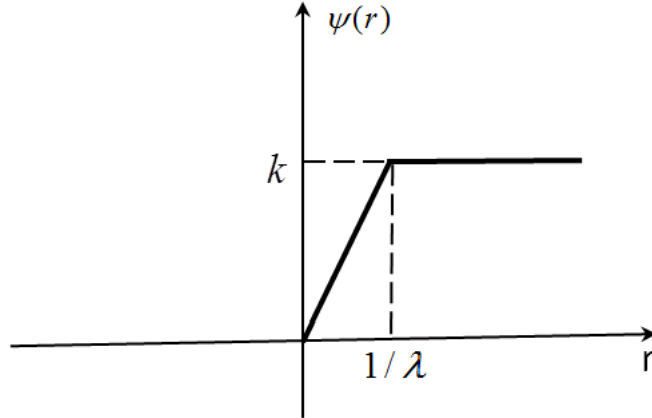


FIGURE 1.3 – Représentation graphique de la fonction  $\psi$

le contact à travers les aspérités de la surface, et se stabilise quand la pénétration  $u_\nu - l$  atteint la valeur  $\frac{1}{\lambda}$ . Deuxièmement, nous avons besoin du terme  $\delta(\varphi - \varphi_0)$  pour rendre le terme  $\varphi - \varphi_0$  borné (voir figure 1.3). Notons que lorsque  $\psi \equiv 0$  dans (1.22), nous obtenons

$$D \cdot \nu = 0, \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (1.28)$$

ce qui découple les problèmes électriques et mécaniques sur la surface de contact. La condition (1.24) modélise le cas où l'obstacle est un isolant parfait et a été utilisée dans [18, 19, 12]. La

condition (1.22) à la place de (1.28), introduit un couplage fort entre les conditions aux limites mécaniques et électriques et mène vers un nouveau modèle mathématique, non standard. Elle sera utilisée dans le chapitre 3 de la thèse. Par ailleurs, la condition (1.28) va être utilisée dans le chapitre 2 de ce mémoire où nous avons supposé que la base est isolatrice (i.e.  $\psi \equiv 0$ ).

## 1.2 Outils Mathématiques

Dans cette section, nous rappelons quelques résultats concernant les espaces fonctionnels, les équations et inéquations variationnelles, le lemme de Gronwall et quelques théorèmes qui seront utiliser pour les démonstrations.

### 1.2.1 Cadre fonctionnel vectoriel

Introduisons les espaces de Hilbert suivants, associés aux inconnues mécaniques  $u$  et  $\sigma$

$$\begin{aligned} H &= \{u = (u_i) | u_i \in L^2(\Omega)\}, & \mathcal{H} &= \{\sigma = (\sigma_{ij}) | \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \in L^2(\Omega)\}, \\ H_1 &= \{u = (u_i) | u_i \in H^1(\Omega)\}, & \mathcal{H}_1 &= \{\sigma \in \mathcal{H} | \sigma_{ij,j} \in H\}. \end{aligned}$$

Les espaces  $H, \mathcal{H}, H_1$  et  $\mathcal{H}_1$  sont des espaces de Hilbert réels munis des produits scalaires donnés par

$$\begin{aligned} (u, v)_H &= \int_{\Omega} u_i v_i dx, & (u, v)_{\mathcal{H}} &= \int_{\Omega} \sigma_{ij} \tau_{ij} dx, \\ (u, v)_{H_1} &= (u, v)_H + (\varepsilon(u), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}}, & (u, v)_{\mathcal{H}_1} &= (\sigma, \tau)_{\mathcal{H}} + (Div \sigma, Div \tau)_H, \end{aligned}$$

respectivement, où  $\varepsilon : H_1 \rightarrow \mathcal{H}$  et  $Div : \mathcal{H}_1 \rightarrow H$  sont les opérateurs de déformation et de divergence définis par (1.4). Pour  $\sigma$  assez régulier nous avons la formule suivante (Formule de Green) :

$$(\sigma, \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + (Div \sigma, v)_H = \int_{\Gamma} \sigma \nu \cdot v da, \quad \forall v \in H_1.$$

Nous introduisons le sous-espace fermé de  $H_1$  définie par

$$V = \{v \in H^1 / v = 0 \text{ sur } \Gamma_1\}.$$

Les normes sur les espaces  $H, \mathcal{H}, H_1$  et  $\mathcal{H}_1$  sont notées par  $\|\cdot\|_H, \|\cdot\|_{\mathcal{H}}, \|\cdot\|_{H_1}$  et  $\|\cdot\|_{\mathcal{H}_1}$ , respectivement.

Puisque  $mes(\Gamma_1) > 0$ , l'inégalité de Korn s'applique sur  $V$  et il existe une constante  $C_k > 0$ , ne dépendant que de  $\Omega$  et  $\Gamma_1$ , telle sorte que

$$\|\varepsilon(v)\|_{\mathcal{H}} \geq C_k \|v\|_{H^1(\Omega)^d} \quad v \in V.$$

Sur l'espace  $V$  on considère le produit scalaire et la norme associée données par

$$(u, v)_V = (\varepsilon(u), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}}, \quad \|v\|_V = \|\varepsilon(v)\|_{\mathcal{H}} \quad \forall u, v \in V. \quad (1.29)$$

Il se ensuit que  $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$  et  $\|\cdot\|_V$  sont des normes équivalentes sur  $V$  et par conséquent,  $(V, \|\cdot\|_V)$  est un véritable espace de Hilbert. En outre, par le théorème de Sobolev Trace et (1.29), il existe une constante  $C_0 > 0$ , ne dépend que de  $\Omega, \Gamma_1$  et  $\Gamma_3$  de telle sorte que

$$\|v\|_{L^2(\Gamma_3)^d} \leq C_0 \|v\|_V \quad \forall v \in V. \quad (1.30)$$

Nous introduisons également les espaces :

$$W = \{\phi \in H^1(\Omega) : \phi = 0 \text{ on } \Gamma_a\},$$

$$\mathcal{W} = \{\mathbf{D} = (D_i) : D_{(i)} \in L^2(\Omega), \operatorname{div} \mathbf{D} \in L^2(\Omega)\},$$

où  $\operatorname{div} \mathbf{D} = (D_{i,i})$ . Les espaces  $W$  et  $\mathcal{W}$  sont des espaces réel de Hilbert avec la produits intérieure donnée par

$$(\varphi, \phi)_W = \int_{\Omega} \nabla \varphi \cdot \nabla \phi dx,$$

$$(\mathbf{D}, \mathbf{E})_{\mathcal{W}} = \int_{\Omega} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} dx + \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{D} \cdot \operatorname{div} \mathbf{E} dx.$$

Les normes associées seront désignés par  $\|\cdot\|_W$  et  $\|\cdot\|_{\mathcal{W}}$ , respectivement. Par ailleurs, lorsque  $\mathbf{D} \in \mathcal{W}$  est une fonction régulière, la formule de type de Green suivante est vérifiée :

$$(\mathbf{D}, \nabla \phi)_H + (\operatorname{div} \mathbf{D}, \phi)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Gamma} \mathbf{D} \cdot \nu \phi da \quad \forall \phi \in H^1(\Omega).$$

Puisque  $\operatorname{mes}(\Gamma_a) > 0$ , l'inégalité Friedrichs-Poincaré est satisfaite, ainsi,

$$\|\nabla \phi\|_H \geq C_F \|\phi\|_{H^1(\Omega)} \quad \forall \phi \in W, \quad (1.31)$$

où  $C_F > 0$  est une constante qui ne dépend que de  $\Omega$  et  $\Gamma_a$ . Il s'ensuit de (1.31) que  $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$  et  $\|\cdot\|_W$  sont des normes équivalentes sur  $W$  et donc  $(W, \|\cdot\|_W)$  est un espace réel de Hilbert . De plus, par le théorème de trace de Sobolev, il existe une constante  $\tilde{C}_0$  dépendant uniquement de  $\Omega$ ,  $\Gamma_a$  et  $\Gamma_3$  telle que

$$\|\zeta\|_{L^2(\Gamma_3)} \leq \tilde{C}_0 \|\zeta\|_W, \quad \forall \zeta \in W. \quad (1.32)$$

## 1.2.2 Espaces des fonctions à valeurs vectorielles

Soit  $0 < T < \infty$  et soit  $(X, \|\cdot\|_X)$  un espace de Banach réel. Nous notons par  $C_c(0, T; X)$  l'ensemble des fonctions continues à support compact dans  $(0, T)$  à valeurs dans  $X$ .

**Définition 1.2.1** . Une fonction  $f : [0, T] \rightarrow X$  est dite mesurable s'il existe un sous ensemble  $E \subset [0, T]$  de mesure nulle et une suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de fonctions appartenant à  $C_c(0, T; X)$  telle que  $\|f_n(t) - f(t)\|_X \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow \infty$ , pour tout  $t \in [0, T]/E$ .

**Définition 1.2.2** . Une fonction  $f : [0, T] \rightarrow X$  est dite fortement dérivable a  $t_0 \in (0, T)$  s'il existe un élément  $\frac{df}{dt}(t_0) \in X$  appelé la dérivée forte de  $f$  a  $t_0$ , tel que

$$\operatorname{Lim}_{h \rightarrow 0} \left\| \frac{1}{h} (f(t_0 + h) - f(t_0)) - \frac{df}{dt}(t_0) \right\|_X = 0. \quad (1.33)$$

**Définition 1.2.3** . Une fonction  $f : [0, T] \rightarrow X$  est dite intégrable s'il existe une suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de fonctions appartenant à  $C_c(0, T; X)$  telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^t \|(f_n(t) - f(t))\|_X dt = 0. \quad (1.34)$$

**Théorème 1.2.1 (Bochner)** Une fonction  $f : [0, T] \rightarrow X$  est dite mesurable et intégrable si et seulement si  $x \rightarrow \|f(x)\|_X : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}_+$  est intégrable. Dans ce cas,

$$\left\| \int_0^T f dt \right\|_X \leq \int_0^T \|f\|_X dt. \quad (1.35)$$

Soit  $1 \leq p \leq \infty$  l'espace de Lebesgue  $L^p(0, T; X)$  est l'ensemble des classes de fonctions  $f : (0, T) \rightarrow X$  mesurables telles que l'application  $t \rightarrow \|f(t)\|_X$  appartient à  $L^p(0, T)$  On sait que  $L^p(0, T; X)$  est un espace vectoriel normé avec la norme

$$\|f\|_{L^p(0, T; X)} = \left( \int_0^T \|f(t)\|_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \text{si } 1 \leq p < \infty, \quad (1.36)$$

$$\|f\|_{L^\infty(0, T; X)} = \inf\{C > 0 : \|f(t)\|_X \leq C, \text{ p.p. } t \in (0, T)\}, \quad \text{si } p = \infty. \quad (1.37)$$

par ailleurs, on a les résultats suivants.

**Proposition 1.2.1**

(1)  $L^p(0, T; X)$  ( $1 \leq p < \infty$ ) est un espace de Banach.

(2) Si  $X$  est un espace de Hilbert avec le produit scalaire  $(\cdot, \cdot)_X$  alors  $L^2(0, T; X)$  est aussi un espace de Hilbert avec le produit scalaire

$$(u, v)_{L^2(0, T; X)} = \int_0^T (u(t), v(t))_X dt.$$

(3)  $L^r(0, T; X) \subset L^q(0, T; X)$  avec injection continue  $1 \leq q \leq r \leq \infty$ .

(4) Si  $X$  est un espace de Hilbert, alors

$$L^p(0, T; X)' \subset L^q(0, T; X) \quad \text{si } 1 < p, q < \infty, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

$$L^1(0, T; X)' \subset L^\infty(0, T; X),$$

où  $L^p(0, T; X)'$  représente le dual de l'espace  $L^p(0, T; X)$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ .

**Définition 1.2.4** . Soit  $u, v \in L^1(0, T; X)$ . La fonction  $v$  s'appelle la dérivée généralisée d'ordre  $n$  de  $u$  sur  $(0, T)$  si

$$\int_0^T \varphi^{(n)}(t) u(t) dt = (-1)^n \int_0^T \varphi(t) v(t) dt, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(0, T). \quad (1.38)$$

$C_c^\infty(0, T)$  étant l'espace des fonctions réelles indéfiniment dérivables, à support compact dans  $(0, T)$ . Nous écrivons  $v = \dot{u}$  pour  $n = 1$  et  $v = u^{(n)}$  pour  $n \geq 2$ .

Soit  $1 \leq p \leq \infty$ . L'espace de Sobolev  $W^{1,p}(0, T; X)$  est l'espace des fonctions  $u : [0, T] \rightarrow X$  telles que  $u \in L^p(0, T; X)$  et  $\dot{u} \in L^p(0, T; X)$  et  $W^{1,p}(0, T; X)$  est un espace de Banach muni de la norme

$$\|u\|_{W^{1,p}(0,T;X)} = \|u\|_{L^p(0,T;X)} + \|\dot{u}\|_{L^p(0,T;X)}.$$

**Définition 1.2.5** Une fonction  $f : [0, T] \rightarrow X$  est dite absolument continue si quelque soit  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  tel que pour toute suite d'intervalles  $(a_j, b_j)$  disjoints, inclus dans  $[0, T]$ , tels que  $\sum_j (b_j - a_j) < \delta$  on a  $\sum_j \|f(b_j) - f(a_j)\|_X < \varepsilon$

Maintenant nous rappelons le lien entre les fonctions absolument continues et les fonctions de l'espace  $W^{1,p}(0, T; X)$ .

**Théorème 1.2.2** . Soit  $1 \leq p \leq \infty$  un espace de banach réflexif et soit  $u \in L^p(0, T; X)$ . Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (1)  $u \in W^{1,p}(0, T; X)$ .
- (2)  $u$  admet un représentant absolument continu presque partout dérivable ayant la dérivée forte dans  $L^p(0, T; X)$ .
- (3) Il existe  $u_0 \in X$  et  $g \in L^p(0, T; X)$  telles que  $u(t) = u_0 + \int_0^t g(s)ds \quad \forall t \in [0, T]$ .

Il découle de la démonstration du Théorème 1.2.2 que, si  $X$  est un espace réflexif, alors toute fonction  $u \in W^{1,p}(0, T; X)$  est fortement dérivable p.p sur  $(0, T)$  et  $\dot{u} = \frac{du}{dt}$  p.p sur  $(0, T)$  par ailleurs  $W^{1,1}(0, T; X)$  coïncide avec l'ensemble des fonctions lipschitziennes  $u : [0, T] \rightarrow X$ .

Étant donné un entier  $k \geq 2$  et un réel  $1 \leq p \leq \infty$  on définit par récurrence l'espace

$$W^{k,p}(0, T; X) = \{u \in W^{k-1,p}(0, T; X); \dot{u} \in W^{k-1,p}(0, T; X)\}.$$

on vérifie aisément que  $u \in W^{k,p}(0, T; X)$  si et seulement s'il existe  $k$  fonctions  $g_1, \dots, g_k \in L^\infty(0, T; X)$  telles que

$$\int_0^T u(t)\varphi^{(j)}(t)dt = (-1)^j \int_0^T g_j(t)\varphi(t)dt \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(I), \forall j = 1, 2, \dots, k$$

où  $\varphi^{(j)}$  désigne la dérivée d'ordre  $j$  de  $\varphi$ . On peut donc considérer les dérivées successives  $\dot{u} = g_1, u^{(2)} = g_2, \dots, u^{(k)} = g_k$ . L'espace  $W^{k,p}(0, T; X)$  est un espace de banach muni de la norme

$$\|u\|_{W^{k,p}(0,T;X)} = \|u\|_{L^p(0,T;X)} + \sum_{\alpha=1}^{\alpha=k} \|u^{(\alpha)}\|_{L^p(0,T;X)}.$$

Nous dénotons aussi par  $C([0, T]; X)$  et  $C^1([0, T]; X)$  les espaces des fonctions continues et continûment différentiables sur  $[0, T]$  à valeurs dans  $X$ , respectivement, avec les normes

$$\begin{aligned} \|x\|_{C([0,T];X)} &= \text{Max}_{t \in [0,T]} \|x(t)\|_X, \\ \|x\|_{C^1([0,T];X)} &= \text{Max}_{t \in [0,T]} \|x(t)\|_X + \text{Max}_{t \in [0,T]} \|\dot{x}(t)\|_X \end{aligned} \tag{1.39}$$

Pour plus de détails sur les résultats résumés dans ce paragraphe nous renvoyons le lecteur par exemple à [8].

### 1.2.3 Éléments d'analyse non linéaire dans les espaces de Hilbert

Dans cette section nous rappelons quelques éléments d'analyse dans les espaces de Hilbert et quelques résultats concernant les équations et les inéquations variationnelles d'évolution paraboliques du première ordre qui interviennent dans l'étude des problèmes mécaniques. Puis nous rappelons le théorème de point fixe de Banach.

#### Equations et inéquations variationnelles d'évolution

Nous commençons ce paragraphe par un bref rappel sur les opérateurs fortement monotones et de Lipschitz. Pour cela, on considère un espace de Hilbert  $V$  muni du produit scalaire  $(\cdot, \cdot)_V$  et la norme associée  $\|\cdot\|_V$  et  $V'$  l'espace dual de  $V$  en notant par  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{V' \times V}$  pour le produit de dualité entre  $V$  et  $V'$ .

**Définition 1.2.6** . *L'opérateur  $A : V \rightarrow V'$  est dite :*

(a) *monotone si*

$$\langle Au - Av, v - u \rangle_{V \times V'} \geq 0 \quad \forall u, v \in V;$$

(b) *fortement monotone s'il existe  $m > 0$  tel que*

$$\langle Au - Av, u - v \rangle_{V \times V'} \geq m \|u - v\|_V^2 \quad \forall u, v \in V;$$

(c) *de Lipschitz s'il existe  $L > 0$*

$$\|Au - Av\|_{V'} \leq L \|u - v\|_V \quad \forall u, v \in V.$$

(d) *est dite hemicontinu si pour toute suite numérique  $(\lambda_n) \subset \mathbb{R}$  telle que  $\lambda_n \rightarrow \lambda$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$  on a*

$$\langle A(u + \lambda_n v), w \rangle_{V' \times V} \rightarrow \langle A(u + \lambda v), w \rangle_{V' \times V} \quad \text{quand } n \rightarrow +\infty.$$

En utilisant la définition précédente, on a le résultat suivant :

**Proposition 1.2.2** . *Tout opérateur de Lipschitz est hemicontinu.*

**Théorème 1.2.3** . *Soit  $V \subset H \subset V'$  un triplet de Gelfand. Soit  $A : V \rightarrow V'$  un opérateur hemicontinu et monotone qui satisfait.*

$$\langle Av, v \rangle_{V' \times V} \geq \omega \|v\|_V^2 + \lambda, \quad \forall v \in V, \tag{1.40}$$

$$\|Av\|_{V'} \leq C_1 (\|v\|_V + 1), \quad \forall v \in V \tag{1.41}$$

*Pour des constantes  $\omega > 0$ ,  $C_1 > 0$ , et  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Etant donnée  $u_0 \in H$  et  $f \in L^2(0, T; V')$ , alors il existe une fonction unique  $u$  satisfait*

$$\begin{aligned} u &\in L^2(0, T; V) \cap C([0, T]; H), \quad \dot{u} \in L^2(0, T; V'), \\ \dot{u}(t) + Au(t) &= f(t) \text{ p.p.t } \in (0, T), \\ u(0) &= u_0. \end{aligned}$$

**Théorème 1.2.4** . Soit  $V \subset H \subset V'$  est un triple de Gelfand,  $K$  est un sous-ensemble fermé non vide et convexe de  $V$ , et soit  $A : V \rightarrow V'$  est un opérateur linéaire, symétrique et continu qui satisfait

$$\text{il existe } C_2 \in \mathbb{R} \text{ et } C_3 > 0 \text{ tel que } \langle Av, v \rangle_{V' \times V} + C_2 \|v\|_H^2 \geq C_3 \|v\|_V^2, \quad \forall v \in V. \quad (1.42)$$

Alors, pour tout  $u_0 \in K$  et  $f \in L^2(0, T; V')$ , il existe une unique fonction  $u$  qui satisfait

$$u \in L^2(0, T; V) \cap C(0, T; H) \cap W^{1,2}(0, T; V') \quad (1.43)$$

$$u(t) \in K, \quad \forall t \in [0, T], \quad (1.44)$$

$$\begin{aligned} & \langle \dot{u}(t), v - u(t) \rangle_{V' \times V} + \langle Au(t), v - u(t) \rangle_{V' \times V} \\ & \geq \langle f(t), v - u(t) \rangle_{V' \times V}, \quad \forall v \in K, \text{ p.p. } t \in (0, T), \end{aligned} \quad (1.45)$$

$$u(0) = u_0. \quad (1.46)$$

Si  $u_0 \in K$  et  $f \in L^2(0, T; H)$ , alors il existe une unique fonction  $u$  qui satisfait (1.44)-(1.46) et vérifie

$$u \in W^{1,2}(0, T; H) \cap L^2(0, T; V) \quad (1.47)$$

Les démonstrations de deux théorèmes précédentes peuvent être trouvées par exemple dans [4, 5].

### Théorème de point fixe de Banach

Le théorème de point fixe de Banach va être utilisé plus tard dans cette thèse pour démontrer l'existence et l'unicité. Soit  $X$  un espace de Banach muni de la norme  $\|\cdot\|_X$ ,  $K \subset X$  une partie de  $X$  et soit  $\Lambda : K \rightarrow X$  un opérateur défini sur  $K$ . On s'intéresse à l'existence d'une solution de l'équation

$$\Lambda(u) = u, \quad u \in K \quad (1.48)$$

Une telle solution de (1.48) s'appelle un point fixe de  $\Lambda$  dans  $K$ .

**Théorème 1.2.5** . (de point fixe de Banach) Soit  $K$  une partie non vide et fermé de l'espace de Banach  $X$  et soit  $\Lambda : K \rightarrow K$  une contractante, i.e,  $\exists k \in ]0, 1[$  tel que

$$\|\Lambda(u) - \Lambda(v)\|_X \leq k \|u - v\|_X, \quad u, v \in K.$$

Alors il existe un unique élément  $u \in K$  tel que  $\Lambda(u) = u$ , i.e,  $\Lambda$  possède un point fixe unique dans  $K$

Nous allons ainsi utiliser une version du théorème de point fixe de Banach que nous présentons ci-dessus.

Pour cela, nous rappelons que les puissances de l'opérateur  $\Lambda$  sont définies récursivement par

$$\Lambda^n = \Lambda(\Lambda^{n-1}) \quad \text{pour } n \geq 2.$$

**Théorème 1.2.6** . Sous les mêmes conditions du Théorème 1.2.5, on suppose que  $\Lambda^n$  est une contractante pour un certain entier  $n \geq 2$ . Alors  $\Lambda$  admet un point fixe unique dans  $K$ .

## 1.2.4 Compléments divers

Nous rappelons ici les lemmes classiques du type Gronwall qui interviennent dans de nombreux problèmes de majoration et d'estimation d'erreur, en particulier pour établir l'unicité de la solution. Pour avoir plus de détails sur les rappels figurant dans cette section, on pourra consulter par exemple [11].

### Lemmes de type Gronwall

**Lemme 1.2.1** . Soient  $m, n \in C([0, T] : \mathbb{R})$  telles que  $m(t) \geq 0$  et  $n(t) \geq 0$  pour tout  $t \in [0, T]$  et soit  $a \geq 0$  une constante, et  $\phi \in C([0, T] : \mathbb{R})$ . est une fonction telle que

(1) Si

$$\phi(t) \leq a + \int_0^t m(s)ds + \int_0^t n(s)\phi(s)ds, \quad \forall t \in [0, T],$$

alors

$$\phi(t) \leq (a + \int_0^t m(s)ds)e^{\int_0^t n(s)ds}, \quad \forall t \in [0, T].$$

(2) Si

$$\phi(t) \leq m(t) + a \cdot \int_0^t \phi(s)ds \quad \forall t \in [0, T],$$

alors

$$\int_0^t \phi(s)ds \leq e^{aT} \cdot \int_0^t m(s)ds \quad \forall t \in [0, T],$$

pour le cas particulier  $m = 0$  la partie (1) de ce lemme devient

**Corollaire 1.2.1** . Soit  $n \in C([0, T] : \mathbb{R})$  telle que  $n(t) \geq 0$  pour tout  $t \in [0, T]$  et soit  $a \geq 0$ . une constante, et  $\phi \in C([0, T] : \mathbb{R})$  est une fonction telle que

$$\phi(t) \leq a + \int_0^t n(s)\phi(s)ds, \quad \forall t \in [0, T],$$

alors

$$\phi(t) \leq a \cdot \exp\left(\int_0^t n(s)ds\right), \quad \forall t \in [0, T],$$

Le corollaire 1.2.1 est souvent utilisé pour montrer l'unicité de la solution, de la façon suivante. On suppose deux solutions, en notant par  $\phi$  la norme de la différence entre ces solutions, on essaie ensuite de majorer  $\phi$  sous la forme

$$\phi(t) \leq \int_0^t n(s)\phi(s)ds, \quad \forall t \in [0, T],$$

avec une certaine fonction  $n \geq 0$ . En appliquant corollaire 1.2.1 donne immédiatement la nullité de  $\phi$ .

## Sous différentiabilité

Nous considérons partout dans ce paragraphe que  $X$  est un espace normé,  $X'$  l'espace dual de  $X$  et  $K$  un sous-ensemble de l'espace  $X$ .

**Définition 1.2.7** . On appelle fonction indicatrice de  $K$  , la fonction  $\chi_K$  définie par

$$\chi_K = \begin{cases} 0 & \text{si } u \in K, \\ +\infty & \text{si } u \notin K \end{cases} \quad (1.49)$$

Il est important d'introduire des notions telles que la sous-différentiabilité et le sous-gradient d'une fonction. La notion de sous-différentiabilité intervient fréquemment en mécanique et notamment dans la mécanique du contact.

**Définition 1.2.8** . Soit une fonction  $j : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  et  $u$  un élément de  $X$  tel que  $j(u) \neq \pm\infty$ .

Le sous-différentiel de  $j$  en  $u$ , noté  $\partial j(u)$  est l'ensemble de  $X'$  défini par

$$\partial j(u) = \{u' \in X' : j(v) \geq j(u) + \langle u', v - u \rangle_{X' \times X}, \quad \forall v \in X\}. \quad (1.50)$$

Tout élément  $u'$  de l'ensemble  $\partial j(u)$  est appelé sous-gradient de  $j$  en  $u$ . La fonction  $j$  est dite sous-différentiable en  $u$  si  $\partial j(u) \neq \emptyset$ , et on dit sous-différentiable si elle l'est en tout point  $u$  de l'espace  $X$ .

Dans le cas d'un espace de Hilbert  $X$ , le sous-différentiel de  $j$  en  $u$  peut aussi être écrit comme

$$\partial j(u) = \{u' \in X : j(v) \geq j(u) + (u', v - u)_X, \quad \forall v \in X\}.$$

Maintenant nous supposons que  $K$  est un convexe non vide. Nous considérons la fonction indicatrice  $\chi_K$  de l'ensemble  $K$ . Nous avons de suite que si  $u \notin K$  alors  $\partial \chi_K(u) = \emptyset$ . Supposons alors que  $u \in K$ . Il vient que si  $u' \in \partial \chi_K(u)$  alors  $\langle u', v - u \rangle_{X' \times X} \leq 0$ ,  $\forall v \in K$ .

Nous pouvons ainsi caractériser le sous-différentiel  $\partial \chi_K$  d'une fonction indicatrice  $\Psi_K$  d'un ensemble convexe non vide

$$\partial \Psi_K(u) = \{u' \in X' : \langle u', v - u \rangle_{X' \times X} \leq 0, \quad \forall v \in K\} \quad (1.51)$$

# Chapitre 2

## Problème électro-élasto-viscoplastique

Nous décrivons dans ce chapitre un modèle mathématique dans un processus quasistatique d'un problème de contact entre un corps piézoélectrique et une fondation isolatrice déformable, nous supposons que le contact est avec condition d'usure et se modélise avec frottement.

Ce chapitre est structuré en 3 sections. Dans la première section, nous écrivons le problème électromécanique et nous précisons les hypothèses adéquates sur les données. Ensuite, dans la section 2 nous obtenons la formulation faible. Puis dans la section 3 nous énonçons un théorème sur l'existence d'une solution faible unique du problème, et nous le prouvons.

### 2.1 Formulation mécanique du problème et hypothèses

#### Problème P<sup>1</sup> :

Trouver le champ des déplacements  $u : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ , le champ des contraintes  $\sigma : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{S}^d$ , le champ de potentiel électrique  $\varphi : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ , le champ des déplacements électriques  $D : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ , et le champ d'endommagement  $\beta : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  tels que

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}(t)) + \mathcal{B}\varepsilon(u(t)) - \mathcal{E}^*E(\varphi(t)) \\ &\quad + \int_0^t \mathcal{G}(\sigma(s) - \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}(s)) + \mathcal{E}^*E(\varphi(s)), \varepsilon(u(s)), \beta(s)) ds \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$D = \mathcal{E}\varepsilon(u) + BE(\varphi) \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (2.2)$$

$$\text{Div } \sigma + f_0 = 0 \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (2.3)$$

$$\text{div } D - q_0 = 0 \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (2.4)$$

$$\dot{\beta} - k\Delta\beta + \partial\Psi_K(\beta) \ni S(\sigma(t) - \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}(t)) + \mathcal{E}^*E(\varphi(t)), \varepsilon(u), \beta) \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (2.5)$$

$$u = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1 \times (0, T), \quad (2.6)$$

$$\sigma\nu = f_2 \quad \text{sur } \Gamma_2 \times (0, T), \quad (2.7)$$

$$\begin{cases} \sigma_\nu = -\alpha|\dot{u}_\nu|, & |\sigma_\tau| = -\mu\sigma_\nu \\ \sigma_\tau = -\lambda(\dot{u}_\tau - v^*), & \lambda \geq 0 \end{cases} \text{ sur } \Gamma_3 \times (0, T) \quad . \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial \nu} = 0 \quad \text{sur } \Gamma \times (0, T), \quad (2.9)$$

$$\varphi = 0 \quad \text{sur } \Gamma_a \times (0, T), \quad (2.10)$$

$$D \cdot \nu = q_2 \quad \text{sur } \Gamma_b \times (0, T) \quad (2.11)$$

$$u(0) = u_0 \quad , \quad \beta(0) = \beta_0 \quad \text{dans } \Omega. \quad (2.12)$$

Rappelons ici que les équations d'évolution (2.1) et (2.2) représentent la loi de constitutive électro-élasto-viscoplastique.  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  et  $\mathcal{G}$  sont respectivement les opérateurs de viscosité, d'élasticité et de plasticité.  $E(\varphi)$  est le champ électrique,  $\mathcal{E}$  représente le tenseur piézoélectrique du troisième ordre,  $\mathcal{E}^*$  est son transposé et  $B$  représente le tenseur de permittivité électrique et les équations (2.3) et (2.4) représentent les équations d'équilibre, l'évolution du champ d'endommagement est modélisée par l'inclusion du type parabolique donnée par la relation (2.5) où  $S$  est la fonction source de l'endommagement, et les conditions (2.6) et (2.7) sont respectivement des conditions aux limites de déplacement traction, et (2.8) représente la condition de l'usure avec frottement sec de Coulomb sur la partie  $\Gamma_3$  de la frontière de  $\Omega$ , et la relation (2.9) représente la condition à la limite homogène de Neumann, où  $\frac{\partial \beta}{\partial \nu}$  représente la dérivée normale de  $\beta$ . (2.10) et (2.11) représentent les conditions aux limites électriques. Finalement (2.12) représente les champs de déplacement et d'endommagement initiaux.

Pour obtenir une formulation variationnelle du problème  $P^1$  nous avons besoin d'introduire quelques hypothèses sur les données.

Nous supposons que l'opérateur de viscosité  $\mathcal{A} : \Omega \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{S}^d$  vérifie :

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \text{ Il existe } L_{\mathcal{A}} > 0 \text{ tels que } \|\mathcal{A}(x, \varepsilon_1) - \mathcal{A}(x, \varepsilon_2)\| \leq L_{\mathcal{A}} \|\varepsilon_1 - \varepsilon_2\| \\ \quad \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{S}^d, \quad p.p.x \in \Omega \\ (b) \text{ Il existe } m_{\mathcal{A}} > 0 \text{ telle que } (\mathcal{A}(x, \varepsilon_1) - \mathcal{A}(x, \varepsilon_2)) \cdot (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \geq m_{\mathcal{A}} \|\varepsilon_1 - \varepsilon_2\|^2 \\ \quad \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{S}^d, \quad p.p.x \in \Omega \\ (c) \text{ L'application } x \mapsto \mathcal{A}(\cdot, \varepsilon) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Omega, \text{ pour tout } \varepsilon \in \mathbb{S}^d \\ (d) \text{ L'application } x \mapsto \mathcal{A}(x, \cdot) \in \mathcal{H} \end{array} \right. \quad (2.13)$$

l'opérateur d'élasticité  $\mathcal{B} : \Omega \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^d$  vérifie :

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \text{ Il existe } L_{\mathcal{B}} > 0 \text{ telle que } \|\mathcal{B}(x, \varepsilon_1) - \mathcal{B}(x, \varepsilon_2)\| \leq L_{\mathcal{B}}(\|\varepsilon_1 - \varepsilon_2\| \\ \quad \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{S}^d, \forall \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}, p.p.x \in \Omega. \\ (b) \text{ L'application } x \mapsto \mathcal{B}(\cdot, \varepsilon) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Omega, \text{ pour tout } \varepsilon \in \mathbb{S}^d \text{ et } \beta \in \mathbb{R}. \\ (c) \text{ L'application } x \mapsto \mathcal{B}(\cdot, 0) \in \mathcal{H}. \end{array} \right. \quad (2.14)$$

l'opérateur d'élasticité  $\mathcal{G} : \Omega \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^d$  vérifie :

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \text{ Il existe } L_{\mathcal{G}} > 0 \text{ tels que } \|\mathcal{G}(x, \varepsilon_1, \alpha_1, \beta_1) - \mathcal{G}(x, \varepsilon_2, \alpha_2, \beta_2)\| \leq L_{\mathcal{G}}(\|\varepsilon_1 - \varepsilon_2\| \\ \quad + \|\alpha_1 - \alpha_2\| + |\beta_1 - \beta_2|) \quad \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{S}^d, \forall \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R} \quad p.p.x \in \Omega \\ (b) \text{ L'application } x \mapsto X \longrightarrow \mathcal{G}(x, \varepsilon, \alpha, \beta) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Omega, \\ \quad \text{pour tout } \varepsilon \in \mathbb{S}^d, \text{ et } \alpha \in \mathbb{R} \\ (c) \text{ L'application } x \mapsto \mathcal{G}(x, 0, 0, 0) \in \mathcal{H} \end{array} \right. \quad (2.15)$$

La fonction source d'endommagement  $S : \Omega \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  vérifie :

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \text{ Il existe } L_S > 0 \text{ tels que } |S(x, \sigma_1, \varepsilon_1, \beta_1) - S(x, \sigma_2, \varepsilon_2, \beta_2)| \leq L_S(\|\sigma_1 - \sigma_2\| \\ \quad + \|\varepsilon_1 - \varepsilon_2\| + |\beta_1 - \beta_2|) \quad \forall \sigma_1, \sigma_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{S}^d, \forall \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R} \quad p.p.x \in \Omega \\ (b) \text{ L'application } x \mapsto S(\cdot, \sigma, \varepsilon, \beta) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Omega \quad \forall \sigma \in \mathbb{S}^d \text{ et } \beta \in \mathbb{R}, \\ (c) \text{ L'application } x \mapsto S(x, 0, 0, 0) \in L^2(\Omega). \end{array} \right. \quad (2.16)$$

Le tenseur d'électrique  $B = (b_{ij}) : \Omega \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  vérifie :

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \quad B(x)E = (b_{ij}(x)E_j) \quad \forall E = (E_i) \in \mathbb{R}^d, \quad p.p.x \in \Omega \\ (b) \quad b_{ij} = b_{ji}, b_{ij} \in L^\infty(\Omega), \\ (c) \quad \text{Il existe } m_B > 0 \text{ tels que } BE \cdot E \leq m_B |E|^2 \quad \forall E = (E_i) \in \mathbb{R}^d, \quad p.p. \text{ dans } \Omega \end{array} \right. \quad (2.17)$$

Le tenseur piézoélectrique  $\mathcal{E} = (e_{ijk}) : \Omega \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  vérifie :

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \quad \mathcal{E}(x)\tau = (e_{ijk}(x)\tau_{jk}) \quad \forall \tau = (\tau_{ij}) \in \mathbb{S}^d, \quad p.p.x \in \Omega \\ (b) \quad e_{ijk} = e_{ikj} \in L^\infty(\Omega), \end{array} \right. \quad (2.18)$$

On suppose que les forces volumiques  $f_0$  et les tractions surfaciques  $f_2$  satisfont la régularité

$$f_0 \in C(0, T; H) \quad , \quad f_2 \in C(0, T; L^2(\Gamma_2)^d). \quad (2.19)$$

De même, la densité de charge volumique  $q_0$  et surfacique  $q_b$  satisfont

$$q_0 \in C(0, T; L^2(\Omega)) \quad , \quad q_2 \in C(0, T; L^2(\Gamma_b)). \quad (2.20)$$

$$q_2(t) = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_3 \quad \forall t \in [0, T]. \quad (2.21)$$

les fonctions  $\alpha$  et  $\mu$  vérifient les propriétés suivantes :

$$\alpha \in L^\infty(\Gamma_3), \quad \alpha(x) \geq \alpha^* > 0 \quad \text{p.p sur} \quad \Gamma_3. \quad (2.22)$$

$$\mu \in L^\infty(\Gamma_3), \quad \mu(x) \geq 0 \quad \text{p.p sur} \quad \Gamma_3. \quad (2.23)$$

Le champ initial des déplacements satisfait

$$u_0 \in V, \quad (2.24)$$

le champ initial d'endommagement vérifie

$$\beta_0 \in K. \quad (2.25)$$

Nous énonçons maintenant quelques définitions qu'on utilise dans la suite de ce chapitre. Dabord, nous définissons la forme bilinéaire  $a : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  par :

$$a(\xi, \vartheta) = k \int_{\Omega} \nabla \xi \cdot \nabla \vartheta dx. \quad (2.26)$$

On note  $f : [0, T] \rightarrow V$  la fonction définie par

$$(f(t), v)_V = \int_{\Omega} f_0(t) \cdot v dx + \int_{\Gamma_2} f_2(t) \cdot v da \quad \forall v \in V, t \in [0, T], \quad (2.27)$$

et la fonction  $q : [0, T] \rightarrow W$  définie par :

$$(q(t), \phi)_W = \int_{\Omega} q_0(t) \cdot \phi dx - \int_{\Gamma_b} q_2(t) \cdot \phi da \quad \forall \phi \in W, t \in (0, T). \quad (2.28)$$

Ensuite, on note  $j : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  fonction défini par :

$$j(u, v) = \int_{\Gamma_3} \alpha |u_\nu| (|\mu |v_\tau - v^*| + v_\nu) da, \quad \forall u, v \in V. \quad (2.29)$$

les conditions (2.19) et (2.20) impliquent :

$$f \in C(0, T; V), \quad q \in C(0, T; W). \quad (2.30)$$

## 2.2 Formulation variationnelle

En utilisant la formule de Green (1.2.1) on à

$$(\sigma, \varepsilon(v - \dot{u}))_{\mathcal{H}} + (\text{Div}\sigma, v - \dot{u})_H = \int_{\Gamma} \sigma\nu \cdot (v - \dot{u}) da \quad \forall v \in V,$$

on trouve

$$\int_{\Omega} \sigma \cdot \varepsilon(v - \dot{u}) dx + \int_{\Omega} \text{Div}\sigma \cdot (v - \dot{u}) dx = \int_{\Gamma_1} \sigma\nu \cdot (v - \dot{u}) da + \int_{\Gamma_2} \sigma\nu \cdot (v - \dot{u}) da + \int_{\Gamma_3} \sigma\nu \cdot (v - \dot{u}) da \quad \forall v \in V.$$

De la définition de l'espace  $V$  avec (2.3) et (2.7), on obtient

$$\int_{\Omega} \sigma \cdot \varepsilon(v - \dot{u}) dx - \int_{\Omega} f_0 \cdot (v - \dot{u}) dx = + \int_{\Gamma_2} f_2 \cdot (v - \dot{u}) da + \int_{\Gamma_3} \sigma\nu \cdot (v - \dot{u}) da \quad \forall v \in V.$$

et puisque

$$\begin{aligned} \sigma\nu \cdot (v - \dot{u}) &= \sigma\nu(v_\nu - \dot{u}_\nu) + \sigma_\tau \cdot (v_\tau - \dot{u}_\tau) \\ &= -\alpha|\dot{u}_\nu|(v_\nu - \dot{u}_\nu) - \mu\alpha|\dot{u}_\nu| \|v_\tau - \dot{u}_\tau\| \\ &= \alpha|\dot{u}_\nu|(\mu\|v_\tau - \dot{u}_\tau\| - (v_\nu - \dot{u}_\nu)) \\ &\geq \alpha|\dot{u}_\nu|(\mu|v_\tau - v^*| - \mu|\dot{u}_\tau - \dot{u}^*| - (v_\nu - \dot{u}_\nu)) \\ &= \alpha|\dot{u}_\nu|[(\mu|v_\tau - v^*| + v_\nu) - (|\dot{u}_\tau - \dot{u}^*| + \dot{u}_\nu)] \end{aligned} \quad (2.31)$$

il vient que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \sigma \cdot \varepsilon(v - \dot{u}) dx + \int_{\Gamma_3} \alpha|\dot{u}_\nu|[(\mu|v_\tau - v^*| + v_\nu) da - \int_{\Gamma_3} (|\dot{u}_\tau - \dot{u}^*| + \dot{u}_\nu) da \\ \geq \int_{\Omega} f_0 \cdot (v - \dot{u}) dx + \int_{\Gamma_2} f_2 \cdot (v - \dot{u}) da \end{aligned} \quad (2.32)$$

De (2.27),(2.29) et (2.32) , nous obtenons :

$$\begin{aligned} (\sigma(t), \varepsilon(v - \dot{u}(t)))_{\mathcal{H}} + j(\dot{u}(t), v) - j(\dot{u}(t), \dot{u}(t)) \geq (f(t), v - \dot{u}(t))_V \\ \forall v \in V, t \in (0, T) \end{aligned} \quad (2.33)$$

Dautre part, en utilisant la formule de Green

$$(D, \nabla\phi)_H + (\text{div}D, \phi)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Gamma} D \cdot \nu\phi da \quad \forall \phi \in H^1(\Omega),$$

on a

$$\int_{\Omega} D \cdot \nabla\phi dx + \int_{\Omega} \text{div}D\phi da = \int_{\Gamma_a} D \cdot \nu\phi da + \int_{\Gamma_b} D \cdot \nu\phi da \quad \forall \phi \in W$$

Nous utilisons la définition de l'espace  $W$ , (2.4) et (2.11), nous trouvons :

$$\int_{\Omega} D, \nabla \phi dx = \int_{\Gamma_b} q_2 \phi da - \int_{\Omega} q_0 \phi dx \quad \forall \phi \in W.$$

de (2.2) et (2.28), on obtient

$$(B(\nabla \varphi(t)), \nabla \phi)_H - (\mathcal{E}\varepsilon(u(t)), \nabla \phi)_H = (q(t), \phi)_W \quad \forall \phi \in W, t \in (0, t). \quad (2.34)$$

$$(\mathcal{E}\varepsilon(u(t)) - B(\nabla \varphi(t)), \nabla \phi)_H = -(q(t), \phi)_W \quad \forall \phi \in W, t \in (0, t). \quad (2.35)$$

Enfin soit  $\beta(t) \in K$  et pour tout  $t \in [0, T]$ . De la définition (1.51) de  $\partial\Psi_K$  et de (2.5), on obtient

$$\begin{aligned} & (\dot{\beta}(t), \xi - \beta(t))_{L^2(\Omega)} - k(\Delta\beta(t), \xi - \beta(t))_{L^2(\Omega)} \\ & \geq (S(\sigma(t) - \mathcal{A}(\varepsilon(\dot{u}(t)))) + \mathcal{E}^*(E(\varphi)(t)), \varepsilon(u)(t), \beta(t)), \xi - \beta(t))_{L^2(\Omega)} \quad \forall \xi \in K, \end{aligned} \quad (2.36)$$

En utilisant la formule de Green avec (2.9) et (2.26), on trouve

$$\begin{aligned} & (\dot{\beta}(t), \xi - \beta(t))_{L^2(\Omega)} + a(\beta(t), \xi - \beta(t)) \\ & \geq (S(\sigma(t) - \mathcal{A}(\varepsilon(\dot{u}(t)))) + \mathcal{E}^*(E(\varphi)(t)), \varepsilon(u)(t), \beta(t)), \xi - \beta(t))_{L^2(\Omega)} \quad \forall \xi \in K, \end{aligned} \quad (2.37)$$

on obtient la formulation variationnelle  $P_V^1$  du problème  $P^1$ .

**Problème  $P_V^1$**  Trouver le champ des déplacements  $u : [0, T] \rightarrow V$ , le champ des contraintes  $\sigma : [0, T] \rightarrow \mathcal{H}_1$ , le champ de potentiel électrique  $\varphi : [0, T] \rightarrow W$ , le champ des déplacements électriques  $D : [0, T] \rightarrow H$ , et le champ d'endommagement  $\beta : [0, T] \rightarrow H^1(\Omega)$  tels que :

$$\begin{aligned} \sigma &= \mathcal{A}(\varepsilon(\dot{u}(t))) + \mathcal{B}(\varepsilon(u(t))) - \mathcal{E}^*(E(\varphi)(t)) \\ &+ \int_0^t \mathcal{G}(\sigma(s) - \mathcal{A}(\varepsilon(\dot{u}(s))) + \mathcal{E}^*(E(u(s))), \varepsilon(u(s)), \beta(s)) ds, \end{aligned} \quad (2.38)$$

$$\begin{aligned} & (\sigma(t), \varepsilon(v - \dot{u}(t)))_{\mathcal{H}} + j(\dot{u}(t), v) - j(\dot{u}(t), \dot{u}(t)) \\ & \geq (f(t), v - \dot{u}(t))_V, \quad \forall v \in V, t \in (0, T) \end{aligned} \quad (2.39)$$

$$\begin{aligned} & (\dot{\beta}(t), \xi - \beta(t))_{L^2(\Omega)} + a(\beta(t), \xi - \beta(t)) \\ & \geq (S(\sigma(t) - \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}(t)) + \mathcal{E}^*(E(\varphi)(t))), \varepsilon(u(t)), \beta(t)), \xi - \beta(t))_{L^2(\Omega)} \quad \forall \xi \in K. \end{aligned} \quad (2.40)$$

$$D(t) = \mathcal{E}\varepsilon(u(t)) - B(\nabla \varphi(t)) \quad t \in (0, T), \quad (2.41)$$

$$(D(t), \nabla \phi)_H = -(q(t), \phi)_W \quad \forall \phi \in W, t \in (0, T), \quad (2.42)$$

$$u(0) = u_0 \quad , \quad \beta(0) = \beta_0 \quad (2.43)$$

## 2.3 Existence et unicité de la solution

Dans cette section est d'obtenir un résultat d'existence et d'unicité pour le problème variationnel  $P_V^1$ .

**Théorème 2.3.1** *Supposons que (2.13) - (2.25) attende. Alors il existe une constante  $\alpha_0$  qui ne dépend que  $\Omega, \Gamma_1, \Gamma_3$  and  $\mathcal{A}$  de telle que si  $|\alpha|_{L^\infty(\Gamma_3)}(|\mu|_{L^\infty(\Gamma_3)} + 1) < \alpha_0$ , alors il existe une solution unique  $\{u, \sigma, \varphi, D, \beta\}$  pour problème  $P_V^1$ . En outre, la solution vérifie*

$$u \in C^1(0, T; V), \quad (2.44)$$

$$\sigma \in C(0, T; \mathcal{H}_1), \quad (2.45)$$

$$\varphi \in C(0, T; W), \quad (2.46)$$

$$\beta \in W^{1,2}(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega)), \quad (2.47)$$

$$D \in C(0, T; \mathcal{W}), \quad (2.48)$$

D'après les fonctions  $\{u, \sigma, \varphi, D, \beta\}$ , qui satisfait (2.38) - (2.43) est appelée solution faible du problème  $P^1$ .

Nous concluons par le Théorème 2.3.1 que, sous les hypothèses (2.13)-(2.25), le problème mécanique (2.1) - (2.12) a une solution faible unique qui satisfait (2.44) - (2.47).

La preuve du Théorème (2.3.1) est effectuée dans plusieurs étapes. A cet effet, nous assumons dans la suite que (2.38) - (2.43) sont satisfaites ; ci-après,  $C$  est une constante positive qui dépend de  $\Omega, \Gamma_1$  et  $\Gamma_3$ .

**Remarque 2.3.1** *On remarque que si  $v^*$  est assez grande, alors  $\alpha = 1/(k_1 v^*)$  est suffisamment faible et, par conséquent, la condition  $|\alpha|_{L^\infty(\Gamma_3)}(|\mu|_{L^\infty(\Gamma_3)} + 1) < \alpha_0$  pour l'unique solvabilité est satisfaite. Nous concluons que le problème mécanique (2.1) - (2.12) possède une unique solution faible si la vitesse tangentielle de la fondation est assez grand. En outre, après avoir résolu le problème (2.1) - (2.12), nous pouvons trouver la fonction de l'usure par l'intégration (1.17) et en utilisant le condition initial  $\omega(0) = 0$  ce qui signifie à l'instant initial, le corps n'est soumis à aucune usure préalable.*

Soit  $\eta \in C(0, T; \mathcal{H})$  être donné. Dans la première étape on considère le problème variationnelle suivant.

**Problème  $P_\eta^1$ .** Trouver le champ des déplacements  $u_\eta : [0, T] \rightarrow V$  tel que

$$\begin{aligned} & \mathcal{A}(\varepsilon(u_\eta(t))) + \eta(t), \varepsilon(v - \dot{u}_\eta(t))_{\mathcal{H}} + j(\dot{u}_\eta(t), v) - j(\dot{u}_\eta(t), \dot{u}_\eta(t)) \\ & \geq (f(t), v - u_\eta(t))_V \quad \forall v \in V, t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (2.49)$$

$$u_\eta(0) = u_0. \quad (2.50)$$

Soit  $g \in C(0, T; \mathcal{H})$ , le problème  $P_\eta^1$  est écrit pour p.p.  $t \in (0, T)$  :

**Problème  $P_{\eta g}^1$**  Trouver le champ de déplacement  $v_{\eta g} : [0, T] \rightarrow V$  tel que

$$\begin{aligned} & \mathcal{A}(\varepsilon(v_{\eta g}(t))) + \eta(t), \varepsilon(v - v_{\eta g}(t))_{\mathcal{H}} + j(g(t), v) - j(g(t), g(t)) \\ & \geq (f(t), v - v_{\eta g}(t))_V, \quad \forall v \in V, t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (2.51)$$

Dans l'étude de problème  $P_{\eta g}^1$  nous avons le résultat d'existence et d'unicité suivant.

**Lemme 2.3.1**  $P_{\eta g}^1$  admet un solution faible unique telle que

$$v_{\eta g} \in C(0, T; V). \quad (2.52)$$

**Preuve.** Nous définissons l'opérateur  $A : V \longrightarrow V$  par

$$(Au, v)_V = (\mathcal{A}(\varepsilon(u)), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} \quad \forall u, v \in V. \quad (2.53)$$

Il résulte de (2.53) et (2.13) (a) qui

$$\|Au - Av\|_V \leq L_{\mathcal{A}}\|u - v\|_V, \quad \forall u, v \in V, \quad (2.54)$$

ce qui montre que  $A : V \longrightarrow V$  est de Lipschitz.

Maintenant par (2.53) et (2.13)(b), on trouve

$$(Au - Av, u - v)_V \geq m_{\mathcal{A}}\|u - v\|_V^2 \quad \forall u, v \in V, \quad (2.55)$$

à savoir que  $A : V \longrightarrow V$  est un opérateur fortement monotone sur  $V$ . En outre, en utilisant la théorème du représentation de Riesz , nous pouvons définir un élément  $F \in C(0, T; V)$  par

$$(F(t), v)_V = (f(t), v)_V - (\eta(t), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}}.$$

Puisque  $A$  est un opérateur continu, fortement monotone et de Lipschitz sur  $V$  et comme la fonctionnelle  $v \mapsto j(g(t), v)$  est convexe semicontinue inférieurement, il résulte d'un résultat classique sur les inégalités elliptiques (voir par exemple [8]) qu'il existe une unique fonction  $v_{\eta g} \in V$  satisfait

$$(Av_{\eta g}(t), v - v_{\eta g}(t))_V + j(g(t), v) - j(g(t), v_{\eta g}(t)) \geq (F(t), v - v_{\eta g}(t))_V \quad \forall v \in V. \quad (2.56)$$

On utilise l'hypothèse (2.13), et les propriétés de tenseur de la déformation nous obtenons que  $\sigma_{\eta g}(t) \in \mathcal{H}$ . Puisque  $v = v_{\eta g}(t) \pm \psi$  satisfait (2.51), où  $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)^d$ , en utilisant la définition (2.27) pour  $f(t)$ , nous trouvons

$$\text{Div}\sigma_{\eta g}(t) + f_0 = 0, \quad t \in (0, T). \quad (2.57)$$

Avec l'hypothèse de régularité (2.19) sur  $f_0$  nous voyons que  $\text{Div}\sigma_{\eta g}(t) \in H$ .

par conséquent,  $\text{Div}\sigma_{\eta g}(t) \in \mathcal{H}_1$ , pour  $t_1, t_2 \in [0, T]$ .

En utilisant l'équation (2.51), nous constatons que

$$\begin{aligned} & (\mathcal{A}(\varepsilon(v_1)) - \mathcal{A}(\varepsilon(v_2)), \varepsilon(v_1 - v_2))_{\mathcal{H}} \\ & \leq (f_1 - f_2, v_1 - v_2)_V + (\eta_2 - \eta_1, \varepsilon(v_1 - v_2))_{\mathcal{H}} \\ & + j(g_1, v_2) - j(g_1, v_1) + j(g_2, v_1) - j(g_2, v_2). \end{aligned} \quad (2.58)$$

D'après la définition (2.29) de la fonction  $j$  , nous avons

$$j(g_1, v_2) - j(g_1, v_1) + j(g_2, v_1) - j(g_2, v_2) = \int_{\Gamma_3} (\alpha|g_{1\nu}| - \alpha|g_{2\nu}|)(\mu\|v_{1\tau} - v^*\| + v_{2\nu} - v_{1\nu}) da.$$

La relation (1.30) et les hypothèses (2.22) et (2.23) impliquent

$$|j(g_1, v_2) - j(g_1, v_1) + j(g_2, v_1) - j(g_2, v_2)| \leq C_0^2 |\alpha|_{L^\infty(\Gamma_3)} (|\mu|_{L^\infty(\Gamma_3)} + 1) |g_1 - g_2|_V |v_1 - v_2|_V. \quad (2.59)$$

La relation (1.29), l'hypothèse (2.13), et l'inégalité (2.59) combinés avec (2.3) nous donner

$$m_{\mathcal{A}} \|v_1 - v_2\|_V \leq C_0^2 \|\alpha\|_{L^\infty(\Gamma_3)} (\|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} + 1) |g_1 - g_2|_V + \|f_1 - f_2\|_V + \|\eta_1 - \eta_2\|_{\mathcal{H}}. \quad (2.60)$$

L'inégalité (2.60) et la régularité des fonctions  $f, g$ , et  $\eta$  montrent que

$$v_{\eta g} \in C(0, T; V).$$

■

Dans la seconde étape, nous considérons l'opérateur  $\Lambda_\eta : C(0, T; V) \longrightarrow C(0, T; V)$  défini par

$$\Lambda_\eta g = v_{\eta g}, \quad \forall g \in C(0, T; V). \quad (2.61)$$

**Lemme 2.3.2** *Supposons que (2.13) - (2.25) sont vérifiées. Alors, il existe un réel  $\alpha_0 > 0$  qui ne dépend de  $\Omega, \Gamma_1, \Gamma_3$  et  $\mathcal{A}$  telle que si  $|\alpha|_{L^\infty(\Gamma_3)} (|\mu|_{L^\infty(\Gamma_3)} + 1) < \alpha_0$  alors l'opérateur  $\Lambda_\eta$  a un point fixe unique de  $g^* \in C(0, T; V)$ .*

**Preuve.** Soient  $g_1, g_2 \in C(0, T; V)$  et  $\eta \in C(0, T; \mathcal{H})$ . Nous utilisons la notation  $v_i = v_{\eta g_i}$ .

En utilisant des arguments similaires à ceux de (2.60), nous se trouver

$$m_{\mathcal{A}} \|v_1(t) - v_2(t)\|_V \leq C_0^2 \|\alpha\|_{L^\infty(\Gamma_3)} (\|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} + 1) \|g_1(t) - g_2(t)\|_V \quad \forall t \in [0, T]. \quad (2.62)$$

De (2.61) et (2.62), nous constatons que

$$\|\Lambda_\eta g_1(t) - \Lambda_\eta g_2(t)\|_V \leq \frac{C_0^2}{m_{\mathcal{A}}} \|\alpha\|_{L^\infty(\Gamma_3)} (\|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} + 1) \|g_1(t) - g_2(t)\|_V \quad \forall t \in [0, T]. \quad (2.63)$$

Soit  $\alpha_0 = \frac{C_0^2}{m_{\mathcal{A}}}$  où  $\alpha_0$  est une constante positive qui dépend uniquement de  $\Omega, \Gamma_1, \Gamma_3$  et l'opérateur  $\mathcal{A}$ . Si  $|\alpha|_{L^\infty(\Gamma_3)} (|\mu|_{L^\infty(\Gamma_3)} + 1) < \alpha_0$  on déduit de (3.75) que l'opérateur  $\Lambda_\eta$  est une contraction dans l'espace de Banach  $C(0, T; \mathcal{H})$ . donc il possède un point fixe ), et par conséquent  $g_\eta^*$  est l'unique point fixe de l'opérateur  $\Lambda_\eta$ . ■

Pour simplicité, notons

$$v_\eta = v_{\eta g_\eta^*}, \quad \sigma_\eta = \sigma_{\eta g_\eta^*}, \quad (2.64)$$

et soit  $u_\eta : [0, T] \longrightarrow V$  la fonction définie par

$$u_\eta(t) = \int_0^t v_\eta(s) ds + u_0 \quad \forall t \in [0, T] \quad (2.65)$$

Dans l'étude du problème  $P_\eta^1$ , nous avons le résultat suivant.

**Lemme 2.3.3**  *$P_\eta^1$  a une solution unique  $u_\eta$  ayant la régularité exprimé dans (2.44).*

**Preuve.** La preuve du Lemme 2.3.3 est une conséquence des Lemmes 2.3.1, 2.3.2 et la relation (2.65). ■

Dans la troisième étape, pour  $\eta \in C(0, T; \mathcal{H})$ ; nous utilisons le champ de déplacement  $u_\eta$  obtenu dans le Lemme 2.3.3 et on considère le problème variationnel suivant.

**Problème  $Q_\eta^1$**  Trouver le champ potentiel électrique  $\varphi_\eta : [0, T] \rightarrow W$  tel que :

$$(B\nabla\varphi_\eta, \nabla\phi)_H - (\mathcal{E}\varepsilon(u_\eta(t)), \nabla\phi)_H = (q(t), \phi)_W, \quad \forall\phi \in W, \quad t \in (0, T). \quad (2.66)$$

**Lemme 2.3.4**  $Q_\eta$  admet une solution unique  $\varphi_\eta$  qui satisfait la régularité (2.46).

**Preuve.** Nous définissons une forme bilinéaire  $b(., .) : W \times W \rightarrow \mathbb{R}$  telle que

$$b(\varphi, \phi) = (B\nabla\varphi, \nabla\phi)_H \quad \forall\varphi, \phi \in W. \quad (2.67)$$

Nous utilisons (2.17) pour montrer que la forme bilinéaire  $b$  est continue, symétrique, et coercitif sur  $W$ . De plus en utilisant le théorème de représentation de Riesz nous pouvons définir un élément  $q_\eta : [0, T] \rightarrow W$  tel que

$$(q_\eta(t), \phi)_W = (q(t), \phi)_W + (\mathcal{E}\varepsilon(u_\eta(t)), \nabla\phi)_H \quad \forall\phi \in W, \quad t \in (0, T).$$

Nous appliquons le théorème de Lax-Milgram en déduire qu'il existe un élément unique  $\varphi_\eta(t) \in W$  tel que

$$b(\varphi_\eta(t), \phi) = (q_\eta(t), \phi)_W \quad \forall\phi \in W. \quad (2.68)$$

Nous concluons que  $\varphi_\eta(t)$  est une solution de  $Q_\eta$ . pour  $t_1, t_2 \in [0, T]$ .

Il résulte de (1.31), (2.17), (2.18), (2.67) et (2.68) que

$$\|\varphi_\eta(t_1) - \varphi_\eta(t_2)\|_W \leq C(\|u_\eta(t_1) - u_\eta(t_2)\|_V + \|q(t_1) - q(t_2)\|_W), \quad (2.69)$$

L'inégalité précédente implique que  $\varphi_\eta \in C(0, T, W)$ . ■

Dans la quatrième étape, nous supposons que  $\theta \in C(0, T; L^2(\Omega))$  être donné et nous considérons un problème variationnel pour le champ d'endommagement.

**Problème  $P_\theta^1$**  Trouver un champ de endommagement  $\beta_\theta : [0, T] \rightarrow H^1(\Omega)$  tel que

$$\begin{aligned} \beta_\theta(t) &\in K, (\dot{\beta}_\theta(t), \xi - \beta_\theta)_{L^2(\Omega)} + a(\beta_\theta(t), \xi - \beta_\theta(t)) \\ &\geq (\theta(t), \xi - \beta_\theta(t))_{L^2(\Omega)}, \quad \forall\xi \in K \quad \text{p.p. } t \in [0, T], \end{aligned} \quad (2.70)$$

$$\beta_\theta(0) = \beta_0. \quad (2.71)$$

**Lemme 2.3.5** Le problème  $P_\theta^1$  admet une solution unique  $\beta_\theta$  satisfait (2.47)

**Preuve.** L'inclusion de  $(H^1(\Omega), \|\cdot\|_{H^1(\Omega)})$  dans  $(L^2(\Omega), \|\cdot\|_{L^2(\Omega)})$  est continue et dense. On note par  $(H^1(\Omega))'$  l'espace dual de  $H^1(\Omega)$ , nous pouvons écrire le Triplet de Gelfand

$$H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset (H^1(\Omega))'.$$

Nous utilisons la notation  $(\cdot, \cdot)_{(H^1(\Omega))' \times H^1(\Omega)}$  pour représenter le produit de dualité entre  $(H^1(\Omega))'$  et  $H^1(\Omega)$ . Nous avons :

$$(\beta, \xi)_{(H^1(\Omega))' \times H^1(\Omega)} = (\beta, \xi)_{L^2(\Omega)}, \quad \xi \in H^1(\Omega),$$

et nous notons que  $K$  est un ensemble convexe fermé dans  $H^1(\Omega)$ . Puis, en utilisant la définition (2.26) de la forme bilinéaire  $a$ , et le fait que  $\beta_0 \in K$  en (2.25), il est facile de voir que Lemme précédant est une conséquence directe du Théorème 1.2.4. ■

Dans cette étape, nous utilisons les solutions  $u_\eta$ ,  $\varphi_\eta$  et  $\beta_\theta$  obtenues dans les Lemmes 2.3.3, 2.3.4 et 2.3.5 et construisons le problème suivant pour le champ des contraintes.

**Problème  $P_{\eta\theta}^1$**  : Trouver le champ de contraintes :  $\sigma_{\eta\theta} : [0, T] \rightarrow \mathcal{H}$  tel que :

$$\sigma_{\eta\theta} = \mathcal{B}(\varepsilon(u_\eta(t))) + \int_0^t \mathcal{G}(\sigma_{\eta\theta}(s), \varepsilon(u_\eta(s)), \beta_\theta(s)) ds \quad \forall t \in [0, T], \quad (2.72)$$

**Lemme 2.3.6** *Le problème  $P_{\eta\theta}^1$  admet une solution unique  $\sigma_{\eta\theta}$  qui satisfait (2.45). De plus, si  $\sigma_i, u_i$  et  $\beta_i$  représentent la solution du problème  $P_{\eta_i\theta_i}^1$ ,  $P_{\eta_i}^1$  et  $P_{\theta_i}^1$ , respectivement, pour  $(\eta_i, \theta_i) \in C(0, T; V \times L^2(\Omega))$ ,  $i = 1, 2$ , alors  $C > 0$  telle que*

$$\begin{aligned} \|\sigma_1(t) - \sigma_2(t)\|_{\mathcal{H}} &\leq C \left( \int_0^t (\|\dot{u}_1(s) - \dot{u}_2(s)\|_V \right. \\ &\quad \left. + \|u_1(s) - u_2(s)\|_V ds + \|\beta_1(s) - \beta_2(s)\|_{L^2(\Omega)}) ds, \quad \forall t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (2.73)$$

**Preuve.** Nous définissons l'opérateur  $\Lambda_{\eta\theta} : C(0, T, \mathcal{H}) \rightarrow C(0, T, \mathcal{H})$  par

$$\Lambda_{\eta\theta}\sigma(t) = \mathcal{B}(\varepsilon(u_\eta(t))) + \int_0^t \mathcal{G}(\sigma(s), \varepsilon(u_\eta(s)), \beta_\theta(s)) ds \quad (2.74)$$

pour tout  $\sigma \in C(0, T, \mathcal{H})$  et  $t \in [0, T]$ , pour  $\sigma_1, \sigma_2 \in C(0, T, \mathcal{H})$  nous utilisons (2.74) et (2.15) afin d'obtenir pour tout  $t \in [0, T]$

$$\|\Lambda_{\eta\theta}\sigma_1(t) - \Lambda_{\eta\theta}\sigma_2(t)\|_{\mathcal{H}} \leq L_G \int_0^t \|\sigma_1(s) - \sigma_2(s)\|_{\mathcal{H}} ds.$$

Il résulte de l'inégalité précédente que pour  $p$  assez grand, la puissance  $\Lambda_{\eta\theta}^p$  de l'opérateur  $\Lambda_{\eta\theta}$  est une contraction dans l'espace de Banach  $C(0, T; \mathcal{H})$  et, par conséquent, il existe un unique élément  $\sigma_{\eta\theta} \in C(0, T; \mathcal{H})$  telle que  $\Lambda_{\eta\theta}\sigma_{\eta\theta} = \sigma_{\eta\theta}$  qui représente est l'unique solution du problème  $P_{\eta\theta}^1$ , et, en utilisant (2.72), les régularités de  $u_\eta$  et  $\beta_\theta$  et les propriétés de l'opérateur  $\mathcal{E}$ ,  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{G}$ , il en résulte que  $\sigma_{\eta\theta} \in C(0, T; \mathcal{H})$ .

Considérons maintenant  $(\eta_1, \theta_1), (\eta_2, \theta_2) \in C(0, T, \mathcal{H} \times L^2(\Omega))$  et, pour  $i = 1, 2$ . Pour simplicité, nous utilisons les notation  $u_{\eta_i} = u_i, \sigma_{\eta_i\theta_i} = \sigma_i$  et  $\beta_{\theta_i} = \beta_i$  nous avons

$$\sigma_i(t) = \mathcal{B}(\varepsilon(u_i(t))) + \int_0^t \mathcal{G}(\sigma_i(s), \varepsilon(u_i(s)), \beta_i(s)) ds \quad \forall t \in [0, T]. \quad (2.75)$$

En utilisant les propriétés (2.1), (2.15) et (2.18) de  $\mathcal{B}, \mathcal{G}$  et  $\mathcal{E}$  nous trouvons

$$\begin{aligned} \|\sigma_1(t) - \sigma_2(t)\|_{\mathcal{H}} &\leq C(\|u_1(t) - u_2(t)\|_V + \int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\|_V ds \\ &\quad + \int_0^t \|\sigma_1(s) - \sigma_2(s)\|_{\mathcal{H}} ds + \int_0^t \|\beta_1(s) - \beta_2(s)\|_{L^2(\Omega)} ds) \quad \forall t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (2.76)$$

En appliquant l'inégalité de Gronwall, nous déduisons (2.53), qui conclut la preuve du lemme précédente. ■

On considère l'opérateur  $\Lambda : C([0, T]; \mathcal{H} \times L^2(\Omega)) \rightarrow C([0, T]; \mathcal{H} \times L^2(\Omega))$  défini par

$$\Lambda(\eta, \theta)(t) = (\Lambda_1(\eta, \theta)(t), \Lambda_2(\eta, \theta)(t)), \quad (2.77)$$

où  $\Lambda_1$  et  $\Lambda_2$  sont donnés par

$$\Lambda_1(\eta, \theta)(t) = \mathcal{B}(\varepsilon(u_\eta(t))) + \mathcal{E}^* \nabla \varphi_\eta(t) + \int_0^t \mathcal{G}(\sigma_{\eta\theta}(s), \varepsilon(u_\eta(s)), \beta_\theta(s)) ds \quad (2.78)$$

$$\Lambda_2(\eta, \theta)(t) = S(\sigma_{\eta\theta}(t), \varepsilon(u_\eta(t)), \beta_\theta(t)) \quad t \in [0, T], \quad (2.79)$$

Nous avons le résultat suivant.

**Lemme 2.3.7** *Si  $|\alpha|_{L^\infty(\Gamma_3)}(|\mu|_{L^\infty(\Gamma_3)} + 1) < \alpha_0$ . Alors pour  $(\eta, \theta) \in C(0, T; \mathcal{H} \times L^2(\Omega))$ , la fonction  $\Lambda(\eta, \theta) : [0, T] \rightarrow \mathcal{H} \times L^2(\Omega)$  est continue, et il existe un unique élément  $(\eta^*, \theta^*) \in C(0, T; \mathcal{H} \times L^2(\Omega))$  tel que  $\Lambda(\eta^*, \theta^*) = (\eta^*, \theta^*)$ .*

**Preuve.** Soient  $(\eta, \theta) \in C(0, T; \mathcal{H} \times L^2(\Omega))$ , et  $t_1, t_2 \in [0, T]$ . En utilisant (1.29), (2.15), et (2.18), nous avons

$$\begin{aligned} \|\Lambda_1(\eta_1, \theta_1)(t) - \Lambda_1(\eta_2, \theta_2)(t)\|_{\mathcal{H}} &\leq \|\mathcal{B}(\varepsilon(u_1(t))) - \mathcal{B}(\varepsilon(u_2(t)))\|_{\mathcal{H}} + \|\mathcal{E}^* \nabla \varphi_1(t) - \mathcal{E}^* \nabla \varphi_2(t)\|_{\mathcal{H}} \\ &\quad + \int_0^t (\|\mathcal{G}(\sigma_1(s), \varepsilon(u_1(s)), \beta_1(s)) - \mathcal{G}(\sigma_2(s), \varepsilon(u_2(s)), \beta_2(s))\|_{\mathcal{H}}) ds \\ &\leq C(\|u_1(t) - u_2(t)\|_V + \|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\|_W + \int_0^t \|\sigma_1(s) - \sigma_2(s)\|_{\mathcal{H}} ds \\ &\quad + \int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\|_V ds + \int_0^t \|\beta_1(s) - \beta_2(s)\|_{L^2(\Omega)} ds) \end{aligned}$$

Maintenant, de (2.73) on obtient

$$\begin{aligned} \|\Lambda_1(\eta_1, \theta_1)(t) - \Lambda_1(\eta_2, \theta_2)(t)\|_{\mathcal{H}} &\leq C(\|u_1(t) - u_2(t)\|_V + \|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\|_W \\ &\quad + \int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\|_V ds + \int_0^t \|\beta_1(s) - \beta_2(s)\|_{L^2(\Omega)} ds), \end{aligned} \quad (2.80)$$

à partir de (2.79), (2.73) et (2.16), il se ensuit que

$$\begin{aligned} \|\Lambda_2(\eta_1, \theta_1)(t) - \Lambda_2(\eta_2, \theta_2)(t)\|_{L^2(\Omega)} &\leq C(\|\sigma_1(t) - \sigma_2(t)\|_{\mathcal{H}} + \|u_1(t) - u_2(t)\|_V + \|\beta_1(t) - \beta_2(t)\|_{L^2(\Omega)}) \\ &\leq C(\|u_1(t) - u_2(t)\|_V + \int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\|_V ds) \\ &\quad + \|\beta_1(t) - \beta_2(t)\|_{L^2(\Omega)} + \int_0^t \|\beta_1(s) - \beta_2(s)\|_{L^2(\Omega)} ds \end{aligned} \quad (2.81)$$

Maintenant pour  $(\eta_1, \theta_1), (\eta_2, \theta_2) \in C(0, T; \mathcal{H} \times L^2(\Omega))$ , nous utilisons la notation  $g_{\eta_i}^* = g_i, \sigma_{\eta_i g_i} = \sigma_i, u_{\eta_i g_i} = u_i, \dot{u}_{\eta_i g_i} = v_i, \varphi_{\eta_i} = \varphi_i$  et  $\beta_{\theta_i} = \beta_i$  pour  $i = 1, 2$ .

De la notation utilisé dans (2.61) et (2.64), on en déduit que  $v_i = g_i$ . Les arguments similaires à ceux utilisés dans la preuve de (2.80), (2.81), nous concluons qu'il existe une constante positive  $C > 0$  vérifiant

$$\begin{aligned} & \|\Lambda(\eta_1, \theta_1)(t) - \Lambda(\eta_2, \theta_2)(t)\|_{\mathcal{H} \times L^2(\Omega)} \leq C(\|u_1(t) - u_2(t)\|_V \\ & + \|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\|_W + \int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\|_V ds \\ & + \|\beta_1(t) - \beta_2(t)\|_{L^2(\Omega)} + \int_0^t \|\beta_1(s) - \beta_2(s)\|_{L^2(\Omega)} ds \end{aligned} \quad (2.82)$$

D'autre part, d'après  $u_i(t) = \int_0^t v_i(s) ds + u_0$  on sait que pour p.p.  $t \in (0, T)$ ,

$$\|u_1(t) - u_2(t)\|_V^2 \leq C \int \|v_1(s) - v_2(s)\|_V^2 ds. \quad (2.83)$$

Il s'ensuit maintenant de  $P_{\eta g}^1$  pour  $\eta = \eta_i, i = 1, 2$ , que

$$\sigma_i(t) = \mathcal{A}(\varepsilon(v_i(t))) + \eta_i(t) \quad \forall t \in [0, T]. \quad (2.84)$$

$$(\sigma_i(t), \varepsilon(v - v_i(t)))_{\mathcal{H}} + j(g_i(t), v) - j(g_i(t), v_i(t)) \geq (f(t), v - v_i(t))_V \quad (2.85)$$

En utilisant (2.85), nous obtenons que

$$\begin{aligned} & (\sigma_1(t) - \sigma_2(t), \varepsilon(v_1(t)) - \varepsilon(v_2(t)))_{\mathcal{H}} \\ & \leq j(g_1(t), v_2(t)) - j(g_1(t), v_1(t)) + j(g_2(t), v_1(t)) - j(g_2(t), v_2(t)), \end{aligned} \quad (2.86)$$

et des arguments similaires à ceux utilisés dans (2.59) sur la fonctionnelle  $j$  on obtient

$$\begin{aligned} & (\sigma_1(t) - \sigma_2(t), \varepsilon(v_1(t)) - \varepsilon(v_2(t)))_{\mathcal{H}} \\ & \leq C_0^2 |\alpha|_{L^\infty(\Gamma_3)} (\|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} + 1) \|g_1(t) - g_2(t)\|_V \|v_1(t) - v_2(t)\|_V. \end{aligned} \quad (2.87)$$

Garder à l'esprit que  $v_i = g_i$  pour  $i = 1, 2$ , il s'ensuit que

$$\begin{aligned} & (\sigma_1(t) - \sigma_2(t), \varepsilon(v_1(t)) - \varepsilon(v_2(t)))_{\mathcal{H}} \\ & \leq C_0^2 \|\alpha\|_{L^\infty(\Gamma_3)} (\|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} + 1) \|v_1(t) - v_2(t)\|_V^2 \end{aligned} \quad (2.88)$$

Nous substituons (2.84) dans l'inégalité précédente et utilisons (1.29) et (2.13) on déduit que

$$(m_{\mathcal{A}} - C_0^2 \|\alpha\|_{L^\infty(\Gamma_3)} (\|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} + 1)) \|v_1(t) - v_2(t)\|_V \leq \|\eta_1(t) - \eta_2(t)\|_{\mathcal{H}}. \quad (2.89)$$

Il résulte de  $|\alpha|_{L^\infty(\Gamma_3)} (\|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} + 1) < \alpha_0$  que

$$\|v_1(t) - v_2(t)\|_V^2 \leq C \|\eta_1(t) - \eta_2(t)\|_{\mathcal{H}}^2 \quad (2.90)$$

Pour le champ potentiel électrique, nous utilisons (2.66), (1.31), (2.17) et (2.18) pour obtenir

$$\|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\|_W^2 \leq C\|\eta_1(t) - \eta_2(t)\|_V^2. \quad (2.91)$$

De (2.70) on en déduit que

$$\begin{aligned} & (\dot{\beta}_1 - \dot{\beta}_2, \beta_1 - \beta_2)_{L^2(\Omega)} + a(\beta_1 - \beta_2, \beta_1 - \beta_2) \\ & \leq (\theta_1 - \theta_2, \beta_1 - \beta_2)_{L^2(\Omega)} \quad p.p \quad \forall t \in (0, T). \end{aligned} \quad (2.92)$$

On intègre l'inégalité précédente par rapport au temps, en utilisant les conditions initiales  $\beta_1(0) = \beta_2(0) = \beta_0$  et l'inégalité  $a(\beta_1 - \beta_2, \beta_1 - \beta_2) \geq 0$ , on trouve

$$\frac{1}{2}\|\beta_1(t) - \beta_2(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \int_0^t (\theta_1(s) - \theta_2(s), \beta_1(s) - \beta_2(s))_{L^2(\Omega)} ds$$

ce qui implique que

$$\begin{aligned} & \|\beta_1(t) - \beta_2(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & \leq \int_0^t \|\theta_1(s) - \theta_2(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds + \int_0^t \|\beta_1(s) - \beta_2(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \end{aligned} \quad (2.93)$$

Cette inégalité combiné avec l'inégalité de Gronwall mener à

$$\|\beta_1(t) - \beta_2(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \int_0^t \|\theta_1(s) - \theta_2(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \quad \forall t \in [0, T]. \quad (2.94)$$

Nous substituons (2.91) dans (2.82) et utilisons (2.83) pour obtenir

$$\begin{aligned} & \|\Lambda(\eta_1, \theta_1)(t) - \Lambda(\eta_2, \theta_2)(t)\|_{\mathcal{H} \times L^2(\Omega)}^2 \\ & \leq \left( \int_0^t |v_1(s) - v_2(s)|_V^2 ds + \|\beta_1(t) - \beta_2(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right). \end{aligned} \quad (2.95)$$

Il suit maintenant de l'inégalité précédente, les estimations (2.90) et (2.94) que

$$\begin{aligned} & \|\Lambda(\eta_1, \theta_1)(t) - \Lambda(\eta_2, \theta_2)(t)\|_{\mathcal{H} \times L^2(\Omega)}^2 \\ & \leq C \int_0^t \|(\eta_1, \theta_1)(s) - (\eta_2, \theta_2)(s)\|_{\mathcal{H} \times L^2(\Omega)}^2 ds. \end{aligned} \quad (2.96)$$

Réitérant cette inégalité  $m$  conduit à

$$\begin{aligned} & \|\Lambda^m(\eta_1, \theta_1)(t) - \Lambda^m(\eta_2, \theta_2)(t)\|_{C(0, T, \mathcal{H} \times L^2(\Omega))}^2 \\ & \leq \frac{C^m T^m}{m!} \|(\eta_1, \theta_1) - (\eta_2, \theta_2)\|_{C(0, T, \mathcal{H} \times L^2(\Omega))}^2. \end{aligned} \quad (2.97)$$

Ainsi, pour  $m$  suffisamment grande,  $\Lambda^m$  est une contraction de l'espace de Banach  $C(0, T, \mathcal{H} \times L^2(\Omega))$ , et ainsi de  $\Lambda$  a un unique point fixe. ■

Maintenant, nous avons tous les ingrédients pour prouver le Théorème 2.3.1.

**Preuve.**

**Existence.** Soit  $(\eta^*, \theta^*) \in C(0, T, \mathcal{H} \times L^2(\Omega))$  la point fixe de  $\Lambda$  défini par (2.77) - (2.79) et soit  $u, \varphi, \beta$  et  $\sigma$  la solution du problème  $P_\eta^1, Q_\eta^1, P_\theta^1$  et  $P_{\eta\theta}^1$  pour  $\eta = \eta^*$  et  $\theta = \theta^*$ , c'est-à-dire  $u = u_{\eta^*}, \varphi = \varphi_{\eta^*}, \beta = \beta_{\theta^*}$  et  $\sigma = \mathcal{A}(\varepsilon(u_{\eta^*})) + \mathcal{E}^*(\nabla(\varphi_{\eta^*})) + \sigma_{\eta^*\theta^*}$  obtenues dans Lemmes (2.3.3) (2.3.4), (2.3.5) et (2.3.6). Les égalités  $\Lambda_1(\eta^*, \theta^*) = \eta^*$  et  $\Lambda_2(\eta^*, \theta^*) = \theta^*$  combinée avec (2.78) et (2.79) montrent que (2.38) - (2.42) sont satisfaits. Ensuite, (2.43) et la régularité (2.44) - (2.47) suivi de Lemmes (2.3.3) (2.3.4), (2.3.5) et (2.3.6).

**Unicité.** L'unicité de la solution est une conséquence du caractère unique de le point fixe de l'opérateur  $\Lambda$  définie par (2.77) - (2.79) et de la résolubilité unique des problèmes  $P_\eta^1, Q_\eta^1, P_\theta^1$  et  $P_{\eta\theta}^1$ . ■

# Chapitre 3

## Problème électro-viscoélastique

La même chose nous décrivons dans ce chapitre un modèle mathématique dans un processus dynamique d'un problème de contact entre un corps piézoélectrique et une fondation déformable, nous supposons que le contact est avec condition d'usure sans frottement.

Ce chapitre est structuré en 3 sections. Dans la première section, nous écrivons le problème électro-mécanique et nous précisons les hypothèses adéquates sur les données. Ensuite, dans la section 2 nous obtenons la formulation faible. Puis dans la section 3 nous énonçons un théorème sur l'existence d'une solution faible unique du problème, et nous le prouvons.

### 3.1 Formulation mécanique du problème et hypothèses

**Problème  $P^2$**  Trouver le champ des déplacements  $u : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ , le champ des contraintes  $\sigma : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{S}^d$ , le champ potentiel électrique  $\varphi : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ , le champ des déplacements électriques  $D : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$  et, le champ d'endommagement  $\beta : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  tels que

$$\sigma(t) = \mathcal{A}(\varepsilon(\dot{u}(t))) + \mathcal{B}(\varepsilon(u(t)), \beta(t)) - \mathcal{E}^*(E(\varphi(t))) \quad \text{dans } \Omega \times (0, T) \quad (3.1)$$

$$D = \mathcal{E}(\varepsilon(u)) + B(E(\varphi)) \quad \text{dans } \Omega \times (0, T) \quad (3.2)$$

$$\text{Div}(\sigma) + f_0 = \rho \ddot{u} \quad \text{dans } \Omega \times (0, T) \quad (3.3)$$

$$\text{div}(D) - q_0 = 0 \quad \text{dans } \Omega \times (0, T) \quad (3.4)$$

$$\dot{\beta} - k\Delta\beta + \partial\Psi_K(\beta) \ni S(\varepsilon(u), \beta) \quad \text{dans } \Omega \times (0, T) \quad (3.5)$$

$$u = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1 \times (0, T) \quad (3.6)$$

$$\sigma\nu = f_2 \quad \text{sur } \Gamma_2 \times (0, T) \quad (3.7)$$

$$\sigma_\nu = -\alpha|\dot{u}_\nu|, \sigma_\tau = 0 \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T) \quad (3.8)$$

$$\frac{\partial\beta}{\partial\nu} = 0 \quad \text{dans } \Omega \times (0, T) \quad (3.9)$$

$$\varphi = 0 \quad \text{sur } \Gamma_a \times (0, T) \quad (3.10)$$

$$D \cdot \nu = q_2 \quad \text{sur } \Gamma_b \times (0, T) \quad (3.11)$$

$$D \cdot \nu = \psi(u_\nu - l)\delta(\varphi - \varphi_0) \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (3.12)$$

$$u(0) = u_0, \dot{u}(0) = v_0, \beta(0) = \beta_0 \quad \text{dans } \Omega \quad (3.13)$$

Rappelons que les équations (3.1) et (3.2) représentent la loi de comportement électro-viscoélastique avec endommagement que nous avons déjà introduite dans (1.14), où  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  sont les opérateurs de viscosité et d'élasticité à champs électriques nuls,  $\mathcal{E} = (e_{ijk})$  le tenseur piézoélectrique à champ constant ou nul, et  $B$  représente le tenseur de permittivité électrique à déformation nulle,  $E(\varphi) = -\nabla\varphi$  représente le champ électrique. Les équations (3.3) et (3.4) sont les équations du mouvement écrite pour le champ de contrainte et d'équilibre pour le champ de déplacement électrique, que nous avons déjà vu dans (1.6) et (1.7), l'évolution du champ d'endommagement est régi par inclusion du type parabolique donnée par la relation (3.5), les conditions (3.6) et (3.7) sont les conditions aux limites classiques de déplacement et traction. Nous passons maintenant à la condition (3.8). Nous supposons que le contact est avec usure et sans frottement, qui est supposée dépendre uniquement de chaque point de  $\Gamma_3$ .  $\dot{u}_\tau$  désigne la vitesse tangentielle et  $\sigma_\tau$  représente la contrainte tangentielle. La relation (3.9) représente une condition homogène de Neumann, où  $\frac{\partial\alpha}{\partial\nu}$  représente la dérivée normale de  $\alpha$ . (3.10) et (3.11) sont les conditions aux limites électriques. Finalement (3.13) représente les champs de déplacement, de vitesse et d'endommagement initiales. Nous avons encore besoin d'introduire quelques hypothèses sur les données.

L'opérateur d'élasticité  $\mathcal{B} : \Omega \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^d$  satisfait les propriétés suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a)} \quad \text{Il existe } L_{\mathcal{B}} > 0 \text{ telle que} \\ \quad \|\mathcal{B}(x, \varepsilon_1, \beta_1) - \mathcal{B}(x, \varepsilon_2, \beta_2)\| \leq L_{\mathcal{B}}\|\varepsilon_1 - \varepsilon_2\| + |\beta_1 - \beta_2| \\ \quad \text{pour tout } \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{S}^d, \text{ pour tout } \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } x \in \Omega. \\ \text{(b)} \quad \text{L'application } x \mapsto \mathcal{B}(x, \varepsilon, \beta) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Omega \\ \quad \text{pour tout } \varepsilon \in \mathbb{S}^d, \text{ pour tout } \beta \in \mathbb{R}. \\ \text{(c)} \quad \text{L'application } x \mapsto \mathcal{B}(x, 0, 0) \in \mathcal{H}. \end{array} \right. \quad (3.14)$$

La fonction source d'endommagement  $S : \Omega \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  satisfait les propriétés suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a)} \quad \text{Il existe } L_S > 0 \text{ tels que} \\ \quad |S(x, \varepsilon_1, \beta_1) - S(x, \varepsilon_2, \beta_2)| \leq L_S(\|\varepsilon_1 - \varepsilon_2\| + |\beta_1 - \beta_2|) \\ \quad \text{pour tout pour tout } \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{S}^d, \text{ pour tout } \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } x \in \Omega. \\ \text{(b)} \quad \text{L'application } x \mapsto S(x, \varepsilon, \beta) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Omega \\ \quad \text{pour tout } \varepsilon \in \mathbb{S}^d, \text{ pour tout } \beta \in \mathbb{R}. \\ \text{(c)} \quad \text{L'application } x \mapsto S(x, 0, 0) \in L^2(\Omega). \end{array} \right. \quad (3.15)$$

La fonction de conductivité électrique  $\psi : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$  satisfait les hypothèses.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) Il existe } L_\psi > 0 \text{ telle que} \\ \quad |\psi(x, r_1) - \psi(x, r_2)| \leq L_\psi |r_1 - r_2|, \quad \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } x \in \Gamma_3, \\ \text{(b) Il existe } M_\psi > 0 \text{ telle que } |\psi(x, r)| \leq M_\psi \quad \forall r \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } x \in \Gamma_3. \\ \text{(c) L'application } x \mapsto \psi(x, r) \text{ est lebesgue mesurable sur } \Gamma_3, \quad \forall r \in \mathbb{R}. \\ \text{(d) L'application } x \mapsto \psi(x, r) = 0 \text{ pour tout } r \leq 0. \end{array} \right. \quad (3.16)$$

En plus les hypothèses (2.13), (2.17) et (2.18) sur les opérateurs  $\mathcal{A}$ ,  $B$  et  $\mathcal{E}$ , respectivement, que nous venons de voir dans les chapitres précédents .

La densité de masse  $\rho$  satisfait

$$\rho \in L^\infty(\Omega), \text{ il existe } \rho^* \text{ telle que } \rho(x) \geq \rho^*, \text{ p.p. } x \in \Omega \quad (3.17)$$

Les forces volumiques  $f_0$ , les tractions surfaciques  $f_2$  et les densités des charges électriques volumiques  $q_0$  et surfaciques  $q_2$  vérifient

$$f_0 \in L^2(0, T; H), \quad f_2 \in L^2(0, T; L^2(\Gamma_2)^d), \quad (3.18)$$

$$q_0 \in W^{1,p}(0, T; L^2(\Omega)), \quad q_2 \in W^{1,p}(0, T; L^2(\Gamma_b)), \quad (3.19)$$

La fonction  $\alpha$  a les propriétés suivantes

$$\alpha \in L^\infty(\Gamma_3), \alpha(x) \geq \alpha_* > 0 \text{ p.p. sur } \Gamma_3, \quad (3.20)$$

$$k > 0, \quad (3.21)$$

$$u_0 \in V, v_0 \in H, \quad (3.22)$$

$$\beta_0 \in K. \quad (3.23)$$

Nous utiliserons le produit scalaire modifié sur  $H = L^2(\Omega)^d$  donné par

$$((u, v))_H = (\rho u, v)_H \quad \forall u, v \in H, \quad (3.24)$$

et soit  $|||\cdot|||_H$  la norme associée, c'est-à-dire

$$|||v|||_H = (\rho v, v)_H^{\frac{1}{2}} \quad \forall v \in H. \quad (3.25)$$

De (3.17), il vient que  $|||\cdot|||_H$  et  $||\cdot||_H$  sont des normes équivalentes sur  $H$ . D'autre part, l'application d'inclusion de  $(V, ||\cdot||_V)$  dans  $(H, ||\cdot||_H)$  est continue et dense. Nous notons par  $V'$  le dual de  $V$ . Identifiant le dual de  $H$  avec lui même, donc, nous pouvons écrire le triplet de Gelfand

$$V \subset H \subset V'.$$

La notation  $(\cdot, \cdot)_{V' \times V}$  désigne le produit de dualité entre  $V'$  et  $V$ , nous notons par  $||\cdot||_{V'}$  la norme sur  $V'$ , nous avons

$$(u, v)_{V' \times V} = ((u, v))_H \quad \forall u \in H, \quad \forall v \in V \quad (3.26)$$

On définissons la fonction  $f(t) \in V'$  par

$$(f(t), v)_v = \int_{\Omega} f_0(t) \cdot v dx + \int_{\Gamma_2} f_2(t) \cdot v ds, \quad (3.27)$$

et la fonction  $q : [0, T] \rightarrow W$  la fonction par :

$$(q(t), \phi)_W = \int_{\Omega} q_0(t) \cdot \phi dx - \int_{\Gamma_b} q_2(t) \cdot \phi da \quad \forall \phi \in W, t \in [0, T]. \quad (3.28)$$

Pour étudier le problème variationnelle du  $P^2$ , nous posons une hypothèse de petitesse

$$M_\psi < \frac{m_B}{\tilde{C}_0^2}, \quad (3.29)$$

où les constantes positives  $M_\psi$ ,  $m_B$  et  $\tilde{C}_0$  sont définies dans (3.16), (2.17) et (3.20) respectivement.

Pour  $v \in V$ , p.p.  $t \in (0, T)$ , et soit  $j : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ , être fonctionnel

$$j(u, v) = \int_{\Gamma_3} \alpha |u_\nu| |v_\nu| ds. \quad (3.30)$$

Soit  $h : V \times W \rightarrow W$  les applications définies par

$$h((u, \varphi), \phi) = \int_{\Gamma_3} \psi(u_\nu - l) \delta(\varphi - \varphi_0) \phi da. \quad (3.31)$$

Les conditions (3.18) et (3.19) impliquent

$$f \in L^2(0, T; V), q \in W^{1,p}(0, T; W) \quad (3.32)$$

Nous définissons la forme bilinéaire  $a : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)^d \rightarrow \mathbb{R}$  par

$$a(\xi, \varphi) = k_1 \int_{\Omega} \nabla \xi \cdot \nabla \varphi dx. \quad (3.33)$$

## 3.2 Formulation variationnelle

En utilisant la formule de Green (1.2.1)

$$(\sigma, \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + (Div \sigma, v)_H = \int_{\Gamma} \sigma \nu \cdot v da \quad \forall v \in H_1,$$

on trouve

$$\int_{\Omega} \sigma \cdot \varepsilon(v) dx + \int_{\Omega} Div \sigma \cdot v dx = \int_{\Gamma_1} \sigma \nu \cdot v da + \int_{\Gamma_2} \sigma \nu \cdot v da + \int_{\Gamma_3} \sigma \nu \cdot v da \quad \forall v \in V.$$

De la définition de l'espace  $V$  avec (3.3) et (3.7), on obtient

$$\int_{\Omega} \sigma \cdot \varepsilon(v) dx - \int_{\Omega} f_0 \cdot v dx + \int_{\Omega} \rho \ddot{u} \cdot v dx = \int_{\Gamma_2} f_2 \cdot v da + \int_{\Gamma_3} \sigma \nu \cdot v da \quad \forall v \in V.$$

et puisque

$$\begin{aligned}
\sigma\nu.v &= \sigma_\nu v_\nu + \sigma_\tau.v_\tau \\
&= -\alpha|\dot{u}_\nu|v_\nu + 0.v_\tau \\
&= -\alpha|\dot{u}_\nu|v_\nu
\end{aligned} \tag{3.34}$$

il vient que

$$\int_{\Omega} \sigma.\varepsilon(v)dx + \int_{\Omega} \rho\ddot{u}.vdx = \int_{\Omega} f_0.vdx + \int_{\Gamma_2} f_2.vda - \int_{\Gamma_3} \alpha|\dot{u}_\nu|v_\nu da \tag{3.35}$$

De (3.24) - (3.27) et(3.30), nous obtenons :

$$(\rho\ddot{u}(t), v)_{V' \times V} + (\sigma(t), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + j(\dot{u}(t), v) = (f(t), v)_{V' \times V} \quad \forall v \in V, t \in (0, T) \tag{3.36}$$

$$((\ddot{u}(t), v))_H + (\sigma(t), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + j(\dot{u}(t), v) = (f(t), v)_{V' \times V} \quad \forall v \in V, t \in (0, T) \tag{3.37}$$

D'autre part, en utilisant la formule de Green

$$(D, \nabla\phi)_H + (divD, \phi)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Gamma} D.\nu\phi da \quad \forall \phi \in H^1(\Omega),$$

on a

$$\int_{\Omega} D.\nabla\phi dx + \int_{\Omega} divD\phi da = \int_{\Gamma_a} D.\nu\phi da + \int_{\Gamma_b} D.\nu\phi da + \int_{\Gamma_3} D.\nu\phi da \quad \forall \phi \in W$$

De la définition de l'espace  $W$  avec (3.4) - (3.11) et(3.12), nous trouvons

$$\int_{\Omega} D.\nabla\phi dx + \int_{\Omega} q_0\phi dx - \int_{\Gamma_b} q_2\phi da = \int_{\Gamma_3} \psi(u_\nu - l)\delta(\varphi - \varphi_0)\phi da \quad \forall \phi \in W.$$

De (3.2) - (3.28) et (3.31), on obtient

$$(D(t).\nabla\phi)_H + (q(t), \phi)_W = h((u(t), \varphi(t)), \phi) \quad \forall \phi \in W, \tag{3.38}$$

Nous avons

$$(B(\nabla\varphi(t)), \nabla\xi)_H - (\mathcal{E}\varepsilon(u(t)), \nabla\xi)_H + (h(u(t), \varphi(t)), \xi)_H = (q(t), \phi)_W \quad \forall \xi \in W, t \in (0, t). \tag{3.39}$$

Enfin soit  $\beta(t) \in K$  et pour tout  $t \in [0, T]$ . De la définition (1.51) de  $\partial\Psi_K$  et de (3.5), on obtient

$$\begin{aligned}
&(\dot{\beta}(t), \xi - \beta(t))_{L^2(\Omega)} - k(\Delta\beta(t), \xi - \beta(t))_{L^2(\Omega)} \\
&\geq (S(\varepsilon(u)(t), \beta(t)), \xi - \beta(t))_{L^2(\Omega)} \quad \forall \xi \in K,
\end{aligned} \tag{3.40}$$

En utilisant la formule de Green avec (3.9) et (3.33), on trouve

$$\begin{aligned} & (\dot{\beta}(t), \xi - \beta(t))_{L^2(\Omega)} + a(\beta(t), \xi - \beta(t)) \\ & \geq (S(\varepsilon(u)(t), \beta(t)), \xi - \beta(t))_{L^2(\Omega)} \quad \forall \xi \in K, \end{aligned} \quad (3.41)$$

De (3.37) - (3.41) et (3.13), on obtient la formulation variationnelle du problème  $P^2$ .

**Problème  $P_V^2$ .** Trouver le champ des déplacements  $u : [0, T] \rightarrow V$ , le champ des contraintes  $\sigma : [0, T] \rightarrow \mathcal{H}$ , le champ de potentiel électrique  $\varphi : [0, T] \rightarrow W$ , et le champ d'endommagement  $\beta : [0, T] \rightarrow H^1(\Omega)$  tels que

$$\sigma(t) = \mathcal{A}(\varepsilon(\dot{u}(t))) + \mathcal{B}(\varepsilon(u(t)), \beta(t)) - \mathcal{E}^*(\nabla\varphi(t)) \quad \text{p.p. } t \in (0, T), \quad (3.42)$$

$$((\ddot{u}(t), v))_H + (\sigma(t), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + j(\dot{u}(t), v) = (f(t), v)_{V' \times V} \quad \forall v \in V, t \in (0, T) \quad (3.43)$$

$$\begin{aligned} & (\dot{\beta}(t), \xi - \beta(t))_{L^2(\Omega)} + a(\beta(t), \xi - \beta(t)) \\ & \geq (S(\varepsilon(u)(t), \beta(t)), \xi - \beta(t))_{L^2(\Omega)} \quad \forall \xi \in K, \quad \beta(t) \in K, \quad \forall t \in [0, T], \quad \forall \xi \in K, \end{aligned} \quad (3.44)$$

$$\begin{aligned} & (\mathcal{B}\nabla\varphi(t), \nabla\phi)_H - (\mathcal{E}\varepsilon(u(t)), \nabla\phi)_H + h((u(t), \varphi(t)), \phi) = (q(t), \phi)_W \\ & \forall \phi \in W, \quad t \in (0, T), \end{aligned} \quad (3.45)$$

$$u(0) = u_0, \quad \dot{u}(0) = v_0, \quad \beta(0) = \beta_0. \quad (3.46)$$

### 3.3 Existence et unicité de la solution

L'intérêt principal dans cette section est le résultat d'existence et d'unicité suivant

**Théorème 3.3.1** *Sous les hypothèses (2.13) - (3.23), le problème  $P_V^2$  admet une solution unique  $\{u, \sigma, \varphi, D, \beta\}$  ayant la régularité. En outre, la solution vérifie :*

$$u \in H^1(0, T; V) \cap V^1(0, T; H), \quad \ddot{u} \in L^2(0, T; V'), \quad (3.47)$$

$$\varphi \in W^{1,p}(0, T; W), \quad (3.48)$$

$$\beta \in W^{1,2}(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega)), \quad (3.49)$$

Les fonctions  $u, \varphi, \sigma, D$  et  $\beta$ , satisfaisant (3.1) - (3.2) et (3.41) - (3.45) s'appellent une solution faible du problème  $P^2$ .

$$\sigma \in L^2(0, T; \mathcal{H}), \quad \text{Div}\sigma \in L^2(0, T; V') \quad (3.50)$$

$$D \in W^{1,p}(0, T; \mathcal{W}), \quad (3.51)$$

En effet, de (3.41) et (3.44), il vient que  $\rho\ddot{u} = \text{Div}\sigma(t) + f_0$ ,  $\text{div}D = q_0(t)$  pour tout  $t \in [0, T]$ ; De la régularité (3.47) et (3.48) de  $u$  et  $\varphi$  combinée avec (3.1) - (3.2) et (2.13) - (3.19), on obtient (3.50) et (3.51).

La démonstration du Théorème 3.3.1 sera faite en plusieurs étapes, elle est basée sur les résultats des inéquations variationnelles, les opérateurs monotones et les arguments du point fixe. Nous supposons dans la suite de cette section que (2.13) - (3.23) sont vérifiés,  $c$  désigne une constante

positive qui dépend de  $\Omega, \Gamma_1$  et  $\Gamma_3$ .

Soit  $\eta \in L^2(0, T; V')$ . Dans la première étape, on considère le problème variationnel suivant.

**Problème**  $P_\eta^2$  Trouver le champ de déplacement  $u_\eta : [0, T] \rightarrow V$  tel que :

$$(\ddot{u}_\eta(t), v)_{V' \times V} + (\mathcal{A}\varepsilon(\ddot{u}_\eta(t)), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + (\eta(t), v)_{V' \times V} = (f(t), v)_{V' \times V}, \quad \forall v \in V \quad (3.52)$$

$$u_\eta(0) = u_0, \dot{u}_\eta(0) = v_0 \quad (3.53)$$

Nous avons le résultat suivant.

**Lemme 3.3.1** *Il existe une unique solution du problème  $P_\eta^2$  qui satisfait (3.47)*

**Preuve.** Nous définissons l'opérateur  $A : V \rightarrow V'$  par

$$(Au, v)_{V' \times V} = (\mathcal{A}(\varepsilon(u)), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + j(u, v) \quad \forall u, v \in V. \quad (3.54)$$

De (3.54), (1.29) avec (3.30) et pour tout  $u, v \in V$ , on a

$$\|Au - Av\|_{V' \times V} \leq (L_{\mathcal{A}} + C_0^2 \|\alpha\|_{L^\infty(\Gamma_3)}) \|u - v\|_V \quad \forall u, v \in V, \quad (3.55)$$

L'inégalité (3.55) implique que l'opérateur  $A : V \rightarrow V'$  est de Lipschitz et ainsi est hemicontinu.

En outre, de (3.54), (1.29), (3.30) et (2.13), on a

$$(Au - Av, u - v)_{V' \times V} \geq (m_{\mathcal{A}} - C_0^2 \|\alpha\|_{L^\infty(\Gamma_3)}) \|u - v\|_V^2 \quad \forall u, v \in V, \quad (3.56)$$

Soit  $\alpha_0 = \frac{m_{\mathcal{A}}}{C_0^2}$ , il est clair que  $\alpha_0$  est positive qui dépend de  $\Omega_1, \Gamma_3$  et  $\mathcal{A}$ . Alors  $A$  est fortement monotone sur  $V$  si

$$\|\alpha\|_{L^\infty(\Gamma_3)} < \alpha_0 \quad (3.57)$$

Maintenant, nous choisissons  $v = 0_V$  dans (3.60), on obtient

$$\begin{aligned} (Au, u)_{V' \times V} &\geq (m_{\mathcal{A}} - C_0^2 \|\alpha\|_{L^\infty(\Gamma_3)}) \|u\|_V^2 - \|A0_V\|_{V'} \|u\|_V \\ &\geq \frac{1}{2} (m_{\mathcal{A}} - C_0^2 \|\alpha\|_{L^\infty(\Gamma_3)}) \|u\|_V^2 - \frac{1}{2(m_{\mathcal{A}} - C_0^2 \|\alpha\|_{L^\infty(\Gamma_3)})} \|A0_V\|_{V'}^2, \quad \forall u \in V, \end{aligned} \quad (3.58)$$

donc

$$\begin{aligned} (Au, u)_{V' \times V} &\geq \lambda \|u\|_V^2 + \omega \quad \forall u \in V, \quad \text{avec } \lambda = \frac{1}{2} (m_{\mathcal{A}} - C_0^2 \|\alpha\|_{L^\infty(\Gamma_3)}) \text{ et} \\ \omega &= -\frac{1}{2(m_{\mathcal{A}} - C_0^2 \|\alpha\|_{L^\infty(\Gamma_3)})} \|A0_V\|_{V'}^2. \end{aligned}$$

Alors, la condition (2.1) du Théorème 1.2.3 est vérifiée. En plus, l'aide de (3.55) nous déduisons que

$$\|Au\|_{V'} \leq (L_{\mathcal{A}} + C_0^2 \|\alpha\|_{L^\infty(\Gamma_3)}) \|Au\|_V + \|A0_V\|_{V'}, \quad \forall u \in V. \quad (3.59)$$

Alors, la condition (2.3) du Théorème 1.2.3 est satisfaite. En outre, de (2.15) et (3.32), nous avons

$$f - \eta \in L^2(0; T; V') \quad \text{et} \quad \forall v_0 \in H. \quad (3.60)$$

Finalement, nous remarquons que toutes les conditions du Théorème 1.2.3 sont vérifiées, donc, nous concluons qu'il existe une unique fonction  $v_\eta$  qui satisfait

$$v_\eta \in L^2(0, T; V) \cap C(0, T; H), \dot{v}_\eta \in L^2(0, T; V'), \quad (3.61)$$

$$\dot{v}_\eta(t) + Av_\eta(t) + \eta(t) = f(t) \text{ p.p.t } \in (0, T), \quad (3.62)$$

$$v_\eta(0) = v_0. \quad (3.63)$$

Nous définissons la fonction  $u_\eta : [0, T] \rightarrow V$  par

$$u_\eta(t) = \int_0^t v_\eta(s) ds + u_0 \quad \forall t \in [0, T]. \quad (3.64)$$

De (3.54) et (3.61) (3.64), nous déduisons que  $u_\eta$  est une solution unique du problème variationnel  $P_\eta^2$  satisfait la régularité (3.47).

■

Dans la deuxième étape, soit  $\eta \in L^2(0, T; V')$ , nous utilisons le champ des déplacements  $u_\eta$  obtenu dans lemme 3.3.1 et nous considérons le problème variationnel suivant.

**Problème  $Q_\eta^2$ .** Trouver un champ de potentiel électrique  $\varphi_\eta : [0, T] \rightarrow W$  tel que

$$(B\nabla\varphi_\eta(t), \nabla\phi)_H - (\mathcal{E}\varepsilon(u_\eta(t)), \nabla\phi)_H + h((u_\eta(t), \varphi(t)), \phi) = (q(t), \phi)_W \quad \forall \phi \in W, t \in [0, T]. \quad (3.65)$$

Nous avons le résultat suivant d'existence et d'unicité.

**Lemme 3.3.2** *Il existe une solution unique du problème  $P_{\varphi_\eta}^2$  et cela satisfait la régularité (3.48). De plus si  $\varphi_{\eta_1}$  et  $\varphi_{\eta_2}$  sont deux solutions de (3.65) correspondantes à  $\eta_1, \eta_2 \in L^2(0, T; V')$  alors il existe  $C > 0$  tel que*

$$\|\varphi_{\eta_1}(t) - \varphi_{\eta_2}(t)\|_W \leq C \|u_{\eta_1}(t) - u_{\eta_2}(t)\|_V, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (3.66)$$

**Preuve.** Soit  $t \in [0, T]$ . Nous utilisons le Théorème de représentation de Riesz-réchet pour définir l'opérateur  $A_\eta(t) : W \rightarrow W$  par

$$(A_\eta(t)\varphi, \phi)_W = (B\nabla\varphi, \nabla\phi)_W - (\mathcal{E}\varepsilon(u_\eta(t)), \nabla\phi)_W + (h(u_\eta(t), \varphi), \phi)_W, \quad (3.67)$$

pour tout  $\varphi, \phi \in W$ . Soient  $\varphi_1, \varphi_2 \in W$ , nous utilisons les hypothèses (2.17) et (3.31) pour trouver

$$\begin{aligned} & (A_\eta(t)\varphi_1 - A_\eta(t)\varphi_2, \varphi_1 - \varphi_2)_W \\ & \geq m_B \|\varphi_1 - \varphi_2\|_W^2 + \int_{\Gamma_C} \psi(u_{\eta\nu}(t) - l)[\delta(\varphi_1 - \varphi_0) - \delta(\varphi_2 - \varphi_0)](\varphi_1 - \varphi_2) da, \end{aligned}$$

et, par l'hypothèse (3.16)(a) combinée avec la monotonie de la fonction  $\delta$  définie par (1.26), nous obtenons

$$(A_\eta(t)\varphi_1 - A_\eta(t)\varphi_2, \varphi_1 - \varphi_2)_W \geq m_B \|\varphi_1 - \varphi_2\|_W^2. \quad (3.68)$$

D'un autre côté, en utilisant de nouveau (2.18), (2.17), (3.16) et (3.31) nous avons

$$\begin{aligned} & (A_\eta(t)\varphi_1 - A_\eta(t)\varphi_2, \phi)_W \\ & \leq C_\mathcal{E} \|\varphi_1 - \varphi_2\|_W \|\phi\|_W + \int_{\Gamma_C} M_\psi \|\varphi_1 - \varphi_2\|_W \|\phi\|_W da, \quad \forall \phi \in W, \end{aligned} \quad (3.69)$$

où  $C_\mathcal{E}$  représente une constante positive qui dépend du tenseur piézoélectrique  $\mathcal{E}$ . Il s'ensuit de (3.69) et (1.30) que

$$(A_\eta(t)\varphi_1 - A_\eta(t), \phi)_W \leq (C_\mathcal{E} + M_\psi C_0^2) \|\varphi_1 - \varphi_2\|_W \|\phi\|_W,$$

ce qui implique que

$$\|A_\eta(t)\varphi_1 - A_\eta(t)\|_W \leq (C_\mathcal{E} + M_\psi C_0^2) \|\varphi_1 - \varphi_2\|_W. \quad (3.70)$$

Les inégalités (3.68) et (3.70) montrent que l'opérateur  $A_\eta(t)$  est fortement monotone et de Lipschitz sur  $W$ ; donc, en utilisant un résultat standard sur les égalités variationnelles, il s'ensuit qu'il existe un unique élément  $\varphi_\eta(t) \in W$  tel que

$$A_\eta(t)\varphi_\eta(t) = q(t). \quad (3.71)$$

Nous combinons maintenant (3.67) et (3.71) pour deduire que  $\varphi_\eta(t) \in W$  est l'unique solution de l'équation variationnelle (3.65).

Nous prouvons maintenant dire que  $\varphi_\eta \in W^{1,p}(0, T; W)$ . A cette fin, considérons  $t_1, t_2 \in [0, T]$  et, pour raison de simplicité, nous écrivons  $\varphi_\eta(t_i) = \varphi_i$ ,  $u_{\eta\nu}(t_i) = u_i$ ,  $q(t_i) = q_i$ , pour  $i = 1, 2$ . Moyennant (3.65), (2.18), (2.17) et (3.31) nous dérivons l'inégalité

$$\begin{aligned} m_B \|\varphi_1 - \varphi_2\|_W^2 & \leq C_\mathcal{E} \|u_1 - u_2\|_V \|\varphi_1 - \varphi_2\|_W + \|q_1 - q_2\|_W \|\varphi_1 - \varphi_2\|_W \\ & + \int_{\Gamma_C} |\psi(u_1 - g)\delta(\varphi_1 - \varphi_0) - \psi(u_2 - g)\delta(\varphi_2 - \varphi_0)| |\varphi_1 - \varphi_2| da. \end{aligned} \quad (3.72)$$

Nous utilisons les bornes  $|\psi(u_i - l)| \leq M_\psi$ ,  $|\delta(\varphi_i - \varphi_0)| \leq L_\delta$ , les propriétés des fonctions  $\psi$ ,  $\delta$  et l'inégalité (1.30), on obtient

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma_C} |\psi(u_1 - l)\delta(\varphi_1 - \varphi_0) - \psi(u_2 - l)\delta(\varphi_2 - \varphi_0)| |\varphi_1 - \varphi_2| da \\ & \leq M_\psi \int_{\Gamma_C} |\varphi_1 - \varphi_2|^2 da + L_\psi L_\delta \int_{\Gamma_C} |u_1 - u_2| |\varphi_1 - \varphi_2| da \\ & \leq M_\psi C_0^2 \|\varphi_1 - \varphi_2\|_W^2 + L_\psi L_\delta C_0 \tilde{C}_0 \|u_1 - u_2\|_V \|\varphi_1 - \varphi_2\|_W. \end{aligned}$$

Nous remplaçons cette dernière inégalité dans (3.72) et trouver que

$$m_B \|\varphi_1 - \varphi_2\|_W \leq (C_\mathcal{E} + L_\psi L_\delta C_0 \tilde{C}_0) \|u_1 - u_2\|_V + \|q_1 - q_2\|_W + M_\psi C_0^2 \|\varphi_1 - \varphi_2\|_W. \quad (3.73)$$

Il s'ensuit maintenant de l'inégalité (3.73) et l'hypothèse de petitesse (3.29) que

$$\|\varphi_1 - \varphi_2\|_W \leq C(\|u_1 - u_2\|_V + \|q_1 - q_2\|_W). \quad (3.74)$$

où  $C$  est une constante positive. Comme  $q \in W^{1,p}(0, T; W)$  et  $u_\eta \in C^1([0, T]; H)$ , l'inégalité (3.74) implique que  $\varphi_\eta \in W^{1,p}(0, T; W)$ .

Soit maintenant  $\eta_1, \eta_2 \in L^2(0, T; V')$  et pour simplicité, notons  $\varphi_{\eta_i} = \varphi_i, u_{\eta_i} = u_i, i = 1, 2$ . Nous utilisons (3.65) et moyennant des arguments similaires à ceux utilisés dans la preuve de (3.73) pour obtenir que

$$\begin{aligned} m_B \|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\|_W &\leq (C_\varepsilon + L_\psi L_\delta C_0 \tilde{C}_0) \|u_1(t) - u_2(t)\|_V \\ &+ M_\psi C_0^2 \|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\|_W, \quad \forall t \in [0, T]. \end{aligned}$$

Cette dernière inégalité combinée avec l'hypothèse de petitesse sur la fonction  $\psi$  (3.29) mènent à (3.66), ce qui achève la preuve. ■

Dans la troisième étape, nous considérons le problème auxiliaire suivant pour le champ d'endommagement dans lequel  $\theta \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$  est donné.

**Problème  $P_\theta^2$ .** Trouver le champ d'endommagement  $\beta_\theta : [0, T] \rightarrow H^1(\Omega)$  tels que

$$\begin{aligned} \beta_\theta(t) &\in K, (\dot{\beta}_\theta(t), \xi - \beta_\theta)_{L^2(\Omega)} + a(\beta_\theta(t), \xi - \beta_\theta(t)) \\ &\geq (\theta(t), \xi - \beta_\theta(t))_{L^2(\Omega)}, \quad \forall \xi \in K \quad \text{p.p. } t \in [0, T], \end{aligned} \quad (3.75)$$

$$\beta_\theta(0) = \beta_0. \quad (3.76)$$

**Lemme 3.3.3 .** *Pour tout  $\theta \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ , il existe une unique solution  $\beta_\theta$  du problème auxiliaire  $P_\theta^2$  satisfait (3.49).*

**Preuve.** En appliquant le Théorème 1.2.4 on démontre que  $\beta_\theta \in H^1(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega))$ .

■  
Pour chaque  $(\eta, \theta) \in L^2([0, T]; V' \times L^2(\Omega))$  nous notons par  $u_\eta$  la solution du problème  $P_\eta^2$  fournie dans le Lemme 3.3.1, par  $\varphi_\eta$  la solution du problème  $Q_\eta^2$  fournie dans le Lemme 3.3.2 et par  $\beta_\theta$  la solution du problème  $P_\theta^2$  fournie dans le Lemme 3.3.3, En outre, nous appliquons le Théorème de représentation de Riesz-Fréchet pour définir la fonction  $\Lambda(\eta, \theta) : [0, T] \rightarrow V' \times L^2(\Omega)$  par

$$\Lambda(\eta(t), \theta(t)) = (\Lambda_0(\eta(t), \theta(t)), \Lambda_1(\eta(t), \theta(t))) \quad (3.77)$$

où  $\Lambda_0$  et  $\Lambda_1$  donnés par

$$\langle \Lambda_0(\eta(t), \theta(t)), v \rangle_{V' \times V} = (\mathcal{B}(\varepsilon(u_\eta(t)), \beta_\theta(t)) + \mathcal{E}^* \nabla \varphi_\eta(t), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} \quad (3.78)$$

$$\Lambda_1(\eta(t), \theta(t)) = S(\varepsilon(u_\eta(t)), \beta_\theta(t)) \quad (3.79)$$

**Lemme 3.3.4 .** *Pour chaque  $(\eta, \theta) \in L^2(0, T; V' \times L^2(\Omega))$ , la fonction  $\Lambda(\eta, \theta)$  appartient à l'espace  $L^2(0, T; V' \times L^2(\Omega))$ . Par ailleurs, l'opérateur  $\Lambda : L^2(0, T; V' \times L^2(\Omega)) \rightarrow L^2(0, T; V' \times L^2(\Omega))$  possède un point fixe  $(\eta^*, \theta^*)$  unique.*

**Preuve.** Soient  $(\eta_1, \theta_1), (\eta_2, \theta_2) \in L^2(0, T; V' \times L^2(\Omega))$ . Pour simplicité, nous utilisons les notations  $u_{\eta_i} = u_i, \dot{u}_{\eta_i} = \dot{u}_i, \varphi_{\eta_i} = \varphi_i$  et  $\beta_{\theta_i} = \beta_i$ , pour  $i = 1, 2$ , nous avons

$$\|\Lambda_0(\eta_1, \theta_1) - \Lambda_0(\eta_2, \theta_2)\|_{V'} \leq \|\mathcal{B}(\varepsilon(u_1), \beta_1) - \mathcal{B}(\varepsilon(u_2), \beta_1)\|_{\mathcal{H}} + \|\mathcal{E}^* \nabla \varphi_1 - \mathcal{E}^* \nabla \varphi_2\|_{\mathcal{H}}$$

D'après la définition (3.77) combinée avec les hypothèses (1.29), (3.14) sur  $\mathcal{B}$  et (2.18) sur  $\mathcal{E}$ , on en déduit qu'il existe  $C > 0$  telle que

$$\|\Lambda_0(\eta_1, \theta_1) - \Lambda_0(\eta_2, \theta_2)\|_{V'}^2 \leq C(\|u_1 - u_2\|_V^2 + \|\beta_1 - \beta_2\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\varphi_1 - \varphi_2\|_W^2). \quad (3.80)$$

Comme  $u_1$  et  $u_2$  ont la même valeur initiale, il s'ensuit que

$$\|u_1(t) - u_2(t)\|_V \leq \int_0^t \|\dot{u}_1(s) - \dot{u}_2(s)\|_{V'} ds, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (3.81)$$

Mettons  $\eta = \eta_1, v = \dot{u}_2$  et  $\eta = \eta_2, v = \dot{u}_1$  dans (3.43), gardant à l'esprit (3.54) et en combinant les inégalités résultantes, nous en trouvons

$$\langle \ddot{u}_1 - \ddot{u}_2, \dot{u}_1 - \dot{u}_2 \rangle_{V' \times V} + \langle A\dot{u}_1 - A\dot{u}_2, \dot{u}_1 - \dot{u}_2 \rangle_{V' \times V} \leq -\langle \eta_1 - \eta_2, \dot{u}_1 - \dot{u}_2 \rangle_{V' \times V},$$

en utilisant des arguments semblables, nous trouvons

$$\int_0^t \|\dot{u}_1(s) - \dot{u}_2(s)\|_{V'}^2 ds \leq C \int_0^t \|\eta_1(s) - \eta_2(s)\|_{V'}^2 ds \quad \text{p.p. } t \in (0, T). \quad (3.82)$$

De (3.81) et (3.82), on déduit

$$\|u_1(t) - u_2(t)\|_V^2 \leq C \int_0^t \|\eta_1(s) - \eta_2(s)\|_{V'}^2 ds \quad \text{p.p. } t \in (0, T). \quad (3.83)$$

Nous employons les hypothèses (2.18) et (2.17) sur les tenseurs piézoélectriques et la permittivité respectivement avec l'inégalité de Friedrichs-Poincaré (1.31), il s'ensuit de (3.65) que

$$\|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\|_W^2 \leq C\|u_1(t) - u_2(t)\|_V^2, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (3.84)$$

En outre, en substituant  $\theta = \theta_1, \xi = \beta_{\theta_1}$ ,  $\theta = \theta_2, \xi = \beta_{\theta_2}$  dans (3.75) et en soustrayant les deux inégalités obtenues, on trouve

$$\begin{aligned} & (\dot{\beta}_{\theta_1}(t) - \dot{\beta}_{\theta_2}(t), \beta_{\theta_1}(t) - \beta_{\theta_2}(t))_{L^2(\Omega)} + a(\beta_{\theta_1}(t) - \beta_{\theta_2}(t), \beta_{\theta_1}(t) - \beta_{\theta_2}(t)) \\ & \leq (\lambda_1(t) - \lambda_2(t), \beta_{\theta_1}(t) - \beta_{\theta_2}(t))_{L^2(\Omega)}, \quad \text{p.p. } t \in (0, T). \end{aligned}$$

On intègre l'égalité précédente et en appliquant les inégalité de Hölder et Young, et lemme de Gronwall on déduit que

$$\|\beta_{\theta_1}(t) - \beta_{\theta_2}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \int_0^t \|\theta_1(s) - \theta_2(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds. \quad (3.85)$$

Nous substituons (3.83)-(3.85) dans (3.80) nous obtenons

$$\begin{aligned} & \int_0^T \|\Lambda_0(\eta_1(s), \theta_1(s)) - \Lambda_0(\eta_2(s), \theta_2(s))\|_{V' \times L^2(\Omega)}^2 ds \\ & \leq C \int_0^T (\|\eta_1(s) - \eta_2(s)\|_{V'}^2 + \|\theta_1(s) - \theta_2(s)\|_{L^2(\Omega)}^2) ds. \end{aligned} \quad (3.86)$$

En utilisant l'hypothèse (3.15), l'égalité (1.29) avec les estimations (3.83) et (3.85) on obtient l'estimation de  $\Lambda_1$

$$\begin{aligned}
& \int_0^T \|\Lambda_1(\eta_1(s), \theta_1(s)) - \Lambda_1(\eta_2(s), \theta_2(s))\|_{V' \times L^2(\Omega)}^2 ds \\
&= \int_0^T \|S(\varepsilon(u_1(s)), \beta_1(s)) - S(\varepsilon(u_2(s)), \beta_2(s))\|_{V' \times L^2(\Omega)}^2 ds \\
&\leq C \int_0^T (\|\eta_1(s) - \eta_2(s)\|_{V'}^2 + \|\mu_1(s) - \mu_2(s)\|_{L^2(\Omega)}^2) ds.
\end{aligned} \tag{3.87}$$

Nous combinons les inégalités (3.86) et (3.87) pour obtenir

$$\|\Lambda(\eta_1, \theta_1) - \Lambda(\eta_2, \theta_2)\|_{L^2(0,T;V' \times L^2(\Omega))}^2 \leq C \|\eta_1 - \theta_1, \eta_2 - \theta_2\|_{L^2(0,T;V' \times L^2(\Omega))}^2. \tag{3.88}$$

En réitérant  $n$  fois l'inégalité (3.88) on obtient :

$$\|\Lambda^n(\eta_1, \theta_1) - \Lambda^n(\eta_2, \theta_2)\|_{L^2(0,T;V' \times L^2(\Omega))}^2 \leq \frac{C^n}{n!} \|\eta_1 - \theta_1, \eta_2 - \theta_2\|_{L^2(0,T;V' \times L^2(\Omega))}^2, \tag{3.89}$$

ce qui implique que pour  $n$  suffisamment grand une puissance  $\Lambda^n$  de  $\Lambda$  est une contraction dans l'espace de Banach  $L^2(0, T; V' \times L^2(\Omega))$ , ce qui conclut la preuve.  $\square$  ■

Maintenant, nous avons tous les ingrédients pour fournir la preuve du Théorème 3.3.1.

### Démonstration du Théorème 3.3.1.

**Existence.** Soit  $(\eta^*, \theta^*) \in L^2(0, T; V' \times L^2(\Omega))$  le point fixe de  $\Lambda$  et soit  $u$ ,  $\varphi$  et  $\beta$  la solution du problème  $P_\eta^2$ ,  $Q_\eta^2$  et  $P_\theta^2$  pour  $\eta = \eta^*$  et  $\theta = \theta^*$  c'est-à-dire  $u = u_{\eta^*}$ ,  $\varphi = \varphi_{\eta^*}$  et  $\beta = \beta_{\theta^*}$ . Les égalités  $\Lambda_0(\eta^*, \theta^*) = \eta^*$  et  $\Lambda_1(\eta^*, \theta^*) = \theta^*$  combinées avec (3.78) et (3.79) montrent que (3.43)-(3.45) sont satisfaites. Ensuite, (3.46) et la régularité (3.47)-(3.49) résulte de Lemmes 3.3.1, 3.3.2 et 3.3.3. Comme  $u \in W^{1,2}(0, T; V)$ , il s'ensuit de (3.1), (2.18), (2.13) et (3.14) que  $\sigma \in L^2(0, T; \mathcal{H})$ . Maintenant les hypothèses (3.17), (3.18) et la régularité  $\ddot{u} \in L^2(0, T; V_1')$  impliquent que  $\text{Div} \sigma \in L^2(0, T; V_1')$ .

**Unicité.** L'unicité de la solution est une conséquence de l'unicité du point fixe de l'opérateur  $\Lambda$  défini par (3.77)-(3.79) et la solvabilité unique de problème  $P_\eta^2$ ,  $Q_\eta^2$  et  $P_\theta^2$ .

# Bibliographie

- [1] A.A Abdelaziz, *Etude théorique de quelques problèmes dynamiques en contact avec endommagement*, Thèse de doctorat, Université de Sétif, (2015).
- [2] A. Amassad, K. Kuttler, M. Rochdi, M. Shillor, *Quasistatic thermoviscoelastic contact problem with slip dependent friction coefficient*, Math. Comput. Model, 36(7-8), 839-854 (2002).
- [3] B. Awbi, El. H. Essoufi, M. Sofonea, *A viscoelastic Contact Problem with normal damped response and friction*, Annales Polonici Mathematici LXXV, pp.233-246 (2000).
- [4] V. Barbu, *Nonlinear semigroups and differential equations in Banach spaces*, Noordhoff (1976).
- [5] V. Barbu, *Optimal Control of Variational Inequalities*, Pitman, Boston (1984).
- [6] R.C. Batra, J. S. Yang : *Saint Venant's principle in linear piezoelectricity*. *J. Elasticity* 38 (1995), 209-218.
- [7] P. Bisenga, F. Lebon, F. Maceri : *The unilateral frictional contact of a piezoelectric body with a rigid support*. In : Contact Mechanics (J.A.C. Martins, M.D.P. Monteiro Marques, eds.). Kluwer, Dordrecht, 2002, pp. 347-354.
- [8] H. Brézis, *Analyse Fonctionnelle, Théorie et Application*, Masson, Paris (1987).
- [9] M. Dalah, M. Sofonea : *Antiplane frictional contact of electro-viscoelasticity cylinders*. *Electron. J. Differ. Equ.* (2007).
- [10] T. Ikeda : *Fundamentals of Piezoelectricity*. Oxford University Press, Oxford, 1990.
- [11] I. R. Ionescu and M. Sofonea, *Functional and Numerical Methods in Viscoplasticity*, Oxford University Press, Oxford, (1994).
- [12] Z. Lerguet, *Analyse de quelques problèmes de contact avec frottement et adhésion*, Thèse de doctorat, Université de Sétif, (2008).
- [13] Z. Lerguet, M. Shillor, M. Sofonea : *A frictional contact problem for an electroviscoelastic body*. *Electron. J. Differ. Equ.*(2007).
- [14] F. Maceri, P. Bisenga : *The unilateral frictionless contact of piezoelectric body with a rigid support*. *Math. Comput. Modelling* 28 (1998), 19-28.
- [15] M. Mesai Aotn M. Salah, *Analyse mathématique de quelques problèmes aux limites en piézoélectricité*, Thèse de magister, Université de Kasdi Merbah Ourgla, (2013).

- [16] M. Selmani, L. Selmani, *A frictional contact problem with wear and damage for electro-viscoelastic materials*, Sétif 89-109. (2010).
- [17] M. Shillor, M. Sofonea and J.J. Telega, *Models and Variational Analysis of quasistatic Contact*, Lect Notes Phys, 655, Springer, Berlin Heidelberg, (2004).
- [18] M. Sofonea, El. H. Essoufi, *A piezoelectric contact problem with slip dependent coefficient of friction*, Mathematical Modelling and Analysis 9, 2004, 229-242.
- [19] M. Sofonea, E.H. Essoufi, *Quasistatic frictional contact of a viscoelastic piezoelectric body*, Adv. Math. Sci. Appl.14 (1)(2004) 25-40.
- [20] M. Sofonea, El H. Essoufi : *Quasistatic frictional contact of viscoelastic piezoelectric body*. Adv. Math. Sci. Appl. 14 (2004), 613-631.
- [21] M. Sofonea, R. Arhab : *An electro-viscoelastic contact problem with adhesion*. Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst., Ser. A, Math. Anal. 14 (2007), 577-991.

**Résumé :** Ce mémoire est destiné à l'étude théorique de deux problèmes de contact avec ou sans frottement entre un corps piézoélectrique déformable et une fondation. Sous l'hypothèse des petites transformations, nous analysons des processus quasistatiques et dynamiques pour des matériaux électro-viscoélastiques et électro-élasto-viscoplastiques. Les résultats obtenus concernent l'existence et l'unicité d'une solution faible pour les problèmes étudiés. Le premier chapitre est consacré à rappeler les différents modèles mécaniques de contact étudiés ainsi que quelques outils mathématiques nécessaires dans le mémoire. Le deuxième chapitre est destiné à l'étude d'un problème quasistatique de contact électro-élasto-viscoplastique avec usure, endommagement et frottement. Le troisième chapitre est dédié à l'analyse d'un problème dynamique en électro-viscoélasticité avec usure, endommagement et sans frottement.

**Mots-Clés:** usure, endommagement, équation d'évolution, inéquation d'évolution, solution faible, point fixe.

**Abstract :** This memory is designed for the theoretical study of two contact problems with or without friction between a deformable piezoelectric body and a so-called foundation. Under the assumption of small transformations, we analyse quasi-static and dynamic processes for electro-viscoelastic and electro-elasto-viscoplastic materials. The results obtained concern the existence and uniqueness of weak solutions for the studied problems. The first chapter is dedicated to recall different mechanical models of contact, as well as some necessary mathematical tools. The second chapter is to the study of frictional electro-elasto-viscoplastic problem contact with wear, damage. The third chapter is intended in the analysis of a dynamic problem with wear and damage in electro-viscoelasticity.

**Key-Words:** wear, damage, evolution equation, evolution inequality, weak solution, fixed point.

**ملخص:** ندرس في هذه المذكرة نموذجين، شبه سكوني و تحريكي في ميكانيكا تماس بين جسم مكهرب قابل للتلف و معرض للتآكل و قاعدة مع أو بدون احتكاك، في ظل افتراض التغييرات الصغيرة. نقدم صياغة تغايرية لكل مسألة و نثبت وجود حل ضعيف لكل نموذج. تستند البراهين على مساويات و متباينات السلوك المتعلقة بالزمن، المتباينات التغايرية الناقصية، نظرية لاجس-ميلغرام و نظرية النقطة الثابتة لبناخ. ذكرنا في الفصل الأول نماذج مختلفة في ميكانيكا التماس وبعض الأدوات الرياضية اللازمة في المذكرة. خصص الفصل الثاني لدراسة مسألة شبه سكونية لجسم كهرو بلاستيكي مرن قابل للتشوه و التلف في احتكاك مع قاعدة. ويكرس الفصل الثالث لتحليل مسألة ديناميكية في إطار الفيسكو-كهربائية وبدون احتكاك.

**الكلمات المفاتيح:** فيسكومرن، تلف، تآكل، متباينة تغايرية، متباينة تطور، حل ضعيف، نقطة ثابتة.