

N° d'ordre :

N° de série :



**République Algérienne Démocratique et Populaire**  
**Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la**  
**Recherche Scientifique**

**UNIVERSITÉ HAMMA LAKHDAR D'EL OUED**  
**FACULTÉ DES SCIENCES ET DE TECHNOLOGIE**

**Mémoire de fin d'étude**

**MASTER ACADEMIQUE**

Domaine: Mathématiques et Informatique

Filière: Mathématiques

Spécialité: Mathématiques fondamentales

**Thème**

**Sur la Résolution numérique des équations  
intégrales**

Présenté par: Kertiou Yahia and Nefnouf

Sous la supervision de: Zaouch Elmehdi

Année universitaire 2016 – 2017

N° d'ordre : /2014-M/MT

**MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA  
RECHERCHE SCIENTIFIQUE  
UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE  
HOUARI BOUMEDIENNE  
FACULTÉ DES MATHÉMATIQUES**

**Mémoire présenté pour l'obtention du diplôme de Magister  
en mathématiques**

**Spécialité : Algèbre et théorie des nombres**

**Par**

**HADDOUCHE Ouarda**

**THÈME**

**Théorème de Lax-Milgram  
et  
applications des problèmes de dirichlet**

Soutenu publiquement, le devant le jury composé de :

Mr. <b>D. E. TENIOU</b>	Professeur	U.S.T.H.B.	Président.
Mr. <b>A. HEMINNA</b>	Maître de Conférences	U.S.T.H.B.	Directeur de thèse.
Mr. <b>K. LEMRABET</b>	Professeur	U.S.T.H.B.	Examineur.
Mr.	Maître de Conférences	U.S.T.H.B.	Examineur.

# *Remerciements*

*Nous remercions Dieu le tout puissant qui nous a donné le courage, la volonté et de nous avoir bénie jusqu'à la réalisation de ce travail.*

*Ce travail a été réalisé sous l'encadrement du docteur "**Zaouche El-mehdi**", à l'université **Chahid Hamma lakhdar** à El-Oued. Nous voudrions lui exprimer notre profonde gratitude pour la disponibilité, l'aide et les conseils pour réaliser ce travail.*

*Ainsi qu'aux tous les professeurs de cette université.*

*Nous remercions vivement nos parents pour l'aide et le soutien moral qu'ils nous ont prodigués.*

*Nous tenons à remercier tous les étudiants de La promotion de Mathématique (2016/2017) de l'université **Chahid Hamma lakhdar**.*

# Notations générales

$A$	: Opérateur intégral.
$A_n$	: Suite d'approximation de $A$
$H$	: Espace de Hilbert .
$C[a, b]$	: Ensemble des fonctions continues sur $[a, b]$ .
$\oplus$	: Somme directe
$\mathbb{C}$	: Ensemble des nombres complexes.
$\langle u, v \rangle$	: Produit scalaire de $u$ et $v$ .
$f$	: Terme libre dans l'équation intégrale.
$f_n$	: Suite d'approximation de $f$ .
$I$	: Opérateur identité.
$G$	: Ensemble mesurable au sens de Jordan.
$\overline{G}$	: Fermé d'un ensemble $G$ (adhérent) .
$\partial G$	: Frontière de $G$ .
$ G $	: Mesure de Jordan d'un ensemble $G$ .
$K(x, t)$	: Noyau de l'équation intégrale .
$\mathcal{L}(X, Y)$	: Ensemble de opérateur linéaire bornés de $X$ dans $Y$ .
$L^{-1}$	: Inverse de l'opérateur intégral $= (I - A)^{-1}$ .
$N(L)$	: Noyau de l'opérateur $L$ .
$P, P_n$	: Opérateurs de projection..
$R(L)$	: Image de l'opérateur $L$ .
$\mathbb{R}$	: Ensemble des nombres réels.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Preliminaires</b>	<b>2</b>
1.1	Notions fondamentales et définitions : . . . . .	2
1.1.1	Opérateur intégral linéaire : . . . . .	2
1.1.2	Opérateur compact : . . . . .	3
1.2	Théorie de Riesz . . . . .	4
1.3	Alternative de Fredholm . . . . .	6
1.4	Approximation d'opérateurs linéaires bornés . . . . .	8
1.4.1	Approximations par la convergence en norme . . . . .	9
1.5	Définition des opérateurs de projection . . . . .	10
<b>2</b>	<b>Existence et unicité des solutions des équations intégrales</b>	<b>12</b>
2.1	Classification des équations intégrales . . . . .	12
2.1.1	Équations intégrales linéaires . . . . .	12
2.1.2	Équations intégrales non linéaires . . . . .	14
2.2	Réduction entre l'équation différentielle et l'équation intégrale . . . . .	15
2.3	Équations intégrales singulières . . . . .	17
2.4	Existence et unicité de la solution des équations intégrales . . . . .	18
<b>3</b>	<b>Résolutions numériques des équations intégrales</b>	<b>23</b>
3.1	Équation intégrale de Volterra . . . . .	23
3.1.1	Méthode des approximations successives . . . . .	23

3.1.2	Méthode de la solution en série . . . . .	28
3.1.3	Méthode des trapèzes . . . . .	32
3.1.4	Méthode de Simpson modifiée . . . . .	34
3.2	Équation intégrale de Fredholm . . . . .	37
3.2.1	Méthodes de résolution approchées . . . . .	37
3.2.2	Méthode d'interpolation de Newton . . . . .	52
	<b>Bibliographie</b>	<b>56</b>

# Introduction générale

Les équations intégrales apparaissent naturellement dans plusieurs phénomènes scientifiques en mathématiques et physique, comme les équations différentielles ordinaires (EDO) et certaines équations aux dérivées partielles (EDP), la diffusion et les problèmes de contacts ....etc.

Le travail que nous présentons porte sur une étude générale des équations intégrale et de leurs applications. Il est connu que les équations intégrales touchent divers domaines des mathématiques appliquées et de la physique. La recherche des solutions par des méthodes numérique est d'une nécessité importante par rapport au cadré théorique mis au point. Un théorème d'existence ou d'unicité ou les deux a la fois est certes d'une utilité très importante puisqu'il renseigne sur des informations qui aident à guide à la recherche des solutions.

Suivant ces axes normaux, notre travail est divisé en trois chapitres :

*Dans le premier chapitre nous sommes intéressés à donner quelques notions préliminaires sur quelques définitions des opérateurs. Ainsi que rappelés la théorie de Riesz et Alternative de Fredholm.*

*Le second chapitre contient la classification des équations intégrales, qui a pour objectif, familiariser le lecteur de ce mémoire avec le concept d'équation intégrale. Ainsi que donne la définition d'équations intégrales singulières. Enfin, nous présentons l'existence et l'unicité de la solution des équations intégrales.*

*La troisième chapitre est consacré essentiellement à présenter divers méthodes de résolution numérique des équations intégrales, cependant nous y développons certaines idées primordiales et illustrerons avec quelques exemples.*

# Chapitre 1

## Preliminaires

*Ce chapitre est consacré essentiellement à l'introduction de quelques notions fondamentales et certaines définitions et théorèmes que nous utiliserons dans le chapitre 2 et 3.*

### 1.1 Notions fondamentales et définitions :

Notons tout d'abord qu'on se place dans la majeure partie des cas dans l'espace  $C[a; b]$  des fonctions continues de l'intervalle  $[a; b]$  dans  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , muni du produit scalaire

$$\langle u; v \rangle = \int_a^b u(x)v(x)dx,$$

et de la norme de convergence uniforme :

$$\|u\|_\infty = \max_{x \in [a, b]} |u(x)|.$$

#### 1.1.1 Opérateur intégral linéaire :

Soit  $K : C[a; b] \times C[a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue. L'opérateur intégral linéaire sur  $C[a; b]$  est défini par suite:

$$A : u \in C[a; b] \rightarrow Au \in C[a; b]$$

$$(Au)(x) = \int_a^b K(x; y)u(y)dy. \quad (1.1)$$

Dans ce contexte la fonction  $K$  s'appelle noyau de l'opérateur intégral  $A$ .

### 1.1.2 Opérateur compact :

Soient  $E$  et  $F$  deux espaces normés et  $A$  un opérateur linéaire de  $E$  dans  $F$ . On dit que  $A$  est un opérateur compact si l'image de la boule unité  $B(0,1)$  de  $E$  (par  $A$ ) est relativement compacte dans  $F$ .

Autrement dit,  $A$  est compact si pour toute suite  $(u_n)_n$  de  $B(0,1) \subset E$ , on peut extraire une sous suite  $(u_{n_k})_k$  telle que sa transformé par  $A$  est une suite convergente  $(A(u_{n_k}))_k$  dans  $F$ .

**Théorème 1.1.1** *L'opérateur intégral défini par (1.1) est compact dans  $(C[a, b], \|\cdot\|_\infty)$ .*

**Preuve.** Désignons par  $B$  la boule unité de  $C([a, b])$ . Pour montrer que notre opérateur  $B$  est compact, on s'inspire du théorème d'Ascoli, il suffit d'établir que

- $H = A(B)$  est équicontinu.
- Pour tout  $x \in C[a, b]$  l'ensemble  $H_x = \{u(x) : u \in H\}$  relativement compact.

On remarque d'abord que  $K$  est uniformément continue sur  $[a, b] \times [a, b]$ . Pour tout  $u$  de  $B$  et tout  $x, x'$  de  $[a, b]$  on a :

$$\begin{aligned} |Au(x) - Au(x')| &= \left| \int_a^b (K(x, y) - K(x', y))u(y)dy \right| \\ &\leq \left| \int_a^b (K(x, y) - K(x', y)) \right| |u(y)| dy \\ &\leq \|u\|_\infty \left| \int_a^b (K(x, y) - K(x', y))dy \right| \\ &\leq \left| \int_a^b (K(x, y) - K(x', y))dy \right|. \end{aligned}$$

La continuité uniforme de  $K$  sur  $[a, b] \times [a, b]$  permet d'associer à tout réel  $\epsilon > 0$ , un réel  $\alpha > 0$  que l'on a :

$$|x - x'| \leq \alpha \implies |K(x; y) - K(x'; y)| \leq \frac{\epsilon}{b - a},$$

donc

$$|x - x'| \leq \alpha \implies |Au(x) - Au(x')| \leq \epsilon; \forall u \in B$$

ce qui signifie que  $H$  est équicontinu.

Montrons que l'ensemble  $H_x = \{g(x) = Au(x) : u \in B\}$  est relativement compact.

Il suffit de prouver qu'il est borné. En effet,

$$|Au(x)| = |g(x)| = \left| \int_a^b K(x, y)u(y)dy \right| \leq \|u\| \int_a^b \sup_{x; y \in [a; b]} |K(x, y)| dy \leq (b - a)M$$

avec  $M = \sup_{x; y \in [a; b]} |K(x; y)|$ . D'où la bornitude de  $H_x$ , ce qui achève la démonstration. ■

## 1.2 Théorie de Riesz

Dans cette partie, nous allons présenter la théorie de Riesz pour une équation formelle de second type de la forme  $\varphi - A\varphi = f$ , avec un opérateur linéaire compact  $A : X \rightarrow X$  dans un espace normé  $X$ .

On note  $L = I - A$ , où  $I$  est l'opérateur identique.

**Théorème 1.2.1** (*Riesz*) [Voir [4]]

(i) Le noyau de l'opérateur  $L$ ,

$$N(L) = \{\varphi \in X : L\varphi = 0\},$$

est un sous espace de dimension finie.

(ii) L'image de l'opérateur  $L$ ,

$$R(L) = \{L\varphi : \varphi \in X\},$$

est un sous espace linéaire fermé.

(iii) Il existe un entier positif non nul  $r$ , appelé nombre de Riesz de l'opérateur  $A$  tel que:

$$\{0\} = N(L^0) \subsetneq N(L^1) \subsetneq \dots \subsetneq N(L^r) = N(L^{r+1}) = \dots$$

et

$$N = L^0(X) \supsetneq L^1(X) \supsetneq \dots \supsetneq L^r(X) = L^{r+1}(X) = \dots$$

D'autre part, on a la somme directe

$$X = N(L^r) \oplus L^r(X).$$

C'est-à-dire,  $\forall \varphi \in X, \exists! \psi \in N(L^r), \exists! \chi \in L^r(X)$ , tels que  $\varphi = \psi + \chi$ .

**Théorème 1.2.2** *Soit  $A : X \rightarrow X$  un opérateur linéaire compact. Alors  $I - A$  est injectif si et seulement s'il est surjectif. En outre si  $I - A$  est injectif (donc bijectif), alors l'opérateur inverse  $(I - A)^{-1} : X \rightarrow X$  est borné.*

**Preuve.** D'après le premier résultat du théorème de Riesz (i) l'injectivité de  $I - A$  est équivalente à  $r = 0$ , et d'après (ii), la surjectivité de  $I - A$  est aussi équivalente à  $r = 0$ . Par conséquent l'injectivité de  $I - A$  et la surjectivité de  $I - A$  sont équivalentes. Il reste à montrer que  $L^{-1}$  est borné si  $L = I - A$  est injectif. Supposons que  $L^{-1}$  n'est pas borné. Alors il existe une suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dans  $X$  avec  $\|f_n\| = 1$  telle que  $\|L^{-1}f_n\| \geq n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , considérons

$$g_n = \frac{f_n}{\|L^{-1}f_n\|}, \quad \varphi_n = \frac{L^{-1}f_n}{\|L^{-1}f_n\|}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Alors  $g_n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ , et  $\|\varphi_n\| = 1$  pour tout  $n$ . Comme  $A$  est compact, on peut choisir une sous suite  $(\varphi_{n_k})_k$  telle que  $A\varphi_{n_k} \rightarrow \varphi \in X, k \rightarrow \infty$ . Alors, comme:

$$\varphi_n - A\varphi_n = g_n.$$

On voit que  $\varphi_{n(k)} \rightarrow \varphi, k \rightarrow \infty$ , et  $\varphi \in N(L)$ . Par conséquent  $\varphi = 0$ , et ceci contredit le fait que  $\|\varphi_n\| = 1$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  ■

**Corollaire 1.2.1** *Soit  $A : X \rightarrow X$  un opérateur linéaire compact sur un espace normé  $X$ .*

Si l'équation homogène

$$\varphi - A\varphi = 0, \quad (1.2)$$

admet uniquement la solution triviale  $\varphi = 0$ , alors pour toute  $f \in X$ , l'équation inhomogène:

$$\varphi - A\varphi = f, \quad (1.3)$$

admet une solution unique  $\varphi \in X$ , dépendante de  $f$ .

Si l'équation homogène (1.2) admet une solution non triviale, alors elle admet un nombre fini  $m \in \mathbb{N}$  de solutions linéairement indépendantes  $\varphi_1, \dots, \varphi_m$  et l'équation inhomogène (1.3) ou bien, elle n'admet aucune solution ou bien, sa solution générale est de la forme:

$$\varphi = \tilde{\varphi} + \sum_{k=1}^m a_k \varphi_k,$$

où  $a_1, \dots, a_m$  sont arbitrairement des nombres complexes et  $\tilde{\varphi}$  la solution particulière de l'équation inhomogène.

### 1.3 Alternative de Fredholm

**Définition 1.3.1** Deux espaces normés  $X$  et  $Y$ , munis d'une forme bilinéaire non dégénérée  $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times Y \rightarrow \mathbb{C}$  sont appelés système dual, et est noté par  $\langle X, Y \rangle$ .

**Théorème 1.3.1** [4] Soit  $G \subset \mathbb{R}^m$ . Alors  $\langle C(G), C(G) \rangle$  muni de la forme bilinéaire

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \int_G \varphi(x)\psi(x)dx, \quad \varphi, \psi \in C(G),$$

est un système dual.

**Définition 1.3.2** Soient  $\langle X_1, Y_1 \rangle$  et  $\langle X_2, Y_2 \rangle$  deux systèmes duaux. Alors deux opérateurs  $A : X_1 \rightarrow X_2, B : Y_2 \rightarrow Y_1$ , sont dit adjoint si

$$\langle A\varphi, \psi \rangle = \langle \varphi, B\psi \rangle,$$

pour tout  $\varphi \in X_1$  et  $\psi \in Y_2$ .

**Théorème 1.3.2** [4] Soient  $\langle X_1, Y_1 \rangle$  et  $\langle X_2, Y_2 \rangle$  deux systèmes duaux. Si un opérateur  $A : X_1 \rightarrow X_2$  admet un adjoint  $B : Y_2 \rightarrow Y_1$ , alors  $B$  est unique, de plus  $A$  et  $B$  sont linéaires.

**Théorème 1.3.3** Soit  $K$  un noyau continu. Alors, les opérateurs intégraux suivants :

$$(A\varphi)(x) = \int_G K(x,t)\varphi(t)dt, \quad x \in G$$

$$(B\psi)(x) = \int_G K(t,x)\psi(t)dt, \quad x \in G,$$

sont adjoints dans le système dual  $\langle C(G), C(G) \rangle$ .

**Preuve.** Le théorème résulte de

$$\begin{aligned} \langle A\varphi, \psi \rangle &= \int_G (A\varphi)(x) \psi(x) dx = \int_G \left( \int_G K(x,t)\varphi(t) dt \right) \psi(x) dx \\ &= \int_G \varphi(t) \left( \int_G K(x,t)\psi(x) dx \right) dt = \int_G \varphi(t) (B\psi)(t) dt = \langle \varphi, B\psi \rangle \end{aligned}$$

■

**Théorème 1.3.4** (alternative de Fredholm)

Soit  $A$  un opérateur compact défini sur un espace de Hilbert  $X$  à valeurs dans  $X$  et soit l'équation:

$$\varphi - A\varphi = f, \tag{1.4}$$

et sont adjoint

$$\phi - A^*\phi = g. \tag{1.5}$$

Alors l'équation (1.4) et (1.5) admettent la solution unique pour tout second nombre si l'équation homogène

$$\varphi - A\varphi = 0$$

$$\phi - A^*\phi = 0,$$

possède uniquement les solutions triviale  $u = 0$  et  $v = 0$ .

Ou bien les équations homogènes possède le même nombre fini des solutions linéairement indépendantes  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$  et  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$  respectivement et les équations (1.4) et (1.5) sont solvable si seulement si on a:

$$\langle f; \phi_k \rangle = 0$$

$$\langle g; \varphi_k \rangle = 0, \quad \forall k = 1, 2, \dots, n.$$

La solution générale de (1.4) et donné par

$$\varphi = \varphi_0 + \sum_{k=0}^n \alpha_k \varphi_k.$$

Celle de l'équation (1.5)

$$\phi = \phi_0 + \sum_{k=0}^n \alpha_k \phi_k$$

où  $\varphi_0, \phi_0$  sont des solutions particulière quelconques des équations (1.4) et (1.5) respectivement, avec  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  des constants arbitraires.

## 1.4 Approximation d'opérateurs linéaires bornés

**Définition 1.4.1** On dit que  $A_n \in \mathcal{L}(X, Y)$  est une suite d'approximations de  $A$  si et seulement si pour tout  $\varphi \in X$  :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|(A_n - A)\varphi\| = 0.$$

On dit aussi que la suite  $A_n$  converge ponctuellement (ou simplement) vers  $A$ .

**Définition 1.4.2** On dit que  $A_n \in \mathcal{L}(X, Y)$  est une suite d'approximations uniforme de  $A \in \mathcal{L}(X, Y)$  si et seulement si:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|(A_n - A)\| = 0.$$

### 1.4.1 Approximations par la convergence en norme

**Théorème 1.4.1** Soient  $X$  et  $Y$  deux espaces de Banach et  $A \in \mathcal{L}(X, Y)$  d'inverse borné  $A^{-1}$ . Soit  $A_n \in \mathcal{L}(X, Y)$  une suite converge en norme vers  $A$  (i.e,  $\|A_n - A\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ ).

Alors pour tout  $n$  assez grand, précisément pour tout  $n$  tel que:

$$\|A^{-1}(A_n - A)\| < 1,$$

les opérateurs inverses  $A_n^{-1} : Y \rightarrow X$  existent et sont bornés par

$$\|A_n^{-1}\| \leq \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1}(A_n - A)\|}. \quad (1.6)$$

D'ailleurs, les solutions  $\varphi$  et  $\varphi_n$  des équations

$$A\varphi = f \quad \text{et} \quad A_n\varphi_n = f_n.$$

Vérifient l'estimation de l'erreur suivante

$$\|\varphi_n - \varphi\| \leq \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1}(A_n - A)\|} \{ \|(A_n - A)\varphi\| + \|f_n - f\| \}$$

**Preuve.** Si  $\|A^{-1}(A_n - A)\| < 1$ , alors il suffit d'appliquer le théorème de la série de Neumann [5], l'inverse  $(I - A^{-1}(A_n - A))^{-1}$  de  $I - A^{-1}(A_n - A) = A^{-1}A_n$  existe et borné par

$$\left\| (I - A^{-1}(A_n - A))^{-1} \right\| \leq \frac{1}{1 - \|A^{-1}(A_n - A)\|}.$$

Mais, comme  $(I - A^{-1}(A_n - A))^{-1} A^{-1}$  est l'inverse de  $A_n$  et borné par (1.6). L'estimation de l'erreur découle immédiatement de

$$A_n(\varphi_n - \varphi) = f_n - f + (A - A_n)\varphi.$$

■

**Théorème 1.4.2** *Supposons qu'il existe un  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n \geq n_0$  les opérateurs inverses  $A_n^{-1} : Y \rightarrow X$  existent et sont uniformément bornés. Alors l'opérateur inverse  $A^{-1} : Y \rightarrow X$  existe et borné. De plus, pour tout  $n$ ,  $\|A_n^{-1}(A_n - A)\| < 1$  et*

$$\|A^{-1}\| \leq \frac{\|A_n^{-1}\|}{1 - \|A_n^{-1}(A_n - A)\|}.$$

D'ailleurs, les solutions  $\varphi$  et  $\varphi_n$  des équations:

$$A\varphi = f \quad \text{et} \quad A_n\varphi_n = f_n,$$

vérifient l'estimation de l'erreur

$$\|\varphi_n - \varphi\| \leq \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1}(A_n - A)\|} \{ \|(A_n - A)\varphi\| + \|f_n - f\| \}.$$

**Preuve.** Ceci résulte du théorème (1.4.1) en échangeant les rôles de  $A$  et  $A_n$ . ■

**Corollaire 1.4.1** *Sous les hypothèses du théorème (1.4.1), on a pour certaine constante  $n$  assez grand l'estimation de l'erreur suivante :*

$$\|\varphi_n - \varphi\| \leq C \{ \|(A_n - A)\varphi\| + \|f_n - f\| \}.$$

## 1.5 Définition des opérateurs de projection

**Définition 1.5.1** *Soit  $V$  un espace vectoriel,  $V_1$  et  $V_2$  deux sous espace vectoriel de  $V$ . On dit que  $V$  est une somme directe de  $V_1$  et  $V_2$  et on écrit  $V = V_1 \oplus V_2$  si tout  $v \in V$  peut être décomposé de la manière unique*

$$v = v_1 + v_2, \quad v_1 \in V_1, \quad v_2 \in V_2.$$

*En outre, si  $V$  est muni d'un produit scalaire et que*

$$\forall v_1 \in V_1, \forall v_2 \in V_2 : \langle v_1, v_2 \rangle = 0.$$

Alors  $V$  est appelé la somme directe orthogonale de  $V_1$  et  $V_2$ .

**Proposition 1.5.1** *Soit  $V$  un espace vectoriel. Alors  $V = V_1 \oplus V_2$  si et seulement s'il existe un opérateur linéaire  $P : V \rightarrow V$  tel que  $P^2 = P$  avec  $v_1 = P(v)$  et  $v_2 = (I - P)(v)$  et aussi  $V_1 = P(V)$  et  $V_2 = (I - P)(V)$ .*

**Définition 1.5.2** *Soit  $V$  un espace de Banach. Un opérateur  $P \in \mathcal{L}(V)$  tel que  $P^2 = P$  est appelé un opérateur de projection.*

Si  $V$  un espace d'Hilbert l'opérateur  $P$  est appelé un opérateur de projection orthogonal. Il est facile de remarquer que l'opérateur de projection  $P$  est orthogonal si et seulement si

$$\langle Pv, (I - P)(u) \rangle = 0, \quad \forall u, v \in V.$$

# Chapitre 2

## Existence et unicité des solutions des équations intégrales

### 2.1 Classification des équations intégrales

Les équations intégrales peuvent être classées comme étant une équation intégrale linéaire ou non linéaire. Les équations intégrales les plus utilisées sont les équations intégrales de Volterra et les équations intégrales de Fredholm. Dans une équation de Fredholm, les bornes d'intégrations sont fixées et dans l'équation de Volterra les bornes d'intégration sont indéfinies.

#### 2.1.1 Équations intégrales linéaires

##### Équations intégrales de Volterra

**Définition 2.1.1** *On appelle équation intégrale linéaire de Volterra de seconde espèce toute équation donnée par la relation suivante:*

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t)u(t)dt, \quad a \leq x \leq b \quad (2.1)$$

où  $u(x)$  est une fonction inconnue,  $f(x)$  est une fonction donnée,  $\lambda$  est un paramètre réel ou complexe et  $K(x,t)$  est un noyau.

- Si  $f(x) = 0$  l'équation devient :

$$u(x) = \lambda \int_a^x K(x, t)u(t)dt,$$

est s'appelle équation intégrale linéaire homogène de Volterra de seconde espèce.

Une équation de la forme:

$$f(x) = \int_a^x K(x, t)u(t)dt,$$

est dite équation intégrale linéaire de Volterra de première espèce.

### Équations intégrales de Fredholm

**Définition 2.1.2** Une équation intégrale linéaire de Fredholm de seconde espèce est équation donné par la relation suivante:

$$u(x) - \lambda \int_a^b K(x, t)u(t)dt = f(x),$$

où  $u(x)$  est une fonction inconnue,  $f(x)$  est une fonction donné,  $\lambda$  est un paramètre réel ou complexe et  $K(x, t)$  est un noyau.

- Si  $f(x) = 0$  l'équation devient :

$$u(x) = \lambda \int_a^b K(x, t)u(t)dt,$$

est s'appelle équation intégrale linéaire homogène de Fredholm de seconde espèce.

- Si  $f(x) \neq 0$  alors elle est s'appelle équation intégrale linéaire et non homogène de Fredholm de seconde espèce.

Une équation de la forme:

$$f(x) = \int_a^b K(x, t)u(t)dt,$$

est dite équation intégrale linéaire de Fredholm de première espèce.

**Remarque 2.1.1** Si le noyau  $K(x, t) = K(x - t)$  alors l'équation (2.1) s'appelle équation intégrale de Renewal.

## 2.1.2 Équations intégrales non linéaires

### Équation intégrale de Volterra

**Définition 2.1.3** On appelle équation intégrale de Volterra non linéaire de seconde espèce une équation donné par la relation suivante :

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t, u(t)) dt, \quad a \leq x \leq b \quad (2.2)$$

où  $u(x)$  est une fonction inconnue,  $f(x)$  est une fonction donné,  $\lambda$  est un paramètre réel ou complexe et  $K(x, t)$  est un noyau.

- Si  $f(x) = 0$  l'équation devient :

$$u(x) = \lambda \int_a^x K(x, t, u(t)) dt,$$

est s'appelle équation intégrale de Volterra non linéaire de seconde espèce homogène.

Une équation de la forme

$$f(x) = \int_a^x K(x, t, u(t)) dt,$$

est appelée équation intégrale de Volterra non linéaire de première espèce.

### Équation intégrale de Fredholm

**Définition 2.1.4** On appelle équation intégrale de Fredholm non linéaire de seconde espèce toute équation donné par la relation suivante:

$$u(x) - \lambda \int_a^b K(x, t, u(t)) dt = f(x),$$

où  $u(x)$  est une fonction inconnue,  $f(x)$  est une fonction donnée,  $\lambda$  est un paramètre réel ou complexe et  $K(x, t)$  est un noyau.

- Si  $f(x) = 0$  l'équation devient :

$$u(x) = \lambda \int_a^b K(x, t, u(t)) dt$$

est s'appelle équation intégrale de Fredholm non linéaire de seconde espèce homogène.

- Si  $f(x) \neq 0$  alors elle est s'appelle équations intégrales de Fredholm non linéaire de seconde espèce non homogène.

Une équation s'écrit sous la forme:

$$f(x) = \int_a^b K(x, t, u(t)) dt,$$

est appelée équation intégrale de Fredholm non linéaire de première espèce.

**Remarque 2.1.2** Si l'équation intégrale (2.2) est écrite comme suit :

$$u(x) = g(x) + \lambda \int_a^x K(x, t) f(t, u(t)) dt, \quad a \leq x \leq b$$

alors elle est dite équation intégrale de Hammerstein Volterra, où  $u(x)$  est une fonction inconnue et  $f(x)$  est une fonction donnée,  $\lambda$  est un paramètre réel ou complexe et  $K(x, t)$  est un noyau.

## 2.2 Réduction entre l'équation différentielle et l'équation intégrale

La résolution de l'équation différentielle linéaire de la forme

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_n(x) y = F(x),$$

où  $a_i(x)$ ,  $i = 1; 2 \dots n$  sont des coefficients continus avec les conditions initiales

$$y(0) = c_0, y'(0) = c_1, \dots, y^{n-1}(0) = c_{n-1},$$

peut être ramenée à la résolution d'une équation intégrale de Volterra de seconde espèce.

Illustrons notre affirmation sur l'exemple de l'équation différentielle du second ordre

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_2(x)y = F(x).$$

$$y(0) = c_0, y'(0) = c_1.$$

Posons

$$u(x) = \frac{d^2y}{dx^2}.$$

D'où vu les conditions initiales on obtient successivement

$$\frac{dy}{dx} = \int_0^x u(t)dt + c_1$$

$$y = \int_0^x (x-t)u(t)dt + c_1x + c_0.$$

Nous avons utilisé la formule

$$\int_a^x dx \int_a^x dx \dots \int_a^x f(x)dx = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-y)^{n-1} f(y)dy.$$

Compte tenu de mettons l'équation différentielle sous la forme

$$u(x) + \int_0^x a_1(x)u(t)dt + c_1a_1(x) + \int_a^x a_2(x)(x-t)u(t)dt + c_1xa_2(x) + c_0a_2(x) = F(x),$$

ou

$$u(x) + \int_0^x (a_1(x) + a_2(x)(x-t))u(t)dt = F(x) - c_1a_1(x) - c_1xa_2(x) - c_0a_2(x),$$

Posons

$$K(x; y) = -[a_2(x)(x - y) + a_1(x)]$$

$$f(x) = F(x) - c_1 a_1(x) - c_1 x a_2(x) - c_0 a_2(x).$$

Nous obtenons l'équation à la forme:

$$u(x) = f(x) + \int_a^x K(x; y)u(y)dy,$$

i.e. : nous obtenons une équation intégrale de Volterra de seconde espèce.

## 2.3 Équations intégrales singulières

**Définition 2.3.1** *On dit qu'une équation intégrale est singulière si l'une ou les deux bornes de l'intégrale sont infinies, par exemple :*

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^\infty \sin(xt)\varphi(t)dt$$

ou bien le noyau devient infini au voisinage des points de l'intégrale.

Par exemple si le noyau  $k(x,t)$  de l'équation intégrale linéaire de Fredholm est de la forme :

$$k(x, t) = \frac{M(x, t)}{|x - t|^\alpha} \quad 0 < \alpha \leq 1,$$

avec  $M(x,t)$  une fonction bornée sur  $[a,b] \times [a,b]$  .

Si  $\alpha = 1$  dans l'exemple précédent alors  $k(x, t)$  est appelé noyau de Cauchy .

**Remarque 2.3.1** *L'équation intégrale linéaire de Winer-Hoph et l'équation intégrale non linéaire d'Abel sont des équations intégrales singulières.*

## 2.4 Existence et unicité de la solution des équations intégrales

La vocation de ce section est d'illustrer quelques résultats fondamentaux dans la théorie des équations intégrales, notamment la question d'existence et d'unicité des solutions pour les équations de second espèce. Cette étude est nécessaires avant toute démarche de résolution numérique.

**Définition 2.4.1** *Un ensemble  $G \subset \mathbb{R}^m$ , est dit mesurable au sens de Jordan si la fonction caractéristique  $\chi_G(x)$ , définie par  $\chi_G(x) = 1$  pour  $x \in \chi_G(x)$  et pour  $x \notin \chi_G(x)$ , est Riemann intégrable. La mesure de Jordan  $|G|$  est définie par l'intégrale de  $\chi_G(x)$  .*

**Remarque 2.4.1** *Soit  $G$  un ensemble mesurable au sens de Jordan, l'adhérence  $\overline{G}$  et la frontière  $\partial G$  sont aussi mesurables au sens de Jordan, avec  $|\overline{G}| = |G|$  et  $|\partial G| = 0$ . Si  $G$  est compact et mesurable au sens de Jordan, alors toute les fonctions  $f \in C(G)$  est Riemann intégrable.*

**Théorème 2.4.1** *Soit  $G$  un ensemble non vide tel que  $G \in \mathbb{R}^m$  et  $G$  mesurable au sens de Jordan, qui coïncide avec l'adhérence de son intérieur. Soit  $K : G \times G \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction continue. Alors l'opérateur linéaire  $A : C(G) \rightarrow C(G)$  donné par*

$$(A\varphi)(x) = \int_G k(x, t)\varphi(t)dt, \quad (2.3)$$

est appelé opérateur intégral à noyau continu  $k$ . Cet opérateur est borné, avec

$$\|A\|_\infty = \max_{x \in G} \int_G |k(x, t)| dt.$$

**Preuve.** Il est clair que l'opérateur  $A$  défini (2.3) est un opérateur linéaire pour tout  $\varphi \in C(G)$ . De plus pour  $\|\varphi\|_\infty \leq 1$ , on a:

$$|(A\varphi)(x)| \leq \int_G |k(x, t)| dt, \quad x \in G,$$

d'où

$$\|A\|_\infty = \sup_{\|\varphi\|_\infty \leq 1} \|A\varphi\|_\infty \leq \max_{x \in G} \int_G |k(x, t)| dt.$$

Comme  $k$  est continu, il existe alors  $x_0 \in G$  tel que:

$$\int_G |k(x_0, t)| dt = \max_{x \in G} \int_G |k(x, t)| dt.$$

Pour  $\epsilon > 0$  on choisit une fonction  $\psi \in C(G)$  de la forme

$$\psi(t) = \frac{\overline{k(x_0, t)}}{|k(x_0, t)| + \epsilon}, \quad t \in G.$$

Alors  $\|\psi\|_\infty \leq 1$  et

$$\begin{aligned} \|\psi\|_\infty &\geq |(A\psi)(x_0)| = \int_G \frac{|k(x_0, t)|^2}{|k(x_0, t)| + \epsilon} dt \geq \int_G \frac{|k(x_0, t)|^2 - \epsilon^2}{|k(x_0, t)| + \epsilon} dt \\ &= \int_G |k(x_0, t)| dt - \epsilon |G|. \end{aligned}$$

Donc

$$\|A\|_\infty = \sup_{\|\varphi\|_\infty \leq 1} \|A\varphi\|_\infty \geq \|A\psi\|_\infty \geq \int_G |k(x_0, t)| dt - \epsilon |G|.$$

Et puisque, ceci est valable pour tout  $\epsilon > 0$ , on obtient

$$\|A\|_\infty \geq \int_G |k(x_0, t)| dt = \max_{x \in G} \int_G |k(x, t)| dt$$

ce qui achève la preuve ■

**Théorème 2.4.2** Soit  $A$  un opérateur linéaire borné d'un espace de Banach  $X$  dans lui même, avec  $\|A\| < 1$ , et soit  $I$  l'opérateur identité sur  $X$ . Alors  $I - A$  admet un opérateur inverse borné donné par la série de Neumann:

$$(I - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k.$$

De plus

$$\|(I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|A\|}.$$

**Preuve.** Comme  $\|A\| < 1$ , on a la convergence absolue

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|A^k\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|A\|^k = \frac{1}{1 - \|A\|},$$

dans l'espace de Banach  $\mathcal{L}(x)$ , par conséquent la série de Neumann converge en norme et définit un opérateur linéaire borné

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} A^k,$$

avec  $\|S\| \leq (1 - \|A\|)^{-1}$ , De plus  $S$  est l'inverse de  $I - A$ .

En effet, en utilisant les notations  $A^0 = I$ ,  $A^k = AA^{k-1}$  on peut voir que

$$(I - A)S = (I - A) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n A^k = \lim_{n \rightarrow \infty} (I - A^{n+1}) = I,$$

De façon similaire:

$$S(I - A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n A^k (I - A) = \lim_{n \rightarrow \infty} (I - A^{n+1}) = I,$$

puisque  $\|A^{n+1}\| \leq \|A\|^{n+1} \rightarrow 0$ , lorsque  $n \rightarrow \infty$  ■

**Théorème 2.4.3** *Sous les hypothèses du théorème (2.4.2), la méthode des approximations successives*

$$\varphi_{n+1} = A\varphi_n + f, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.4)$$

où  $\varphi_0$  est arbitraire dans  $X$ , converge vers l'unique solution  $\varphi$  de l'équation  $\varphi - A\varphi = f$  pour toute  $f \in X$ .

**Preuve.** Il est aisé de voir que

$$\varphi_n = A^n \varphi_0 + \sum_{k=0}^{n-1} A^k f, \quad n = 1, 2, \dots$$

d'où

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n = \sum_{k=0}^{\infty} A^k f = (I - A)^{-1} f.$$

■

**Corollaire 2.4.1** *Soit  $K$  un noyau continu vérifiant*

$$\max_{x \in G} \int_G |k(x, t)| dt < 1.$$

Alors, l'équation intégrale de seconde espèce

$$\varphi(x) - \int_G K(x, t) \varphi(t) dt = f(x) \quad x \in G,$$

admet une unique solution  $\varphi \in C(G)$  pour toute  $f \in C(G)$ . De plus, la méthode des approximations successives

$$\varphi_{n+1}(x) = \int_G K(x, t) \varphi_n(t) dt + f(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

converge uniformément vers cette solution pour tout  $\varphi_0$  arbitraire dans  $C(G)$ .

**Théorème 2.4.4** *Un opérateur linéaire  $A : X \rightarrow Y$  est compact si et seulement si pour toute suite bornée  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $X$ , on peut extraire de la suite  $(A\varphi_n)$  de  $Y$  une sous suite convergente, i.e, si toute suite de l'ensemble  $\{A\varphi : \varphi \in X, \|\varphi\| \leq 1\}$  contient une sous suite convergente.*

**Définition 2.4.2** *On appelle noyau faiblement singulier toute fonction  $k(x, t)$ , définie et continue sur  $G \times G \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ , sauf peut être aux points  $x = t$  et vérifie*

$$\forall x, t \in G, x \neq t, \exists M > 0 \text{ tel que } |k(x, t)| \leq M |x - t|^{\alpha-m} \quad 0 < \alpha \leq m. \quad (2.5)$$

**Théorème 2.4.5** *Un opérateur intégral à noyau continu ou faiblement singulier est un opérateur compact dans  $C(G)$  .*

**Théorème 2.4.6** *Soit  $A$  un opérateur compact d'une espace normé  $X$  dans lui-même alors pour que l'équation non homogène*

$$T\varphi = \varphi - A\varphi = f,$$

admette une solution unique  $\varphi \in X$  pour tout  $f \in X$  il suffit que l'équation homogène

$$T\varphi = \varphi - A\varphi = 0,$$

admette la solution triviale

$$u = 0.$$

**Preuve.** en effet, supposons que l'équation

$$\varphi - A\varphi = f,$$

admette une solution pour tout  $f \in X$  alors veut ce dire que l'opérateur  $T$  est surjectif et le nombre de Riesz est nul ■

# Chapitre 3

## Résolutions numériques des équations intégrales

### 3.1 Équation intégrale de Volterra

#### 3.1.1 Méthode des approximations successives

La méthode d'approximations successives, également appelée méthode d'itération de Picard, fournit un schéma qui peut être utilisé pour résoudre des problèmes de valeurs initiales ou des équations intégrales. Cette méthode résout tout problème en trouvant approximations successives à la solution en commençant par une approximation initiale, appelée approximation zéro.

#### Cas de l'équation intégrale linéaire

Soit l'équation intégrale linéaire de Volterra du second type:

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x, t)u(t)dt, \quad (3.1)$$

où  $u(x)$  est une fonction inconnue,  $f(x)$  est une fonction donnée,  $\lambda$  est un paramètre réel ou complexe et  $K(x, t)$  est un noyau.

La méthode des approximations successives introduit la relation de récurrence

$$u_n(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x, t)u_{n-1}(t)dt, \quad n \geq 1, \quad (3.2)$$

où l'approximation en zéro  $u_0(x)$  peut être n'importe quelle fonction de valeur réelle sélective. Nous commençons toujours par une estimation initiale pour  $u_0(x)$ , la plupart du temps nous choisissons  $0, 1, x$  pour  $u_0(x)$ , et en utilisant (3.2), plusieurs approximations successives  $u_k$ ,  $k \geq 1$  seront déterminées comme:

$$\begin{aligned} u_1(x) &= f(x) + \lambda \int_0^x K(x, t)u_0(t)dt \\ u_2(x) &= f(x) + \lambda \int_0^x K(x, t)u_1(t)dt \\ u_3(x) &= f(x) + \lambda \int_0^x K(x, t)u_2(t)dt \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ u_n(x) &= f(x) + \lambda \int_0^x K(x, t)u_{n-1}(t)dt, \quad n \geq 1. \end{aligned} \quad (3.3)$$

La question de convergence de  $u_n(x)$  est justifiée en notant le théorème suivant:

**Théorème 3.1.1** [1] *Si  $f(x)$  est continue sur l'intervalle  $0 \leq x \leq a$ , et que le noyau  $K(x, t)$  est aussi continu sur le triangle  $0 \leq x \leq a$ ,  $0 \leq t \leq x$ , la suite des approximations successives  $u_n(x)$ ,  $n \geq 0$  convergent vers la solution  $u(x)$  de l'équation intégrale à l'étude.*

Il est intéressant de souligner que la méthode d'itération variationnelle (Voir [1]) admet l'utilisation de la formule d'itération:

$$u_{n+1}(x) = u_n(x) + \int_0^x \lambda(\xi) \left( \frac{\partial u_n(\xi)}{\partial \xi} - \tilde{u}_n(\xi) \right) d\xi \quad (3.4)$$

Tandis que la méthode des approximations successives utilise la formule d'itération

$$u_n(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x,t)u_{n-1}(t)dt, \quad n \geq 1. \quad (3.5)$$

**Exemple 3.1.1** Résoudre l'équation intégrale de Volterra en utilisant la méthode des approximations successives

$$u(x) = 1 - \int_0^x (x-t)u(t)dt. \quad (3.6)$$

Pour l'approximation zéro  $u_0(x)$ , on peut choisir

$$u_0(x) = 1.$$

La méthode des approximations successives admet l'utilisation de la formule d'itération

$$u_{n+1}(x) = 1 - \int_0^x (x-t)u_n(t)dt, \quad n \geq 0.$$

En remplaçant  $u_0(x)$  par  $u_{n+1}(x)$  on obtient

$$\begin{aligned} u_1(x) &= 1 - \int_0^x (x-t)u_0(t)dt = 1 - \int_0^x (x-t)dt = 1 - \frac{1}{2!}x^2 \\ u_2(x) &= 1 - \int_0^x (x-t)u_1(t)dt = 1 - \int_0^x (x-t)\left(1 - \frac{1}{2!}t^2\right)dt = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 \\ u_3(x) &= 1 - \int_0^x (x-t)u_2(t)dt = 1 - \int_0^x (x-t)\left(1 - \frac{1}{2!}t^2 + \frac{1}{4!}t^4\right)dt = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 \\ &\cdot \\ &\cdot \\ u_{n+1}(x) &= 1 - \int_0^x (x-t)u_n(t)dt = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}. \end{aligned}$$

Par conséquent, nous obtenons

$$u_{n+1}(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

La solution  $u(x)$  de (3.6) est:

$$u(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_{n+1}(x) = \cos x.$$

**Cas de l'équation intégrale non linéaire**

Considérons l'équation intégrale non linéaire de Volterra du second type:

$$u(x) = f(x) + \int_0^x K(x, t)F(u(t))dt, \tag{3.7}$$

où  $u(x)$  est une fonction inconnue,  $K(x, t)$  est un noyau.

La méthode des approximations successives introduit la relation de récurrence

$$u_{n+1}(x) = f(x) + \int_0^x K(x, t)F(u_n(t))dt, \quad n \geq 0 \tag{3.8}$$

où l'approximation en zéro  $u_0(x)$  peut être n'importe quelle fonction de valeur réelle sélective. Nous commençons toujours par une estimation initiale pour  $u_0(x)$ , la plupart du temps nous choisissons  $0, 1, x$  pour  $u_0(x)$ , et en utilisant (3.8), plusieurs approximations successives  $u_k, k \geq 1$  seront déterminées comme

$$\begin{aligned} u_1(x) &= f(x) + \int_0^x K(x, t)F(u_0(t))dt \\ u_2(x) &= f(x) + \int_0^x K(x, t)F(u_1(t))dt \\ u_3(x) &= f(x) + \int_0^x K(x, t)F(u_2(t))dt \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\vdots \\ u_{n+1}(x) &= f(x) + \int_0^x K(x, t)F(u_n(t))dt, \quad n \geq 0. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Par conséquent, la solution  $u(x)$  est obtenue en utilisant

$$u(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_{n+1}(x). \tag{3.10}$$

**Théorème 3.1.2** [1] Si  $f(x)$  est continue sur l'intervalle  $0 \leq x \leq a$ , et que le noyau  $K(x, t)$  est aussi continu sur le triangle  $0 \leq x \leq a$ ,  $0 \leq t \leq x$ , la suite des approximations successives  $u_n(x)$ ,  $n \geq 0$  convergent vers la solution  $u(x)$  de l'équation intégrale à l'étude.

Il est intéressant de souligner que la méthode d'itération variationnelle (Voir [1]) admet l'utilisation de la formule d'itération:

$$u_{n+1}(x) = u_n(x) + \int_0^x \lambda(\xi) \left( \frac{\partial u_n(\xi)}{\partial \xi} - \tilde{u}_n(\xi) \right) d\xi \quad (3.4)$$

Tandis que la méthode des approximations successives utilise la formule d'itération

$$u_n(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x, t) u_{n-1}(t) dt, \quad n \geq 1. \quad (3.5)$$

**Exemple 3.1.2** Utiliser la méthode des approximations successives pour résoudre l'équation intégrale de Volterra non linéaire

$$u(x) = e^x + \frac{1}{3}x(1 - e^{3x}) + \int_0^x x u^3(t) dt. \quad (3.11)$$

Pour l'approximation zéro  $u_0(x)$ , on peut choisir

$$u_0(x) = 1. \quad (3.12)$$

La méthode des approximations successives admet l'utilisation de la formule d'itération

$$u_{n+1}(x) = e^x + \frac{1}{3}x(1 - e^{3x}) + \int_0^x x u_n^3(t) dt. \quad (3.13)$$

En remplaçant (3.12) par (3.13) on obtient les approximations

$$\begin{aligned}
 u_0(x) &= 1 \\
 u_1(x) &= e^x + \frac{1}{3}x(1 - e^{3x}) + \int_0^x x u_0^3(t) dt = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 - \frac{4}{3}x^3 - \frac{35}{24}x^4 - \frac{67}{60}x^5 + \dots \\
 u_2(x) &= e^x + \frac{1}{3}x(1 - e^{3x}) + \int_0^x x u_1^3(t) dt = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{67}{60}x^5 + \dots \\
 u_3(x) &= e^x + \frac{1}{3}x(1 - e^{3x}) + \int_0^x x u_2^3(t) dt = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + \frac{1}{6!}x^6 + \dots
 \end{aligned}$$

Par conséquent, la solution  $u(x)$  de (3.11) est donnée par:

$$u(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x) = e^x.$$

### 3.1.2 Méthode de la solution en série

#### Cas de l'équation intégrale linéaire:

Une fonction réelle  $u(x)$  est appelée analytique si elle a des dérivées de tous les ordres tels que la série de Taylor en tout point  $b$  dans son domaine

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^k(b)}{k!} (x - b)^k, \tag{3.14}$$

converge vers  $f(x)$  dans un voisinage de  $b$ . Pour simplifier, la forme générique de la série de Taylor à  $x = 0$  peut être écrite comme

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_n x^n. \tag{3.15}$$

Dans cette section nous présenterons une méthode utile, qui provient principalement de la série de Taylor pour les fonctions analytiques, pour résoudre les équations intégrales de Volterra. Supposons que la solution  $u(x)$  de l'équation intégrale de Volterra

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x, t)u(t) dt, \tag{3.16}$$

est analytique et possède donc une série de Taylor de la forme donnée dans (3.15), où les coefficients  $a_n$  seront déterminés de façon récurrente. La substitution (3.15) des deux côtés de (3.16) donne

$$\sum_{k=0}^n a_n x^n = T(f(x)) + \lambda \int_0^x K(x, t) \left( \sum_{k=0}^n a_n t^n \right) dt, \quad (3.17)$$

ou pour simplifier, nous utilisons

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n = T(f(x)) + \lambda \int_0^x K(x, t) (a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_n t^n) dt \quad (3.18)$$

où  $T(f(x))$  est la série de Taylor pour  $f(x)$ . L'équation intégrale (3.16) sera convertie en une intégrale traditionnelle dans (3.17) ou (3.18) où au lieu d'intégrer la fonction inconnue  $u(x)$ , des termes de la forme  $t^n$ ,  $n \geq 0$  seront intégrés. Notons que parce que nous cherchons une solution en série, si  $f(x)$  comprend des fonctions élémentaires telles que des fonctions trigonométriques, des fonctions exponentielles,.. etc, il faut utiliser des extensions de Taylor pour des fonctions impliquées dans  $f(x)$ .

**Exemple 3.1.3** Résoudre l'équation intégrale de Volterra en utilisant la méthode de la solution en série

$$u(x) = 1 + \lambda \int_0^x u(t) dt. \quad (3.19)$$

En remplaçant  $u(x)$  par la série

$$u(x) = \sum_{k=0}^n a_n x^n. \quad (3.20)$$

Dans les deux côtés de l'équation (3.19) conduit à

$$\sum_{k=0}^n a_n x^n = 1 + \lambda \int_0^x \left( \sum_{k=0}^n a_n t^n \right) dt.$$

L'évaluation de l'intégrale à droite donne

$$\sum_{k=0}^n a_n x^n = 1 + \sum_{k=0}^n \frac{1}{n+1} a_n x^{n+1},$$

qui peut être réécrit comme

$$a_0 + \sum_{k=1}^n a_k x^k = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} a_{k-1} x^k.$$

De sorte que:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \dots = 1 + a_0 x + \frac{1}{2} a_1 x^2 + \frac{1}{3} a_2 x^3 \dots \quad (3.21)$$

ce qui implique que l'on a:

$$\begin{aligned} a_0 &= 1, \\ a_1 &= a_0, \\ a_2 &= \frac{1}{2} a_1 \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ a_n &= \frac{1}{n} a_{n-1}, n \geq 1. \end{aligned}$$

D'où ce résultat donne  $a_n = \frac{1}{n!}$ ,  $n \geq 0$ .

La substitution de ce résultat en (3.20) donne la solution en série:

$$u(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} x^k,$$

qui converge vers la solution exacte  $u(x) = e^x$ .

Il est intéressant de souligner que ce résultat peut être obtenu en égalisant des coefficients de termes semblables dans les deux côtés de (3.21), où l'on trouve

$$\begin{aligned} a_0 &= 1, a_1 = a_0 = 1 \\ a_2 &= \frac{1}{2} a_1 = \frac{1}{2!} \\ &\cdot \\ &\cdot \\ a_n &= \frac{1}{n} a_{n-1} = \frac{1}{n!}, n \geq 0. \end{aligned}$$

Ceci conduit au même résultat obtenu avant en résolvant la relation de récurrence.

**Cas de l'équation intégrale non linéaire**

La forme générique de la série de Taylor à  $x = 0$  peut être écrite comme

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n. \tag{3.22}$$

Nous supposons que la solution  $u(x)$  de l'équation intégrale de Volterra non linéaire

$$u(x) = f(x) + \int_0^x K(x,t)F(u(t))dt, \tag{3.23}$$

est analytique et possède donc une série de Taylor de la forme donnée dans (3.22), où les coefficients seront déterminés de façon récurrente. La substitution (3.22) des deux côtés de (3.23) donne

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = T(f(x)) + \int_0^x K(x,t)F\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right)dt. \tag{3.24}$$

Où

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots = T(f(x)) + \int_0^x K(x,t)F(a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots)dt, \tag{3.25}$$

où  $T(f(x))$  est la série de Taylor pour  $f(x)$ . L'équation intégrale (3.23) sera convertie en une intégrale traditionnelle dans (3.24) ou (3.25) où au lieu d'intégrer le terme non linéaire  $F(u(x))$ , des termes de la forme  $t^n$ ,  $n \geq 0$  seront intégrés. Notons que parce que nous cherchons une solution en série, si  $f(x)$  comprend des fonctions élémentaires telles que des fonctions trigonométriques, des fonctions exponentielles,.. etc, il faut utiliser des extensions de Taylor pour des fonctions impliquées dans  $f(x)$ .

**Exemple 3.1.4** Résoudre l'équation intégrale de Volterra non linéaire suivante en utilisant la méthode de la solution en série

$$u(x) = 1 + x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{12}x^4 + \int_0^x (x-t)u^2(t)dt. \tag{3.26}$$

L'utilisation de la forme de série (3.22) dans les deux côtés de (3.26) donne

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots = 1 + x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{12}x^4 + \int_0^x (x-t)(a_0 + a_1t + a_2t^2 + \dots)^2 dt.$$

En intégrant l'intégrale sur le côté droit, et en recueillant des puissances semblables de  $x$  on obtient

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots = 1 + x + \frac{1}{2}(a_0^2 - 1)x^2 + \frac{1}{3}(a_0a_1 - 1)x^3 + \frac{1}{12}(a_1^2 + 2a_0a_2 - 1)x^4 + \dots$$

Equation des coefficients de puissances identiques de  $x$  dans les deux côtés rendements

$$a_0 = 1, a_1 = 1, a_n = 0 \text{ pour } n \geq 2.$$

La solution exacte est donnée par

$$u(x) = x + 1.$$

### 3.1.3 Méthode des trapèzes

Rappelons que l'équation intégrale de Volterra, est donnée comme suite:

$$u(x) = g(x) + \int_a^x K(x; y)u(y)dy. \tag{3.27}$$

Notre objectif est d'approximer la solution  $u$  de le équation (3.27) sur un système de nœuds  $x_0 = a \leq x_1 \leq \dots \leq x_j \leq x_n = b$ . On suppose que ce système est équidistant i.e  $:x_j = a + jh, j = 1, 2, \dots, n$  où  $h$  est le pas de la discrétisation voulue, pour se faire en exigeant que l'égalité (3.27) ait lieu uniquement en ces noeuds, donc l'équation (3.27) devient:

$$u(x_j) = g(x_j) + \int_a^x K(x_j; y)u(y)dy. \tag{3.28}$$

La méthode des trapèzes, est usuelle dans le but d'approcher numériquement la quantité qui se présente sous forme intégrale dans cette équation, ceci nous amène à une seconde discrétisation par rapport à la variable d'intégration  $y$ .

Si on pose  $y = (x_j)_{0 \leq i \leq j}$  ; il vient :

$$u(x_j) = g(x_j) + \left[ \frac{h}{2}K(x_j; y_0)u(y_0) + h \sum_{i=0}^{j-1} K(x_j; y_i)u(y_i) + \frac{h}{2}K(x_j; y_j)u(y_j) \right],$$

avec les notations  $u(x_j) = u_j, g(x_j) = g_j; K(x_j; y_i) = K_{ji}$  cette formule devient :

$$u_j = g_j + \left[ \frac{h}{2}K_{j0}u_0 + h \sum_{i=0}^{j-1} K_{ji}u_i + \frac{h}{2}K_{jj}u_j \right].$$

En général

$$u_j(1 - \frac{h}{2}K_{jj}) = g_j + \left[ \frac{h}{2}K_{j0}u_0 + h \sum_{i=0}^{j-1} K_{ji}u_i \right]. \quad (3.29)$$

Il résulte immédiatement de l'équation (3.28), pour  $j = 0$  la valeur de  $u(a) = g(a)$ , d'où

$$u_0 = g_0. \quad (3.30)$$

Cette discrétisation nous a fournie alors un système d'équations algébriques linéaires, de la forme :  $Au = b$ , où  $A$  est une matrice triangulaire inférieure

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{h}{2}k_{10} & 1 - \frac{h}{2}k_{11} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\frac{h}{2}k_{1n} & \dots & \dots & 1 - \frac{h}{2}k_{nn} \end{bmatrix}$$

$u = (u_0, u_1, u_2, \dots, u_n)^t; b = (g_0, g_1, \dots, g_n)^t$ , pour la solubilité du système (3.29), un rôle essentiel revient au déterminant de la matrice  $A$ , étudient alors le comportement de ce dernier.

Cette matrice, elle a pour déterminant

$$D = (1 - \frac{h}{2}K_{11})(1 - \frac{h}{2}K_{22})\dots\dots(1 - \frac{h}{2}K_{nn}),$$

soit  $M = \max_{1 \leq j \leq n} |K_{jj}|$  Il en résulte évidemment

$$D \geq (1 - \frac{h}{2}M)^n = (1 - \frac{b-a}{2n}M)^n = (1 - \frac{h}{2}M)^{\frac{b-a}{h}},$$

le second membre de cette inégalité est non nul pour tout  $h$  suffisamment petit, il en croit avec la diminution de  $h$ . Ainsi,  $(1 - \frac{h}{2}M)$  est pour  $h$  deux fois moindre

$$\left(1 - \frac{h}{4}M\right)^2 = 1 - \frac{h}{2}M + \frac{h^2}{16}M^2.$$

Lorsque  $h \rightarrow 0$ , le second membre de (3.30) tend vers  $e^{-(b-a)\frac{M}{2}}$ .

Algébriquement dit, le déterminant du système (3.29) est non nul et ne tend pas vers 0 avec  $h$ , ce qui prouve justement l'absence des valeurs propres de l'équation de Volterra.

### 3.1.4 Méthode de Simpson modifiée

Dans cette partie nous allons introduire la méthode de Simpson modifiée pour la résolution numérique des équations intégrales de Volterra de second type à noyau régulier, l'idée principale est basée sur l'adaptation de la règle de quadrature de Simpson. Ainsi pour tester l'efficacité de cette méthode, nous allons traiter quelques exemples numériques.

On considère l'équation

$$\varphi(x) - \int_a^x K(x,t)\varphi(t)dt = f(x), \quad a \leq x \leq b. \quad (3.31)$$

Notre objectif est d'approcher la solution de cette équation sur un ensemble de points  $[a,b]$  de en utilisant la règle de quadrature de Simpson. Alors, d'après le théorème suivant :

**Théorème 3.1.3** *Soient  $g \in C^2[a, b]$  et un entier naturel pair. Alors pour le reste*

$$R_s(g) = \int g(x)dx - \frac{h}{3} [g(x_0) + 4g(x_1) + 2g(x_2) + 4g(x_3) + 2g(x_4) + \dots + 2g(x_{n-2}) + 4g(x_{n-1}) + g(x_n)]$$

de la règle composite de Simpson, on a l'estimation

$$|R_s(g)| \leq \frac{1}{180}h^4 (b-a) \|g^{(4)}\|_\infty.$$

On concernons l'estimation de l'erreur sur un sous-intervalle  $[\tau, \tau + 2h]$  on a

$$\int_\tau^{\tau+2h} K_x(t)\varphi(t)dt = \frac{h}{3} [K_x(\tau)\varphi(\tau) + 4K_x(\tau+h)\varphi(\tau+h) + K_x(\tau+2h)\varphi(\tau+2h)] - \frac{h^5}{90} (K_x(\xi)\varphi(\xi))^{(4)}.$$

Ceci est important, dans le sens où l'erreur d'intégration  $E(h)$  sur deux segments par la règle de Simpson est proportionnelle à  $h^5$ . En outre, on note que, si le segment  $h$  est réduit de moitié, alors  $E(h/2) \approx \frac{1}{16}E(h)$ .

Soit  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{2j-1} < x_{2j} < \dots < x_{2n}$  une subdivision de l'intervalle  $[a, b]$ . En exigeant que l'équation (3.31) soit vérifiée sur chaque nœud  $x_{2j}$ , et on écrit

$$\varphi(x_{2j}) - \int_a^{x_{2j}} K(x_{2j}, t)\varphi(t)dt = f(x_{2j}).$$

Ce qui s'écrit aussi

$$\varphi(x_{2j}) - \sum_{i=0}^{j-1} \int_{x_{2j}}^{x_{2j+2}} K(x_{2j}, t)\varphi(t)dt = f(x_{2j}). \quad (3.32)$$

Dans la suite, pour la simplicité on utilise les notations  $\varphi_{2j}$ ,  $f_{2j}$ ,  $K_{2j,2i}$  au lieu de  $\varphi(x_{2j})$ ,  $f(x_{2j})$ ,  $K(x_{2j}, t_{2i})$ . En utilisant la règle de quadrature de Simpson, l'équation discrète (3.32) devient:

$$\varphi_{2j} = f_{2j} + \sum_{i=0}^{j-1} \frac{h}{3} (K_{2j,2i}\varphi_{2i} + 4K_{2j,2i+1}\varphi_{2i+1} + K_{2j,2i+2}\varphi_{2i+2}).$$

Pour  $h$  suffisamment petit, une approximation de  $\varphi_{2j}$  devient possible, en approchant la solution  $\varphi_{2i+1}$  au nœud  $x_{2i+1}$  par la moyenne  $\frac{\varphi_{2i} + \varphi_{2i+2}}{2}$ , donc on a

$$\begin{aligned} \varphi_{2j} &= f_{2j} + \sum_{i=0}^{j-1} \frac{h}{3} \left\{ K_{2j,2i}\varphi_{2i} + 4K_{2j,2i+1} \frac{\varphi_{2i} + \varphi_{2i+2}}{2} + K_{2j,2i+2}\varphi_{2i+2} \right\} \\ &= f_{2j} + \sum_{i=0}^{j-1} \frac{h}{3} \left\{ (K_{2j,2i} + 2K_{2j,2i+1})\varphi_{2i} + (2K_{2j,2i+1} + K_{2j,2i+2})\varphi_{2i+2} \right\} \\ &= f_{2j} + \sum_{i=0}^{j-1} \frac{h}{3} (K_{2j,2i} + 2K_{2j,2i+1})\varphi_{2i} + \sum_{i=0}^{j-1} \frac{h}{3} (2K_{2j,2i+1} + K_{2j,2i+2})\varphi_{2i+2} \\ &= f_{2j} + \sum_{i=0}^{j-1} \frac{h}{3} (K_{2j,2i} + 2K_{2j,2i+1})\varphi_{2i} + \sum_{i=0}^j \frac{h}{3} (2K_{2j,2i-1} + K_{2j,2i})\varphi_{2i}. \end{aligned}$$

Ainsi, on écrit

$$\begin{aligned} \varphi_{2j} = & f_{2j} + \frac{h}{3} (K_{2j,0} + 2K_{2j,1}) \varphi_0 + \frac{h}{3} (2K_{2j,2j-1} + K_{2j,2j}) \varphi_{2j} \\ & + \frac{2h}{3} \sum_{i=0}^{j-1} (K_{2j,2i-1} + K_{2j,2i} + K_{2j,2i}) \varphi_{2i}. \end{aligned}$$

D'où, pour  $j = 1, \dots, n$

$$\begin{aligned} \varphi_{2j} \left\{ 1 - \frac{h}{3} (2K_{2j,2j-1} + K_{2j,2j}) \right\} = & f_{2j} + \frac{h}{3} (K_{2j,0} + 2K_{2j,1}) \varphi_0 \\ & + \frac{2h}{3} \sum_{i=0}^{j-1} (K_{2j,2i-1} + K_{2j,2i} + K_{2j,2i}) \varphi_{2i}. \end{aligned}$$

A partir de l'équation (3.31), il est clair que  $\varphi(x_0) = f(x_0)$ , ie,  $\varphi_0 = f_0$ .

**Exemple 3.1.5** On considère l'équation de Volterra

$$\varphi(x) - \int_{-1}^x e^{x-t} \varphi(t) dt = 2 - e^{x+1}, \quad -1 \leq x \leq 1,$$

telle que la solution exacte est  $\varphi(x) = 1$ . Les résultats numériques sont présentés dans le tableau suivant :

t	h = 0.1	h = 0.05	h = 0.025
-1.0	0	0	0
-0.8	1.37577E-07	8.55288E-09	5.32963E-10
-0.6	3.43374E-07	2.13204E-08	1.32786E-09
-0.4	6.51221E-07	4.03833E-08	2.52112E-09
-0.2	1.11172E-06	6.88414E-08	4.29281E-09
0.0	1.80057E-06	1.11320E-07	6.93944E-09
0.2	2.83099E-06	1.74730E-07	1.08812E-08
0.4	4.37238E-06	2.69410E-07	1.67856E-08
0.6	6.67807E-06	4.10718E-07	2.55695E-08
0.8	1.01271E-05	6.21688E-07	3.86717E-08
1.0	1.52864E-05	9.36628E-07	5.82840E-08

**Tableau 3.1** Méthode de simpson modifiée, erreur absolue

**Exemple 3.1.6** On considère l'équation

$$\varphi(x) - \int_0^x e^{-(x-t)} \varphi(t) dt = 1, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

telle que la solution exacte est  $\varphi(x) = 1 + x$ . Les résultats numériques sont présentés dans le tableau ci-dessous

t	h = 0.1	h = 0.05	h = 0.025
0.0	0	0	0
0.2	5.66099E-07	3.54109E-08	2.21257E-09
0.4	1.15495E-06	7.22079E-08	4.51245E-09
0.6	1.76488E-06	1.10389E-07	6.90124E-09
0.8	2.39757E-06	1.49965E-07	9.37416E-09
1.0	3.05245E-06	1.90928E-07	1.19362E-08

**Tableau 3.2** Méthode de simpson modifiée, erreur absolue

## 3.2 Équation intégrale de Fredholm

### 3.2.1 Méthodes de résolution approchées

On considère l'équation intégrale

$$\varphi(x) = f(x) + \int_G K(x, t) \varphi(t) dt, \quad x \in G. \quad (3.33)$$

avec  $G \subset \mathbb{R}^n$ ,  $m \geq 1$  un ensemble mesurable au sens de Jordan.

#### Méthodes du noyau dégénéré

La méthode du noyau dégénéré est une méthode classique bien connue pour résoudre numériquement les équations intégrales de second type, et elle est l'une des méthodes numériques les plus simple à définir et analyser. L'idée principale consiste à remplacer

le noyau de l'équation intégrale par un noyau dégénéré, précisément on approxime le noyau  $K(x, t)$  de l'équation (3.33) par une suite de noyaux dégénérés,

$$K_n(x, t) = \sum_{i=1}^n a_i(x)b_i(t), \quad n \geq 1 \quad (3.34)$$

où  $a_1, \dots, a_n$  et  $b_1, \dots, b_n$  sont des éléments de  $X$ , tels que  $a_1, \dots, a_n$  sont linéairement indépendants. En tenant compte du théorème (1.4.1) appliqué aux opérateurs  $I - A$  et  $I - A_n$ , cette approximation devient plus efficace en terme de convergence, si elle est réalisée de sorte que l'opérateur intégral associé  $A_n(\varphi) = X \rightarrow X$  défini par

$$A_n(\varphi) = \sum_{i=1}^n \langle \varphi, b_i \rangle a_i,$$

satisfait la condition

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n - A\| = 0.$$

Sur  $C(G)$ , muni de la norme de la convergence uniforme, cela signifie exactement

$$\max_{x \in G} \int_G |K_n(x, t) - K(x, t)| dt \rightarrow 0 \quad \text{quand } n \rightarrow \infty.$$

Généralement, nous voulons que cette convergence soit rapide pour obtenir une convergence rapide de  $\varphi_n$  vers la solution  $\varphi$  où  $\varphi_n$  est la solution approchée de l'équation approximante

$$\varphi_n(x) = f(x) + \int_G K_n(x, t)\varphi_n(t)dt \quad x \in G.$$

**Théorème 3.2.1** *Toute solution de l'équation*

$$\varphi_n = f + \sum_{i=1}^n \langle \varphi, b_i \rangle a_i,$$

s'écrit sous la forme

$$\varphi_n = f + \sum_{j=1}^n c_j a_j,$$

où les coefficients  $c_1, \dots, c_n$  sont solutions du système

$$c_i - \sum_{j=1}^n c_j \langle a_j, b_i \rangle = \langle f, b_i \rangle, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.35)$$

**Preuve.** Voir[7] ■

**Approximation par la série de Taylor** On considère l'équation intégrale unidimensionnelle

$$\varphi(x) - \int_a^b K(x, t)\varphi(t)dt = f(x), \quad a \leq x \leq b .$$

Supposons que le noyau  $K$  admet un développement en série entière par rapport à la première variable  $x$

$$K(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} K_i(x)(t - a)^i, \quad (3.36)$$

ou par rapport à  $t$

$$K(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} K_i(t)(x - a)^i.$$

Soit  $K_n$  la somme partielle des  $n$  premiers termes de la série (3.36)

$$K_n(x, t) = \sum_{i=0}^{n-1} K_i(x)(t - a)^i.$$

En utilisant la notation (3.34), est une suite de noyaux dégénérés

$$a_i(x) = K_{i-1}(x), \quad b_i(t) = (t - a)^{i-1} \quad i = 1, \dots, n.$$

Le système linéaire (3.35) devient

$$c_i - \sum_{j=1}^n c_j \int_a^b (t - a)^{i-1} K_{j-1}(t)dt = \int_a^b f(t)(t - a)^{i-1} dt \quad i = 1, \dots, n,$$

et la solution  $\varphi_n$  est donnée par

$$\varphi_n(x) = f(x) + \sum_{i=0}^{n-1} c_{i+1} K_i(x).$$

### Interpolation du noyau

L'interpolation, est l'une des méthodes d'approximation de la fonction noyau par un noyau dégénéré. Il existe différents types d'interpolation, mais nous allons présenter ici l'interpolation en utilisant seulement les valeurs de  $K(x,t)$ . Notons aussi qu'il existe plusieurs fonctions d'interpolation, y compris les polynômes, les polynômes trigonométriques (Voir [7]), les fonctions splines (Voir [3]), et autres. Nous allons décrire le cadre général de cette approche, et nous illustrons ces idées par des cas particuliers.

Soit  $\psi_1(x), \dots, \psi_n(x)$  une base pour l'espace des fonctions d'interpolation. Par exemple, pour l'espace des polynômes de degrés  $< n$ , on utilise la base

$$\psi_i(x) = x^{i-1}, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Soit  $x_1, \dots, x_n$  un système de noeuds (points d'interpolation) de l'ensemble  $G$ , et  $g$  une fonction arbitraire dans  $C(G)$ . Le problème d'interpolation peut être énoncé comme suit :

Soit  $g_1, \dots, g_n$ ,  $n$  points distincts, trouver une fonction

$$P(x) = \sum_{j=1}^n c_j \psi_j(x),$$

telle que  $P(x_i) = g_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

Ainsi, nous allons déterminer les coefficients  $c_1, \dots, c_n$  solutions du système linéaire

$$\sum_{j=1}^n c_j \psi_j(x_i) = g_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

**Définition 3.2.1** Soit  $x_1, \dots, x_n$  un système de noeuds. Alors

$$L_i(x) = \prod_{j=1, j \neq i}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}, \quad (3.37)$$

est appelé le  $i$ -ème polynôme de Lagrange. C'est un polynôme de degré  $n$ , il s'annule en tout  $x_j$ , sauf en  $x_i$  où il prend la valeur 1. On écrit ceci, à l'aide de delta de Kronecker

$$L_i(x) = \begin{cases} 0. & i \neq j \\ 1. & i = j \end{cases}.$$

Donc, pour la donnée d'une fonction arbitraire  $g$

$$P(x) = \sum_{j=1}^n g(x_j) L_j(x),$$

est une solution du problème d'interpolation énoncé ci-dessus.

**Théorème 3.2.2** *Si on se donne un système de noeuds  $x_1, \dots, x_n$ , et les données  $g(x_1), \dots, g(x_n)$ , alors il existe un polynôme unique, noté  $P$ , satisfait  $P(x_i) = g(x_i), i = 1, \dots, n$ . Ce polynôme s'écrit dans la base de Lagrange*

$$P(x) = \sum_{j=1}^n g(x_j) L_j(x),$$

où  $L_i(x)$  est donné par (3.37)

#### Interpolation gauche du noyau

Soit:

$$K_n(x, t) = \sum_{j=1}^n L_j(x) K(x_j, t),$$

alors  $K_n(x_i, t) = K(x_i, t), i = 1, \dots, n$ , pour tout  $t \in G$ .

Le système linéaire associé à la méthode du noyau dégénéré est  $(I - A_n)\varphi_n = f$  est

$$c_i - \sum_{j=1}^n c_j \int_G L_j(t) K(x_i, t) dt = \int_G K(x_i, t) f(t) dt, \quad i = 1, \dots, n.$$

La solution  $\varphi_n$  est donnée par

$$\varphi_n(x) = f(x) + \sum_{j=1}^n c_j L_j(x).$$

#### Interpolation droite du noyau

Soit:

$$K_n(x, t) = \sum_{j=1}^n K(x, x_j) L_j(t).$$

Alors  $K_n(x, x_i) = K(x, x_i)$ , pour tout  $x \in G, i = 1, \dots, n$ . La méthode du noyau dégénéré est donnée par

$$\varphi_n(x) = f(x) + \sum_{j=1}^n c_j K(x, x_j),$$

avec  $c_j$  sont solutions du système

$$c_i - \sum_{j=1}^n c_j \int_G L_i(x) K(x, x_j) dt = \int_G L_i(x) f(x) dx, \quad i = 1, \dots, n.$$

### Interpolation linéaire par morceaux :

Soit  $G = [a, b], n \geq 1, h = (b - a)/n$ , et  $x_i = a + ih, i = 0, \dots, n$ . Étant donné une fonction  $g \in C[a, b]$ . Nous allons interpoler cette fonction aux points  $(x_i)$  en utilisant l'interpolation linéaire par morceaux. Pour  $i = 1, \dots, n$ , on définit un opérateur de projection  $P_n : C[a, b] \rightarrow C[a, b]$  par:

$$P_n g(x) = \frac{(x_i - x)g(x_{i-1}) + (x - x_{i-1})g(x_i)}{h}, \quad x_{i-1} \leq x \leq x_i. \quad (3.38)$$

En introduisant ce qu'on appelle les fonctions chapeaux, dite aussi fonctions cardinales, qui définissent une base de Lagrange

$$L_i(x) = \begin{cases} \frac{1}{h}(x - x_{i-1}), & x_{i-1} \leq x \leq x_i, \quad i \geq 1 \\ \frac{1}{h}(x_{i+1} - x), & x_i \leq x \leq x_{i+1}, \quad i \leq n - 1 \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

L'opérateur de projection (3.38) s'écrit

$$P_n g(x) = \sum_{i=0}^n g(x_i) L_i(x). \quad (3.39)$$

Il est linéaire et borné avec  $\|P_n\|_\infty = 1$ . En effet, de (3.39) nous avons

$$\|P_n\|_\infty \leq \max_{x \in G} \sum_{i=1}^n |L_i(x)|.$$

Choisissons maintenant  $x \in G$  tel que

$$\sum_{i=1}^n |L_i(x)| = \max_{x \in G} \sum_{i=1}^n |L_i(x)|,$$

et une fonction  $f \in C(G)$  avec  $\|f\|_\infty = 1$  et

$$\sum_{i=1}^n f(x_i) L_i(x) = \sum_{i=1}^n |L_i(x)|.$$

Alors

$$\|P_n\|_\infty \geq \|P_n f\|_\infty \geq |P_n f(x)| = \max_{x \in G} \sum_{i=1}^n |L_i(x)|,$$

donc on a l'égalité

$$\|P_n\|_\infty = \max_{x \in G} \sum_{i=1}^n |L_i(x)|.$$

Et comme  $L_i \geq 0$ , pour tout  $i = 0, \dots, n$ , on a  $\sum_{i=0}^n |L_i(x)| = \sum_{i=0}^n L_i(x) = 1$  pour tout  $x \in [a, b]$ .

D'où  $\|P_n\|_\infty = 1$ .

**Théorème 3.2.3** Soit  $g \in C^2 [a, b]$ . Alors, pour l'erreur d'interpolation linéaire par morceaux, nous avons l'estimation suivante

$$\|P_n g - g\|_\infty \leq \frac{1}{8} h^2 \|g''\|_\infty.$$

**Preuve.** Evidemment, le maximum de  $|P_n g - g|$  dans  $[x_i, x_{i+1}]$  est atteint en un point intérieur  $\xi$  tel que  $g'(\xi) = (P_n g)'(\xi) = [g(x_{i+1}) - g(x_i)]/h$ . Sans perte de généralité nous pouvons supposer que  $\xi - x_i \leq \frac{h}{2}$ . Puis, en utilisant la formule de Taylor, on trouve

$$\begin{aligned} (P_n g)(\xi) - g(\xi) &= g(x_i) + (P_n g)'(\xi)(\xi - x_i) - g(\xi) \\ &= g(x_i) - g(\xi) - (x_i - \xi)g'(\xi) = \frac{1}{2}(x_i - \xi)^2 g''(\eta), \end{aligned}$$

avec  $\eta \in ]x_i, \xi[$ . Par conséquent

$$\max |(P_n g)(x) - g(x)| \leq \frac{1}{8} h^2 \|g''\|_\infty$$

■

En interpolant  $K(x, t)$  par rapport à  $x$ , on a:

$$K_n(x, t) = \frac{(x_i - x)K(x_{i-1}, t) + (x - x_{i-1})K(x_i, t)}{h}, \quad x_{i-1} \leq x \leq x_i \quad (3.40)$$

pour  $i = 1, \dots, n, a \leq t \leq b$ . Les coefficients de la matrice associée au système (3.40) sont donnés par

$$\langle a_i, b_i \rangle = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} L_i(t)K(x_i, t)dt.$$

Pour calculer ces intégrales, nous essayons de choisir une méthode numérique d'intégration qui exigera seulement quelques points de quadrature sur l'intervalle d'intégration, avec une erreur d'intégration de même ordre que l'erreur commise sur la solution approchée  $\varphi_n(x)$ .

Dans notre cas, la formule de Gauss-Legendre à deux points

$$\int_0^h y(x)dx \approx \frac{h}{2} \left[ y \left( \left[ 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \right] \frac{h}{2} \right) + y \left( \left[ 1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \right] \frac{h}{2} \right) \right],$$

est tout à fait suffisante, une fois appliquée sur chaque sous intervalle  $[x_{i-1}, x_i]$ .

Les côtés droits de (3.40) sont donnés par

$$\langle f, b_i \rangle = \int_a^b f(t)K(x_i, t)dt.$$

Du théorème (3.2.2), il en résulte que l'estimation de l'erreur commise dans l'approximation d'un opérateur intégral  $A$  à noyau deux fois continûment différentiable par un opérateur à noyau dégénéré  $A_n$  en utilisant l'interpolation linéaire par morceaux est donnée par

$$\|A_n - A\|_\infty \leq \frac{1}{8}h^2(b-a) \left\| \frac{\partial^2 K}{\partial x^2} \right\|_\infty.$$

Donc, d'après les théorèmes (1.4.1) et (1.4.2) appliquées aux opérateurs  $I - A$  et  $I - A_n$ , l'erreur d'approximation de la solution de l'équation intégrale correspondante est d'ordre  $O(h^2)$ .

### Approximation par la série de Fourier généralisée

Soit  $X = L^2(G)$  un espace d'Hilbert, et  $A : X \rightarrow X$  un opérateur intégral compact.

On muni  $X$  du produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int_G w(x) f(x) g(x) dx,$$

où la fonction poids  $w(x)$  vérifie les propriétés suivantes

- Pour presque tout  $x \in X$ ,  $w(x) \geq 0$ .
- Pour tout  $n \geq 0$

$$\int_G w(x) |x|^n dx < \infty.$$

- Si  $f \in C(G)$  et  $f$  non négative sur  $G$ , alors

$$\int_G w(x) f(x) dx = 0 \implies f(x) \equiv 0.$$

Soit  $\{\psi_1, \dots, \psi_n, \dots\}$  un système orthonormal complet dans  $L^2(G)$ . C'est à dire

1.  $\langle \psi_n, \psi_m \rangle = \delta_{nm}$  pour  $1 \leq n, m < \infty$ .
2. Si  $\varphi \in L^2(G)$  et si  $\langle \varphi, \psi_n \rangle = 0$  pour tout  $n \geq 1$ , alors  $\varphi = 0$ .

Alors, pour tout  $\varphi \in L^2(G)$ , on peut écrire

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \langle \varphi, \psi_i \rangle \psi_i(x).$$

C'est la série de Fourier généralisée de  $\varphi$  par rapport à  $\{\psi_i\}$ , elle converge dans  $L^2(G)$ .

Nous pouvons donc appliquer ce développement dans l'approximation de  $K(x, t)$ , par rapport à l'une des variables.

En choisissant la première variable  $x$ , on a

$$K(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \psi_i(x) b_i(t),$$

avec

$$b_i(t) = \langle K(\cdot; t), \psi_i \rangle = \int w(x) K(x, t) \psi_i(x) dx.$$

On définit le noyau d'approximation dégénéré par

$$K(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \psi_i(x) b_i(t).$$

L'équation  $(I - A_n)\varphi_n = f_n$  est résolue par

$$\varphi_n = f(x) + \sum_{i=1}^n c_i \psi_i(x).$$

De (3.35), les coefficients  $c_i$  sont solution du système

$$c_i - \sum_{j=1}^n c_j \int_G \psi_j(t) b_i(t) dt = \int_G b_i(t) f(t) dt, \quad i = 1, \dots, n.$$

### Méthodes de projection

Dans toutes les méthodes de projection, on étudie la résolution de l'équation intégrale de Fredholm de deuxième espèce

$$\lambda u(x) - \int_D K(x, t) u(t) dt = f(x), \quad (3.41)$$

où  $D$  est un fermé et borné et  $V$  un espace complet de fonction, tel que  $V = C(D)$  ou bien  $V = L^2(D)$  presque partout. On choisit une suite finie d'approximation de sous espaces  $V_n$ , tel que  $V_n \subset V$ ,  $n \geq 1$  et  $V_n$  de dimension  $k_n$ . Soit une base  $\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n\}$  de  $V_n$ . Le principe de la méthode de projection consiste à trouver une suite de fonction  $u_n \in V_n$  tel que

$$u_n(x) = \sum_{j=1}^{k_n} c_j \phi_j(x), \quad \forall x \in D.$$

On introduit le résidu  $r_n(x)$  pour approcher la solution de l'équation intégrale (3.41)

$$r_n(x) = \lambda u_n(x) - \int_D K(x, t) u_n(t) dt - f(x)$$

$$r_n(x) = \sum_{j=1}^{k_n} c_j \left\{ \lambda \phi_j(x) - \int_D K(x, t) \phi_j(t) dt \right\} - f(x),$$

dans ce cas  $u_n$  est une approximation de la solution  $u$  de l'équation intégrale (3.41) on note

$$u \approx u_n.$$

On remarque aussi que l'équation intégrale (3.41) qui peut être écrit sous la forme notation d'opérateur, tel que

$$(\lambda - \kappa) u = f,$$

dans ce cas le résidu  $r_n(x)$  est écrit sous la forme

$$r_n = (\lambda - \kappa) u - f,$$

les coefficients  $\{c_1, c_2, \dots, c_{k_n}\}$  doivent être choisis de telle sorte que

$$r_n(x) \rightarrow 0.$$

**Méthode de collocation** Pour résoudre l'équation de Fredholm de deuxième espèce (3.41), on va choisir des points distincts  $x_1, x_2, \dots, x_{k_n} \in D$  telle que

$$r_n(x_i) = 0, \quad i = 1, \dots, k_n,$$

qui vont déterminer les coefficients  $\{c_1, c_2, \dots, c_{k_n}\}$  comme solution du système linéaire

$$\sum_{j=1}^{k_n} c_j \left\{ \lambda \phi_j(x_i) - \int_D K(x_i, t) \phi_j(t) dt \right\} = f(x_i), \quad i = 1, \dots, k_n,$$

d'où

$$\sum_{j=1}^{k_n} c_j \lambda \phi_j(x_i) = \sum_{j=1}^{k_n} \int_D K(x_i, t) \phi_j(t) dt + f(x_i), \quad i = 1, \dots, k_n.$$

Nous introduisons un opérateur de projection  $P_n : V \rightarrow V_n$  avec  $V = C(D)$ .

Soit  $u \in C(D)$  on défini  $P_n u$  comme élément  $V_n$  l'interpolation de  $u$  aux points  $\{x_1, x_2, \dots, x_{k_n}\}$

$$P_n u(x) = \lambda u_n(x) = \lambda \sum_{j=1}^{k_n} c_j \phi_j(x),$$

donc

$$P_n u(x_i) = \sum_{j=1}^{k_n} \int_D K(x_i, t) \phi_j(t) dt + f(x_i) = \sum_{j=1}^{k_n} c_j \lambda \phi_j(x_i), \quad i = 1, \dots, k_n,$$

en posant  $a_j = c_j \lambda$ , on peut écrire

$$P_n u(x) = \sum_{j=1}^{k_n} a_j \phi_j(x), \quad x \in D$$

les coefficients  $\{a_j\}$  sont déterminés par la résolution du système

$$\sum_{j=1}^{k_n} a_j \phi_j(x_i) = u(x_i), \quad i = 1, \dots, k_n,$$

ce système admet une solution unique si

$$\det [\phi_j(x_i)] \neq 0,$$

cette condition signifie que les fonctions  $\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{k_n}\}$  constituent un système linéairement indépendant.

**Exemple 3.2.1** Si par exemple  $\phi_j(x) = x^j$  alors

$$\det [\phi_j(x_i)] = \det [x^j] \neq 0.$$

Ce déterminant est le déterminant Vandermonde il n'est pas nul.

Pour tout  $i$ , ( $1 \leq i \leq k_n$ ), soit  $l_i \in V_n$  avec

$$\begin{aligned} V_n &= \text{vect} \{1, x, \dots, x^n\} \\ l_i(x_j) &= \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \\ P_n u(x) &= \sum_{j=1}^{k_n} a_j \phi_j(x) \quad x \in D, \end{aligned}$$

le système  $(l_i)$  est le système de polynôme d'interpolation de Lagrange

$$l_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^{k_n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \quad i = 0, 1, \dots, k_n.$$

### Méthode Galerkin Application de la méthode de collocation

Soit  $V = L^2(D)$  l'espace d'Hilbert des fonctions de carré intégrale sur  $D$ . On note par  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  le produit scalaire sur  $V$ . Soit  $\{\Phi_i\}$  un système de fonctions orthogonales telle que

$$\langle r_n, \Phi_i \rangle = 0, \quad i = 1, \dots, k_n,$$

comme :

$$r_n(x) = \sum_{j=1}^{k_k} \left[ c_j \left\{ \lambda \Phi_j(x) - \int_D K(x, y) \Phi_j(x) \right\} \right] - f(x),$$

donc :

$$\langle r_n, \Phi_i \rangle = \sum_{j=1}^{k_k} [c_j \{ \lambda \langle \Phi_j, \Phi_i \rangle - \langle K \Phi_j, \Phi_i \rangle \}] - \langle f, \Phi_i \rangle = 0, \quad (i = 1, \dots, k_n).$$

C'est le système linéaire de Galerkin. Il suffit de déterminer les coefficients  $c_i$ .

### Application de la méthode de Galerkin

Soit à chercher une solution approchée de l'équation intégrale

$$\lambda u(x) - \int_a^b K(x, t) u(t) dt = f(x),$$

par la méthode de Galerkin. On choisit un système de fonctions  $\{\Phi_j\}$  linéairement indépendantes dans  $V = L^2(a, b)$ . On cherche une solution approchée sous la forme

$$u_n(x) = \frac{1}{\lambda} \left[ f(x) + \sum_{i=1}^n A_i \Phi_i(x) \right].$$

On a le résidu

$$r_n(x) = \lambda u_n(x) - \int_a^b K(x, t) u_n(t) dt - f(x),$$

donc

$$r_n(x) = f(x) + \sum_{j=1}^n A_j \Phi_j(x) - \frac{1}{\lambda} \int_a^b K(x, t) \left[ f(t) + \sum_{j=1}^n A_j \Phi_j(t) \right] dt - f(x),$$

d'où

$$r_n(x) = \frac{1}{\lambda} \sum_{j=1}^n A_j \left[ \lambda \Phi_j(x) - \int_a^b K(x, t) \Phi_j(t) dt \right] - \frac{1}{\lambda} \int_a^b K(x, t) f(t) dt,$$

d'après

$$\langle r_n, \Phi_i \rangle = \langle \lambda r_n, \Phi_i \rangle = \int_a^b \lambda r_n(x) \Phi_i(x) dx = 0$$

$$\int_a^b \left( \sum_{j=1}^n A_j \left[ \lambda \Phi_j(x) - \int_a^b K(x, t) \Phi_j(t) dt \right] - \int_a^b K(x, t) f(t) dt \right) \Phi_i(x) dx = 0,$$

il vient

$$\sum_{j=1}^n A_j \left( \lambda \int_a^b \Phi_j(x) \Phi_i(x) dx - \int_a^b \int_a^b K(x, t) \Phi_j(t) \Phi_i(x) dt dx \right) = \int_a^b \int_a^b K(x, t) f(t) \Phi_i(x) dt dx.$$

On pose

$$\alpha_{ij} = \int_a^b \Phi_j(x) \Phi_i(x) dx, \quad \beta_{ij} = \int_a^b \int_a^b K(x, t) \Phi_j(t) \Phi_i(x) dt dx, \quad \gamma_{ij} = \int_a^b \int_a^b K(x, t) f(t) \Phi_i(x) dt dx.$$

On obtient le système suivant

$$\sum_{j=1}^n A_j (\lambda \alpha_{ij} - \beta_{ij}) = \gamma_{ij}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.42)$$

Par conséquent, les coefficients  $A_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ . se définissent à partir de résolution du système (3.42).

Si

$$D(\lambda) = \det(\lambda \alpha_{ij} - \beta_{ij}) \neq 0,$$

le système (3.42) détermine de façon unique les coefficients  $\{A_j\}$ .

**Exemple 3.2.2** On se propose de résoudre par le procédé de Galerkin l'équation intégrale suivante

$$u(x) = 1 - \frac{4}{3}x + \int_{-1}^1 (xt^2 - 1) u(t) dt.$$

Prenant pour système complet sur  $[-1, 1]$  un système de polynomes de Legendre  $\{l_i(x)\}_{1 \leq i \leq 3}$  avec

$$l_1(x) = 1, \quad l_2(x) = x, \quad l_3(x) = \frac{3x^2 - 1}{2}.$$

On cherche la solution sous forme

$$u_3(x) = c_1 + c_2x + c_3 \frac{3x^2 - 1}{2},$$

le résidu est égal à

$$r_3(x) = u_3(x) - 1 + \frac{4}{3}x - \int_{-1}^1 (xt^2 - 1) \left( c_1 + c_2t + c_3 \frac{3t^2 - 1}{2} \right) dt,$$

en calculant l'intégrale on obtient

$$r_3(x) = \left( 3c_1 - \frac{c_3}{2} - 1 \right) + \left( -\frac{2}{3}c_1 + c_2 - \frac{4}{15}c_3 + \frac{4}{3} \right) x + \frac{3}{2}c_3x^2.$$

D'après l'orthogonalité du résidu  $r_3$  au système  $\left\{ 1, x, \frac{3x^2-1}{2} \right\}$  on a

$$\begin{aligned} \langle r_3, 1 \rangle &= 6c_1 - 2 = 0 \\ \langle r_3, x \rangle &= \frac{10}{9} + c_2 - \frac{4}{15}c_3 = 0 \\ \left\langle r_3, \frac{3x^2 - 1}{2} \right\rangle &= \frac{1}{5}c_3 = 0, \end{aligned}$$

donc

$$c_1 = \frac{1}{3}, \quad c_2 = -\frac{10}{9}, \quad c_3 = 0.$$

Ainsi on obtient une solution

$$u_2(x) = \frac{1}{3} - \frac{10}{9}x.$$

Cette solution coïncide avec la solution exacte.

### 3.2.2 Méthode d'interpolation de Newton

Dans cette partie, on considère l'équation intégrale de Fredholm de second type

$$\varphi(x) - \int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt = f(x), \quad a \leq x \leq b. \quad (3.43)$$

Notre but est de chercher la solution approchée de cette équation, en approximant la fonction inconnue  $\varphi(x)$  par le polynôme d'interpolation de Newton en utilisant les différences divisées.

Précisément, par la donnée des points  $(x_i, \varphi_i)$ , où  $x_i$  sont équirépartis dans  $[a,b]$  et

$\varphi_i = \varphi(x_i), i = 0, \dots, n$ , nous allons construire le polynôme d'interpolation de degré  $n$  qui passe par ces points. On note  $\Delta$  l'opérateur des différences vers l'avant divisées définies par

$$\begin{aligned} \Delta^0 \varphi_0 &= \varphi_0, \\ \Delta^1 \varphi_0 &= \Delta \varphi_0 = \varphi_1 - \varphi_0, \\ \Delta^2 \varphi_0 &= \Delta \Delta \varphi_0 = \Delta(\varphi_1 - \varphi_0) = \Delta \varphi_1 - \Delta \varphi_0 = \varphi_2 - 2\varphi_1 + \varphi_0, \\ \Delta^3 \varphi_0 &= \Delta \Delta^2 \varphi_0 = \Delta(\varphi_2 - 2\varphi_1 + \varphi_0) = \varphi_3 - 3\varphi_2 + 3\varphi_1 - \varphi_0, \\ &\vdots \\ \Delta^n \varphi_0 &= \Delta \Delta^{n-1} \varphi_0 = \dots \end{aligned}$$

Avec une écriture matricielle, nous avons

$$\Delta \Phi_0 = M \Phi, \quad (3.44)$$

où  $\Delta \Phi_0 = (\Delta^0 \varphi_0, \Delta^1 \varphi_0, \dots, \Delta^n \varphi_0)^t$ ,  $\Phi = (\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n)^t$ , et

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \vdots \\ -1 & 1 & 0 & 0 & \vdots \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \vdots \\ -1 & 3 & -3 & 1 & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots \end{pmatrix}, \quad (3.45)$$

est une matrice triangulaire inférieure, telle que, pour  $0 \leq i, j \leq n$  on a :  $m_{i0} = (-1)^i$ ,  $m_{ii} = 1, m_{ij} = m_{i-1,j-1} - m_{i-1,j}$ , pour tout  $i > j$ ,  $m_{ij} = 0$  ailleurs.

D'autre part, le polynôme de Newton est de la forme

$$P_n(x) = \varphi_0 + \frac{\Delta\varphi_0}{h}(x-x_0) + \frac{\Delta^2\varphi_0}{2!h^2}(x-x_0)(x-x_1) + \dots + \frac{\Delta^n\varphi_0}{n!h^n}(x-x_0)\dots(x-x_{n-1}).$$

En substituant  $P_n(x)$  dans l'équation (3.31), on obtient l'équation approximante suivante

$$P_n(x) - \int_a^b K(x,t)P_n(t)dt = f(x), \quad a \leq x \leq b.$$

Comme  $P_n(x_j) = \varphi_n(x_j)$  pour tout  $j = 0, \dots, n$ , on obtient

$$\begin{aligned} \varphi_j = & f_j + \varphi_0 \int_a^b K(x_j,t)dt + \frac{\Delta\varphi_0}{h} \int_a^b K(x_j,t)(t-x_0)dt + \dots \\ & + \frac{\Delta^n\varphi_0}{n!h^n} \int_a^b K(x_j,t)(t-x_0)(t-x_1)\dots(t-x_{n-1})dt. \end{aligned} \quad (3.46)$$

En posant

$$\begin{aligned} c_{jl} = & \int_a^b K(x_j,t)dt, \quad \text{si } l = 0 \\ c_{jl} = & \frac{1}{l!h^l} \int_a^b K(x_j,t)(t-x_0)\dots(t-x_{l-1})dt \quad l = 1, \dots, n, \end{aligned}$$

pour  $j = 0, \dots, n$ . Le système (3.46) devient

$$\varphi_j = f_j + \sum_{i=0}^n c_{ji}\Delta^i\varphi_0.$$

D'une autre manière, nous avons

$$\Phi = F + C\Delta\Phi_0.$$

En utilisant la relation (3.44), on obtient finalement le système

$$(1 - CM)\Phi = F,$$

où  $I$ , est la matrice identité,  $F = (f_0, \dots, f_n)^t$ ,  $C = (c_{jl})$  et  $M$  la matrice (3.45),  $\Phi$  est le vecteur des solutions à déterminer.

### Calcul des coefficients $c_{jl}$

Pour évaluer numériquement les coefficient  $c_{jl}$  de la matrice  $C$ , il suffit d'appliquer la méthode d'intégration de Simpson aux même noeuds  $x_i$ , abscisses des points d'interpolation.

Alors,

Pour  $l = 0$

$$c_{j0} = \frac{h}{3} [(K(x_j, x_0) + 4K(x_j, x_1) + 2K(x_j, x_2) + \dots + K(x_j, x_n))].$$

Pour  $l$  impair, nous avons

$$c_{jl} = \frac{1}{l!h^l} \times \frac{h}{3} \left[ 4K(x_j, x_l) l(l-1) \dots 1h^l + 2K(x_j, x_{l+1}) (l+1) l \dots 2h^l + \dots \right. \\ \left. + K(x_j, x_n) n(n-1) \dots (n-l+1) h^l \right],$$

d'où

$$c_{jl} = \frac{h}{3} \left[ 4K(x_j, x_l) + 2K(x_j, x_{l+1}) \frac{(l+1)}{1!} + 4K(x_j, x_{l+2}) \frac{(l+1)(l+1)}{2!} + \dots \right. \\ \left. + K(x_j, x_n) \frac{n(n-1) \dots (l+1)}{(n-l)!} \right],$$

ceci s'écrit aussi

$$c_{jl} = \frac{h}{3} [4K(x_j, x_l) C_l^0 + 2K(x_j, x_{l+1}) C_{l+1}^1 + 4K(x_j, x_{l+2}) C_{l+2}^2 + \dots + K(x_j, x_n) C_n^{n-l}].$$

De la même manière, pour  $l$  pair, on trouve

$$c_{jl} = \frac{h}{3} [2K(x_j, x_l) C_l^0 + 4K(x_j, x_{l+1}) C_{l+1}^1 + 2K(x_j, x_{l+2}) C_{l+2}^2 + \dots + K(x_j, x_n) C_n^{n-l}].$$

### Exemples numériques

**Exemple 3.2.3** On considère l'équation

$$\varphi(x) = e^x + e^{-x} - \int_0^1 e^{-x-t} \varphi(t) dt \quad 0 \leq x \leq 1,$$

dont la solution exacte est  $\varphi(t) = e^t$ . Les résultats numériques pour  $n = 4$  (i.e, 5 points équirépartis) sont donnée dans la tableau suivant :

x	solution exacte	solution approché	erreur absolue
0	1.0000000000000000	1.0000000000000000	4.44089E-16
0.25	1.28402541668774	1.28402541668774	0
0.50	1.64872127070013	1.64872127070013	2.22045E-16
0.75	2.11700001661267	2.11700001661267	0
1	2.71828182845905	2.71828182845905	0

**Tableau 3.3** Méthode d'interpolation de Newton

**Exemple 3.2.4** Ici, on considère l'équation

$$\varphi(x) = \sqrt{x} - \int_0^1 \sqrt{xt}\varphi(t)dt \quad 0 \leq x \leq 1,$$

dont la solution exacte  $\varphi(x) = 2\sqrt{x}/3$ . Avec 5 points ( $n = 4$ ). Les résultats numériques obtenus sont présentés dans le tableau suivant :

x	solution exacte	solution approché	erreur absolue
0	0	0	0
0.25	0.3333333333333333	0.3333333333333333	1.11022E-16
0.50	0.47140452079103	0.47140452079103	5.55112E-17
0.75	0.57735026918963	0.57735026918963	1.11022E-16
1	0.6666666666666667	0.6666666666666667	0

**Tableau 3.4** Méthode d'interpolation de Newton

# Bibliographie

- [1] **W,Abdul.Majid.** linear and Nonlinear intégral équations Méthods and Applications, Higher Education press, Beijin and springer-Verlag Berlim Heidelberg 2011.
- [2] **D,Andrei .** Polyanin and Alexander V.Manzhirov. Handbook of integral equations.
- [3] **A,James.** Linear operators and integral equations in global illumination. Cornell University, 1993.
- [4] **De Boor, C.** A Practical Guide to Splines. Springer-Verlag, New York 1978.
- [5] **A,Chafik.** Paul Sablonnière, Driss Sbibih Solving Fredholm integral equations by approximating kernels by spline quasi-interpolants. Numer. Algor, 437- 453 (2010).
- [6] **F.Smitheirs.** Intégral équations Cambridge and lecturer in mathématique in the Univerisite of cambridge 1958.
- [7] **B,Haïm.** Analyse fonctionnelle. Dunod, 1983.
- [8] **R,Kress.** Linear Integral Equations. Springer-Verlag, New York, 2d ed 1999.
- [9] **P,Linz.** Analytical and Numerical Methods for Volterra Equations. SIAM, Philadelphia 1985.
- [10]
- [11] **A. Rahmoune,** Résolution numérique des équations intégrales. Mémoire de Magistère, Université de M'sila, 2004.

- [12] **S. Yalcinbas and M. Sezer**, The approximate solution of high-order linear Volterra - Fredholm integro-differential equations in terms of Taylor polynomials, *Jornal of Elsevier*, 291-308, 2000.
- [13] **B. GAGUI**, Résolution des équations intégrales par les méthodes adaptatives, *Mémoire de Magistère, Université de M'sila*, 2006.
- [14] **A. Rahman**, *Integral Equations and their Applications*, Dalhousie University, Canada, 2007.
- [15] **P, Gabriel**. *Méthodes de projection pour les équations intégrales*. Université Rennes 1, 2001.

طرق الحلول العددية للمعادلات التكاملية تلعب دورا هاما في مختلف المجالات العلمية. والغرض من هذه المذكرة رؤية بعض الطرق العددية لحل المعادلات التكاملية. أولا حددنا بعض المفاهيم الأساسية في بعض تعاريف المؤثرات. أما في الفصل الثاني في القسم الأول قدمنا تصنيف المعادلات التكاملية الخطية وغير الخطية، وفي القسم الثاني ندرس وجود ووحدانية حل المعادلات التكاملية وأخيرا في الفصل الثالث قدمنا مختلف أساليب الحل العددي للمعادلات التكاملية. الكلمات المفتاحية: معادلة تكاملية، معادلة فولتيرا، معادلة فريدهولم، طريقة الأسقاط، طريقة العددية للحل، حلول.

## Résumé

Les méthodes des résolutions numériques des équations intégrales jouent un rôle très important dans divers domaines scientifiques. Le but de ce mémoire voir quelques méthodes numériques de résolution des équations intégrales.

On a présenté en premier lieu quelques notions fondamentales sur quelques définitions des opérateurs. Ensuite dans le première section de le deuxième chapitre on a présente une classification des équations intégrales linéaire et non linéaire, et dans la deuxième section nous avons étudié l'existence et l'unicité de la solution des équations intégrales

Enfin dans la troisième chapitre à présenter divers méthodes de résolution numérique des équations intégrales.

**Mots clés:** Équation intégrale, Équation intégrale de Volterra, Équation intégrale de Fredholm, Méthode de Projection, Méthode numérique de résolution, Solutions.

## Abstract:

The methods of numerical resolutions of integral equations play a very important role in various scientific fields. The purpose of this thesis is to see some numerical methods for solving integral equations.

First, we have defined some basic concepts on some definitions of operators. Then in the first section of the second chapter we have presented a classification of linear and nonlinear integral equations and in the second section we have studied the existence and the uniqueness of the solution of integral equations

Finally in the third chapter to present various methods of numerical resolution of integral equations.

**Keywords:** Integral equation, Volterra integral equation, Fredholm integral equation,

Projection Method, Method of numerical resolution, Solutions.