



République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de
la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ HAMMA LAKHDAR EL OUED
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES

Mémoire de fin d'étude

MASTER ACADEMIQUE

Domaine: Mathématiques et Informatique

Filière: Mathématiques

Spécialité: Mathématiques fondamentales et appliquées

Thème

**Résolution des équations intégrals
par la méthode des ondelettes**

Présenté par: Degachi Safa
Guehef Safa

Soutenu publiquement le : 20/06/2019
Devant le jury composé de:

Mansour Abdel Wahab	Pr	Président	Univ. El Oued
Ben Ali Brahim	MCA	Rapporteur	Univ. El Oued
Dahdah Bachir	MCD	Examineur	Univ. El Oued

Dédicaces

Nous dédions ce travail à :

Nos chers parents.

Nos frères et nos soeurs.

Nos amies.

Et à tous nous familles.

Remerciements

Nous remercions tout d'abord Dieu le tout puissant qui nous a données la puissance et la volonté pour achever ce travail.

Nos vifs remerciements vont également à notre encadreur **Dr. Ben Ali Brahim** qui nous a guidées durant ce semestre par ses conseils et remarques qui étaient très utiles pour réaliser ce mémoire. .

Nous remercions encore, **Dr. Dahdah Bachir** qui nous a aidé à accomplir ce travail.

Nous remercions les membres du jury pour l'honneur qu'ils nous ont fait en acceptant de siéger à notre défense et de revoir notre travail.

Enfin que tous ceux qui n'ont pas été mentionnés et qui ont contribué à la réalisation, de près ou de loin, de ce travail vous nos remerciements.

Table des matières

Introduction	vi
Notations générales	viii
1 Généralités sur les équations intégrales	1
1.1 Préliminaire	1
1.1.1 Espace de Hilbert	1
1.1.2 Transformation de Fourier	2
1.2 Les équations intégrales	3
1.2.1 Classification des équation intégrales	4
1.2.2 Quelques méthodes de résolution les équations intégrales	8
2 Rappel sur la théorie des ondelettes	14
2.1 La théorie des ondelettes	14
2.1.1 Qu'est ce qu'une ondelette	14
2.1.2 Propriétés des ondelettes	15
2.1.3 Exemples d'ondelettes	16
2.1.4 Transformée en ondelettes continue(TOC)	16
2.1.5 Transformée en ondelettes discrètes (TOD)	17
2.2 Analyse multirésolution (AMR)	18
2.3 Décomposition en ondelettes orthogonales	19
2.3.1 Les bases d'ondelettes	19
2.3.2 Transformée en ondelettes	20
2.4 L'ondelette de Haar sur l'intervalle $[0,1]$	21
2.4.1 Ondelettes de Haar sur $L^2(\mathbb{R})$	21
2.4.2 Le système de Haar	23
2.4.3 Orthogonalité du système de Haar	23

2.4.4	Le système de Haar sur $[0,1]$	24
3	Applications	28
3.1	Méthode d'ondelette de Haar	29
3.2	Équations intégrales de Fredholm	30
3.3	Système linéaire d'équations intégrales de Fredholm	31
3.4	Équation intégrale faiblement singulière	38
	Conclusion générale	41
	Bibliographie	42

Table des figures

2.1	Ondelette de Morlet	16
2.2	Chapeau mexicain	16
2.3	Fonction de Haar	22
2.4	Les graphiques de $\psi(t)$ et $ \hat{\psi}(\omega) $	22
3.1	Solution du type au voisinage du point singulier $x = 0, 1$ solution exacte, Solutions ondelettes pour $J = 6$ et $J = 7$	40

Introduction Générale

Les équations intégrales ont plusieurs applications en physique et en ingénierie. Cependant, les solutions analytiques d'équations intégrales n'existent pas ou sont difficiles à trouver. C'est précisément pour cette raison que plusieurs méthodes numériques ont été développées pour trouver des solutions d'équations intégrales. Certaines méthodes ne s'appliquent qu'aux équations intégrales linéaires alors que d'autres s'appliquent à des cas particuliers d'équations intégrales non linéaires pour les types généraux d'équations intégrales non linéaires de Fredholm et de Volterra. L'utilisation des ondelettes a pris de l'importance d'une application numérique.

J. Fourier (1768-1830) est le premier mathématicien qui a découvert ce genre d'équations intégrales dû au fait qu'il a obtenu la formule de la transformation de Fourier.

La transformée de Fourier \mathcal{F} est une opération qui transforme une fonction intégrable sur \mathbb{R} en une autre fonction.

L'analyse de Fourier est adaptée à l'étude de signaux stationnaires, l'analyse par ondelettes est adaptée aux signaux non-stationnaires.

A noter que dans l'histoire du mathématique l'analyse des ondelettes remonte au début des années (1930) et sont actuellement utilisées dans plusieurs domaines tels que : le traitement du signal d'image, la compression des données. Même si peu de gens connaissent probablement très peu de choses sur le concept des ondelettes ils contrastent avec son impact phénoménal dans la technologie d'aujourd'hui. Dans ces dernières années, de nombreuses différentes fonction de base ont été utilisées pour estimer la solution des équations intégrales, telles que les fonctions orthogonales et des ondelettes.

La notion d' "Ondelettes" ou "Wavelets" a été utilisée pour la première fois au début des années 80 par le géophysicien français J. Morlet [9] pour désigner des fonctions mathématiques utilisées dans la représentation des données sismiques. Les ondelettes

sont des fonctions de base de variation multi-échelles, ou multi-résolutions, utilisées dans le but de l'approximation ou de la compression des données. La théorie des ondelettes n'est pas en fait tout à fait nouvelle, mais le support mathématique, contenu déjà dans les recherches des années 30, a été développé considérablement dans les dernières 20 années, après que ces fonctions ont été utilisés dans le traitement numérique du signal et en particulier dans l'analyse et la compression des images.

Utiliser les ondelettes pour résoudre des équations intégrales, des équations différentielles intégrales et des équations intégrales numériques. Parmi les types les plus importants d'ondelettes, ondelette dérivée première de Gaussienne et ondelette sombrero, égale à $-\Delta G$ (dérivée seconde de Gaussienne), ondelette de Meyer et dans notre travail de spécialité dans l'ondelette de Haar qui est le mois le plus commun. La méthode est applicable à différents types d'équations intégrales (équations de Fredholm et Volterra, équations intégro-différentielles, équations intégrales faiblement singulières).

L'objectif principal des recherches modernes sur les ondelette est de créer des fonctions de base variation multi-échelles, ou multi-résolutions faciles à se transformer en information, efficaces et utiles dans la description d'une fonction ou d'un signal, si celui ci est représenté comme une fonction du temps et si les ondelettes fournissent une localisation efficace en terme de temps et de fréquence ou d'échelle.

Notre travail est reparti en trois chapitres.

Le premier chapitre est consacré en général sur les équation intégrales : nous avons présenté quelques définitions de base de l'espace de Hilbert et la transformation de fourier. Enfin, nous avons présenté quelques méthodes de résolution d'équations intégrales.

Dans le deuxième chapitre, nous avons discuté la théorie des ondelettes avec leurs définitions et propriétés, aussi bien que l'analyse de multi-résolution et décomposition en ondelettes orthogonales. Finalement, nous nous sommes concentrés sur l'ondelette de Haar sur l'intervalle.

Dans le troisième chapitre, nous avons fait une application de méthode numerique d'ondelettes de Haar pour la résolution des équations intégrales, en utilisant la méthode de collocation[1], et la méthode Galerkin [20] . Dans cette dernière, le niveau d'approximation J . Comparez alors ces résultats avec la solution exacte.

Notations Générales

\langle , \rangle	Le produit scalaire.
P_F	La projection orthogonale.
$L^2(\mathbb{R})$	Espace des fonctions de carré intégrable sur \mathbb{R} , avec $\ f\ _{L^2}^2 = \int_{\mathbb{R}} f(t) ^2 dt < \infty$.
$\mathcal{F}f(\omega), \widehat{f}(\omega)$	
où TF	Transformée de Fourier de f .
$\overline{\mathcal{F}}f(\omega)$	Transformée de Fourier inverse de f .
A	Opérateur.
$k(x, t)$	Le noyau des équations intégrales.
T	Opérateur intégral.
$\Gamma(x)$	Fonction gamma.
\mathcal{L}	Transformation de Laplace.
$\psi(t)$	Ondelette mère.
$\psi_{i,j}(t)$	Ondelette discrète.
\oplus	Somme directe.
$I_{i,j}$	Intervalle dyadique.
$\varphi_{j,k}$	Le système des fonctions d'échelle Haar.
$\psi_{j,k}$	Le système de Haar.
E	Espace mesuré.
\mathbb{R}	L'ensemble des nombres réels.
\mathbb{N}	L'ensemble des nombres naturels.
\mathbb{C}	L'ensemble des nombres complexes.
\mathbb{Z}	L'ensemble d'entiers.
TOC	Transformée en ondelettes continue.
TOD	Transformée en ondelettes discrètes.
EIFS	Equation intégrale de Fredholm de deuxième espèce.
AMR	Analyse multirésolution.

Chapitre 1

Généralités sur les équations intégrales

1.1 Préliminaire

1.1.1 Espace de Hilbert

Définition 1.1.1 *Un espace de Hilbert est un espace vectoriel H sur \mathbb{C} muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$, tel que la norme $\|x\| = \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}}$ est complète.*

Définition 1.1.2 *Soit H un espace de Hilbert. un système orthonormé est un sous-ensemble E de H tel que pour tout $e, y \in E$ nous avons*

$$\langle e, y \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } e = y, \\ 0 & \text{si } e \neq y. \end{cases}$$

Définition 1.1.3 *Soit H un espace de Hilbert et soit $F \subset H$. Le complément orthogonal de F défini par*

$$F^\perp = \{x \in H : \langle x, f \rangle = 0 \quad \forall f \in F\}. \quad (1.1)$$

Proposition 1.1.1 *Soit F un sous-espace vectoriel fermé de H .*

Alors on dispose d'un opérateur de projection orthogonale $P_F : H \rightarrow F$ caractérisé par la propriété suivante : pour tout $x \in H$, $P_F(x)$ est l'unique $y \in F$ tel que

$$\forall z \in F, \quad \langle x - y, z \rangle = 0.$$

L'application P_F est un opérateur linéaire continu de H dans F . De plus, le sous-espace $\text{Ker } P_F$ de H coïncide avec le sous-espace F^\perp . On en déduit alors $H = F \oplus F^\perp$. Ainsi, dans un espace de Hilbert, tout sous-espace vectoriel fermé admet un supplémentaire orthogonal qui est fermé.

En particulier, lorsque F est une droite de vecteur directeur u , la projection orthogonale sur F est donnée par

$$\forall x \in H, \quad P_F(x) = \frac{\langle x, u \rangle}{\|u\|^2} u.$$

1.1.2 Transformation de Fourier

Définition 1.1.4 Pour $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in L^1(\mathbb{R})$, sa transformation de Fourier (TF) est définie comme

$$\mathcal{F}f(\omega) = \widehat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(t) \exp(-2i\pi\omega t) dt, \quad (1.2)$$

et sa transformation conjuguée est donnée par

$$\overline{\mathcal{F}}f(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(t) \exp(2i\pi\omega t) dt. \quad (1.3)$$

Définition 1.1.5 (*L'espace $L^1(\mathbb{R})$*)

$$L^1(\mathbb{R}) = \left\{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \text{ mesurables avec } \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty \right\},$$

Définition 1.1.6 (*L'espace $L^2(\mathbb{R})$*)

$$L^2(\mathbb{R}) = \left\{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \text{ mesurables avec } \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt < \infty \right\},$$

avec le produit scalaire $\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{g(t)} dt$.

Définition 1.1.7 (*Base de Riesz*) Une famille $\{e_k\}_{k \in \mathbb{Z}} \subset L^2(\mathbb{R})$ est une base de Riesz de $L^2(\mathbb{R})$ si :

(i) $\forall h \in L^2(\mathbb{R}), \exists ! \alpha \in l^2(\mathbb{Z})$ tel que $h = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k e_k$.

(ii) $\exists 0 < A \leq B < +\infty$ tels que $\forall h \in L^2(\mathbb{R}), A \|\alpha\|_{l^2(\mathbb{Z})} \leq \|h\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq B \|\alpha\|_{l^2(\mathbb{Z})}$ où

$$\|\alpha\|_{l^2(\mathbb{Z})} = \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\alpha_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Définition 1.1.8 (Base hilbertienne) Soit $(e_n)_{n \geq 0}$ une famille dénombrable d'un espace de Hilbert H . On dit que la famille $(e_n)_{n \geq 0}$ est une base hilbertienne si :

- (i) pour tous $n \neq m$ on a $\langle e_n, e_m \rangle = 0$, et $\|e_n\| = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$,
- (ii) l'espace vectoriel $\text{Vect} \{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ des combinaisons linéaires finies des vecteurs e_n , pour $n \in \mathbb{N}$, est dense dans H .

Définition 1.1.9 (Opérateur) :

Soit k une fonction de l'espace $L^2([a, b[\times]a, b[)$, alors l'opérateur A tel que

$$Ay(t) = \int_a^b k(t, s)y(s)ds, \quad t \in]a, b[$$

est bien défini, en tant qu'opérateur dans $L^2([a, b[)$.

Proposition 1.1.2 Soit A un opérateur linéaire borné d'un espace de Banach X dans lui même, avec $\|A\| < 1$ et soit I l'opérateur identique dans X . Alors $(I - A)$ admet un opérateur inverse borné donné par la série de Neumann

$$(I - A)^{-1} = \sum_{k=1}^{\infty} A^k,$$

de plus

$$\|(I - A)^{-1}\| < \frac{1}{1 - \|A\|}.$$

Théorème 1.1.1 Soit A un opérateur linéaire borné d'un espace de Banach X dans lui même, avec $\|A\| < 1$. Soit I l'opérateur identique dans X . Alors pour tout $x \in X$, l'approximation successive donnée par la suite de fonctions

$$y_n \in X, \quad y_n = Ay_{n-1} + x \quad (n \geq 1)$$

converge vers une unique solution y , vérifiant

$$y - Ay = x.$$

1.2 Les équations intégrales

Définition 1.2.1 On appelle équation intégrale une équation fonctionnelle où la fonction inconnue figure sous le signe d'intégration \int .

$$\int_E K(x, t, \varphi(t))dt = h(x)\varphi(x) + f(x), \quad x \in E. \quad (1.4)$$

où E est un espace mesuré, $f(x)$ une fonction mesurable donnée sur E , et K une fonction mesurable sur E^3 appelée noyau de l'équation intégrale, $h(x)$ fonction connue et détermine le type de l'équation intégrale, et φ fonction l'inconnue.

Exemple 1.2.1 soit $a \leq x \leq b$, $a \leq t \leq b$ les équations

$$g(x) = \int_a^b k(x, t)g(t)dt, \quad (1.5)$$

$$g(x) = f(x) + \int_a^b k(x, t)g(t)dt, \quad (1.6)$$

$$g(x) = \int_a^b k(x, t)[g(t)]^2 dt, \quad (1.7)$$

sont des équations intégrales.

Définition 1.2.2 la fonction $k(x, t)$ est le noyau des équations intégrales, on suppose que le noyau $k(x, t)$ est défini dans le carré $\Omega = \{a \leq x \leq b, a \leq t \leq b\}$ du plan (x, t) et continu dans Ω ou bien présente des discontinuités telles que l'intégrale

$$\int_a^b \int_a^b |k(x, t)|^2 dx dt < +\infty.$$

Remarque 1.2.1 :

Si on prend

$$K(x, t, \varphi(t)) = K(x, t)\varphi(t),$$

l'équation (1.4) devient linéaire, est sinon devient équation intégrale non linéaire.

1.2.1 Classification des équation intégrales

a) Équations intégrales linéaires

Définition 1.2.3 une équation intégrale est dite linéaire si la fonction inconnue se présente d'une manière linéaire.

Exemple 1.2.2 les équations (1.5) et (1.6) sont linéaires par contre l'équation (1.7) ne l'est pas.

Définition 1.2.4 (Équation intégrale de Fredholm) :

On appelle équation intégrale de Fredholm une équation, à une inconnue $\varphi(x)$ de la forme

$$h(x)\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)\varphi(t)dt, \quad (1.8)$$

où $f(x)$, $K(x, t)$ sont des fonctions connues et λ est un paramètre non nul, réel ou complexe.

La fonction $h(x)$ détermine le type de l'équation intégrale.

i) Si $h(x) = 0$, l'équation (1.8) s'écrit

$$f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)\varphi(t)dt = 0, \quad (1.9)$$

s'appelle équation intégrale de Fredholm de première espèce.

ii) Si $h(x) = u = \text{constante} \neq 0$, l'équation (1.8) s'écrit

$$u\varphi(x) = f(x) + \int_a^b K(x, t)\varphi(t)dt, \quad (1.10)$$

s'appelle équation intégrale de Fredholm de seconde espèce.

iii) Si $h(x) \neq 0$, donc la formule (1.8) est appelée équation intégrale de Fredholm de troisième espèce.

Remarque 1.2.2 1. Si $f(x) = 0$, l'équation (1.8) est dite homogène.

2. Si $f(x) \neq 0$, l'équation (1.8) est dite non homogène.

Définition 1.2.5 (Équation intégrale de Volterra) :

On appelle équation intégrale linéaire de Volterra, une équation de la forme

$$h(x)\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t)\varphi(t)dt, \quad (1.11)$$

i) On appelle équation intégrale de Volterra de première espèce, si $h(x) = 0$, donc l'équation (1.11) s'écrit

$$f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t)\varphi(t)dt = 0, \quad (1.12)$$

ii) On appelle équation intégrale de Volterra de seconde espèce, si $h(x) = u = \text{constante} \neq 0$, donc l'équation (1.11) s'écrit

$$u\varphi(x) = f(x) + \int_a^x K(x, t)\varphi(t)dt, \quad (1.13)$$

iii) Si $h(x) \neq 0$, donc la formule (1.11) est appelée équation intégrale de Volterra de troisième espèce.

Remarque 1.2.3

1. Si $f(x) = 0$, donc l'équation (1.11) est dite homogène.
2. Si $f(x) \neq 0$, donc l'équation (1.11) est dite non homogène.

Remarque 1.2.4 L'équation intégrale de Volterra est un cas particulier de l'équation intégrale de Fredholm, il suffit de prendre le noyau K vérifie la condition

$$K(x, t) = 0, \quad \text{pour } x < t.$$

Définition 1.2.6 (L'équation intégrale de Wiener-Hopf) : on appelle équation intégrale de Wiener-Hopf une équation de la forme

$$h(x)\varphi(x) + \lambda \int_a^\infty k(x-t)\varphi(t)dt = f(x). \quad (1.14)$$

Définition 1.2.7 (L'équation intégrale de Renwal) : l'équation intégrale de la forme

$$h(x)\varphi(x) + \lambda \int_a^x k(x-t)\varphi(t)dt = f(x), \quad (1.15)$$

est appelée équation intégrale de Renwal.

b) **Équations intégrales non linéaires**

Définition 1.2.8 (Équation intégrale de Fredholm)

- 1- l'équation intégrale non linéaire de Fredholm de première espèce prend la forme

$$f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t, \varphi(t))dt = 0, \quad (1.16)$$

- 2- l'équation intégrale de Fredholm de second espèce est de la forme

$$u\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t, \varphi(t))dt, \quad (1.17)$$

où u est une constante.

- 3- l'équation intégrale de Fredholm de troisième espèce est de la forme

$$h(x)\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t, \varphi(t))dt. \quad (1.18)$$

Définition 1.2.9 (Équation intégrale de Volterra)

- 1- l'équation intégrale non linéaire de Volterra de première espèce prend la forme

$$f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t, \varphi(t))dt = 0, \quad (1.19)$$

2- l'équation intégrale de Volterra de second espèce est de la forme

$$u\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t, \varphi(t))dt, \quad (1.20)$$

3- l'équation intégrale de Volterra de troisième espèce est de la forme

$$h(x)\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t, \varphi(t))dt. \quad (1.21)$$

Remarque 1.2.5 1) si $f(x) = 0$, l'équation est dite homogène.

2) si $f(x) \neq 0$, l'équation est dite non homogène.

Définition 1.2.10 (L'équation intégrale de Hammerstein-Volterra) : on appelle équation intégrale de Hammerstein-Volterra une équation de la forme

$$h(x)\varphi(x) + \lambda \int_a^x K(x, t)F(t, \varphi(t))dt = f(x). \quad (1.22)$$

c) Équations intégrales singulières

Définition 1.2.11 Considérons l'équation intégrale suivante

$$\varphi(x) = f(x) + \int_T M(x, t)K(x, t)\varphi(t)dt, \quad (1.23)$$

On dit que (1.23) est singulière si $K(x, t)$ admet une singularité ou le domaine T n'est pas bornée, et $M(x, t)$ fonction bornée.

Exemple 1.2.3 1) $\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^\infty \sin(xt)\varphi(t)dt$,

2) $f(x) = \int_0^x \frac{H(x, t)}{(x-t)^\alpha} \varphi(t)dt$, où $H(x, t)$ est une fonction bornée.[11]

1) Équation intégrale d'Abel :

Définition 1.2.12 On appelle équation intégrale linéaire d'Abel une équation de la forme

$$\int_a^x \frac{\varphi(t)}{(x-t)^\alpha} dt = f(x), \quad (1.24)$$

où α est une constante, $0 < \alpha < 1$.

2) Singularité de type Volterra et Fredholm :

On considère l'équation intégrale de deuxième espèce de la forme

$$\varphi(x) = f(x) + \int_a^x M(x, t)K(x, t)\varphi(t)dt, \quad a \leq x \leq \infty. \quad (1.25)$$

où $K(x, t)$ est faiblement singulier, en générale :

$$K(x, t) = \begin{cases} |x - t|^{-\alpha}, & 0 < \alpha < 1 \\ \log |x - t| \end{cases}$$

Alors

- i) L'équation (1.25) est de Volterra.
- ii) Si $x = b$, l'équation (1.25) est de Fredholm.
- iii) Le cas où $K(x, t) = |x - t|^{-\alpha}$, $0 < \alpha < 1$ s'appelle singularité algébriques.
- iv) Le cas où $K(x, t) = \log |x - t|$, s'appelle singularité logarithmiques.

Définition 1.2.13 (Équation intégrale de Carleman) :

On appelle équation intégrale de Carleman une équation de la forme

$$a(x) \frac{1}{\pi i} \int_{-1}^1 \frac{\varphi(t)}{t - x} dt + \frac{1}{\pi i} \int_{-1}^1 \frac{b(t)}{t - x} \varphi(t) dt = f(x), \quad (1.26)$$

où a, b et φ sont des fonctions continues.[21]

Définition 1.2.14 (Singularité de type de Cauchy) :

Soit D un domaine bornée et convexe dans un plan complexe, alors l'intégrale de Cauchy donné par la formule

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{\varphi(t)}{t - x} dt = f(x), \quad t \in \mathbb{C}. \quad (1.27)$$

Définition 1.2.15 On appelle équation intégrale de Cauchy une équation de la forme

$$a(x)\varphi(x) + b(x) \int_{\Gamma} \frac{\varphi(t)}{t - x} dt + \int_{\Gamma} K(x, t)\varphi(t) dt = f(x), \quad (1.28)$$

telle que $\Gamma = \partial D$.

1.2.2 Quelques méthodes de résolution les équations intégrales

Méthodes de résolution les équations intégrales linéaires :

- 1) Méthode des approximations successives :

On considère l'équation

$$\varphi = g + \lambda T\varphi, \quad (1.29)$$

Si T un opérateur intégral

$$(T\varphi)(x) = \int_a^b k(x, y)\varphi(y)dy,$$

alors (1.29) est une équation de Fredholm de deuxième espèce (EIFS)

$$\varphi(x) = g(x) + \lambda \int_a^b k(x, y)\varphi(y)dy, \quad (1.30)$$

donc

$$\begin{aligned} (T^2\varphi)(x) &= T\left(\int_a^b k(x, y)\varphi(y)dy\right) \\ &= \int_a^b k(x, z)\left(\int_a^b k(z, y)\varphi(y)dy\right)dz \\ &= \int_a^b \left(\int_a^b k(x, z)k(z, y)dz\right)\varphi(y)dy, \end{aligned}$$

alors, T^2 est un opérateur intégral avec le noyau est

$$\int_a^b k(x, y)k(z, y)dz,$$

de même pour

$$(T^n\varphi)(x) = \int_a^b k_n(x, y)\varphi(y)dy, \quad \text{pour } n \geq 2,$$

où le noyau k_n de l'opérateur T^n est donné par

$$k_n(x, y) = \int_a^b k(x, \xi)k_{n-1}(\xi, y)d\xi, \quad \text{pour } n > 2,$$

on peut écrire aussi le noyau sous la forme

$$k_n(x, y) = \int_a^b \dots \int_a^b k(x, \xi_{n-1})k(\xi_{n-1}, \xi_{n-2})\dots k(\xi, y)d\xi_{n-1}d\xi_{n-2}\dots d\xi,$$

et par conséquent aussi l'équation intégrale (1.30), si $|\lambda|||T|| < 1$ admet une solution unique donnée par la série de Neumann

$$\varphi(x) = g(x) + \lambda \int_a^b \left[\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} k_n(x, y) \right] g(y)dy.$$

2) La méthode des substitutions successives :

Cette méthode est presque analogue à la méthode d'approximation successive, sauf qu'elle concerne la solution de l'équation intégrale sous forme de série par l'évaluation des intégrales simples et multiples. La solution par la procédure

numérique dans cette méthode est énorme par rapport à d'autres techniques.

Nous supposons que

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)u(t)dt, \quad (1.31)$$

En substituant dans le second membre de l'équation (1.31), à la place de $u(t)$, sa valeur, telle que donnée par l'équation elle-même, donne

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)f(t)dt + \lambda^2 \int_a^b K(x, t) \int_a^b K(t, t_1) u(t_1) dt_1 dt,$$

Ici encore, nous substituons à $u(t_1)$ sa valeur comme donnée dans l'équation (1.31). Ainsi, nous obtenons

$$\begin{aligned} u(x) = f(x) &+ \lambda \int_a^b K(x, t)f(t)dt \\ &+ \lambda^2 \int_a^b K(x, t) \int_a^b K(t, t_1) f(t_1) dt_1 dt \\ &+ \lambda^3 \int_a^b K(x, t) \int_a^b K(t, t_1) \int_a^b K(t_1, t_2) u(t_2) dt_2 dt_1 dt, \end{aligned}$$

En procédant de cette manière, nous obtenons

$$\begin{aligned} u(x) = f(x) &+ \lambda \int_a^b K(x, t)f(t)dt \\ &+ \lambda^2 \int_a^b K(x, t) \int_a^b K(t, t_1) f(t_1) dt_1 dt \\ &+ \lambda^3 \int_a^b K(x, t) \int_a^b K(t, t_1) \int_a^b K(t_1, t_2) f(t_2) dt_2 dt_1 dt \\ &+ \dots \end{aligned} \quad (1.32)$$

Nous notons que la solution de série donnée dans l'équation (1.32) converge uniformément dans l'intervalle $[a, b]$ si $\lambda M(b - a) < 1$ où $|K(x, t)| \leq M$. D'après l'équation (1.32), il est absolument clair que dans cette méthode, la fonction inconnue $u(x)$ est remplacée par la fonction donnée $f(x)$ qui rend l'évaluation des intégrales multiples simple et possible.

3) Méthode de Fredholm(méthode de déterminant) :

La solution de l'équation de Fredholm de seconde espèce

$$u(x) - \lambda \int_a^b K(x, t)u(t)dt = f(x), \quad (1.33)$$

est donnée par la formule

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b R(x, t, \lambda)f(t)dt, \quad (1.34)$$

où la fonction $R(x, t, \lambda)$, dite résolvante de Fredholm de l'équation (1.33), est définie par l'égalité

$$R(x, t, \lambda) = \frac{D(x, t, \lambda)}{D(\lambda)}, \quad (1.35)$$

sous la condition $D(\lambda) \neq 0$. Ici $D(x, t, \lambda)$ et $D(\lambda)$ sont séries de puissances de λ :

$$D(x, t, \lambda) = K(x, t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} B_n(x, t) \lambda^n, \quad (1.36)$$

$$D(\lambda) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} C_n \lambda^n, \quad (1.37)$$

avec les coefficients ainsi définis :

$$B_n(x, t) = \underbrace{\int_a^b \dots \int_a^b}_n \begin{vmatrix} k(x, t) & k(x, t_1) & \dots & k(x, t_n) \\ k(t_1, t) & k(t_1, t_1) & \dots & k(t_1, t_n) \\ k(t_2, t) & k(t_2, t_1) & \dots & k(t_2, t_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k(t_n, t) & k(t_n, t_1) & \dots & k(t_n, t_n) \end{vmatrix} dt_1 \dots dt_n, \quad (1.38)$$

et

$$C_n = \underbrace{\int_a^b \dots \int_a^b}_n \begin{vmatrix} k(t_1, t_1) & k(t_1, t_2) & \dots & k(t_1, t_n) \\ k(t_2, t_1) & k(t_2, t_2) & \dots & k(t_2, t_n) \\ k(t_3, t_1) & k(t_3, t_2) & \dots & k(t_3, t_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k(t_n, t_1) & k(t_n, t_2) & \dots & k(t_n, t_n) \end{vmatrix} dt_1 \dots dt_n, \quad (1.39)$$

Les fonctions $D(\lambda)$ et $D(x, t, \lambda)$ sont respectivement le déterminant de Fredholm et le mineur du déterminant de Fredholm. Si le noyau $k(x, t)$ est borné ou si l'intégrale

$$\int_a^b \int_a^b k^2(x, t) dx dt,$$

est finie, les séries (1.36) et (1.37) convergent quel que soit λ et sont donc des fonctions analytiques entières de λ .

La résolvante

$$R(x, t, \lambda) = \frac{D(x, t, \lambda)}{D(\lambda)},$$

est une fonction analytique de λ , sauf les λ qui sont zéros de $D(\lambda)$. Ces derniers sont des pôles de la résolvante $R(x, t, \lambda)$.

Méthodes de résolution des équations intégrales singulières

1) méthode d'approximation

Soit l'équation intégrale de Volterra faiblement singulière du deuxième espèce

$$f(x) = g(x) + \int_0^x \lambda \frac{f(t)}{\sqrt{x-t}} dt, \quad (1.40)$$

où λ est une paramètre constante et le noyau $k(x, t) = \frac{1}{\sqrt{x-t}}$ est un noyau singulier.

La méthode des approximations successives, ou méthode d'itération de Picard fournit un système qui peut être utilisé pour résoudre le problème de valeur initiale ou équation intégrale. Cette méthode permet de résoudre tout problème par trouver des approximations successives à la solution en commençant par une première devinette, appelé le rapprochement de zéro. Comme on le verra, ce rapprochement de zéro est une fonction à valeurs réelles sélective qui sera utilisée dans une relation de récurrence à déterminer les autres approximations.

L'application de cette méthode à l'équation (1.40) présente la relation de récurrence

$$f_{n+1}(x) = g(x) + \int_0^x \frac{\lambda}{\sqrt{x-t}} f_n(t) dt, \quad n \geq 0 \quad (1.41)$$

Nous commençons toujours par une estimation initiale pour $f_0(x)$, la plupart du temps nous sélectionnons 0, 1, x, pour $f_0(x)$, et à l'aide de (1.40), on a les approximations successives f_k , $k \geq 1$

qui seront déterminés comme

$$\begin{aligned} f_1(x) &= g(x) + \int_0^x \frac{\lambda}{\sqrt{x-t}} f_0(t) dt. \\ f_2(x) &= g(x) + \int_0^x \frac{\lambda}{\sqrt{x-t}} f_1(t) dt. \\ f_3(x) &= g(x) + \int_0^x \frac{\lambda}{\sqrt{x-t}} f_2(t) dt. \end{aligned}$$

donc la solution de l'équation (1.40) est donnée par

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_{n+1}(x).$$

2) Méthode de transformation de Laplace

a) Équation intégrale généralisée d'Abel

soit l'équation intégrale généralisée d'Abel de la première espèce

$$g(x) = \int_0^x \frac{1}{(x-t)^\alpha} f(t) dt, \quad \text{où } 0 < \alpha < 1. \quad (1.42)$$

Prenant la transformée de Laplace de deux membres avec l'aide de théorème de convolution, nous obtenons

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{x^{-\alpha}\}\mathcal{L}\{f(x)\} &= \mathcal{L}\{g(x)\} \\ &= \frac{\Gamma(1-\alpha)}{s^{1-\alpha}}\mathcal{L}\{f(x)\} = \mathcal{L}\{g(x)\},\end{aligned}$$

Ainsi, nous avons

$$\mathcal{L}\{f(x)\} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}s \left\{ \frac{1}{s^\alpha}\mathcal{L}\{g(x)\} \right\}, \quad (1.43)$$

Avec

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-x}x^{\alpha-1}dx,$$

En utilisant le théorème de convolution et la transformée inverse de Laplace de l'équation (1.43) nous obtenons

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_0^x(x-t)^{\alpha-1}g(t)dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\left\{\frac{(x-t)^\alpha}{-\alpha}g(t)\Big|_0^x + \frac{1}{\alpha}\int_0^x(x-t)^\alpha g'(t)dt\right\} \\ &= \frac{\sin\pi\alpha}{\pi}\left\{\frac{g(0)}{x^{1-\alpha}} + \int_0^x\frac{g'(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}dt\right\}, \quad \Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin\pi\alpha}.\end{aligned}$$

Ceci est la solution désirée de l'équation intégrale.

b) Équation intégrale de Volterra faiblement singulière

Soit l'équation intégrale de Volterra faiblement singulier du deuxième espèce généralisé

$$f(x) = g(x) + \int_0^x \frac{f(t)}{(x-t)^\alpha}dt, \quad 0 < \alpha < 1 \quad (1.44)$$

le transformation de Laplace de l'équation (1.44) est l'équation

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f(x)\} &= \mathcal{L}\{g(x)\} + \mathcal{L}\{x^{-\alpha}\}\mathcal{L}\{f(x)\}, \\ \mathcal{L}\{f(x)\} &= \mathcal{L}\{g(x)\} + \frac{\Gamma(1-\alpha)}{s^{1-\alpha}}\mathcal{L}\{f(x)\}, \\ \mathcal{L}\{f(x)\} &= \frac{s^{1-\alpha}}{s^{1-\alpha} - \Gamma(1-\alpha)}\mathcal{L}\{g(x)\}, \\ f(x) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^{1-\alpha}}{s^{1-\alpha} - \Gamma(1-\alpha)}\mathcal{L}\{g(x)\}\right\}.\end{aligned}$$

tel que

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt.$$

et

$$\mathcal{L}[f(x)] = \int_0^{+\infty} e^{-sx}f(x)dx.$$

Chapitre 2

Rappel sur la théorie des ondelettes

La notion d' "Ondelettes" ou "Wavelets" a été utilisée pour la première fois au début des années 80 par le géophysicien français J. Morlet [9] pour désigner des fonctions mathématiques utilisées dans la représentation des données sismiques. Utilise les ondelettes pour résoudre des équations intégrales, des équations différentielles intégratrices et des équations intégratrices numériques. Les ondelettes sont des fonctions de base de variation multi-échelles, ou multi-résolutions, utilisées dans le but de l'approximation ou de la compression des données. La théorie des ondelettes n'est pas en fait tout à fait nouvelle, mais le support mathématique, contenu déjà dans les recherches des années 30, a été développé considérablement dans les dernières 20 années, après que ces fonctions ont été utilisés dans le traitement numérique du signal et en particulier dans l'analyse et la compression des images.

2.1 La théorie des ondelettes

2.1.1 Qu'est ce qu'une ondelette

Définition 2.1.1 Une fonction $\psi(x) \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ est une ondelette si elle vérifie la condition d'admissibilité :

$$C_\psi = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\widehat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty,$$

Ce qui implique $\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) dx = 0$ (équivalent si $x\psi$ intégrable).

Définition 2.1.2 Une ondelette $\psi_{a,b}$ est une fonction générée par la translation et la dilatation d'une fonction génératrice, appelée ondelette mère ψ :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \psi_{a,b}(x) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi\left(\frac{x-b}{a}\right),$$

où $a \in \mathbb{R}^{*+}$ et $b \in \mathbb{R}$ sont, respectivement, les coefficients de dilatation (échelle) et de translation dans le temps.

Ondelette mère

Une ondelette mère est une fonction de base que l'on peut traduire et dilater pour recouvrir le plan temps-fréquences et analyser un signal. L'ondelette doit être une fonction de moyenne nulle, en d'autres termes, doit être une onde ! Ce qui s'écrit mathématiquement par :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) dt = 0, \quad (2.1)$$

Cette condition est dite de régularité ou de moment d'ordre nul.

2.1.2 Propriétés des ondelettes

Les ondelettes sont des fonctions qui peuvent être caractérisées par certaines propriétés remarquables, ces dernières pouvant être incompatibles entre elles, cela implique des choix à faire suivant l'application souhaitée. Nous donnons des propriétés usuelles ainsi que des exemples d'ondelettes.

- **Décroissance rapide** : une ondelette sera dite à décroissance rapide si

$$\forall m \in \mathbb{N}, \exists C_m > 0 / \forall t \in \mathbb{R}, |\psi(t)| \leq \frac{C_m}{1 + |t|^m}.$$

- **Orthogonalité** : une ondelette ψ est dite orthogonale si pour tout $(j, j', n, n') \in \mathbb{Z}^4$:

$$\langle \psi_{jn}, \psi_{j'n'} \rangle = \delta_{jj'} \delta_{nn'}, \quad (\delta_{jj'} = 0 \text{ si } j \neq j', \delta_{jj'} = 1).$$

- **Nombre de moments nuls** : Les ondelettes orthogonales doivent avoir un nombre de moments nuls, pour $n \in \mathbb{N}$, Une ondelette admet n moments nuls si

$$\forall k = 0, \dots, n-1, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} t^k \psi(t) dt = 0.$$

- **Support compact** : Autant l'ondelette a moins de moments nuls autant son support est compact, et une analyse plus exacte des hautes fréquences est possible.

2.1.3 Exemples d'ondelettes

- **L'ondelette de Morlet** (complexe) : $\psi(x) = e^{-\pi x^2} e^{10i\pi x}$

On a $\hat{\psi}(\nu) = e^{-\pi(\nu-5)^2}$.

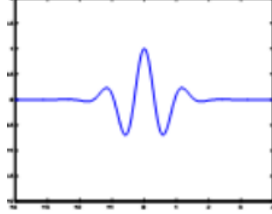


FIGURE 2.1 – Ondelette de Morlet

- **Les dérivées de la Gaussienne** : $\psi_n(x) = \frac{d^n}{dx^n} e^{-\pi x^2}$, $n \geq 1$. (pour $n = 2$, l'ondelette est appelée **chapeau mexicain**).

On a $\hat{\psi}_n(\nu) = (2i\pi\nu)^n e^{-\pi\nu^2}$.

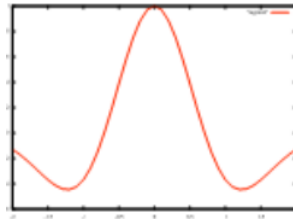


FIGURE 2.2 – Chapeau mexicain

2.1.4 Transformée en ondelettes continue(TOC)

La transformée en ondelettes continue utilise des translations et des dilatations de la fonction ondelette mère durant tout l'intervalle du temps de manière continue.

La transformée en ondelettes de $f \in L^2(\mathbb{R})$ peut être définie comme

$$T_\psi f(a, b) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int_{\mathbb{R}} f(t) \bar{\psi} \left(\frac{t-b}{a} \right) dt = \langle f, \psi_{a,b} \rangle,$$

où $\bar{\psi}(t)$ complexe conjugué de $\psi(t)$.

$T_\psi f(a, b)$ est appelée la transformée en ondelettes de f dans $L^2(\mathbb{R})$.

La transformée en ondelettes inverse peut être définie [6], par la formule

$$f(t) = C_\omega^{-1} \int_{\mathbb{R}^*} \int_{\mathbb{R}} T_\psi f(a, b) \psi_{a,b} (a^{-2}) da db,$$

où $C_\omega = 2\pi \int_{\mathbb{R}} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty$ et $\hat{\psi}(\omega)$ est la transformée de Fourier de $\psi(t)$ [19].

Condition d'admissibilité d'une ondelette

Une fonction $\psi(x) \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ est appelée ondelette mère analysante si elle vérifie la condition d'admissibilité :

$$C_\psi = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\widehat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\nu < \infty, \quad (2.2)$$

Cette condition étant relativement souple, un grand nombre de fonctions ψ peut servir d'ondelette mère. Nous imposons, généralement, d'autres conditions telles que la régularité, la décroissance rapide ou la compacité du support de ψ .

Remarque 2.1.1 *Si la fonction ψ vérifie la condition d'admissibilité (2.2), alors elle vérifie celle dite de régularité (2.1). (Nous avons équivalence si ψ est intégrable).*

2.1.5 Transformée en ondelettes discrètes (TOD)

La transformée en ondelettes discrète (translate et dilate), selon des valeurs discrètes. Ces coefficients a et b seront discrétisés de la manière suivante :

$$a = a_0^m \text{ et } b = nb_0 a_0^m \text{ avec } a_0^m > 1 \text{ et } b_0 > 0 \text{ fixés et appartenants à } \mathbb{Z}$$

Les ondelettes sont alors définies de la manière suivante :

$$\psi_{a_0, b_0} = \frac{1}{\sqrt{a_0^m}} \psi \left(\frac{t - nb_0 a_0^m}{a_0^m} \right),$$

Pour $f \in L^2(\mathbb{R})$, on définit la transformée discrète en ondelettes de la fonction f par :

$$T_\psi f(a_0, b_0) = \frac{1}{\sqrt{a_0^m}} \int_{\mathbb{R}} f(t) \overline{\psi} \left(\frac{t - nb_0 a_0^m}{a_0^m} \right) dt,$$

Tel que :

a_0^m Facteur d'échelle.

b_0 Facteur de translation.

n et m des entiers.

La famille des ondelettes discrètes peut être obtenue en limitant les valeurs de a et b à des valeurs discrètes. Mettre $a = 2^{-j}$, $b = k2^{-j}$, j, k sont des entiers arbitraires, on obtient une famille d'ondelettes discrètes $\psi_{j,k}(t)$ définis par

$$\psi_{j,k}(t) = 2^{j/2} \psi(2^j t - k),$$

Les ondelettes $\psi_{j,k}(t)$ forment une base orthonormale dans l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R})$ et $\psi(t)$ est appelé ondelette mère [23], [5].

2.2 Analyse multirésolution (AMR)

L'analyse multirésolutions, introduite par Meyer et Mallat, est un outil de traitement du signal qui permet de décomposer un signal à plusieurs échelles (résolutions) et de le reconstruire à partir des éléments de cette décomposition. Une analyse multirésolution est un partitionnement de l'espace des fonctions d'énergie finie $L^2(\mathbb{R})$ par une famille de sous-espaces vectoriels V_j emboîtés les uns dans les autres tels que le passage de l'un à l'autre soit le résultat d'un changement d'échelle. Ces sous-espaces sont appelés des espaces d'approximation à l'échelle j ($j \in \mathbb{Z}$) et vérifient les conditions de la définition 2.2.2.

Définition 2.2.1 Soit φ une fonction de $L^2(\mathbb{R})$. On pose $\varphi_{j,k}(t) = 2^{\frac{j}{2}}\varphi(2^j t - k)$, $j \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{Z}$.

On définit les espaces $V_0 = \left\{ f(t) = \sum_k c_k \varphi(t - k), \sum_k |c_k|^2 < \infty \right\}$,
 et pour $j \in \mathbb{Z}$, $V_j = \{h(t) = f(2^j t), f \in V_0\}$.

On suppose que $(\varphi_{0,k})_{k \in \mathbb{Z}} = (\varphi(\cdot - k))_{k \in \mathbb{Z}}$, $k \in \mathbb{Z}$ est une famille orthonormale. Dans ce cas.

pour tout $j \in \mathbb{Z}$, $(\varphi_{j,k})_{k \in \mathbb{Z}}$ est une base orthonormale de V_j . On dit alors que φ engendre la suite $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$.

Définition 2.2.2 (AMR [16]) Une analyse multirésolution de $L^2(\mathbb{R})$ est une suite de sous-espaces fermés $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ (espaces d'approximation) vérifiant les propriétés suivantes :

1. $\forall (j, k) \in \mathbb{Z}^2, f(t) \in V_j \Leftrightarrow f(2^{-j}t - k) \in V_0$.
2. $\forall j \in \mathbb{Z}, V_{j-1} \subset V_j$ donc $\dots \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset \dots \subset L^2(\mathbb{R})$.
3. $\forall j \in \mathbb{Z}, f(t) \in V_j \Leftrightarrow f(2t) \in V_{j+1}$.
4. $\lim_{j \rightarrow -\infty} V_j = \bigcap_{-\infty}^{+\infty} V_j = \{0\}$ et $\lim_{j \rightarrow +\infty} V_j = \bigcup_{-\infty}^{+\infty} V_j = L^2(\mathbb{R})$.
5. Il existe $\varphi \in V_0$ telle que la suite $\{\varphi(x - k), k \in \mathbb{Z}\}$, forme une base de Riesz de V_0 (cette fonction φ est appelée fonction d'échelle de l'AMR).

Les espaces V_j sont appelés espace d'approximation. L'approximation multirésolution de f à la résolution 2^{-j} est définie comme sa projection orthogonale sur l'espace V_j .

Quelques éclaircissements à propos de ces propriétés s'imposent :

- La première propriété signifie que V_j est invariant par toute translation proportionnelle à l'échelle 2^j .
- La seconde caractérise le changement d'échelle d'un sous-espace emboîté à un autre : l'espace V_{j+1} contient des signaux plus grossiers que l'espace V_j .
- La troisième propriété garantit que la dilatation par 2 d'une fonction f de V_j (donc le grossissement par deux des détails) définit une approximation de cette fonction à l'échelle plus grossière 2^{-j+1} .
- La quatrième propriété montre que si $j \rightarrow -\infty$ (de plus en plus grossier), alors nous perdons toutes les informations nécessaires à la reconstitution du signal f et inversement si $j \rightarrow +\infty$ alors la convergence vers f est assurée.
- La cinquième définit l'existence d'une fonction φ qui permet d'approximer toute fonction f de V_0 de manière discrète et unique : $\{\varphi(x - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ forment une base orthonormale de V_0 .

Toutes les propriétés énoncées ci-dessus caractérisent l'analyse multirésolution dyadique (on utilise un facteur 2 lors d'un passage d'un sous-espace à un autre).

Les ondelettes apparaissent naturellement comme un moyen d'écrire la différence entre deux espaces V_j et V_{j+1} consécutifs. On construit pour cela un espace de Riesz W_0 tel que :

$$V_0 \oplus W_0 = V_1, \quad (2.3)$$

L'espace W_0 est engendré par une fonction ψ :

$$W_0 = \left\{ t \mapsto \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \psi(t - k) : a_k \in \mathbb{R} \right\}.$$

2.3 Décomposition en ondelettes orthogonales

2.3.1 Les bases d'ondelettes

La relation (2.3) se transpose à toutes les échelles j :

$$V_j \oplus W_j = V_{j+1},$$

et on obtient par itérations de cette relation :

$$V_j \oplus W_j \oplus \cdots \oplus W_{j'-1} = V_{j'}, \quad \text{si } j < j',$$

En faisant tendre j' vers $+\infty$ (et éventuellement j vers $-\infty$), on obtient deux relations :

$$L^2(\mathbb{R}) = V_j \oplus \overline{\bigoplus_{j'=j}^{+\infty} W_{j'}}, \quad \text{quel que soit } j \in \mathbb{Z},$$

$$L^2(\mathbb{R}) = \overline{\bigoplus_{j'=-\infty}^{+\infty} W_{j'}}.$$

La réunion des bases de Riesz de chacun des espaces de ces sommes directes fournit ainsi plusieurs bases d'ondelettes :

$$\mathcal{B}_j = \{\varphi_{j,k} : k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\psi_{j',k} : j' \geq j, k \in \mathbb{Z}\},$$

$$\mathcal{B} = \{\psi_{j,k} : j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}\}.$$

Théorème 2.3.1 (Bases orthonormées d'ondelettes) *Soit AMR une analyse multirésolution de $L^2(\mathbb{R})$. A partir de (définition 2.2.2 (5)) on peut construire une fonction d'échelle φ puis une ondelette ψ telles que : $\forall j \in \mathbb{Z}, \left\{ \{\varphi_{j,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}, \{\psi_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}, j \geq j} \right\}$ est une base orthonormée de $L^2(\mathbb{R})$ et $\{\psi_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ est une base orthonormée d'ondelettes de $L^2(\mathbb{R})$.*

Preuve. À partir de g et donc de $\{g(t-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$, on construit une fonction telle que $\{\varphi(t-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ soit une base orthonormée de V_0 ,

- on déduit que $\{\varphi_{j,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ est une base orthonormée de V_j ,
- à partir de φ , on construit une fonction ψ telle que $\{\psi(t-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ soit une base orthonormée de W_0 ,
- on déduit que $\{\psi_{j,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ est une base orthonormée de W_j ,
- on conclut que $\{\psi_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ est une base orthonormée de L^2 .

□

2.3.2 Transformée en ondelettes

La transformée en ondelettes s'applique à des signaux échantillonnés sur une grille discrète, et en général cet échantillonnage consiste à approcher une fonction de $L^2(\mathbb{R})$ par

$$f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{j/2} f[k/2^j] \phi_{jk},$$

où l'échantillon $f[k/2^j]$ peut lui aussi être estimé par :

$$f[k/2^j] \simeq f(k/2^j),$$

Le signal dont on part est donc représenté sur une base de Riesz de V_j . Appliquer à ce signal une transformation en ondelettes jusqu'à l'échelle $L \in \mathbb{Z}$ revient à représenter ce signal sur une base adaptée à la somme directe :

$$V_L \oplus W_L \oplus W_{L+1} \oplus \cdots \oplus W_{j-1}.$$

L'algorithme de transformation est itératif et consiste à remplacer la représentation d'une composante sur $V_{j'}$ par une représentation sur $V_{j'-1} \oplus W_{j'-1}$. On passe ainsi successivement par des décompositions adaptées aux différentes sommes directes suivantes :

$$\begin{aligned} & V_{j-1} \oplus W_{j-1} \\ & V_{j-2} \oplus W_{j-2} \oplus W_{j-1} \\ & \vdots \\ & V_L \oplus W_L \oplus W_{L+1} \oplus \cdots \oplus W_{j-1} \end{aligned}$$

2.4 L'ondelette de Haar sur l'intervalle $[0,1]$

2.4.1 Ondelettes de Haar sur $L^2(\mathbb{R})$

Le mathématicien hongrois Alfred Haar a introduit une fonction en 1909 dans sa thèse de doctorat

Définition 2.4.1 (*fonction de Haar*) :

Une fonction définie sur la droite réelle \mathbb{R} , comme

$$\psi(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < \frac{1}{2}, \\ -1 & \frac{1}{2} \leq t < 1, \\ 0 & \text{si non.} \end{cases}$$

est connue la fonction de Haar.

La fonction de Haar $\psi(t)$ est l'exemple simple d'une ondelette de Haar. La fonction de Haar $\psi(t)$ est une ondelette car elle remplit toutes les conditions d'ondelettes.

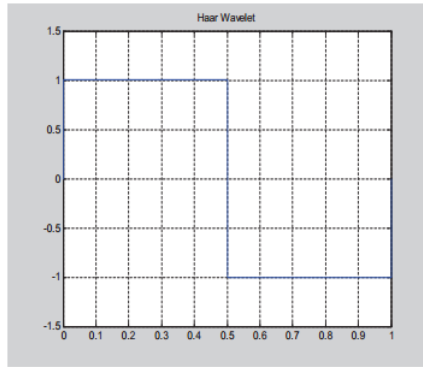


FIGURE 2.3 – Fonction de Haar

Exemple 2.4.1 (Ondelettes de Haar)

L'ondelette de Haar est l'un des exemples classique défini par

$$\psi(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < \frac{1}{2}, \\ -1 & \frac{1}{2} \leq t < 1, \\ 0 & \text{si non.} \end{cases}$$

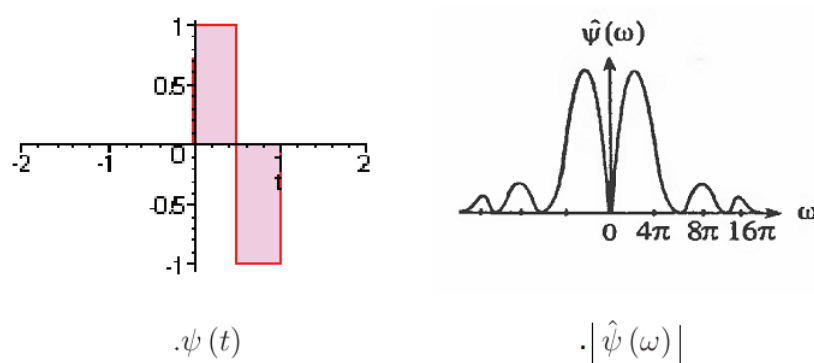
L'ondelette de Haar à support compact, et clairement $\int_{\mathbb{R}} \psi(t) dt = 0$, et $\psi \in L^2(\mathbb{R})$, mais ce n'est pas une ondelette continue, sa transformée de Fourier est donnée par

$$\hat{\psi}(\omega) = ie^{-\frac{i}{2}\omega} \frac{\sin^2\left(\frac{\omega}{4}\right)}{\left(\frac{\omega}{4}\right)},$$

où

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega = 16 \int_{\mathbb{R}} |\omega|^{-3} \left| \sin\left(\frac{\omega}{4}\right) \right|^4 d\omega < \infty.$$

Les deux fonctions ψ et $\hat{\psi}$ représenté par les graphes suivants

FIGURE 2.4 – Les graphiques de $\psi(t)$ et $|\hat{\psi}(\omega)|$

Intervalles Dyadiques :

Soit $j, k \in \mathbb{Z}$, on appelle intervalle dyadique, toute intervalle semi-ouvert :

$$I_{j,k} = [k2^{-j}, (k+1)2^{-j}).$$

2.4.2 Le système de Haar

1- La fonction d'échelle Haar :

La fonction d'échelle Haar (une ondelette père) peut être écrite comme

$$\varphi(t) = \begin{cases} 1 & t \in [0, 1[, \\ 0 & \text{sinon .} \end{cases}$$

Définition 2.4.2 $\left\{ \varphi_{j,k}(t) = 2^{\frac{j}{2}} \varphi(2^j t - k) \right\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ est appelé le système des fonctions d'échelle Haar.

2- La fonction de Haar ondelettes :

Définition 2.4.3 La fonction de Haar (une ondelette mère) peut être écrite comme

$$\psi(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < \frac{1}{2}, \\ -1 & \frac{1}{2} \leq t < 1, \\ 0 & \text{si non .} \end{cases}$$

$\left\{ \psi_{j,k}(t) = 2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j t - k) \right\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ est appelé le système de Haar sur \mathbb{R} .

Remarque 2.4.1 Il existe une relation (mathématique) entre les ondelettes père et mère :

$$\psi(t) = \varphi(2t) - \varphi(2t - 1).$$

2.4.3 Orthogonalité du système de Haar

Théorème 2.4.1 Le système de Haar $\{\psi_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ est un système orthonormal complet sur \mathbb{R} Nous avons le produit scalaire

$$\langle \psi_{j,k}, \psi_{j_1,k_1} \rangle = \int_{\mathbb{R}} \psi_{j,k}(t) \psi_{j_1,k_1}(t) dt.$$

2.4.4 Le système de Haar sur $[0,1]$

Nous travaillerons dorénavant dans l'espace $L^2([0, 1])$

On pose $I = [0, 1[$ et on décompose I en développement diadique en considérant pour $j \in \mathbb{N}$ et $0 \leq k \leq 2^j - 1$, les intervalles

$$I_{j,k} = \left[\frac{k}{2^j}, \frac{k+1}{2^j} \right[, \quad (2.4)$$

Ainsi on obtient l'union disjointe

$$I = [0, 1[= \bigsqcup_{k=0}^{2^j-1} \left[\frac{k}{2^j}, \frac{k+1}{2^j} \right[= \bigsqcup_{k=0}^{2^j-1} I_{j,k}, \quad (2.5)$$

Avec cette décomposition, on peut considérer les fonctions

$$\varphi_{j,k}(t) = 2^{\frac{j}{2}} \varphi(2^j t - k), \quad j \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq k \leq 2^j - 1. \quad (2.6)$$

et

$$\varphi(t) = \mathbf{1}_{t \in [0,1]} = \begin{cases} 1 & t \in [0, 1[, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.7)$$

Notons :

V_0 le sous-espace vectoriel de $L^2([0, 1])$ engendré par les fonctions constantes sur $[0, 1[$.

V_1 l'espace vectoriel des fonctions constantes par morceaux sur les intervalles $[0, 1/2[$ et $[1/2, 1]$.

V_j l'espace vectoriel des fonctions constantes par morceaux sur les intervalles $I_{j,k} = \left[\frac{k}{2^j}, \frac{k+1}{2^j} \right[$, $0 \leq k \leq 2^j - 1$.

Théorème 2.4.2 *Il est évident que la famille $\{\varphi_{j,k}, 0 \leq k \leq 2^j - 1\}$ est un système libre donc elle forme une base sur l'espace qu'elles engendrent, qu'on notera par la suite $V_j \in L^2([0, 1])$ Nous pouvons vérifier que cette base est orthonormée.*

Preuve. Vérifions les deux propriétés d'une base.

$$\begin{aligned} \|\varphi_{j,k}(t)\|_{L^2([0,1])}^2 &= \int_I |\varphi_{j,k}(t)|^2 dt = \int_{I_{j,k}} \left[2^{\frac{j}{2}} \varphi(2^j t - k) \right]^2 dt \\ &= \int_{\frac{k}{2^j}}^{\frac{k+1}{2^j}} 2^j dt = 2^j \left[\frac{k+1}{2^j} - \frac{k}{2^j} \right] = 1, \end{aligned}$$

Alors,

$$\|\varphi_{j,k}(t)\|_{L^2([0,1])} = 1,$$

Si $k \neq k_1$ et $k, k_1 = 0, 1, \dots, 2^j - 1$ alors

$$\langle \psi_{j,k}, \psi_{j,k_1} \rangle = \int_0^1 2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j t - k) 2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j t - k_1) dt = 0,$$

car $I_{j,k} \cap I_{j,k_1} = \emptyset$. □

• **Des bases d'ondelettes de Haar dans l'espace $L^2([0, 1])$.**

On a vu que $V_j \subset V_{j+1}$. Cette inclusion est stricte, on peut donc considérer W_j , le supplémentaire orthogonal de V_j dans V_{j+1} , c'est-à-dire : $V_{j+1} = V_j \oplus W_j$. On a alors

$$V_j = V_0 \oplus \left(\bigoplus_{n=0}^{j-1} W_n \right). \quad (2.8)$$

Comme $\dim(V_{n+1}) = 2^{n+1}$, on a que $\dim(W_n) = 2^n = \dim(V_n)$. On définit maintenant des fonctions de $\psi_{j,k}$ telles que

Pour $j \geq 0$ et $0 \leq k \leq 2^j - 1$, on pose

$$\begin{aligned} \psi_{j,k}(t) &= 2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j t - k), \\ &= \begin{cases} 2^{\frac{j}{2}} & \text{si } t \in \left[\frac{k}{2^j}, \frac{k+\frac{1}{2}}{2^j} \right[, \\ -2^{\frac{j}{2}} & \text{si } t \in \left[\frac{k+\frac{1}{2}}{2^j}, \frac{k+1}{2^j} \right[. \end{cases} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} [\varphi_{j+1,2k}(t) - \varphi_{j+1,2k+1}(t)]. \end{aligned}$$

où

$$\psi(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < \frac{1}{2}, \\ -1 & \frac{1}{2} \leq t < 1, \\ 0 & \text{si non.} \end{cases} \quad \text{et } \varphi(t) = \begin{cases} 1 & t \in [0, 1[, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Théorème 2.4.3 *La famille $\{\varphi_{0,0}, \psi_{j,k} / j \geq 0, 0 \leq k \leq 2^j - 1\}$ est une base hilbertienne de $L^2([0, 1])$, appelée base de Haar*

Verifions les deux propriétés d'orthonormalité.

Preuve. On sait déjà que $\varphi_{0,0}$ est de norme 1. Pour $k = 1, \dots, 2^j - 1$ on a :

$$\begin{aligned} \|\psi_{j,k}(t)\|_{L^2([0,1])}^2 &= \int_I |\psi_{j,k}(t)|^2 dt = \frac{1}{2} \int_I |\varphi_{j+1,2k}(t) - \varphi_{j+1,2k+1}(t)|^2 dt \\ &= \frac{1}{2} \left[\int_I (|\varphi_{j+1,2k}(t)|^2 - 2\varphi_{j+1,2k}(t)\varphi_{j+1,2k+1}(t) + |\varphi_{j+1,2k+1}(t)|^2) dt \right] \\ &= \frac{1}{2}(1 - 0 + 1) = 1, \end{aligned}$$

Alors,

$$\|\psi_{j,k}(t)\|_{L^2([0,1])}^2 = 1,$$

Pour $k \neq k_1$ et $k, k_1 = 1, \dots, 2^j - 1$ alors

$$\begin{aligned} \langle \psi_{j,k}, \psi_{j,k_1} \rangle &= \int_{I_{j,k}} \psi_{j,k}(t) \psi_{j,k_1}(t) dt = \int_I 2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j t - k) 2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j t - k_1) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_I |\varphi_{j+1,2k}(t) - \varphi_{j+1,2k+1}(t)| |\varphi_{j+1,2k_1}(t) - \varphi_{j+1,2k_1+1}(t)| dt \\ &= \frac{1}{2} \int_I (\varphi_{j+1,2k}(t) \varphi_{j+1,2k_1}(t) + \varphi_{j+1,2k+1}(t) \varphi_{j+1,2k_1+1}(t) \\ &\quad - \varphi_{j+1,2k}(t) \varphi_{j+1,2k_1+1}(t) - \varphi_{j+1,2k+1}(t) \varphi_{j+1,2k_1}(t)) dt = 0, \end{aligned}$$

De plus pour $k = 0, \dots, 2^j - 1$ on a :

$$\begin{aligned} \langle \varphi_{0,0}, \psi_{j,k_1} \rangle &= \int_I \varphi_{0,0}(t) \psi_{j,k_1}(t) dt = \int_I \varphi_{0,0}(t) 2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j t - k_1) dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_I \varphi_{0,0}(t) [\varphi_{j+1,2k_1}(t) - \varphi_{j+1,2k_1+1}(t)] dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\int_{\frac{k}{2^j}}^{\frac{k+1}{2^j}} 2^{\frac{j+1}{2}} dt - \int_{\frac{k+\frac{1}{2}}{2^j}}^{\frac{k+1}{2^j}} 2^{\frac{j+1}{2}} dt \right] = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[2^{\frac{j+1}{2}} \left(\frac{1}{2^{j+1}} \right) - 2^{\frac{j+1}{2}} \left(\frac{1}{2^{j+1}} \right) \right] = 0. \end{aligned}$$

□

• Approximation par ondelettes de Haar

Décomposition d'une fonction 1D :

On a la famille $\{\varphi_{0,0}, \psi_{j,k} / j \geq 0, 0 \leq k \leq 2^j - 1\}$ est une base Hilbertienne de $L^2([0, 1])$, appelée base de Haar. Alors la décomposition d'une fonction $f \in L^2([0, 1])$ s'écrit

$$f(t) = a_0 \varphi_{0,0}(t) + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{2^j-1} b_{j,k} \psi_{j,k}(t), \quad (2.9)$$

avec

$$a_0 = \langle f, \varphi_{0,0} \rangle = \int_0^1 f(t) dt, \quad \text{et} \quad b_{j,k} = \langle f, \psi_{j,k} \rangle = \int_0^1 f(t) \psi_{j,k}(t) dt. \quad (2.10)$$

Théorème 2.4.4 Soit g une fonction de $L^2([0, 1])$, la somme partielle de la série Haar

est $g_m(t) = a_0 \varphi_{0,0}(t) + \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} b_{j,k} \psi_{j,k}(t)$, pour $j = m \in \mathbb{N}$ fixe. Ensuite, l'erreur de l'approximation $L^2(0, 1)$ est $0 \left(2^{-\frac{m}{2}} \right)$.

Preuve. L'erreur de l'approximation dans $L^2([0,1])$ est

$$\begin{aligned} \|f - g\|_{L^2([0,1])} &= \left\| f - a_0 \varphi_{0,0}(t) + \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} b_{j,k} \psi_{j,k}(t) \right\|_{L^2([0,1])} \\ &= \left\| \sum_{r=m}^{\infty} \sum_{k=0}^{2^r-1} b_{r,k} \psi_{r,k}(t) \right\|_{L^2([0,1])} \leq \left(\sum_{r=m}^{\infty} \sum_{k=0}^{2^r-1} |a_r|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\sim \left(\sum_{r=m}^{\infty} 2^{-r} \right)^{\frac{1}{2}} \sim 2^{-\frac{m}{2}} \sim \frac{1}{\sqrt{2^m}} = O\left(2^{-\frac{m}{2}}\right), \end{aligned}$$

donc

$$\|f - g\|_{L^2([0,1])} \sim \sum_{r=N}^{\infty} 2^{-\frac{r}{2}} \sim 2^{-\frac{m}{2}} = O\left(2^{-\frac{m}{2}}\right).$$

□

Chapitre 3

Applications

Pour la solution numérique des équations intégrales linéaires, on utilise des méthodes traditionnelles de formule de quadrature et des approximations de courbe. Dans le cas de ces méthodes, les systèmes d'équations linéaires doivent être résolus. Pour les grandes matrices, cela nécessite un grand nombre d'opérations arithmétiques et une grande capacité de stockage. Beaucoup de temps de calcul est économisé si nous réussissons à remplacer la matrice de transformation entièrement remplie par une matrice clairsemée. Une possibilité pour cela donne la méthode de ondelette, les bases de ondelette conduisent à une représentation de matrice clairsemée depuis

- (i) les fonctions de base sont habituellement orthogonales,
- (ii) la plupart des fonctions ont un petit intervalle de support.

L'objectif principal de cette application est de proposer pour la solution numérique des équations intégrales une méthode simple basée sur les ondelettes Haar. La technologie recommandée est applicable avec des changements mineurs à Fredholm et les équations intégrales singulières peuvent être traitées de la même manière. La méthode est testée à l'aide de deux types numériques pour lesquels la solution exacte est connue. Les estimations d'erreurs montrent que la précision des calculs est très élevée même lorsque le nombre de modes est petit.

3.1 Méthode d'ondelette de Haar

On considère l'intervalle de temps $t \in [0, 1]$. La famille des ondelettes Haar est

$$h_i(t) = \begin{cases} 1 & \text{pour } t \in [\tau_1, \tau_2), \\ -1 & \text{pour } t \in [\tau_2, \tau_3), \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases} \quad (3.1)$$

Ici les notations

$$\tau_1 = \frac{k}{m}, \quad \tau_2 = \frac{k + 0.5}{m}, \quad \tau_3 = \frac{k + 1}{m}. \quad (3.2)$$

sont introduits. L'entier $m = 2^j$, $j = 0, 1, \dots, J$, indique le niveau du ondelette, $k = 0, 1, \dots, m - 1$ est le paramètre de translation. L'entier J détermine le niveau maximal de résolution. L'indice i est calculé à partir de la formule $i = m + k + 1$, la valeur minimale pour laquelle (3.1) tient est $i = 2$ (alors $m = 1$, $k = 0$), la valeur maximale est $i = 2M$ où $M = 2^J$. L'index $i = 1$ correspond à la fonction de mise à l'échelle du Haar wavelet $h_1(t) \equiv 1$.

Des calculs simples montrent que

$$\int_0^1 h_i(t)h_l(t)dt = \begin{cases} 1/m & \text{pour } i = l, \\ 0 & \text{pour } i \neq l. \end{cases} \quad (3.3)$$

par conséquent, les fonctions $h_i(t)$ sont orthogonales.

Ensuite, nous discrétisons les fonctions $h_i(t)$ en divisant l'intervalle $t \in [0, 1]$ en $2M$ parties de longueur égale $\Delta t = 1/(2M)$ et introduisons les points de colocalisation

$$t_l = (l - 0.5)/(2M), \quad l = 1, 2, \dots, 2M. \quad (3.4)$$

D'après [2], [3], on introduit la matrice des coefficients $H_{il} = h_i(t_l)$ (c'est une matrice $2M \times 2M$). Une fonction $u(t)$ qui est définie dans l'intervalle $t \in [0, 1]$ peut être étendue dans la série d'ondelette de Haar :

$$u(t) = \sum_{i=1}^{2M} a_i h_i(t), \quad (3.5)$$

où a_i sont les coefficients d'ondelettes. La forme discrète de cette équation est

$$u(t_l) = \sum_{i=1}^{2M} a_i h_i(t_l) = \sum_{i=1}^{2M} a_i H_{il},$$

ou dans une présentation matricielle $u = aH$ où u et a sont des vecteurs de rangée dimensionnels de $2M$.

3.2 Équations intégrales de Fredholm

Une équation intégrale de Fredholm linéaire a la forme

$$u^*(x^*) - \int_{\alpha}^{\beta} K^*(x^*, t^*) u^*(t^*) dt^* = f^*(x^*), \quad x^* \in [\alpha, \beta],$$

où le noyau K^* et la fonction de droite f^* sont prescrits. Puisque les ondelettes de Haar sont définis seulement pour $t \in [0, 1]$, la transformation

$$t^* = (\beta - \alpha)t + \alpha, \quad x^* = (\beta - \alpha)x + \alpha, \quad (3.6)$$

doit être accompli. En faisant cela, nous trouvons

$$u(x) - \int_0^1 K(x, t)u(t)dt = f(x), \quad x \in [0, 1], \quad (3.7)$$

où $u(t) = u^*(t^*)$, $u(x) = u^*(x^*)$, $f(x) = f^*(x^*)$, $K(x, t) = (\beta - \alpha)K^*(x^*, t^*)$.

La formule (3.6) n'est applicable que si α et β sont finis (les cas $\alpha \rightarrow -\infty$ ou $\beta \rightarrow \infty$ ne sont pas considérés dans ce mémoire).

Remplacement (3.5) en (3.7) nous trouvons

$$\sum_{i=1}^{2M} a_i h_i(x) - \sum_{i=1}^{2M} a_i G_i(x) = f(x), \quad (3.8)$$

où

$$G_i(x) = \int_0^1 K(x, t)h_i(t)dt. \quad (3.9)$$

Ensuite, nous allons évaluer les coefficients d'ondelettes a_i de deux manières :

(i) Méthode de collocation. Satisfaisant (3.8) seulement aux points de collocalisation (3.4) pouvons obtenir un système d'équations linéaires

$$\sum_{i=1}^{2M} a_i [h_i(x_l) - G_i(x_l)] = f(x_l), \quad l = 1, 2, \dots, 2M. \quad (3.10)$$

La forme matricielle de ce système est

$$a(H - G) = F, \quad (3.11)$$

où

$$F = \{f(x_l)\}, \quad G = \{G_i(x_l)\}.$$

(ii) **Méthode de Galerkin.** Pour réaliser cette approche, chaque terme de (3.8) est multiplié par $h_l(x)$ et le résultat est intégré sur $x \in [0, 1]$. En raison de l'orthogonalité condition (3.3) on obtient

$$\frac{a_l}{m_1} - \sum_{i=1}^{2M} a_i \Gamma_{il} = \int_0^1 f(x) h_l(x) dx, \quad (3.12)$$

Ici $l = m_1 + k_1 + 1$, $m_1 = 2^{j_1}$, $j_1 = 0, 1, \dots, J$, $k_1 = 0, 1, \dots, m_1 - 1$ et

$$\Gamma_{il} = \int_0^1 G_i(x) h_l(x) dx. \quad (3.13)$$

3.3 Système linéaire d'équations intégrales de Fredholm

Considérez le système d'équation intégrale de Fredholm linéaire suivant :

$$u_r(x) - \sum_{s=1}^n \int_0^1 k_{rs}(x, t) u_s(t) dt = f_r(x), \quad r = 1, 2, \dots, n \quad (3.14)$$

où $f_r \in L^2[0, 1]$, $k_{rs} \in L^2([0, 1] \times [0, 1])$ pour $r, s = 1, 2, \dots, n$ et u_r sont des fonctions inconnues.[7]

nous pouvons écrire comme suivant :

$$U(x) - \int_0^1 K(x, t) U(t) dt = F(x), \quad (3.15)$$

$$\text{où } U(x) = \begin{bmatrix} u_1(x) \\ u_2(x) \\ \vdots \\ u_n(x) \end{bmatrix}, F(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{bmatrix}, K(x, t) = \begin{bmatrix} k_{11}(x, t) & k_{12}(x, t) & \dots & k_{1n}(x, t) \\ k_{21}(x, t) & k_{22}(x, t) & \dots & k_{2n}(x, t) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ k_{n1}(x, t) & k_{n2}(x, t) & \dots & k_{nn}(x, t) \end{bmatrix}$$

Remplacement (3.5) en (3.14), nous trouvons

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{2M} a_{1i} h_i(x) \\ \sum_{i=1}^{2M} a_{2i} h_i(x) \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{2M} a_{ni} h_i(x) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{2M} a_{1i} \\ \sum_{i=1}^{2M} a_{2i} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{2M} a_{ni} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \int_0^1 k_{11}(x, t) h_i(t) dt & \dots & \int_0^1 k_{1n}(x, t) h_i(t) dt \\ \int_0^1 k_{21}(x, t) h_i(t) dt & \dots & \int_0^1 k_{2n}(x, t) h_i(t) dt \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_0^1 k_{n1}(x, t) h_i(t) dt & \dots & \int_0^1 k_{nn}(x, t) h_i(t) dt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{bmatrix}$$

nous pouvons écrire

$$\sum_{i=1}^{2M} a_{r_i} h_i(x) - \sum_{i=1}^{2M} a_{r_i} G_i(x) = F(x), \quad (3.16)$$

où

$$G_i(x) = \begin{bmatrix} G_{11} = \int_0^1 k_{11}(x, t) h_i(t) dt & \cdots & G_{1n} = \int_0^1 k_{1n}(x, t) h_i(t) dt \\ G_{21} = \int_0^1 k_{21}(x, t) h_i(t) dt & \cdots & G_{2n} = \int_0^1 k_{2n}(x, t) h_i(t) dt \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{n1} = \int_0^1 k_{n1}(x, t) h_i(t) dt & \cdots & G_{nn} = \int_0^1 k_{nn}(x, t) h_i(t) dt \end{bmatrix}$$

Ensuite, nous allons évaluer les coefficients d'ondelettes a_{r_i} par méthode de collocation.

En satisfaisant (3.16) uniquement aux points de collocalisation (3.4), nous obtenons un système d'équations linéaires :

$$\sum_{i=1}^{2M} a_{r_i} h_i(x_l) - \sum_{i=1}^{2M} a_{r_i} G_i(x_l) = F(x_l), \quad l = 1, 2, \dots, 2M, r = 1, 2, \dots, n \quad (3.17)$$

En résolvant le système linéaire (3.17), nous pouvons trouver le coefficient d'ondelettes a_{r_i} .

Exemple 3.3.1 Résolvons Eq. (3.7) pour $K(x, t) = x + t$, $f(x) = x^2$. L'équation (3.7) a la solution exacte

$$u_{\text{ex}} = x^2 - 5x - \frac{17}{6},$$

En tenant compte (3.1) et en évaluant les intégrales (3.9), nous trouvons

pour $i = 1$:

$$G_1(x) = \int_0^1 K(x, t) h_1(t) dt,$$

on a $h_1(t) \equiv 1$. Alors,

$$G_1(x) = \int_0^1 (x + t) dt = \left[xt + \frac{t^2}{2} \right]_0^1 = x + 0.5.$$

pour $i > 1$: d'après (3.1), on a

$$\begin{aligned} G_i(x) &= \int_0^1 K(x, t) h_i(t) dt = \int_{\tau_1}^{\tau_2} (x + t) dt - \int_{\tau_2}^{\tau_3} (x + t) dt \\ &= \left[xt + \frac{t^2}{2} \right]_{\frac{k}{m}}^{\frac{k+0.5}{m}} - \left[xt + \frac{t^2}{2} \right]_{\frac{k+0.5}{m}}^{\frac{k+1}{m}} = -\frac{1}{4m^2}. \end{aligned}$$

Donc,

$$G_i(x) = \begin{cases} x + 0.5 & \text{pour } i = 1, \\ -\frac{1}{4m^2} & \text{pour } i > 1. \end{cases}$$

Si nous appliquons la méthode de collocation, alors le vecteur a peut être calculé à partir du système (3.11).

Dans le cas de la méthode de Galerkin, nous sortirons de (3.12).

Évaluer les intégrales (3.13) nous obtient

$$\begin{aligned} \Gamma_{11} &= \int_0^1 G_1(x)h_1(x)dx = \int_0^1 (x + 0.5)dx = \left[\frac{x^2}{2} + 0.5x \right]_0^1 = 1. \\ \Gamma_{1l} &= \int_0^1 G_1(x)h_l(x)dx = \int_0^1 (x + 0.5)h_l(x)dx \\ &= \left[\frac{x^2}{2} + 0.5x \right]_{\frac{k}{m_1}}^{\frac{k+0.5}{m_1}} - \left[\frac{x^2}{2} + 0.5x \right]_{\frac{k+0.5}{m_1}}^{\frac{k+1}{m_1}} = -\frac{1}{4m_1^2}, \quad \text{pour } l > 1. \\ \Gamma_{i1} &= \int_0^1 G_i(x)h_1(x)dx = \int_0^1 -\frac{1}{4m^2}dx = -\frac{1}{4m^2}, \quad \text{pour } i > 1. \\ \Gamma_{il} &= \int_0^1 G_i(x)h_l(x)dx = -\int_{\frac{k}{m}}^{\frac{k+0.5}{m}} \frac{1}{4m^2}dx + \int_{\frac{k+0.5}{m}}^{\frac{k+1}{m}} \frac{1}{4m^2}dx = 0, \quad \text{pour } i, l > 1. \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned} \Gamma_{11} &= 1, \quad \Gamma_{1l} = -\frac{1}{4m_1^2} \quad \text{pour } l > 1, \\ \Gamma_{i1} &= -\frac{1}{4m^2} \quad \text{for } i > 1, \quad \Gamma_{il} = 0 \quad \text{pour } i, l > 1. \end{aligned}$$

Il résulte de (3.12) que

pour $l = 1$: on a $\Gamma_{11} = 1$, pour $i = 1$, $\Gamma_{i1} = -\frac{1}{4m^2}$, pour $i > 1$ et $h_1(t) = 1$

$$\frac{a_l}{m_1} - a_l\Gamma_{11} + \sum_{i=2}^{2M} \frac{a_i}{4m^2} = \int_0^1 x^2 dx,$$

$$\frac{a_l}{m_1} - a_l + \sum_{i=2}^{2M} \frac{a_i}{4m^2} = \frac{1}{3},$$

Prendre : $m_1 = 1$

$$\sum_{i=2}^{2M} \frac{a_i}{m^2} = \frac{4}{3}, \quad \text{pour } l = 1. \quad (3.18)$$

pour $l > 1$: On a $\Gamma_{1l} = -\frac{1}{4m_1^2}$

$$\begin{aligned} \frac{a_l}{m_1} + \frac{a_1}{4m_1^2} &= \int_{\tau_1}^{\tau_2} x^2 dx - \int_{\tau_2}^{\tau_3} x^2 dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3} \right]_{\frac{k}{m}}^{\frac{k+0.5}{m}} - \left[\frac{x^3}{3} \right]_{\frac{k+0.5}{m}}^{\frac{k+1}{m}} \\ &= -\frac{1}{4m_1^3}(2k_1 + 1), \end{aligned}$$

Donc

$$a_l = -\frac{a_1}{4m_1} - \frac{1}{4m_1^2}(2k_1 + 1), \quad \text{pour } l > 1. \quad (3.19)$$

Remplacer a_l de (3.19) en (3.18), on obtient

$$\sum_{i=2}^{2M} \frac{1}{m^2} \left(-\frac{a_1}{4m} - \frac{1}{4m^2}(2k+1) \right) = \frac{4}{3},$$

Alors,

$$a_1 \sum_{i=2}^{2M} \frac{1}{m^3} + \sum_{i=2}^{2M} \frac{2k+1}{m^4} = -\frac{16}{3}. \quad (3.20)$$

Nous calculons des totaux, d'après l'égalité $i = m + k + 1$, $i \geq 2$

- Pour $i = 2 \Rightarrow m = 1, k = 0$.
- Pour $i = \overline{3, 4} \Rightarrow m = 2, k = \overline{0, 1}$.
- Pour $i = \overline{5, 8} \Rightarrow m = 2^2, k = \overline{0, 3}$.
- pour $i = \overline{9, 16} \Rightarrow m = 2^3, k = \overline{0, 7}$.

⋮

⋮

- $i = M + k + 1 \Rightarrow m = M = 2^J, 0 \leq k \leq 2^J - 1$.

Alors,

$$\begin{aligned} \sum_{i=2}^{2M} \frac{1}{m^3} &= 1 + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} \right) + \left(\frac{1}{64} + \frac{1}{64} + \frac{1}{64} + \frac{1}{64} \right) + \cdots + 2^J \frac{1}{2^{3J}} \\ &= 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \cdots + \frac{1}{2^{2J}} = \frac{1 - 2^{-2(J+1)}}{1 - \frac{1}{4}} \\ &= \frac{4}{3} \left(1 - \frac{1}{(2M)^2} \right), \end{aligned}$$

et de la même manière, nous comptons

$$\begin{aligned} \sum_{i=2}^{2M} \frac{2k+1}{m^4} &= 1 + \sum_{k=0}^1 \frac{2k+1}{2^4} + \sum_{k=0}^2 \frac{2k+1}{2^8} + \cdots + \sum_{k=0}^{M-1} \frac{2k+1}{2^{4J}} \\ &= 1 + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} \right) + \left(\frac{1}{64} + \frac{1}{64} + \frac{1}{64} + \frac{1}{64} \right) + \cdots + 2^J \frac{1}{2^{3J}} \\ &= \frac{4}{3} \left(1 - \frac{1}{(2M)^2} \right), \end{aligned}$$

il découle de (3.20) que

$$a_1 \left(\frac{4}{3} \left(1 - \frac{1}{(2M)^2} \right) \right) + \frac{4}{3} \left(1 - \frac{1}{(2M)^2} \right) = -\frac{16}{3},$$

$$a_1 \left(1 - \frac{1}{(2M)^2} \right) + \left(1 - \frac{1}{(2M)^2} \right) = -4,$$

$$a_1 \left(1 - \frac{1}{(2M)^2} \right) = -5 + \frac{1}{(2M)^2},$$

Donc,

$$a_1 = -\frac{5 - (2M)^{-2}}{1 - (2M)^{-2}}.$$

Les coefficients a_l pour $l > 1$ peuvent être calculés selon (3.19), la fonction $u(x)$ est évaluée à partir de (3.5).

Nous calculerons des valeurs différentes de J . Puis comparer ces résultats avec la solution exacte.

En utilisant la méthode de déterminant de Fredholm on obtient :

On a

$$c_n = \int_a^b B_{n-1}(s, s) ds, \quad \text{et} \quad B_n = c_n k(x, t) - n \int_a^b k(x, s) B_{n-1}(s, t) ds,$$

où : $c_0 = 1$ et $B_0(x, t) = k(x, t) = x + t$

$$c_1 = \int_0^1 B_0(s, s) ds = \int_0^1 (s + s) ds = \int_0^1 2s ds = [s^2]_0^1 = 1.$$

$$B_1 = c_0 k(x, t) - \int_0^1 B_0(x, s) k(s, t) ds = x + t - \int_0^1 (x + s)(s + t) ds$$

$$= x + t - \left[x \frac{s^2}{2} + xts + \frac{s^3}{3} + \frac{s^2}{2} t \right]_0^1 = \frac{x}{2} + \frac{t}{2} - xt - \frac{1}{3}.$$

$$c_2 = \int_0^1 B_1(s, s) ds = \int_0^1 \left(\frac{s}{2} + \frac{s}{2} - s^2 - \frac{1}{3} \right) ds$$

$$= \left[\frac{s^2}{2} - \frac{s^3}{3} - \frac{1}{3}s \right]_0^1 = -\frac{1}{6}.$$

$$B_2 = c_2 k(x, t) - 2 \int_0^1 k(x, s) B_1(s, t) ds = -\frac{1}{6}(x + t) - 2 \int_0^1 (x + s) \left(\frac{s}{2} + \frac{t}{2} - st - \frac{1}{3} \right) ds$$

$$= -\frac{x}{6} - \frac{t}{6} - 2 \left[x \frac{s^2}{4} + x \frac{t}{2} s - \frac{s^2}{2} tx - \frac{x}{3} s + \frac{s^3}{6} + \frac{s^2}{4} t - \frac{s^3}{3} t - \frac{s^2}{6} \right]_0^1 = 0.$$

Donc

$$B_n(x, t) = 0, \quad \forall n \geq 2.$$

et

$$c_n = 0, \quad \forall n \geq 3.$$

On a

$$R(x, t, \lambda) = \frac{D(x, t, \lambda)}{D(\lambda)} = \frac{k(x, t) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} B_n(x, t)}{1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} c_n},$$

Alors

$$R(x, t, \lambda) = \frac{x + t - \frac{x}{2} - \frac{t}{2} + xt + \frac{1}{3}}{-\frac{1}{12}} = -6x - 6t - 12xt - 4.$$

Où

$$\begin{aligned} u(x) &= f(x) + \int_0^1 R(x, t, \lambda) f(t) dt \\ &= x^2 + \int_0^1 (-6x - 6t - 12xt - 4) t^2 dt \\ &= x^2 + \left[-2xt^3 - \frac{6}{4}t^4 - 3xt^4 - \frac{4}{3}t^3 \right]_0^1 \\ &= x^2 - 5x - \frac{17}{6}, \end{aligned}$$

Donc,

$$u_{ex} = x^2 - 5x - \frac{17}{6}.$$

La précision des résultats a été estimée par la fonction d'erreur

$$e_J = \max_{1 \leq l \leq 2M} (|u(t_l) - u_{ex}(t_l)|), \quad (3.21)$$

où t_l est défini par (3.4).

Nous calculons l'erreur en utilisant la méthode de collocation :

Code Matlab pour la méthode de collocation

```
function err=err(J)
M=2^J;
X=zeros(2*M,1);
for l=1:2*M
X(l,1)=abs(uapp(J,(1-0.5)/(2*M))-uexact((1-0.5)/(2*M)));
end
err=max(X);
```

si $J = 2 \Rightarrow 2M = 8$ (3.1) donne la matrice de Haar

$$H(8, 8) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 0.0039 \\ 0.0352 \\ 0.0977 \\ 0.1914 \\ 0.3164 \\ 0.4727 \\ 0.6602 \\ 0.8789 \end{bmatrix},$$

et

$$G = \begin{bmatrix} 0.5625 & 0.6875 & 0.8125 & 0.9375 & 1.0625 & 1.1875 & 1.3125 & 1.4375 \\ -0.2500 & -0.2500 & -0.2500 & -0.2500 & -0.2500 & -0.2500 & -0.2500 & -0.2500 \\ -0.0625 & -0.0625 & -0.0625 & -0.0625 & -0.0625 & -0.0625 & -0.0625 & -0.0625 \\ -0.0625 & -0.0625 & -0.0625 & -0.0625 & -0.0625 & -0.0625 & -0.0625 & -0.0625 \\ -0.0156 & -0.0156 & -0.0156 & -0.0156 & -0.0156 & -0.0156 & -0.0156 & -0.0156 \\ -0.0156 & -0.0156 & -0.0156 & -0.0156 & -0.0156 & -0.0156 & -0.0156 & -0.0156 \\ -0.0156 & -0.0156 & -0.0156 & -0.0156 & -0.0156 & -0.0156 & -0.0156 & -0.0156 \\ -0.0156 & -0.0156 & -0.0156 & -0.0156 & -0.0156 & -0.0156 & -0.0156 & -0.0156 \end{bmatrix}$$

Et les coefficients Haar sont

$$a = [-5.0476 \quad 1.0119 \quad 0.5685 \quad 0.4435 \quad 0.2999 \quad 0.2686 \quad 0.2374 \quad 0.2061]$$

$$\text{si } u(t_1 = \frac{1}{16}) = -3.1674 \text{ et } u_{ex}(t_1 = \frac{1}{16}) = -3.1419 \Rightarrow e_2 = |u(t_1) - u_{ex}(t_1)| = 0.0255,$$

$$\text{si } u(t_2 = \frac{3}{16}) = -3.7671 \text{ et } u_{ex}(t_2 = \frac{3}{16}) = -3.7357 \Rightarrow e_2 = |u(t_2) - u_{ex}(t_2)| = 0.0314,$$

$$\text{si } u(t_3 = \frac{5}{16}) = -4.3356 \text{ et } u_{ex}(t_3 = \frac{5}{16}) = -4.2982 \Rightarrow e_2 = |u(t_3) - u_{ex}(t_3)| = 0.0374,$$

$$\text{si } u(t_4 = \frac{7}{16}) = -4.8728 \text{ et } u_{ex}(t_4 = \frac{7}{16}) = -4.8294 \Rightarrow e_2 = |u(t_4) - u_{ex}(t_4)| = 0.0434,$$

$$\text{si } u(t_5 = \frac{9}{16}) = -5.3787 \text{ et } u_{ex}(t_5 = \frac{9}{16}) = -5.3294 \Rightarrow e_2 = |u(t_5) - u_{ex}(t_5)| = 0.0493,$$

$$\text{si } u(t_6 = \frac{11}{16}) = -5.8534 \text{ et } u_{ex}(t_6 = \frac{11}{16}) = -5.7982 \Rightarrow e_2 = |u(t_6) - u_{ex}(t_6)| = 0.0552,$$

$$\text{si } u(t_7 = \frac{13}{16}) = -6.2969 \text{ et } u_{ex}(t_7 = \frac{13}{16}) = -6.2357 \Rightarrow e_2 = |u(t_7) - u_{ex}(t_7)| = 0.0612,$$

$$\text{si } u(t_8 = \frac{15}{16}) = -6.7091 \text{ et } u_{ex}(t_8 = \frac{15}{16}) = -6.6419 \Rightarrow e_2 = |u(t_8) - u_{ex}(t_8)| = 0.0672.$$

Donc,

$$e_2 = \max_{1 \leq l \leq 8} (|u(t_l) - u_{ex}(t_l)|) = 0.0672.$$

De la même manière, nous comptons d'autres erreurs.

Nous calculons l'erreur en utilisant la méthode de galerkin :

$$\begin{aligned}
 \text{si } u(t_1 = \frac{1}{16}) = -3.1776 \text{ et } u_{ex}(t_1 = \frac{1}{16}) = -3.1419 &\Rightarrow e_2 = |u(t_1) - u_{ex}(t_1)| = 0.0357, \\
 \text{si } u(t_2 = \frac{3}{16}) = -3.7793 \text{ et } u_{ex}(t_2 = \frac{3}{16}) = -3.7356 &\Rightarrow e_2 = |u(t_2) - u_{ex}(t_2)| = 0.0437, \\
 \text{si } u(t_3 = \frac{5}{16}) = -4.3497 \text{ et } u_{ex}(t_3 = \frac{5}{16}) = -4.2981 &\Rightarrow e_2 = |u(t_3) - u_{ex}(t_3)| = 0.0516, \\
 \text{si } u(t_4 = \frac{7}{16}) = -4.8889 \text{ et } u_{ex}(t_4 = \frac{7}{16}) = -4.8294 &\Rightarrow e_2 = |u(t_4) - u_{ex}(t_4)| = 0.0595, \\
 \text{si } u(t_5 = \frac{9}{16}) = -5.3968 \text{ et } u_{ex}(t_5 = \frac{9}{16}) = -5.3294 &\Rightarrow e_2 = |u(t_5) - u_{ex}(t_5)| = 0.0674, \\
 \text{si } u(t_6 = \frac{11}{16}) = -5.8379 \text{ et } u_{ex}(t_6 = \frac{11}{16}) = -5.7982 &\Rightarrow e_2 = |u(t_6) - u_{ex}(t_6)| = 0.0397, \\
 \text{si } u(t_7 = \frac{13}{16}) = -6.3190 \text{ et } u_{ex}(t_7 = \frac{13}{16}) = -6.2357 &\Rightarrow e_2 = |u(t_7) - u_{ex}(t_7)| = 0.0833, \\
 \text{si } u(t_8 = \frac{15}{16}) = -6.7331 \text{ et } u_{ex}(t_8 = \frac{15}{16}) = -6.6419 &\Rightarrow e_2 = |u(t_8) - u_{ex}(t_8)| = 0.0912.
 \end{aligned}$$

Donc,

$$e_2 = \max_{1 \leq l \leq 8} (|u(t_l) - u_{ex}(t_l)|) = 0.0912.$$

De la même manière, nous comptons d'autres erreurs.

Les erreurs e_J tant pour la collocation que pour la méthode de Galerkin sont présentées dans le tableau 1.1.

e_J			
J	$2M$	Collocation	Galerkin
2	8	7.2E-2	1.1E-1
3	16	1.7E-2	2.6E-2
4	32	4.3E-3	6.5E-3
5	64	1.3E-3	1.6E-3

Tableau 1.1- erreurs de résolution (3.7) pour $K = x + t$, $f(x) = x^2$.

Cet type montre la simplicité de la solution d'ondelettes de Haar : pour évaluer les coefficients d'ondelettes dans le cas de la méthode de collocation, un système de les équations linéaires doivent être résolues, quant à la méthode de Galerkin puis expressions analytiques pour ces coefficients ont été obtenus. Pour obtenir la précision nécessaire, le nombre de points de calcul est assez petit.

3.4 Équation intégrale faiblement singulière

Dans cette section l'équation intégrale

$$u(x) = \int_0^x \frac{K(x, t)}{(x - t)^\alpha} u(t) dt + f(x), \quad 0 < \alpha < 1, 0 \leq t \leq x \leq 1, \quad (3.22)$$

est considéré. C'est une équation faiblement singulière.

Exemple 3.4.1 *Considérons l'équation intégrale Abel*

$$\int_0^x \frac{u(t)}{\sqrt{x-t}} dt = 1, \quad 0 \leq t \leq x \leq 1. \quad (3.23)$$

Remplacement (3.5) en (3.23), nous obtenons

$$\sum_{i=1}^{2M} a_i G_i(x_l) = 1, \quad l = 1, \dots, 2M, \quad (3.24)$$

où

$$G_i(x) = \int_0^x \frac{h_i(t)}{\sqrt{x-t}} dt.$$

La formulation matricielle de cette équation est

$$aG = E, \quad (3.25)$$

où $G_{il} = G_i(x_l)$ et E est un vecteur d'unité de dimension $2M$.

Évaluer les intégrales $G_{il} = G_i(x_l)$ que nous obtenons

$$\begin{aligned} (i) \quad & G_{il} = 0 \quad \text{pour } x_l \leq \tau_1, \\ (ii) \quad & G_{il} = \int_{\tau_1}^{x_l} \frac{1}{\sqrt{x-t}} dt = -[2\sqrt{x_l-t}]_{\tau_1}^{x_l} = 2\sqrt{x_l-\tau_1} \quad \text{pour } \tau_1 \leq x_l \leq \tau_2, \\ (iii) \quad & G_{il} = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{1}{\sqrt{x-t}} dt - \int_{\tau_2}^{x_l} \frac{1}{\sqrt{x-t}} dt = -[2\sqrt{x_l-t}]_{\tau_1}^{\tau_2} + [2\sqrt{x_l-t}]_{\tau_2}^{x_l} \\ & = -4\sqrt{x_l-\tau_2} + 2\sqrt{x_l-\tau_1} \quad \text{pour } \tau_2 \leq x_l \leq \tau_3, \\ (iv) \quad & G_{il} = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{1}{\sqrt{x-t}} dt - \int_{\tau_2}^{x_l} \frac{1}{\sqrt{x-t}} dt - \int_{x_l}^{\tau_3} \frac{1}{\sqrt{x-t}} dt \\ & = -[2\sqrt{x_l-t}]_{\tau_1}^{\tau_2} + [2\sqrt{x_l-t}]_{\tau_2}^{x_l} + [2\sqrt{x_l-t}]_{x_l}^{\tau_3} \\ & = -4\sqrt{x_l-\tau_2} + 2\sqrt{x_l-\tau_1} + 2\sqrt{x_l-\tau_3} \quad \text{pour } \tau_3 \leq x_l \leq 1, \end{aligned}$$

En utilise la transformation de Laplace pour résoudre l'équation intégrale d'Abel de la première espèce (3.23)

$$\mathcal{L} \left\{ \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x-t}} u(t) dt \right\} = \mathcal{L}\{1\},$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \left\{ x^{\frac{1}{2}} \right\} \mathcal{L}\{u(x)\} &= \mathcal{L}\{g(x)\} \\ &= \frac{\Gamma(1-\frac{1}{2})}{s^{1-\frac{1}{2}}} \mathcal{L}\{u(x)\} = \mathcal{L}\{g(x)\}, \end{aligned}$$

Ainsi, nous avons

$$\mathcal{L}\{u(x)\} = \frac{1}{\Gamma(1 - \frac{1}{2})} s \left\{ \frac{1}{s^{\frac{1}{2}}} \mathcal{L}\{g(x)\} \right\},$$

Alors,

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(1 - \frac{1}{2})} \frac{d}{dx} \int_0^x (x-t)^{\frac{1}{2}-1} g(t) dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(1 - \frac{1}{2})} \frac{d}{dx} \left\{ \frac{(x-t)^{\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} g(t) \Big|_0^x + \frac{1}{\frac{1}{2}} \int_0^x (x-t)^{\frac{1}{2}} g'(t) dt \right\} \\ &= \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{\pi} \left\{ \frac{g(0)}{x^{1-\frac{1}{2}}} + \int_0^x \frac{g'(t)}{(x-t)^{1-\frac{1}{2}}} dt \right\} \\ &= \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{\pi} \left\{ \frac{1}{x^{1-\frac{1}{2}}} \right\} \\ &= \frac{1}{\pi\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

Donc La solution exacte de (3.23) est

$$u_{ex} = \frac{1}{\pi\sqrt{x}}.$$

Les calculs effectués pour l'approche des ondelettes de Haar ont montré que près de la singularité $x = 0$, un grand nombre de points de collocation doivent être prises. Cette situation est démontrée à la Fig. 3.1 : seulement pour $J = 7$ (ou $2M = 256$), la précision des solutions d'ondelettes peut être considérée comme plus ou moins satisfaisante. Si nous nous éloignons de $x = 0$, la convergence est de nouveau bonne. Donc, pour l'intervalle $0.1 \leq x \leq 1$, les estimations d'erreur (3.21) sont $e_4 = 1.9E - 2$, $e_5 = 1.3E - 3$, $e_6 = 3.4E - 4$, $e_7 = 8.8E - 5$. [14]

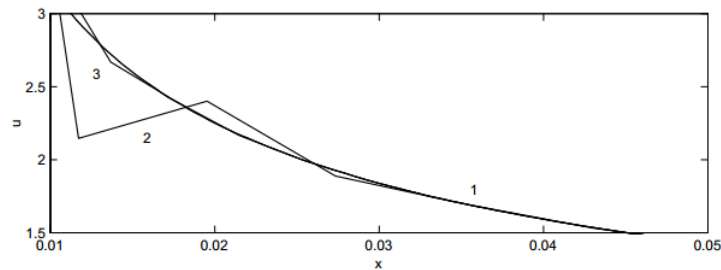


FIGURE 3.1 – Solution du type au voisinage du point singulier $x = 0$, 1 solution exacte, Solutions ondelettes pour $J = 6$ et $J = 7$.

Conclusion générale

L'objectif principal de ce travail est de proposer la méthode des ondelettes de Haar pour la résolution d'équations intégrales linéaires. Une solution viable a été développée sur deux types d'équations intégrales différentes (équation de Fredholm et équation intégrale faiblement singulière). Deux variantes de solution, qui sont basées sur les techniques de collocation et de Galerkin, sont proposées. La méthode élaborée est très simple et - comme il découle des problèmes de test - une précision élevée des résultats peut être obtenue avec un petit nombre de points de calcul. Nous avons constaté que la méthode collocation est meilleure que la méthode Galerkin en termes de précision des résultats.

Bibliographie

- [1] A. P. Anioutine and A. G. Kyurkchan, Application of wavelets technique to the integral equations of the method of auxiliary currents, *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transf.* 79-80, pp 495-508, (2003).
- [2] C. F. Chen and C. H. Hsiao, Haar wavelet method for solving lumped and distributed-parameter systems, *IEE Proc. Control Theory Appl.* 144, pp 87-94, (1997).
- [3] C. F. Chen and C. H. Hsiao, Wavelet approach to optimising dynamic systems, *IEE Proc. Control Theory Appl.* 146, pp 213-219, (1999).
- [4] D. Christophe, Ondelettes pour la détection de caractéristiques en traitement d'images. Application à la détection de région d'intérêt, HAL Id : tel-00287008(2008).
- [5] I. Daubechies, Ten Lectures on Wavelets, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, (1992).
- [6] L. Debnath, Wavelet transformation and their application, Birkhuser Boston,(2002).
- [7] L. M. Delves, J. L. Mohammad, Computational Method for Integral Equations, Cambridge University Press, (1983).
- [8] B. Gagui, Sur les équations intégrales dans les espaces d'Orlicz, Thèse de docteur en sciences université de M'sila (2015).
- [9] A. Grossman, J. Morlet, "Decompositions of hardly functions into square integrable wavelets of constant shape". *SIAM J. Math. Anal.* 15, pp 723-736,(1984).
- [10] G. H. Ibraheem, Numerical Solution of Linear System of Fredholm Integral Equations Using Haar Wavelet Method, Baghdad University College of Education Ibn Al - Haitham.
- [11] R.P. Kanwal, Linear Integral Equations, Theory and Technique, Academic Press, New York, (1971).

-
- [12] M. Krasnov, A. Kissélev, G. Makarenko, Équations intégrales, Edition Mir(1977).
- [13] J. Kumar, P. Manchanda, Pooja, Numerical solution of Fredholm integral equations of the first kind using legendre wavelet collocation method, Journal of Pure and Applied Mathematics, No. 1, pp 33-43 (2017).
- [14] Ü. Lepik, E. Tamme, Application of the Haar wavelets for solution of linear integral equations, Antalya, Turkey Dynamical Systems and Applications, Proceedings, pp. 494-507. (2004).
- [15] W.V. Lovitt, Linear integral equation, New York, (1950).
- [16] Y. Meyer. Ondelettes et opérateurs I : ondelettes. Paris, Hermann, (1990).
- [17] S. C. Shiralashetti, A. B. Deshi, An efficient Haar wavelet collocation method for the numerical solution of multi-term fractional differential equations, Nonlinear Dyn (2016) 83 :293303.
- [18] S. C. Shiralashetti, R. A. Mundewadi, S.S. Naregal, B. Veeresh, Haar Wavelet Collocation Method for the Numerical Solution of Nonlinear Volterra-Fredholm-Hammerstein Integral Equations, Global Journal of Pure and Applied Mathematics, ISSN 0973-1768 Volume 13, Number 2, pp. 463-474. (2017).
- [19] A. H. Siddiqi, Applied Functional Analysis, Marcel-Dekker Publ, New York,(2004).
- [20] Y. Shen and W. Lin, The natural integral equations of the plane elasticity problem and its wavelet methods, Appl. Math. Comput. 150, pp 417-438. (2004).
- [21] M. Terbeche, Constantin, Sacaliuc and Galina, Vornicescu, Solution of some singular integral equation, Bull. Sci. math. 126, pp 379-387.(2002).
- [22] D.F. Walnut, An Introduction to Wavelet Analysis, Birkhuser, Boston, (2001).
- [23] D. Walnut, An Introduction to Wavelet Analysis, Birkhauser, Boston, (2002).
- [24] A.M.Wazwaz, Linear and nonlinear integral equations methods and applications, Saint Xavier University chicago, IL 60655, USA.

Résumé

Dans ce travail, nous avons proposé la méthode d'ondelettes de Haar pour la résolution numérique d'équations intégrales linéaires. Nous avons appliqué cette méthode à deux types d'équations intégrales différentes (équation de Fredholm et équation intégrale faiblement singulière), en résolvant ces équations à l'aide de MATLAB pour calculer les coefficients de Haar. Les résultats numériques sont comparés à la solution exacte au moyen d'une analyse d'erreur, ce qui montre l'efficacité de cette technique.

Mots clés :

Equation intégrale, Ondelettes de Haar, Méthode Galerkin, Méthode de collocation.

Abstract

In this work, we proposed Haar wavelet method for the numerical solution of linear integral equations. We applied this method to two different types of integral equations (Fredholm equation and weakly singular integral equation), solving these equations using MATLAB to compute the Haar coefficients. The numerical results are compared to the exact solution by means of an error analysis, which shows the efficiency of this technique.

Key words :

Integral equations, Haar wavelets, Galerkin method, Collocation method.

ملخص

في هذا العمل، اقترحنا طريقة موجات هار للحل العددي للمعادلات التكاملية الخطية. طبقنا هذه الطريقة على نوعين مختلفين من المعادلات التكاملية (معادلة فرد هولم ومعادلة تكامل ضعيفة المفرد)، حل هذه المعادلات باستخدام متلاب لحساب معاملات هار. تم مقارنة النتائج العددية بالحل الدقيق عن طريق تحليل الأخطاء، مما يدل على كفاءة هذه التقنية.

الكلمات الدالة : معادلة تكاملية، موجات هار، طريقة غاليركين، طريقة التجميع.