

N° d'ordre :

N° de série :



République Algérienne Démocratique et Populaire

**Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la
Recherche Scientifique**

UNIVERSITÉ HAMMA LAKHDAR D'EL OUED

FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES

Mémoire de fin d'étude

MASTER ACADEMIQUE

Domaine: Mathématiques et Informatique

Filière: Mathématiques

Spécialité: Mathématiques fondamentales et appliquées

Thème

**THÉORÈME DE POINT FIXE SUR UN
ESPACE MÉTRIQUE PARTIEL ET CÔNE**

Présenté par: AYADI Amina

AZEB CHIKH Zineb

Soutenu devant le jury composé de

Mr. LETOUFA Yacine

Dr. DJDIDE Mostefa

Dr. BELOUL Said

MCB

MCB

MCB

Président

Rapporteur

Examinatrice

Univ. d'El Oued

Univ. d'El Oued

Univ. d'El Oued

Année universitaire 2018 – 2019.

Dédicaces

Nous dédions ce travail à :

Nos chers parents

Nos frères et nos sœurs

Nos amies

Et à tous nos familles.

Remerciements

Nous remercions **Allah** tout puissant de nous avoir donné la foie, le courage pour réaliser ce modeste travail et qui a mis dans notre chemin de bonnes personnes et nous a confié à de bonnes mains.

Nous tenons d'abord à exprimer nos plus vifs remerciements à **Mr. Djedidi Mostefa** qui a supervisé avec enthousiasme ce travail dans toutes ses étapes et a collaboré de manière importante à la réalisation.

Nous adressons aussi nos remerciements aux membres du jury qui ont bien accepté lire nos travail.

Nos remerciements vont aussi à toute nos famille, nos parents, nos soeurs, nos frères et nos amis **Khaoula, Atika, Safa, Ghania** pour ses encouragements.

Nous témoignons toute notre gratitude à tous les membres du département de Mathématiques et spécialement aux enseignants qui ont contribué à notre formation et qui nous ont permis de travailler dans de bones conditions.

Table des matières

Introduction	iv
1 Espaces métriques, métriques partiels et métriques cônes	1
1.1 Espaces métriques	2
1.1.1 Distances	2
1.1.2 Espaces vectoriels normés	3
1.1.3 Ouverts, fermés, voisinages, parties bornées et fonctions bornées	4
1.1.4 Espace métrique complet	7
1.2 Espaces métriques partiels	9
1.3 Espaces métriques cônes	11
2 Point fixe pour les multifonctions contractantes	16
2.1 Point fixe pour les multifonctions	17
2.1.1 Quelques éléments d'analyse multivoque	17
2.1.2 Distance de Hausdorff	18
2.2 Point fixe dans un espace métriques partiel	23
2.3 Point fixe dans un espace métrique cône	33
3 Point fixe commun pour une suite des multifonctions	38
3.1 Point fixe commun dans un espace métrique	39
3.2 Point fixe commun dans un espace métrique partiel	43
3.3 Point fixe commun dans un espace métrique cône	51
Conclusion	56
Bibliographie	57

Introduction

Les théorèmes du point fixe sont les outils mathématiques de base pour montrer l'existence des solutions pour plusieurs équations non linéaires. La théorie du point fixe est le plus important domaine d'analyse où on trouve les outils nécessaires pour avoir des théorèmes d'existence des problèmes non linéaires différents. L'origine de ce théorème est les travaux de Banach en 1922 [6]. Le théorème du point fixe de Banach est dite principe de l'application contractante, il est la base de la théorie du point fixe. Ce principe garantit l'existence d'un unique point fixe pour toute application contractante dans un espace métrique complet dans lui-même.

La théorie du point fixe métrique pour les applications multivoques a été considérée par plusieurs auteurs comme des applications sur la théorie des jeux, l'économie, les inclusions intégrales ou différentielles, problèmes de minimisation ... etc. L'étude de ce type d'applications a commencé par Nadler (1969) [15] comme une généralisation du principe de contraction de Banach qui a utilisé la métrique de Pompeiu-Hausdorff pour les contractions multivoques dans les espaces métriques, i.e., des contractions d'un espace métrique complet à valeurs dans l'espace des tous les sous-ensembles fermés, bornés et non vides.

En 1994, Matthews [14] introduit la notion des espaces métriques partiels. La topologie des espaces métriques partiels est un peu particulière. Précisément, la distance d'un point à lui même peut ne pas être égale à zéro. De plus, la limite d'une suite convergente n'est pas unique. Matthews a étendu le principe de Banach aux espaces métriques partiels complets. Cette théorie ont attiré l'attention de nombreux chercheurs qui ont récemment publié plusieurs travaux sur les espaces métriques partiels [5], [11], [13], [18] etc.

Le espace métrique cône est une généralisation d'espace métrique classique, était introduit en 2007 par L.-G. Huang et X. Zhang [9], est remplacé l'ensemble des nombres

réels par un espace de Banach partiellement ordonné. Quelques théorèmes de points fixes de différents types des applications contractant sur les espaces métriques cônes sont donnés. Récemment nombreux auteurs ont étudié des résultats de points fixes et communs fixes dans les espaces métriques cônes pour des cônes normaux [1], [3], [17], [12] ... etc.

Le but de notre travail est de trouver des points fixes pour une suites des fonction et multifonctions dans des espaces métriques partiels et des espaces métriques cônes.

Dans le premier chapitre, on rappelle quelques définitions et propriétés sur les espaces métriques, les espaces métriques partiels et les espaces métriques cônes.

Dans le deuxième chapitre, on présente les théorèmes du point fixe pour les applications univoques et multivoques contractantes définies sur les espaces métriques, les espaces métriques partiels et les espaces métriques cônes.

Dans le troisième chapitre, on présente notre propre travail, on a généralisé quelques résultats récemment obtenus sur le point fixe commun pour une suites des fonction et multifonctions dans des espaces métriques partiels et des espaces métriques cônes.

Chapitre 1

Espaces métriques, métriques partiels et métriques cônes

Dans ce chapitre, on donne quelques définitions et propriétés sur les espaces métriques, les espaces métriques partiels et les espaces métriques cônes.

1.1 Espaces métriques

1.1.1 Distances

Définition 1.1.1. Soit X un ensemble. Une distance sur X est une application $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}_+$ vérifiant pour tous $x, y, z \in X$:

$$(d1) \quad d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y,$$

$$(d2) \quad d(x, y) = d(y, x) \text{ (la symétrie),}$$

$$(d3) \quad d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \text{ (l'inégalité triangulaire).}$$

Exemple 1.1.1. L'ensemble \mathbb{K}^n avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} est muni de plusieurs distances faisant intervenir les distances entre les composantes. Pour deux éléments arbitraires de \mathbb{K}^n , $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$, on pose :

$$d_1(x, y) = \sum_{i=1}^n |y_i - x_i|, \quad d_2(x, y) = \left(\sum_{i=1}^n |y_i - x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

et

$$d_\infty(x, y) = \max_{i \in \{1, \dots, n\}} |y_i - x_i|.$$

Exemple 1.1.2. Sur $C([0, 1]) = \{f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}, f \text{ continue}\}$, on définit la distance :

$$d_\infty(f, g) = \sup_{t \in [0, 1]} |f(t) - g(t)|.$$

Définition 1.1.2. Un espace métrique est un couple (X, d) où X est un ensemble et d est une distance sur X .

Définition 1.1.3. Deux distances d_1, d_2 sur X sont dites équivalentes s'il existent deux constantes $\alpha, \beta > 0$, telles que pour tous $x, y \in X$: $d_1(x, y) \leq \alpha d_2(x, y) \leq \beta d_1(x, y)$.

Proposition 1.1.1. Une distance d sur un ensemble X vérifie :

1. La distance est toujours positive ou nulle :

$$\forall x, y \in X, \quad d(x, y) \geq 0.$$

2. La distance entre les distances est plus petite que la distance :

$$\forall x, y, z \in X, \quad |d(x, y) - d(y, z)| \leq d(x, z).$$

Démonstration. 1. On utilise successivement (d1), (d3) et (d2) pour obtenir

$$0 = d(x, x) \leq d(x, y) + d(y, x) = 2d(x, y) \text{ pour } x, y \in X$$

2. On utilise (d3) on obtient pour $x, y, z \in X$: $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$. Par symétrie et en utilisant (d2), on a aussi : $d(x, y) - d(x, z) \leq d(z, y) = d(y, z)$. Alors $|d(x, z) - d(x, y)| \leq d(y, z)$.

□

1.1.2 Espaces vectoriels normés

Un exemple important d'espace métrique est le cas des espaces vectoriels normés. On considère un \mathbb{K} -espace vectoriel E avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

Définition 1.1.4. Une norme sur E est une application de E dans \mathbb{R}_+ notée $\|\cdot\|$ vérifiant pour tous $x, y \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$:

(N1) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,

(N2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ (l'homogénéité),

(N3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (l'inégalité triangulaire).

Définition 1.1.5. Un espace vectoriel normé est un couple $(E, \|\cdot\|)$ où E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} et $\|\cdot\|$ est une norme sur E .

La proposition suivante précise le sens des espaces vectoriels normés comme des espaces métriques. Il s'ensuit que toutes les propriétés des distances données plus haut ont une traduction en terme de norme dans les espaces vectoriels normés (En particulier, comme pour les distances il n'est pas nécessaire de supposer la norme positive ou nulle, c'est une conséquence des axiomes (N1), (N2) et (N3)).

Proposition 1.1.2. Si $(E, \|\cdot\|)$ est un espace vectoriel normé alors $d(x, y) = \|x - y\|$ définit une distance sur E .

Démonstration. Il est clair que les hypothèses (N1) avec $\lambda = 0$ et (N2) pour la norme $\|\cdot\|$ entraîne la propriété (d1) de la distance d . La propriété (N1) avec $\lambda = -1$ pour la norme entraîne la propriété (d2) pour la distance. L'inégalité triangulaire suit immédiatement. □

Remarque 1.1.1. Les boules ou sphères de centre 0 et de rayon 1 sont appelées boules unité, sphère unité.

Exemple 1.1.3. Dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

Il est clair que la valeur absolue (ou le module) $|\cdot|$ est une norme sur \mathbb{K} pris comme \mathbb{R} ou \mathbb{C} espace vectoriel.

Exemple 1.1.4. L'espace vectoriel n -dimensionnel \mathbb{K}^n avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} est muni de trois normes importantes (les normes standard) $\|\cdot\|_2, \|\cdot\|_1, \|\cdot\|_\infty$, définies par

$x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$:

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|, \quad \|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \text{et} \quad \|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \|x\|.$$

Les trois normes satisfont aux inégalités

$$\|\cdot\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n} \|\cdot\|_2 \leq n \|x\|_\infty.$$

1.1.3 Ouverts, fermés, voisinages, parties bornées et fonctions bornées

Définition 1.1.6. Soit (X, d) est un espace métrique et soient $a \in X$ et $r \in [0, +\infty[$ on définit :

1. la boule ouverte de centre a et rayon r : $B(a, r) = \{x \in X, d(a, x) < r\}$,
2. la boule fermée de centre a et rayon r : $B_f(a, r) = \{x \in X, d(a, x) \leq r\}$,
3. la sphère de centre a et rayon r : $S(a, r) = \{x \in X, d(a, x) = r\}$.

Remarque 1.1.2. 1. Soit $0 < r < s$, on a $B(a, r) \subset B_f(a, r) \subset B(a, s)$.

2. Soit $r > 0$, on a $B_f(a, r) = B(a, r) \cup S(a, r)$.

Exemple 1.1.5. Dans \mathbb{R} la distance usuelle est donnée par $d(x, y) = |x - y|$. Les boules sont des intervalles. Pour $x \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$, on a $B(x, r) =]x - r, x + r[$ et $B_f(x, r) = [x - r, x + r]$.

Exemple 1.1.6. Sur un ensemble X quelconque on peut mettre la distance triviale donnée par

$$\forall x, y \in X, \quad d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y \\ 1 & \text{si } x \neq y \end{cases}$$

Dans ce cas on a $B(x, \frac{1}{2}) = \{x\} = B_f(x, \frac{1}{2}) = B(x, 1)$ tandis que $B_f(x, 1) = X$ est différent de $\{x\} = B(x, 1)$ si X a au moins 2 éléments.

Définition 1.1.7 (Distance entre deux parties). Soit (X, d) un espace métrique. Soit A et B deux parties de X on appelle distance entre A et B la quantité :

$$d(A, B) = \inf_{x \in A, y \in B} d(x, y).$$

Définition 1.1.8 (Distance d'un point à une partie). On appelle distance d'un point a de X à une partie non vide A de X , le réel :

$$d(a, A) = \inf\{d(a, x), x \in A\}$$

Exemple 1.1.7. Si on prend $A = 0 \subset \mathbb{R}$ et $B = \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\}$ on a $d(A, B) = 0$ tandis que $A \neq B$. Ainsi la distance entre les parties ne définit pas vraiment une distance sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ (ou $\mathcal{P}(X)$ en général). Il s'agit donc d'un abus de notation et il faut bien interpréter $d(A, B)$ comme l'infimum de la distance entre les points de A et de B .

Définition 1.1.9. On appelle diamètre d'une partie A de X et on note par $\text{Diam}(A)$ la quantité

$$\text{Diam}(A) = \sup\{d(x, y), x \in A, y \in A\}$$

On vérifie immédiatement qu'une partie A de X est bornée si et seulement si son diamètre est majoré.

Définition 1.1.10. Soit (X, d) un espace métrique. On dit qu'une partie A de X est bornée s'il existe une boule fermée $B_f(x_0, r)$ telle que $A \subset B_f(x_0, r)$,

$$\forall x \in A, d(x_0, x) \leq r.$$

Remarque 1.1.3. Compte tenu de la remarque ci-dessus sur les inclusions des boules, il est clair que l'on peut remplacer l'adjectif "fermée" par "ouverte". De plus l'inégalité triangulaire entraîne que le caractère borné de A ne dépend pas du choix de x_0 (avec un x'_0 il suffit de remplacer r par $r' = r + d(x_0, x'_0)$).

Définition 1.1.11. Soit X un ensemble et (Y, d) un espace métrique. On dit qu'une fonction $f : X \rightarrow Y$ est bornée si son image $f(X)$ est bornée. On note $F_b(X, Y)$ le sous-ensemble de $F(X, Y) = Y^X$ des fonctions bornées.

Exemple 1.1.8. Soient (X, d) un espace métrique et $\varphi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ est une application croissante sous-additive et ne s'annulant qu'en 0 :

$$\varphi(u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$$

$$\forall u, v \in \mathbb{R}_+, \varphi(u) \underset{\text{croissante}}{\leq} \varphi(u+v) \underset{\text{sous-additive}}{\leq} \varphi(u) + \varphi(v)$$

Alors $\varphi \circ d$ est une distance sur X . Deux cas particuliers sont intéressants : $\varphi(u) = \min\{1, u\}$ et $\varphi(u) = \frac{u}{1+u}$. Les distances $\min\{1, d(x, y)\}$ et $\frac{d(x, y)}{1+d(x, y)}$ ont la propriété d'être bornées par 1 sur X et d'être topologiquement équivalentes à la distance d .

Dans la suite, soit (X, d) un espace métrique.

Définition 1.1.12. On appelle ouvert de (X, d) toute partie O de X qui est vide ou qui vérifie :

$$\forall x \in O, \exists r > 0, \quad B(x, r) \subset O$$

Remarque 1.1.4. Un sous-ensemble non vide $O \subset X$ est ouvert si et seulement si O s'écrit comme une réunion (finie ou infinie) de boules ouvertes.

Définition 1.1.13. Si $A \subset X$ est un sous-ensemble, un point $a \in A$ est dit point intérieur de A s'il existe $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset A$.

L'ensemble des points intérieurs de A s'appelle l'intérieur de A et est désigné par $\overset{\circ}{A}$. On a évidemment toujours $\overset{\circ}{A} \subset A$.

Remarque 1.1.5. Un sous-ensemble non vide $A \subset X$ est ouvert si et seulement si $\overset{\circ}{A} = A$.

Proposition 1.1.3. 1. X et \emptyset sont des ouverts.

2. Toute réunion (finie ou infinie) de sous-ensembles ouverts est ouverte.
3. Toute intersection finie de sous-ensembles ouverts est ouverte.
4. L'intérieur $\overset{\circ}{A}$ d'un sous-ensemble $A \subset X$ est ouvert, il coïncide avec l'ouvert le plus grand (au sens de l'inclusion) contenu dans A .

Définition 1.1.14. Soit $A \subset X$. Un point $x \in X$ est dit point adhérent à A si pour tout $r > 0$ l'intersection $A \cap B(x, r)$ est non vide. L'ensemble des points adhérents à A s'appelle l'adhérence de A et sera désignée par \overline{A} .

Remarque 1.1.6. Remarquer qu'on a toujours l'inclusion $Y \subset \overline{Y}$.

Définition 1.1.15. 1. On dit qu'une partie A de E est dense dans E si l'adhérence de A est égale à E (i.e. $\overline{A} = E$).

2. On dit qu'une partie B de A est dense dans A si $A \subset \overline{B}$.

Définition 1.1.16. On appelle frontière d'une partie A de E l'ensemble, noté $\text{Fr}(A)$, formé des points de E adhérents à A et à son complémentaire dans E :

$$\text{Fr}(A) = \overline{A} \cap \overline{E \setminus A}$$

Définition 1.1.17 (voisinage). On appelle voisinage d'un point a de X toute partie V de X contenant une boule ouverte de centre a . L'ensemble des voisinages de a est noté $\mathcal{V}(a)$:

$$V \in \mathcal{V}(a) \iff \exists r > 0, B(a, r) \subset V.$$

Remarque 1.1.7. Pour tout réel $r > 0$, la boule $B(a, r)$ est un voisinage de a .

Proposition 1.1.4. 1. La réunion d'une famille quelconque de voisinages d'un même point x de X est un voisinage de x .

2. L'intersection de deux voisinages de x est un voisinage de x .

3. Toute partie qui contient un voisinage d'un point x de X est aussi un voisinage de x .

1.1.4 Espace métrique complet

Définition 1.1.18. Une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans un espace métrique (X, d) est dite convergente s'il existe $\ell \in X$ (appelé la limite de la suite) ayant la propriété. Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_\varepsilon$ on a $d(x_n, \ell) < \varepsilon$.

Remarque 1.1.8. 1. Une suite convergente a une seule limite.

2. Une suite convergente est bornée.

3. L'ensemble $C(E)$ des suites convergentes d'un espace normé E est un espace vectoriel.

L'application $L : C(E) \longrightarrow E$, $(x_n) \longmapsto \lim x_n$ est linéaire.

Définition 1.1.19 (Suite de Cauchy). Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite bornée dans un espace métrique (X, d) , notons $\delta_n = \sup\{d(u_p, u_q), p \geq n, q \geq n\}$. On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy si la suite réelle $(\delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

Remarque 1.1.9. 1. δ_n est le diamètre de la partie : $A_n = \{u_p, p \geq n\}$.

La suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante, $(\delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aussi.

2. La définition s'écrit traditionnellement :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N}, \forall p \geq n, \forall q \geq n, d(u_p, u_q) < \varepsilon$$

3. Il est commode aussi d'introduire : $\varepsilon_n = \sup_{p \geq n} d(u_{n+p}, u_n)$,
 $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy si et seulement si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon_n = 0$.

Définition 1.1.20 (Espace complet). Un espace métrique est dit complet si, dans cet espace, toute suite de Cauchy est convergente.

Définition 1.1.21 (Partie complet). Une partie A de X est dite complet, si toute suite de Cauchy formée de points de A est convergente dans A .

Définition 1.1.22 (Espace de Banach). Un espace de Banach est un espace vectoriel normé (e.v.n) complet.

Définition 1.1.23. La suite extraite (ou sous-suite) d'une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, toute suite de la forme $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ où $n_0 < n_1 < n_2 < \dots$, est une suite strictement croissante de nombres naturels.

Remarque 1.1.10. Toute suite extraite d'une suite convergente de limite $\ell \in X$ est aussi convergente de même limite ℓ .

Proposition 1.1.5. Pour toute partie A de X et tout point x de X on a l'équivalence entre :

1. $x \in \bar{A}$.
2. Il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de A dont x est limite ($\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x$).

Démonstration. 1) \Rightarrow 2) Soit x un élément de \bar{A} . Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $B(x, \frac{1}{n}) \cap A \neq \emptyset$, alors il existe $x_n \in B(x, \frac{1}{n}) \cap A$. La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ainsi définie est une suite de A et elle converge vers x .

2) \Rightarrow 1) Si ($\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x$) où $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de A , alors pour tout $r > 0$ il existe n_r tel que : $d(x_{n_r}, x) < r$, on a $x_{n_r} \in B(x, r) \cap A$ alors $x \in \bar{A}$.

□

Définition 1.1.24. Une valeur d'adhérence de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un point $x \in X$ qui est la limite d'une sous-suite de (x_n) .

Remarque 1.1.11. *Un point $x \in X$ est une valeur d'adhérence de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ si et seulement si pour tout $r > 0$ la boule $B(x, r)$ contient une infinité de termes de la suite, donc l'ensemble $\{n \in \mathbb{N}, x_n \in B(x, r)\}$ est infini.*

Exemple 1.1.9. $\pm 1, \pm i$ sont les valeurs d'adhérence de la suite complexe définie par $z_n = i^n + \frac{1}{n+1}$.

Définition 1.1.25. *Un sous-ensemble $F \subset X$ est dit fermé si le sous-ensemble complémentaire $C_X F$ est ouvert.*

Proposition 1.1.6. *Soit sous-ensemble $F \subset X$, alors, les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. F est fermé.
2. $\overline{F} = F$.
3. La limite de toute suite de F qui converge dans X est un élément de F .

Démonstration. 1) \Rightarrow 2) Supposons par l'absurde que $\overline{F} \neq F$, on existe $x \in \overline{F} \setminus F$, donc $x \in C_X F$ (où $C_X F$ ouvert). Puisque $x \in \overline{F}$, on a $C_X F \cap F \neq \emptyset$. Contradiction.

2) \Rightarrow 3) Voir Proposition 1.1.5.

3) \Rightarrow 1) Par l'absurde, soit $C_X F$ n'était pas ouvert alors existe $x \in C_X F$, tel que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, B(x, \frac{1}{n}) \not\subset C_X F$, donc $B(x, \frac{1}{n}) \cap F \neq \emptyset$. Alors, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, existe $x_n \in B(x, \frac{1}{n}) \cap F$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x$ avec $x \in C_X F$. Contradiction. □

Exemple 1.1.10. *Tout sous-ensemble fini $Y \subset X$ est fermé.*

Puisque, si $x \in \overline{Y}$, il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tel que $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x$. Prend $\varepsilon = \min\{d(x, y), x, y \in Y, \text{ et } x \neq y\} > 0$. On a $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n > n_0, d(x, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}$, donc $\forall n \geq n_0, d(x_{n_0}, x_n) \leq d(x_{n_0}, x) + d(x, x_n) < \varepsilon$, alors $x_{n_0} = x_n, \forall n \geq n_0$. On obtient donc $x = x_{n_0} \in Y$.

1.2 Espaces métriques partiels

Définition 1.2.1. [18] *On dit que la fonction $p : X \times X \rightarrow [0, +\infty[$ est une métrique partielle sur X si les conditions suivantes sont satisfaites :*

(p1) $p(x, x) = p(y, y) = p(x, y)$ si et seulement si $x = y$ pour tous $x, y \in X$,

(p2) $p(x, x) \leq p(x, y)$ pour tous $x, y \in X$,

(p3) $p(x, y) = p(y, x)$ pour tous $x, y \in X$,

(p4) $p(x, z) \leq p(x, y) + p(y, z) - p(y, y)$ pour tous $x, y, z \in X$.

Alors (X, p) est dite un espace métrique partiel.

Pour une métrique partielle p sur X , la fonction $p^s : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$ donnée par

$$p^s(x, y) = 2p(x, y) - p(x, x) - p(y, y) \quad (1.1)$$

et

$$p^w(x, y) = p(x, y) - \min\{p(x, x), p(y, y)\} \quad (1.2)$$

sont des métriques sur X . Chaque métrique partielle p sur X engendre τ_p est une T_0 topologie sur X avec une base des familles d'ouvertes p -boules.

Exemple 1.2.1. *Un simple exemple d'un espace métrique partiel est la paire (\mathbb{R}^+, p) , où $p : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ est définie par $p(x, y) = \max\{x, y\}$.*

Exemple 1.2.2. *Si $X = \{[a, b] : a, b \in \mathbb{R}, a \leq b\}$, alors $p([a, b], [c, d]) = \max\{b, d\} - \min\{a, c\}$ est une métrique partielle sur X .*

Définition 1.2.2. [11]

(i) *Une suite $\{x_n\}$ dans un espace métrique partiel (X, p) converge vers $x \in X$ si et seulement si $p(x, x) = \lim_{n \rightarrow \infty} p(x, x_n)$.*

(ii) *une suite $\{x_n\}$ dans un espace métrique partiel (X, p) est dite de Cauchy si et seulement si $\lim_{n, m \rightarrow \infty} p(x_n, x_m)$ existe (et finie).*

(iii) *un espace métrique partiel (X, p) est complet si toute suite de Cauchy $\{x_n\}$ dans X converge vers un point $x \in X$ tel que $p(x, x) = \lim_{n, m \rightarrow \infty} p(x_n, x_m)$.*

Lemme 1.2.1. [11]

(a1) *Une suite $\{x_n\}$ est de Cauchy dans un espace métrique partiel (X, p) si et seulement si $\{x_n\}$ est de Cauchy dans l'espace métrique (X, p^s) .*

(a2) *Un espace métrique partiel (X, p) est complet si et seulement si l'espace métrique (X, p^s) est complet.*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p^s(x, x_n) = 0 \Leftrightarrow p(x, x) = \lim_{n \rightarrow \infty} p(x, x_n) = \lim_{n, m \rightarrow \infty} p(x_n, x_m). \quad (1.3)$$

1.3 Espaces métriques cônes

Soit E un espace de Banach. Un sous-ensemble fermé convexe non vide $P \subseteq E$ est appelé un cône dans E s'il satisfait :

- (i) P est fermé, non vide et $P \neq \{0\}$.
- (ii) Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, $a, b \geq 0$ et pour tous $x, y \in P \implies ax + by \in P$.
- (iii) $x \in P$ et $-x \in P \implies x = 0$.

L'espace E peut être partiellement ordonné par le cône $P \subseteq E$, $x \leq y$ si et seulement si $y - x \in P$. Aussi nous écrivons $x \ll y$ si $y - x \in \text{int}P$ où $\text{int}P$ désigne l'intérieur de P .

Dans la suite, on suppose que E est un espace de Banach, P est un cône dans E et \leq est une partielle ordonné sur P .

Définition 1.3.1. [1] Un cône P dans $(E, \|\cdot\|)$ est appelé :

(N)Normal : S'il existe une constante $k > 0$ telle que :

$$0 \leq x \leq y \text{ implique que } \|x\| \leq k\|y\|.$$

Le nombre entier le moins positive k est appelé la constante normale de P , nous verrons qu'il n'y a pas un cônes de constante $k < 1$.

(R) Régulier : Si chaque suite croissante qui est bornée supérieure est convergent.

C'est-à-dire si $\{x\}_{n \geq 1}$ est une suite telle que $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq y$ pour certains $y \in E$ alors il existe $x \in E$ tel que : $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0$. De manière équivalente, le cône P est régulier si et seulement si chaque suite décroissante qui est bornée inférieure convergente.

(M) Minihedral : Si $\sup\{x, y\}$ existe $\forall x, y \in E$, et fortement Minihedral si tout sous-ensemble de E qui est borné ci-dessus a un supérieure.

(S) Solide : Si $\overset{\circ}{P} \neq \emptyset$.

Lemme 1.3.1. [1]

- (i) Tout cône régulier est normal.
- (ii) Pour tout $k > 1$, il existe un cône normal avec un constante normal $K > k$.

Proposition 1.3.1. [1] Il existe des cônes normaux qui ne sont pas réguliers.

L'exemple suivant donne une illustration.

Exemple 1.3.1. Soit $E = C[0, 1]$ avec la norme supérieure et $P = \{f \in E : f \geq 0\}$ alors P est un cône normal avec $k = 1$ qui n'est pas régulier. Puisque la suite $\{x_n\}$ est décroissante, mais n'est pas uniformément convergente vers 0. Ainsi, P n'est pas fortement minihedral.

Définition 1.3.2. [9] Soit X un ensemble non vide. Supposons que l'application $d : X \times X \rightarrow E$ satisfait :

(c1) $0 < d(x, y)$ pour tous $x, y \in X$ et $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,

(c2) $d(x, y) = d(y, x)$ pour tous $x, y \in X$,

(c3) $d(x, y) = d(x, z) + d(y, z)$ pour tous $x, y, z \in X$.

Alors d est appelé un métrique cône sur X et (X, d) est appelé un espace métrique cône. Il est évident que les espaces métriques cônes généralisent les espaces métriques.

Exemple 1.3.2. Soient $E = \mathbb{R}^2, P = \{(x, y) \in E, x, y \geq 0\} \subset \mathbb{R}^2, X = \mathbb{R}$ et $d : X \times X \rightarrow E$ tel que $d(x, y) = (|x - y|, \alpha|x - y|)$, où $\alpha \geq 0$ constante. Alors (X, d) est un espace métrique cône.

Exemple 1.3.3. Soit $E = \ell^1, P = \{\{x_n\}_{n \geq 1} \in E : x_n \geq 0, \text{ pour tout } n\}$ (X, d) est un espace métrique et $d' : X \times X \rightarrow E$, définie par $d'(x, y) = \left\{ \frac{d(x, y)}{2^n} \right\}, n \geq 1$. Alors (X, d') est un espace métrique cône.

Définition 1.3.3. [17] Soit (X, d) un espace métrique cône, $x \in X$ et (x_n) une suite dans X . Alors

(i) (x_n) est dite convergente vers x si pour tout $c \in E$ avec $c \gg 0$ il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ telle que $d(x_n, x) \ll c$ pour tout $n \geq n_0$, et on note par $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ ou $x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} x$.

(ii) (x_n) est dite une suite de Cauchy si pour tout $c \in E$ avec $c \gg 0$ il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ telle que $d(x_n, x_m) \ll c$ pour tous $n, m \geq n_0$.

(iii) On dit que (X, d) est un espace métrique cône complet si toutes les suites de Cauchy sont convergentes.

Définition 1.3.4. [12] Soit (X, d) un espace métrique cône. Une application $T : X \rightarrow X$ est dite Lipschitzienne s'il existe $k \in \mathbb{R}$ telle que

$$d(Tx, Ty) \leq kd(x, y), \tag{1.4}$$

pour tous $x, y \in X$. La plus petite constante k qui satisfait l'inégalité (1.4) est appelée constante de Lipschitz de T , notée $Lip(T)$. En particulier, T est une contraction si $Lip(T) \in [0, 1[$.

Remarque 1.3.1. [19] Soit (X, d) un espace métrique cône. Si $c \in \overset{\circ}{P}, 0 \ll a_n$ et $a_n \rightarrow 0$ alors il existe n_0 tel que pour tout $n > n_0$ on a $a_n \ll c$.

Corollaire 1.3.1. [19]

1. Si $a \leq b$ et $b \ll c$ alors $a \ll c$.
2. Si $0 \leq u \ll c$ pour $c \in \overset{\circ}{P}$ alors $u = 0$.

Théorème 1.3.1. Soit (X, d) une métrique cône sur un espace de Banach E , et P un cône normal avec une constante normale k . L'application $D : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$ définie par $D(x, y) = \|d(x, y)\|$ satisfait les propriétés suivantes :

- (1) $D(x, y) = 0 \iff x = y$,
- (2) $D(x, y) = D(y, x)$, pour tous $x, y \in X$,
- (3) $D(x, y) \leq k(D(x, z_1) + D(z_1, z_2) + \dots + D(z_n, y))$, pour tous $x, y, z_i \in X, i = 1, 2, \dots, n$.

Démonstration. (1) et (2) sont évidents.

Maintenant on montre (3), soit $x, y, z_1, \dots, z_n \in X$. On utilise l'inégalité triangulaire, pour obtenir

$$d(x, y) \leq d(x, z_1) + d(z_1, z_2) + \dots + d(z_n, y).$$

Puisque P est normale avec constante k , on obtient

$$\|d(x, y)\| \leq k\|d(x, z_1) + d(z_1, z_2) + \dots + d(z_n, y)\|,$$

ce qui donne

$$\|d(x, y)\| \leq k(\|d(x, z_1)\| + \|d(z_1, z_2)\| + \dots + \|d(z_n, y)\|).$$

□

Théorème 1.3.2. [1] Soit (X, d) un espace métrique cône et P un cône normal avec une constante normale k . Soit $\{x_n\}$ une suite dans X , alors

- (i) $\{x_n\}$ converge vers x si et seulement si $d(x_n, x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.
- (ii) Si $\{x_n\}$ converge vers x et $\{x_n\}$ converge vers y , alors $x = y$. C'est à dire la limite de $\{x_n\}$ est unique.
- (iii) Si $\{x_n\}$ converge vers x , alors $\{x_n\}$ est une suite de Cauchy.
- (iv) $\{x_n\}$ est une suite de Cauchy si et seulement si $d(x_n, x_m) \xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} 0$.

(v) Si $\{x_n\}$ et $\{y_n\}$ sont deux suites de X et $x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} x, y_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} y$.
Alors $d(x_n, y_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} d(x, y)$.

Démonstration. (i) Supposons que $\{x_n\}$ converge vers x . Pour tout $\varepsilon > 0$, on choisit $c \in E$ avec $c \gg 0$ et $k\|c\| < \varepsilon$. Alors, il existe N tel que pour tout $n > N$, $d(x_n, x) \ll c$. Alors $\forall n > N$, $\|d(x_n, x)\| \leq k\|c\| < \varepsilon$. C'est à dire $d(x_n, x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$.

Inversement : supposons que $d(x_n, x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ pour $c \in E$ avec $c \gg 0$ il existe $\delta > 0$ telle que $\|x\| < \delta$ ce qui donne $c - x \in \overset{\circ}{P}$ pour δ il existe N , telle que pour tout $n > N$, $\|d(x_n, x)\| < \delta$, alors $c - d(x_n, x) \in \overset{\circ}{P}$. C'est à dire $d(x_n, x) \ll c$. Donc, $\{x_n\}$ converge vers x .

(ii) Pour tout $c \in E$ avec $c \gg 0$, il existe N telle que pour tout $n > N$, $d(x_n, x) \ll c$ et $d(x_n, y) \ll c$, on a

$$d(x, y) \leq d(x_n, x) + d(x_n, y) \leq 2c.$$

Par conséquent $\|d(x, y)\| \leq 2k\|c\|$, puisque c est arbitraire, on trouve $d(x, y) = 0$.

Donc, $x = y$.

(iii) Pour tout $c \in E$ avec $c \gg 0$, il existe N tel que pour tous $n, m > N$, $d(x_n, x_m) \ll \frac{c}{2}$. D'où $d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x_m, x) \ll c$. Donc, $\{x_n\}$ est une suite de Cauchy.

(iv) Supposons que $\{x_n\}$ est une suite de Cauchy. Pour tout $\varepsilon > 0$, on choisit $c \in E$ avec $c \gg 0$ et $k\|c\| < \varepsilon$. Alors, il existe N , pour tous $n, m > N$, $d(x_n, x_m) \ll c$. Alors $\|d(x_n, x_m)\| \leq k\|c\| < \varepsilon$, quand $n, m > N$. C'est à dire $d(x_n, x_m) \xrightarrow[n, m \rightarrow \infty]{} 0$.

Inversement : supposons que $d(x_n, x_m) \xrightarrow[n, m \rightarrow \infty]{} 0$ pour $c \in E$ avec $c \gg 0$, il existe $\delta > 0$, telle que $\|x\| < \delta$ ce qui donne $c - x \in \overset{\circ}{P}$ pour δ il existe N , telle que pour tous $n, m > N$, $\|d(x_n, x_m)\| < \delta$. Alors, $c - d(x_n, x_m) \in \overset{\circ}{P}$ ainsi, $\|d(x_n, x_m)\| \ll c$. Donc $\{x_n\}$ est une suite de Cauchy.

(v) Pour tout $\delta > 0$, on choisit $c \in E$ avec $c \gg 0$ et $\|c\| < \frac{\varepsilon}{4k+2}$. puisque $x_n \xrightarrow{} x$ et $y_n \xrightarrow{} y$, on a

$$d(x_n, y_n) \leq d(x_n, x) + d(x, y) + d(y_n, y) \leq d(x, y) + 2c$$

$$d(x, y) \leq d(x_n, x) + d(x_n, y_n) + d(y_n, y) \leq d(x_n, y_n) + 2c$$

Par conséquent, $0 \leq d(x, y) + 2c - d(x_n, y_n) \leq 4c$,

et $\|d(x_n, y_n) - d(x, y)\| \leq \|d(x, y) + 2c - d(x_n, y_n)\| + \|2c\| \leq (4k + 2)\|c\| < \varepsilon$

Donc, $d(x_n, y_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} d(x, y)$.

□

Chapitre 2

Point fixe pour les multifonctions contractantes

Dans ce chapitre, on présente quelques résultats de la théorie du point fixe pour les fonctions du point fixe de Banach, et de Nadler pour les multifonctions contractantes définies sur les espaces métriques, les espaces métriques partiels et les espaces métriques cônes.

2.1 Point fixe pour les multifonctions

2.1.1 Quelques éléments d'analyse multivoque

Dans notre étude, certains éléments d'analyse multivoque seront utilisés. Il est donc utile de rappeler quelques définitions et propriétés fondamentales sur les multifonctions qui sont des fonctions d'un ensemble X dans $\mathcal{P}(Y)$ (ensemble de partie d'un ensemble Y noté aussi par 2^Y) et qu'on désigne par la notation $F : X \rightrightarrows Y$.

Notons que les multifonctions apparaissent de façon naturelle dans plusieurs et différentes situations. Citons quelques exemples.

Exemple 2.1.1. Soient X, Y deux ensembles non vides et $f : X \rightarrow Y$ une fonction. On peut définir une multifonction de Y dans $\mathcal{P}(X)$ telle que à tout point $y \in Y$, on associe l'image réciproque de y par f i.e. l'ensemble

$$f^{-1}(y) \doteq \{x \in X : f(x) = y\}.$$

Ici $F : Y \rightrightarrows X$ tel que $F(y) \doteq f^{-1}(y)$.

Exemple 2.1.2. Soit $g \doteq (g_1, \dots, g_m) : X \times W \rightarrow \mathbb{R}^m$ une fonction donnée. Pour tout $w \in W$ on veut déterminer $x \in X$ tel que $g_i(x, w) \leq 0$ ($i = \overline{1, m}$). On définit ainsi une multifonction $F : W \rightrightarrows X$ telle que $F(w) \doteq \{x \in X : g_i(x, w) \leq 0, \forall i = 1, \dots, m\}$.

Le domaine, l'image et le graphe d'une multifonction $F : X \rightrightarrows Y$ sont définis respectivement par

$$\text{Dom}(F) \doteq \{x \in X : F(x) \neq \emptyset\},$$

$$\text{Im}(F) \doteq \{y \in Y, \exists x \in X : y \in F(x)\} = F(X) \quad \text{où} \quad F(A) = \bigcup_{x \in A} F(x) (A \subset X),$$

$$\text{Gr}(F) \doteq \{(x, y) \in X \times Y : y \in F(x)\}.$$

Il est clair que le domaine et l'image de F sont les projections du graphe de F sur X et Y respectivement.

Notons que pour toute multifonction $F : X \rightrightarrows Y$, on peut définir son inverse noté F^{-1}

comme étant une multifonction de Y dans $\mathcal{P}(X)$ telle que

$$x \in F^{-1}(y) \iff y \in F(x)$$

$$\text{ou } (y, x) \in Gr(F^{-1}) \iff (x, y) \in Gr(F)$$

Ainsi, $Dom(F^{-1}) = Im(F)$, $Im(F^{-1}) = Dom(F)$

et il est facile de voir que $(F^{-1})^{-1} = F$.

On fait remarquer aussi que des opérations et des règles de calcul peuvent être définies pour les multifonctions.

2.1.2 Distance de Hausdorff

Nous allons introduire, dans ce paragraphe, la distance de Pompeiu-Hausdorff. Cette notion nous permettra de définir la notion de Lipschitziannité d'une multifonction.

Définition 2.1.1. [8] Soient A, B deux parties d'un espace métrique (X, d) .

(1) On définit l'excès de A sur B et on note $e(A, B)$ par

$$e(A, B) := \sup_{x \in A} d(x, B) = \sup_{x \in A} \inf_{y \in B} d(x, y) \text{ si } B \neq \emptyset$$

$$\text{et } e(A, \emptyset) := +\infty \text{ si } A \neq \emptyset, \quad e(\emptyset, B) := 0.$$

(2) La distance de Pompeiu-Hausdorff entre A et B est définie par

$$d_H(A, B) := \max(e(A, B), e(B, A))$$

Exemple 2.1.3. Dans \mathbb{R} considérons $A = [0, 1]$ et $B =]2, 4[$. Un calcul élémentaire donne que $e(A, B) = 2$, $e(B, A) = 3$ et donc $d_H(A, B) = 3$.

$e(\mathbb{R}^+, A) = +\infty$, $e(A, \mathbb{R}^+) = 0$ donc $d_H(\mathbb{R}^+, A) = +\infty$.

Notons que l'excès n'est pas symétrique et si $e(A, B) = 0$, ceci n'implique pas que $A = B$ donc l'excès ne peut pas définir une distance, on peut conclure aussi de cet exemple que d_H ne définit pas une distance sur l'ensemble $\mathcal{P}(X)$ des parties de X car $d_H(\cdot, \cdot)$ n'est pas à valeurs dans \mathbb{R} . Cependant, on montre que d_H définit une distance sur l'ensemble des fermés bornés non vides de X (particulièrement, si d est une distance bornée sur X) Ceci grâce aux propriétés suivantes :

Proposition 2.1.1. [8] Soient A, B et C des parties non vides d'un espace métrique (X, d) .

- (i) Si A, B sont bornés alors $d_H(A, B) \in \mathbb{R}$,
- (ii) $e(A, B) = 0 \iff \bar{A} \subset \bar{B}$ donc $d_H(A, B) = 0 \iff \bar{A} = \bar{B}$,
- (iii) $A \subset C$ alors $e(A, B) \leq e(C, B)$ et si $B \subset C$ alors $e(A, C) \leq e(A, B)$,
- (iv) $e(A, B) \leq e(A, C) + e(C, B)$.

Démonstration. La première propriété est évident. La propriété (ii) est obtenue (de même pour (iii)) grâce aux propriétés de la borne supérieure et de la borne inférieure qui sont comme suit :

$$d(x, B) = 0 \iff x \in \bar{B},$$

$$\sup_A \leq \sup_B \text{ et } \inf_B \leq \inf_A \text{ lorsque } A \subset B$$

Pour montrer (iv), on a

$$\begin{aligned} d(x, B) &\leq d(x, y) + d(y, B) \quad \forall x, y \in X, \\ &\leq d(x, y) + e(C, B) \quad \forall y \in C, \\ &\leq d(x, C) + e(C, B) \quad \forall x \in A. \end{aligned}$$

Passant à la borne supérieure, on obtient (iv). On peut remarquer tout de suite que :

Remarque 2.1.1. (*Semi-continuité en terme des excès*)

- Lorsque $e(F(x_0), F(x)) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0$ alors F est semi-continue inférieurement en x_0
 - Lorsque F est semi-continue supérieurement en x_0 alors $e(F(x), F(x_0)) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0$.
- La réciproque est vraie si $F(x_0)$ est compact.

□

Lemme 2.1.1. Soit (X, d) un espace métrique, $A, B \in CB^p(X)$ et $h > 1$. Pour tout $a \in A$, il existe $b = b(a) \in B$ telle que

$$d(a, b) \leq h d_H(A, B). \tag{2.1}$$

Introduisons maintenant la notion de continuité au sens de Hausdorff par la définition suivante.

Définition 2.1.2. [8] Soient X, Y deux espaces métriques et une multifonction $F : X \rightrightarrows Y$.

1. F est dite continue au sens de Hausdorff en x_0 si

$$d_H(F(x_0), F(x)) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0 \quad (2.2)$$

2. F est dite lipschitzienne stable en x_0 s'il existe une constante $c > 0$ et un voisinage V de x_0 tels que pour tout $x \in V$

$$e(F(x), F(x_0)) \leq cd(x, x_0),$$

ou de façon équivalente dans des e.v.n,

$$F(x) \subset F(x_0) + c\|x - x_0\| B_Y.$$

Autrement dit, pour tout $y \in F(x)$ il existe $y_0 \in F(x_0)$ tel que

$$\|y - y_0\| \leq c\|x - x_0\| \text{ (ou encore } \|y - y_0\| = O(\|x - x_0\|)).$$

Exemple 2.1.4. La multifonction $F : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$ telle que $F(x) := [x^2, 2x^2]$ est continue au sens de Hausdorff sur \mathbb{R}

En effet, soit $x \in \mathbb{R}$ alors pour $y \in F(x) = [x^2, 2x^2]$ i.e, $y = x^2 u_0$ avec $u_0 \in [1, 2]$,

on a

$$d(y, F(x_0)) \leq |y - y_0|, \quad \forall y_0 \in F(x_0) = x_0^2[1, 2].$$

En particulier, pour $y_0 := x_0^2 u_0$, $d(y, F(x_0)) \leq |x^2 - x_0^2| u_0$. Passant à la borne supérieure sur $F(x)$, on obtient

$$e(F(x), F(x_0)) \leq 2|x^2 - x_0^2| \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0.$$

De la même façon, on montre que $e(F(x_0), F(x)) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0$ d'où la continuité au sens de Hausdorff en x_0 . De plus, pour $x \in V :=]x_0 - 1, x_0 + 1[$ de x_0 , on a

$$\begin{aligned} e(F(x), F(x_0)) &\leq 2|x^2 - x_0^2| \\ &\leq 2|x + x_0||x - x_0| \\ &\leq 2(1 + 2|x_0|)|x - x_0| \quad \forall x \in V. \end{aligned}$$

Ainsi F est lipschitzienne stable en x_0 avec $c = 2(1 + 2|x_0|)$.

Théorème 2.1.1 (Banach(1922)). [2] Soit (X, d) un espace métrique complet et soit $T : X \rightarrow X$ une application contractante avec la constante de contraction k alors T a un unique point fixe $x \in X$. De plus nous avons la propriété suivante qui est importante si $x_0 \in X$ et $x_n = Tx_{n-1}$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \quad \text{et} \quad d(x_n, x) \leq k^n (1 - k)^{-1} d(x_1, x_0).$$

Démonstration. L'existence :

Soit $y \in X$ un point arbitraire dans X . Considérons la suite $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ donnée par :

$$\begin{cases} x_0 = y \\ x_n = T(x_{n-1}), \quad n \geq 1 \end{cases}$$

On doit prouver que (x_n) est une suite de Cauchy dans X . Pour $m < n$, on utilise l'inégalité triangulaire :

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x_{m+1}) + d(x_{m+1}, x_{m+2}) + \cdots + d(x_{n-1}, x_n)$$

Puisque T est une contraction, on a :

$$d(x_p, x_{p+1}) = d(Tx_{p-1}, Tx_p) \leq kd(x_{p-1}, x_p), \text{ pour } p \geq 1.$$

En répétant cette inégalité, on obtient :

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leq (k^m + k^{m+1} + \cdots + k^{n-1}) d(x_0, x_1) \\ &\leq k^m (1 + k + \cdots + k^{n-m-1}) d(x_0, x_1). \\ &\leq k^m (1 - k)^{-1} d(x_0, x_1) \end{aligned}$$

On déduit que $(x_n)_n$ est de Cauchy dans X qui est complet, donc $(x_n)_n$ converge vers x dans X . Par ailleurs puisque T est continue, on a :

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} T(x_{n-1}) = T\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n-1}\right) = Tx$$

Donc x est un point fixe de T (i.e. $Tx = x$)

L'unicité :

Supposons $x = Tx$ et $y = Ty$ alors :

$$d(x, y) = d(Tx, Ty) \leq kd(x, y)$$

ce qui donne que $d(x, y) = 0$ i.e. $x = y$ (puisque $k < 1$). □

Exemple 2.1.5. Soit $X = \mathbb{R}$ et l'application $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $x \mapsto F(x) = \frac{1}{2}x + 1$.

(X, d) est un espace métrique complet, tel que $\forall x, y \in X, d(x, y) = |x - y|$

on a, $\forall x, y \in \mathbb{R}$

$$|F(x) - F(y)| = \left| \frac{1}{2}x + 1 - \frac{1}{2}y - 1 \right| = \left| \frac{1}{2} \right| |x - y| = \frac{1}{2} |x - y| < |x - y|$$

Alors, F est contractante. Donc F admet un unique point fixe $x = 2$ tel que

$$F(x) = x \Rightarrow \frac{1}{2}x + 1 = x \Rightarrow (1 - \frac{1}{2})x = 1 \Rightarrow \frac{1}{2}x = 1 \Rightarrow x = 2.$$

Exemple 2.1.6. Soit $X = \mathbb{R}_+$ et l'application $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ telle que

$x \mapsto g(x) = \sqrt{x+1}$. D'après le théorème des accroissements finis on a, $\forall x, y \in X, \exists c \in]x, y[$ tels que

$$|g(x) - g(y)| = |g'(c)||x - y| = \left| \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \right| |x - y| < |x - y|$$

Alors g est contractante. Donc g admet un unique point fixe $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ tel que

$$g(x) = x \implies \sqrt{x+1} = x \implies x+1 = x^2 \implies x^2 - x = 1 \implies x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Théorème 2.1.2 (Nadler(1969)). [15] Soit (X, d) un espace métrique complet. Si $F : X \rightarrow CB(X)$ est une multifonction telle que pour tous $x, y \in X$, on a

$$H(F(x), F(y)) \leq \alpha p(x, y). \quad (2.3)$$

Où $\alpha \in [0, 1[$. Alors F a un point fixe.

Démonstration. Soit $x_0 \in X$. On choisit $x_2 \in F(x_0)$. Puisque $F(x_0), F(x_1) \in CB(X)$ et $x_1 \in F(x_0)$, d'après le lemme 2.1.1 il existe un point $x_2 \in F(x_1)$ tel que

$$d(x_1, x_2) \leq H(F(x_0), F(x_1)) + \alpha.$$

Puisque $F(x_1), F(x_2) \in CB(X)$ et $x_2 \in F(x_1)$, il existe un point $x_3 \in F(x_2)$ tel que

$$d(x_2, x_3) \leq H(F(x_1), F(x_2)) + \alpha^2.$$

De la même manière, on obtient une suite $\{x_i\}_{i=1}^\infty$ des points de X tels que $x_{i+1} \in F(x_i)$ et $d(x_i, x_{i+1}) \leq H(F(x_{i-1}), F(x_i)) + \alpha^i$ pour tout $i \geq 1$. Nous notons que

$$\begin{aligned} d(x_i, x_{i+1}) &\leq H(F(x_{i-1}), F(x_i)) + \alpha^i \leq \alpha d(x_{i-1}, x_i) + \alpha^i \\ &\quad [H(F(x_{i-2}), F(x_{i-1})) + \alpha^{i-1}] + \alpha^i \\ \alpha^2 d(x_{i-2}, x_{i-1}) + 2\alpha^i &\leq \dots \leq \alpha^i d(x_0, x_1) + i\alpha^i \end{aligned}$$

pour tout $i \geq 1$. Par conséquent

$$\begin{aligned} d(x_i, x_{i+j}) &\leq d(x_i, x_{i+1}) + d(x_{i+1}, x_{i+2}) + \dots + d(x_{i+j-1}, x_{i+j}) \\ &\leq \alpha^i d(x_0, x_1) + i\alpha^i + \alpha^{i+1} d(x_0, x_1) + (i+1)\alpha^{i+1} \\ &\quad + \dots + \alpha^{i+j-1} d(x_0, x_1) + (i+j-1)\alpha^{i+j-1} \\ &= \left(\sum_{n=i}^{i+j-1} \alpha^n \right) d(x_0, x_1) + \sum_{n=i}^{i+j-1} n\alpha^n \end{aligned}$$

pour tout $i, j \geq 1$. Alors la suite $\{x_i\}_{i=1}^\infty$ est une suite de Cauchy. Puisque (X, d) est complet, la suite $\{x_i\}_{i=1}^\infty$ converge vers un point $z_0 \in X$. Donc, la suite $\{F(x_i)\}_{i=1}^\infty$ converge vers $F(z_0)$ et puisque $x_i \in F(x_{i+1})$ pour tout i , alors $z_0 \in F(z_0)$. \square

2.2 Point fixe dans un espace métriques partiel

Soit (X, p) un espace métrique partiel. Soit $CB^p(X)$ une famille de tous les sous-ensembles non vides, fermés et bornés de l'espace métrique partiel (X, p) , induit par la métrique partiel p . On note que la fermeture est dans (X, τ_p) (τ_p est la topologie induite par p) et la bornété sont données comme suit.

Définition 2.2.1. [5] On dite que A est un ensemble bornée dans (X, p) s'il existe $x_0 \in X$ et $M \geq 0$ tel que pour tout $a \in A$ on a $a \in B_p(x_0, M)$, c'est à dire

$$p(x_0, a) < p(a, a) + M.$$

Pour $A, B \in CB^p(X)$ et $x \in X$, on définit

$$p(x, A) = \inf\{p(x, a) : a \in A\},$$

$$\delta_p(A, B) = \sup\{p(a, B) : a \in A\} \quad \text{et} \quad \delta_p(B, A) = \sup\{p(b, A) : b \in B\}.$$

Il est évident que

$$p(x, A) = 0 \implies p^s(x, A) = 0 \quad \text{où} \quad p^s(x, A) = \inf\{p^s(x, a), a \in A\}.$$

Remarque 2.2.1. [5] Soit (X, p) un espace métrique partiel et soit A est un ensemble non vide dans (X, p) , alors

$$a \in \bar{A} \iff p(a, A) = p(a, a). \tag{2.4}$$

Où \bar{A} est la fermeture de A par rapport à la métrique partiel p . On note que A est fermé dans (X, p) si et seulement si $\bar{A} = A$.

Maintenant, on donne quelques propriétés de l'application

$$\delta_p : CB^p(X) \times CB^p(X) \longrightarrow \mathbb{R}^+.$$

Proposition 2.2.1. [5] Soit (X, p) un espace métrique partiel pour tous $A, B, C \in CB^p(X)$, on a :

$$(i) \quad \delta_p(A, A) = \sup\{p(a, a) : a \in A\},$$

$$(ii) \quad \delta_p(A, A) \leq \delta_p(A, B),$$

$$(iii) \quad \delta_p(A, B) = 0 \implies A \subseteq B,$$

$$(iv) \quad \delta_p(A, B) \leq \delta_p(A, C) + \delta_p(C, B) - \inf_{c \in C} p(c, c).$$

Démonstration. (i) D'après (2.4), si $A \in CB^p(X)$ alors pour tout $a \in A$, on a $p(a, A) = p(a, a)$ comme $\overline{A} = A$ donc

$$\delta_p(A, A) = \sup\{p(a, A) : a \in A\} = \sup\{p(a, a) : a \in A\}.$$

(ii) Soit $a \in A$, puisque $p(a, a) \leq p(a, b)$ pour tout $b \in B$, donc on a

$$p(a, a) \leq p(a, B) \leq \delta_p(A, B).$$

D'après (i), on obtient que

$$\delta_p(A, A) = \sup\{p(a, a) : a \in A\} \leq \delta_p(A, B).$$

(iii) Supposons que $\delta_p(A, B) = 0$. On trouve $p(a, B) = 0$ pour tout $a \in A$. D'après (i) et (ii) on a

$$p(a, a) \leq \delta_p(A, B) = 0 \quad \text{pour tout } a \in A,$$

c'est à dire

$$p(a, a) = 0 \quad \text{pour tout } a \in A,$$

et

$$p(a, B) = p(a, a) \quad \text{pour tout } a \in A.$$

D'après (2.4) on a $a \in \overline{B} = B$ pour tout $a \in A$ donc $A \subseteq B$.

(iv) Soit $a \in A, b \in B$ et $c \in C$ et comme

$$p(a, b) \leq p(a, c) + p(c, b) - p(c, c),$$

donc on a

$$p(a, B) \leq p(a, c) + p(c, B) - p(c, c),$$

et

$$p(a, B) + p(c, c) \leq p(a, c) + \delta_p(C, B).$$

Puisque c est un élément arbitraire de C , donc on a

$$p(a, B) + \inf_{c \in C} p(c, c) \leq p(a, C) + \delta_p(C, B).$$

Comme a est un élément arbitraire de A , alors

$$\delta_p(A, B) \leq \delta_p(A, C) + \delta_p(C, B) - \inf_{c \in C} p(c, c).$$

□

Soit (X, p) un espace métrique partiel pour tous $A, B \in CB^p(X)$. On définit

$$H_p(A, B) = \max\{\delta_p(A, B), \delta_p(B, A)\}.$$

Proposition 2.2.2. [5] Soit (X, p) un espace métrique partiel pour tous $A, B \in CB^p(X)$, on a

$$(h1) \quad H_p(A, A) \leq H_p(A, B),$$

$$(h2) \quad H_p(A, B) = H_p(B, A),$$

$$(h3) \quad H_p(A, B) \leq H_p(A, C) + H_p(C, B) - \inf_{c \in C} p(c, c).$$

Démonstration. D'après (ii) de proposition 2.2.1, on a

$$H_p(A, A) = \delta_p(A, A) \leq \delta_p(A, B) \leq H_p(A, B).$$

Par définition, (h2) est évident. On utilise maintenant la propriété (iv) de la proposition 2.2.1. On a

$$\begin{aligned} H_p(A, B) &= \max\{\delta_p(A, B), \delta_p(B, A)\} \\ &\leq \max\{\delta_p(A, C) + \delta_p(C, B) - \inf_{c \in C} p(c, c), \delta_p(B, C) + \delta_p(C, A) - \inf_{c \in C} p(c, c)\} \\ &= \max\{\delta_p(A, C) + \delta_p(C, B), \delta_p(B, C) + \delta_p(C, A)\} - \inf_{c \in C} p(c, c) \\ &\leq \max\{\delta_p(A, C), \delta_p(C, A)\} + \max\{\delta_p(C, B), \delta_p(B, C)\} - \inf_{c \in C} p(c, c) \\ &= H_p(A, C) + H_p(C, B) - \inf_{c \in C} p(c, c). \end{aligned}$$

□

Corollaire 2.2.1. [5] Soit (X, p) un espace métrique partiel, pour $A, B \in CB^p(X)$, on a

$$H_p(A, B) = 0 \implies A = B.$$

Démonstration. Soit $H_p(A, B) = 0$, par définition de H_p ,

$$\delta_p(A, B) = \delta_p(B, A) = 0.$$

On utilise (iii) de la proposition 2.2.1, pour obtenir $A \subseteq B$ et $B \subseteq A$. Ainsi $A = B$. □

Remarque 2.2.2. [5] La réciproque de ce corollaire n'est pas vrai en général comme il clair de l'exemple suivant.

Exemple 2.2.1. Soit $X = [0, 1]$ et soit (X, p) un espace métrique partiel définie par

$$p(x, y) = \max\{x, y\},$$

de (i) de la proposition 2.2.1 on a

$$H_p(X, X) = \delta_p(X, X) = \sup\{x, 0 \leq x \leq 1\} = 1 \neq 0.$$

de proposition 2.2.2 et corollaire 2.2.1 l'application

$$H_p : CB^p(X) \times CB^p(X) \longrightarrow \mathbb{R}^+,$$

définie une métrique partielle de Pompeiu-Hausdorff induit par p .

Remarque 2.2.3. [5] Il facile montrer que toute métrique d'Hausdorff est une métrique partiel d'Hausdorff. La réciproque n'est pas vrai (Exemple 2.2.1).

Lemme 2.2.1. [5] Soit (X, p) un espace métrique partiel, $A, B \in CB^p(X)$ et $h > 1$. Pour tout $a \in A$, il existe $b = b(a) \in B$ telle que

$$p(a, b) \leq hH_p(A, B). \quad (2.5)$$

Démonstration. Si $A = B$, alors d'après (i) de proposition 2.2.1, on a

$$H_p(A, B) = H_p(A, A) = \delta_p(A, A) = \sup_{x \in A} p(x, x).$$

Soit $a \in A$. Puisque $h > 1$, donc on a

$$p(a, a) \leq \sup_{x \in A} p(x, x) = H_p(A, B) \leq hH_p(A, B).$$

Par conséquent $b = a$ vérifie (2.5). Si $A \neq B$, supposons qu'il existe $a \in A$ telle que

$$p(a, b) > hH_p(A, B),$$

pour tout $b \in B$. Ce qui donne

$$\inf\{p(a, y), y \in B\} \geq hH_p(A, B).$$

C'est à dire, $p(a, B) \geq hH_p(A, B)$. On a

$$H_p(A, B) \geq \delta_p(A, B) = \sup_{x \in A} p(x, B) \geq p(a, B) \geq hH_p(A, B). \quad (2.6)$$

Puisque $A \neq B$, d'après la corollaire 2.2.1 on a $H_p(A, B) \neq 0$ et l'inégalité (2.6) on trouve la contradiction $h \leq 1$. \square

Théorème 2.2.1 (Banach). [14] Soit (X, p) un espace métrique partiel complet et soit $f : X \rightarrow X$ une application contractante tel que,

$$\exists k \in [0, 1[, \forall x, y \in X, p(f(x), f(y)) \leq kp(x, y)$$

Alors il existe un unique point fixe $a \in X$ tel que $f(a) = a$, et $p(a, a) = 0$.

Démonstration. L'existence :

Supposons que $x \in X$ alors, pour tous $n, j \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} p(f^{n+j+1}(x), f^n(x)) &\leq p(f^{n+j+1}(x), f^{n+j}(x)) + p(f^{n+j}(x), f^n(x)) - p(f^{n+j}(x), f^{n+j}(x)) \\ &\leq k^{n+j}p(f(x), x) + p(f^{n+j}(x), f^n(x)) \end{aligned}$$

Ainsi, pour tous $n, j \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} p(f^{n+j+1}(x), f^n(x)) &\leq (k^{n+j} + k^{n+j-1} + \dots + k^{n+1} + k^n)p(f(x), x) + p(f^n(x), f^n(x)) \\ &\leq k^n \left(\frac{1 - k^{j+1}}{1 - k} \right) p(f(x), x) + k^n p(x, x) \\ &\leq \left(\frac{k^n}{1 - k} \right) p(f(x), x) + k^n p(x, x) \\ &\leq k^n \left(\frac{p(f(x), x)}{1 - k} + p(x, x) \right) \end{aligned}$$

Comme $\forall n \in \mathbb{N}, p(f^n(x), f^n(x)) \leq k^n p(x, x)$, on a $\{f^n(x)\}$ est une suite de Cauchy telle que,

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} p(f^n(x), f^m(x)) = 0.$$

Comme p est complète, on choisit $a \in X$ telle que $\{f^n(x)\}$ converge vers a et $p(a, a) = 0$.

Ainsi,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p(f^n(x), a) = 0.$$

Mais, $p(f(a), a) = 0, \forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} p(f(a), a) &\leq p(f(a), f^{n+1}(x)) + p(f^{n+1}(x), a) - p(f^{n+1}(x), f^{n+1}(x)) \\ &\leq kp(a, f^n(x)) + p(f^{n+1}(x), a). \end{aligned}$$

Alors, $f(a) = a$, et $p(a, a) = 0$ par (p1) et (p2).

L'unicité : Supposons que $b \in X$ et $f(b) = b$, alors,

$$p(a, b) = p(f(a), f(b)) \leq kp(a, b).$$

Comme $k < 1$, $p(a, b) = 0$, ainsi $a = b$.

Alors f admet un unique point fixe. □

Exemple 2.2.2. Soit $X = \mathbb{R}_*^+$ muni de la métrique partiel $p : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}^+$ définie par :

$$\forall x, y, t \in X, p(x, y) = |x - y|e^t.$$

On définit l'application $f : X \longrightarrow X$ par $f(x) = \sqrt{x}$. On a (X, p) est un espace métrique partiel complet. Montrons que f est contraction :

$$\forall x, y \in X, p(f(x), f(y)) = |\sqrt{x} - \sqrt{y}|e^t$$

On utilise le théorème des accroissements finis on a, $\forall x, y \in X, \exists c \in]x, y[$,

$$p(f(x), f(y)) \leq \frac{1}{2\sqrt{c}} |x - y|e^t = \frac{1}{2\sqrt{c}} p(x, y) \leq \frac{1}{2} p(x, y)$$

Où $k = \frac{1}{2} < 1$. Alors f est contraction d'après le théorème 2.2.1, f admet un unique point fixe.

$$f(x) = x \implies \sqrt{x} = x \implies x_0 = 0 \text{ ou } x_1 = 1$$

Puisque $x_0 \notin \mathbb{R}_*^+$, alors x_1 est un unique point fixe de f .

Exemple 2.2.3. Soit $X = \mathbb{R}^+$ muni de la métrique partiel $p : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}^+$ définie par :

$$\forall x, y \in X, p(x, y) = \frac{1}{4}|x - y|.$$

On définit l'application $f : X \longrightarrow X$ par $f(x) = 1 - \cos x$. On a (X, p) est un espace métrique partiel complet, f est contraction :

$$\forall x, y \in X, p(f(x), f(y)) = \frac{1}{4}|1 - \cos x - 1 + \cos y| = \frac{1}{4}|\cos x + \cos y|$$

D'après le théorème des accroissements finis on a, $\forall x, y \in X, \exists c \in]x, y[$,

$$p(f(x), f(y)) = \frac{1}{4}|\sin c| |x - y| \leq \frac{k}{4}|x - y| = kp(x, y)$$

Où $k < 1$. D'après le théorème 2.2.1, f admet un unique point fixe.

$$f(x) = x \implies 1 - \cos x = x \implies x = 0.$$

Alors $x = 0$ est un unique point fixe de f .

Théorème 2.2.2 (Nadler). [5] Soit (X, p) un espace métrique partiel complet. Si $T : X \longrightarrow CB^p(X)$ est une multifonction telle que pour tous $x, y \in X$, on a

$$H_p(Tx, Ty) \leq kp(x, y). \tag{2.7}$$

Où $k \in [0, 1[$. Alors T admet un point fixe.

Démonstration. Soit $x_0 \in X$ et $x_1 \in Tx_0$. D'après le Lemme 2.2.1 avec $h = \frac{1}{\sqrt{k}}$, il existe $x_2 \in Tx_1$ telle que

$$p(x_1, x_2) \leq \frac{1}{\sqrt{k}} H_p(Tx_0, Tx_1).$$

Comme, $H_p(Tx_0, Tx_1) \leq kp(x_0, x_1)$, alors $p(x_1, x_2) \leq \sqrt{k}p(x_0, x_1)$. Pour $x_2 \in Tx_1$, il existe $x_3 \in Tx_2$ tel que

$$p(x_2, x_3) \leq \frac{1}{\sqrt{k}} H_p(Tx_1, Tx_2) \leq \sqrt{k}p(x_1, x_2)$$

Par suite, on construire une suite $\{x_n\}$ dans X telle que

$$x_{n+1} \in Tx_n \text{ et } p(x_{n+1}, x_n) \leq \sqrt{k}p(x_n, x_{n-1}) \text{ pour tout } n \geq 1. \quad (2.8)$$

Maintenant d'après (2.8), on obtient

$$p(x_{n+1}, x_n) \leq (\sqrt{k})^n p(x_0, x_1) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \quad (2.9)$$

D'après (2.9) et la propriété (p4) de la métrique partiel, pour tout $m \in \mathbb{N}_*$, on a

$$\begin{aligned} p(x_n, x_{n+m}) &\leq p(x_n, x_{n+1}) + p(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots + p(x_{n+m-1}, x_{n+m}) \\ &\leq (\sqrt{k})^n p(x_0, x_1) + (\sqrt{k})^{n+1} p(x_0, x_1) + \cdots + (\sqrt{k})^{n+m-1} p(x_0, x_1) \\ &= ((\sqrt{k})^n + (\sqrt{k})^{n+1} + \cdots + (\sqrt{k})^{n+m-1}) p(x_0, x_1) \\ &\leq \frac{(\sqrt{k})^n}{1 - \sqrt{k}} p(x_0, x_1) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

puisque $0 < k < 1$. Par définition de p^s , on obtient pour tout $m \in \mathbb{N}_*$,

$$p^s(x_n, x_{n+m}) \leq 2p(x_n, x_{n+m}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0. \quad (2.10)$$

Ce qui donne $\{x_n\}$ est une suite de Cauchy dans (X, p^s) . Puisque (X, p) est complet, alors d'après Lemme 2.2.1, (X, p^s) est un espace métrique complet. Donc, la suite $\{x_n\}$ converge vers $x^* \in X$ par rapport à le métrique p^s , c'est à dire,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} p^s(x_n, x^*) = 0.$$

De plus, d'après (1.3), on a

$$p(x^*, x^*) = \lim_{n \rightarrow +\infty} p(x_n, x^*) = \lim_{n \rightarrow +\infty} p(x_n, x_n) \quad (2.11)$$

Puisque $H_p(Tx_n, Tx^*) \leq kp(x_n, x^*)$, donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} H_p(Tx_n, Tx^*) = 0 \quad (2.12)$$

Maintenant $x_{n+1} \in Tx_n$ donne que

$$p(Tx_{n+1}, Tx^*) \leq \delta_p(Tx_n, Tx^*) \leq H_p(Tx_n, Tx^*)$$

D'après (2.12), on obtient

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} p(Tx_{n+1}, Tx^*) = 0 \quad (2.13)$$

D'autre part, on a

$$p(x^*, Tx^*) \leq p(x^*, Tx_{n+1}) + p(Tx_{n+1}, Tx^*)$$

On prend $n \rightarrow +\infty$ et on utilise (2.11) et (2.13), on obtient $p(x^*, Tx^*) = 0$. Donc, d'après (2.11)

$$p(x^*, x^*) = 0,$$

on obtient

$$p(x^*, x^*) = p(x^*, Tx^*).$$

D'après (2.4) on trouve que $x^* \in \overline{Tx^*} = Tx^*$. Alors T admet un point fixe. \square

Exemple 2.2.4. Soit $X = \{0, 1, 4\}$ muni de la métrique partielle $p : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$ définie par

$$p(x, y) = \frac{1}{4}|x - y| + \frac{1}{2} \max\{x, y\} \text{ pour tous } x, y \in X.$$

On a $p(1, 1) = \frac{1}{2} \neq 0$ et $p(4, 4) = 2 \neq 0$, alors p n'est pas une métrique sur X . Comme $p^s(x, y) = |x - y|$ alors (X, p) est un espace métrique partiel complet.

On a $\{0\}$ et $\{0, 1\}$ sont deux ensembles bornés dans (X, p) . En fait, si $x \in \{0, 1, 4\}$, alors

$$\begin{aligned} x \in \overline{\{0\}} &\iff p(x, \{0\}) = p(x, x) \\ &\iff \frac{3}{4}x = \frac{1}{2} \\ &\iff x = 0 \\ &\iff x \in \{0\}. \end{aligned}$$

Alors $\{0\}$ est fermé par rapport à la métrique partiel p . Aussi

$$\begin{aligned} x \in \overline{\{0, 1\}} &\iff p(x, \{0, 1\}) = p(x, x) \\ &\iff \min \left\{ \frac{3}{4}x, \frac{1}{4}|x - 1| + \frac{1}{2} \max\{x, 1\} \right\} = \frac{1}{2} \\ &\iff x \in \{0, 1\}. \end{aligned}$$

D'où $\{0, 1\}$ est fermé par rapport à la métrique partielle p .

Maintenant, on définit l'application $T : X \longrightarrow CB^p(X)$ par

$$T(0) = T(1) = \{0\} \quad \text{et} \quad T(4) = \{0, 1\}.$$

Montrons que, pour tous $x, y \in X$, la condition de contraction (2.7) est vérifiée avec $k = \frac{1}{2}$. Pour cela, on considérons les cas suivants :

- $x, y \in \{0, 1\}$. On a

$$H_p(T(x), T(y)) = H_p(\{0\}, \{0\}) = 0,$$

et (2.7) est vérifiée.

- $x \in \{0, 1\}$, $y = 4$. On a

$$\begin{aligned} H_p(T(0), T(4)) &= H_p(T(1), T(4)) \\ &= H_p(\{0\}, \{0, 1\}) \\ &= \max \{p(0, \{0, 1\}), \max \{p(0, 0), p(1, 0)\}\} \\ &= \frac{3}{4} \leq \frac{11}{8} = kp(1, 4) < \frac{3}{2} = kp(0, 4). \end{aligned}$$

- $x = y = 4$. On a

$$\begin{aligned} H_p(T(4), T(4)) &= H_p(\{0, 1\}, \{0, 1\}) \\ &= \sup \{p(x, x), \quad x \in \{0, 1\}\} \\ &= \max \{p(0, 0), p(1, 1)\} \\ &= \frac{1}{2} \leq 1 = kp(4, 4). \end{aligned}$$

Ainsi, toutes les hypothèse de Théorème 2.2.2 sont vérifiées. Et $x = 0$ est un point fixe de T .

Exemple 2.2.5. Soit $X = \{0, 1, 2\}$ muni de la métrique partielle $p : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}^+$ définie par

$$\begin{aligned} p(0, 0) &= p(1, 1) = 0, \\ p(0, 1) &= p(1, 0) = \frac{1}{3}, \\ p(0, 2) &= p(2, 0) = \frac{11}{24}, \\ p(1, 2) &= p(2, 1) = \frac{1}{2}, \\ p(2, 2) &= \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

On définit l'application $T : X \longrightarrow CB^p(X)$ par

$$T(0) = T(1) = \{0\} \quad \text{et} \quad T(2) = \{0, 1\}.$$

On a $\{0\}$ et $\{0, 1\}$ sont deux ensembles bornés et fermés dans l'espace métrique partiel (X, p) , montrons que, pour tous $x, y \in X$, la condition de contraction (2.7) est vérifiée avec $k = \frac{2}{3}$. On considère les cas suivants :

- $x, y \in \{0, 1\}$. On a

$$H_p(T(x), T(y)) = H_p(\{0\}, \{0\}) = 0.$$

Et (2.7) est vérifiée.

- $x \in \{0, 1\}$, $y = 2$. On a

$$\begin{aligned} H_p(T(0), T(2)) &= H_p(T(1), T(2)) \\ &= H_p(\{0\}, \{0, 1\}) \\ &= \max \{p(0, \{0, 1\}), \max \{p(0, 0), p(1, 0)\}\} \\ &= \frac{1}{3} \leq \frac{11}{24}k = kp(1, 2) < \frac{1}{2}k = kp(1, 2). \end{aligned}$$

- $x = y = 2$. On a

$$\begin{aligned} H_p(T(2), T(2)) &= H_p(\{0, 1\}, \{0, 1\}) \\ &= \sup \{p(x, x), \quad x \in \{0, 1\}\} \\ &= \max \{p(0, 0), p(1, 1)\} \\ &= 0 \leq \frac{1}{4}k = kp(2, 2). \end{aligned}$$

Ainsi, toutes les hypothèses de théorème 2.2.2 sont vérifiées. Et $x = 0$ est un point fixe de T .

D'autre part, p^s induite par la métrique partielle p est donnée par :

$$\begin{aligned} p^s(0, 0) &= p^s(1, 1) = p^s(2, 2) = 0, \\ p^s(0, 1) &= p^s(1, 0) = p^s(0, 2) = p^s(2, 0) = \frac{2}{3}, \\ p^s(2, 1) &= p^s(1, 2) = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Maintenant, il est clair que le théorème 2.1.2 n'est pas applicable dans ce cas.

En effet, pour $x = 0$ et $y = 2$, on a

$$\begin{aligned}
 H_p(T(0), T(2)) &= H_p(\{0\}, \{0, 1\}) \\
 &= \max\{\sup\{p^s(0, \{0, 1\})\}, \sup\{p^s(\{0, 1\}, \{0\})\}\} \\
 &= \max\left\{0, \frac{2}{3}\right\} = \frac{2}{3} \\
 &\not\leq \frac{2}{3}k = kp^s(0, 2).
 \end{aligned}$$

Pour tout $k \in [0, 1[$.

2.3 Point fixe dans un espace métrique cône

L'ensemble $A \subset X$ est dite fermé si pour toute suite $\{x_n\} \subset A$ convergente vers x , on a $x \in A$. On note par $N(X)$ la famille de tous les sous-ensembles non vides de X et par $C(X)$ la famille de tous les sous-ensembles fermés non vides de X , et par $FixT$ l'ensemble de tous les points fixes de l'application T . Soient E un espace de Banach et P est un cône dans E avec intérieur non vide, et \leq est un partielle ordonné par rapport à P .

Définition 2.3.1. [3] Soit (X, d) un espace métrique cône et \mathcal{M} est un famille de sous-ensembles non vides de X . Une application $H : \mathcal{M} \times \mathcal{M} \rightarrow E$ est dite H -métrique cône sur \mathcal{M} induit par d si

$$(H1) \quad 0 \leq H(A, B) \text{ pour tous } A, B \in \mathcal{M} \text{ et } H(A, B) = 0 \iff A = B,$$

$$(H2) \quad H(A, B) = H(B, A) \text{ pour tous } A, B \in \mathcal{M},$$

$$(H3) \quad H(A, B) \leq H(A, C) + H(C, B) \text{ pour tous } A, B, C \in \mathcal{M},$$

$$(H4) \quad \text{Si } A, B \in \mathcal{M}, 0 < \varepsilon \in E \text{ avec } H(A, B) < \varepsilon, \text{ alors pour } a \in A \text{ il existe } b \in B \text{ telle que } d(a, b) < \varepsilon.$$

Théorème 2.3.1 (Banach). [9] Soit (X, d) un espace métrique cône complet, P un cône normal à normale constante K . Supposons que l'application $T : X \rightarrow X$ satisfait la condition contractive

$$d(Tx, Ty) \leq kd(x, y), \text{ pour tous } x, y \in X, \quad (2.14)$$

où $k \in [0, 1)$ est une constante. Alors T a un point fixe unique dans X . Et pour tout $x \in X$, la suite itérative $\{T^n x\}$ converge vers le point fixe.

Démonstration. Soit $x_0 \in X$, et $x_1 = Tx_0$, $x_2 = Tx_1 = T^2x_0$, \dots , $x_{n+1} = Tx_n = T^{n+1}x_0$. On a

$$\begin{aligned} d(x_{n+1}, x_n) &= d(Tx_n, Tx_{n-1}) \leq kd(x_n, x_{n-1}) \\ &\leq k^2d(x_{n-1}, x_{n-2}) \leq \dots \leq k^nd(x_1, x_0). \end{aligned}$$

Donc pour $n > m$,

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq d(x_n, x_{n-1}) + d(x_{n-1}, x_{n-2}) + \dots + d(x_{m+1}, x_m) \\ &\leq (k^{n-1} + k^{n-2} + \dots + k^m) d(x_1, x_0) \leq \frac{k^m}{1-k} d(x_1, x_0). \end{aligned}$$

On obtient $\|d(x_n, x_m)\| \leq \frac{k^m}{1-k} K \|d(x_1, x_0)\|$. Ce qui donne $d(x_n, x_m) \xrightarrow[n, m \rightarrow \infty]{} 0$.

Par conséquent $\{x_n\}$ est une suite de Cauchy. Par la complétude de X , il existe $x^* \in X$ tel que $x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} x^*$. Puisque

$$d(Tx^*, x^*) \leq d(Tx_n, Tx^*) + d(Tx_n, x^*) \leq kd(x_n, x^*) + d(x_{n+1}, x^*),$$

$$\|d(Tx^*, x^*)\| \leq K(k\|d(x_n, x^*)\| + \|d(x_{n+1}, x^*)\|) \longrightarrow 0.$$

Alors $\|d(Tx^*, x^*)\| = 0$, ce qui donne $Tx^* = x^*$. Donc x^* est un point fixe de T .

L'unicité : Si y^* est un point fixe de T , alors

$$d(x^*, y^*) = d(Tx^*, Ty^*) \leq kd(x^*, y^*).$$

On obtient $\|d(x^*, y^*)\| = 0$ et $x^* = y^*$. Donc le point fixe de T est unique. \square

Exemple 2.3.1. Soit $E = \mathbb{R}^2$, et $P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \geq 0\}$ un cône normal dans E . Soit $X = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1\} \cup \{(0, x) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1\}$, l'application $d : X \times X \longrightarrow E$ est défini par :

$$\begin{aligned} d((x, 0), (y, 0)) &= \left(\frac{4}{3}|x-y|, |x-y| \right) \\ d((0, x), (0, y)) &= \left(|x-y|, \frac{2}{3}|x-y| \right) \\ d((x, 0), (0, y)) &= d((0, y), (x, 0)) = \left(\frac{4}{3}x+y, x+\frac{2}{3}y \right) \end{aligned}$$

Alors (X, d) est un espace métrique cône complet. Soit $T : X \longrightarrow X$ défini par

$$T((x, 0)) = (0, x) \text{ et } T((0, x)) = \left(\frac{1}{2}x, 0 \right).$$

Alors T satisfait la condition de contraction 2.14 pour tous $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in X$, avec constante $K = \frac{3}{4}$. Il est évident que T a unique point fixe $(0, 0) \in X$. D'autre part, on a T n'est pas une application contractante dans la métrique euclidienne \mathbb{R}^2 sur X .

Exemple 2.3.2. Soit $E = \mathbb{R}^2$, $X = \mathbb{R}$ et $P = \{(x, y) : x, y \geq 0\}$ un cône normal avec une constante normale $k = 1$. On définit $d : X \times X \rightarrow E$ par $d(x, y) = (|x - y|, \frac{1}{2}|x - y|)$ (X, d) est un espace métrique cône complet.

On définit l'application $f : X \rightarrow X$ par $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned} d(f(x), f(y)) &= \left(\left| \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y \right|, \frac{1}{2} \left| \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y \right| \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(|x - y|, \frac{1}{2}|x - y| \right) \\ &= \frac{1}{2}d(x, y). \end{aligned}$$

Donc f est une application contractante avec $k = \frac{1}{2}$ d'après théorème 2.3.1, f admet un point fixe unique.

$$f(x) = x \implies \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} = x \implies \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} - x = 0 \implies x = 1$$

Théorème 2.3.2 (Nadler). [3] Soit (X, d) un espace métrique cône complet. Soit \mathcal{M} est une famille non vide des sous-ensembles fermés non vides de X et soit $H : \mathcal{M} \times \mathcal{M} \rightarrow E$ est une H -métrique cône induite par d . Si pour l'application $T : X \rightarrow \mathcal{M}$ il existe $\lambda \in [0, 1[$ telle que pour tous $x, y \in X$

$$H(Tx, Ty) \leq \lambda d(x, y), \quad (2.15)$$

Alors $FixT \neq \emptyset$.

Démonstration. Soient $x_0 \in X$ et $x_1 \in Tx_0$. Si $x_0 = x_1$, alors $x_0 \in FixT$ et si $x_0 \neq x_1$, on a

$$H(Tx_0, Tx_1) \leq \lambda d(x_0, x_1) < \sqrt{\lambda}d(x_0, x_1), \quad (2.16)$$

on peut choisi $x_2 \in X$ tel que $x_2 \in Tx_1$ et

$$d(x_1, x_2) < \sqrt{\lambda}d(x_0, x_1), \quad (2.17)$$

de la même manière, dans le cas $x_1 \neq x_2$ on peut choisi $x_3 \in X$ tel que $x_3 \in Tx_2$ et

$$d(x_2, x_3) < \sqrt{\lambda}d(x_1, x_2) < (\sqrt{\lambda})^2d(x_0, x_1), \quad (2.18)$$

alors on construite une suite $\{x_n\}$ de X telle que $x_{n+1} \in Tx_n$, $n = 0, 1, 2, \dots$

$$d(x_n, x_{n+1}) < \sqrt{\lambda}d(x_{n-1}, x_n) < (\sqrt{\lambda})^2d(x_{n-2}, x_{n-1}) < \dots < (\sqrt{\lambda})^n d(x_0, x_1) \quad (2.19)$$

Maintenant pour $m > n$

$$\begin{aligned}
 d(x_m, x_n) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+1}) + \cdots + d(x_{m-1}, x_m) \\
 &\leq \left((\sqrt{\lambda})^n + (\sqrt{\lambda})^{n+1} + \cdots + (\sqrt{\lambda})^{m-1} \right) \\
 &\leq (\sqrt{\lambda})^n (1 + \sqrt{\lambda} + \cdots + (\sqrt{\lambda})^{m-n-1}) d(x_0, x_1) \\
 &\leq (\sqrt{\lambda})^n \left(\frac{1 - (\sqrt{\lambda})^{m-n}}{1 - \sqrt{\lambda}} \right) d(x_0, x_1) \\
 &\leq \left(\frac{(\sqrt{\lambda})^{n-1}}{1 - \sqrt{\lambda}} \right) d(x_0, x_1).
 \end{aligned}$$

Pour $0 \ll c$ donné, on choisit un voisinage symétrique V de 0 tel que $c + V \subseteq \text{int}P$. Aussi, On choisit $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\left(\frac{(\sqrt{\lambda})^n}{1 - \sqrt{\lambda}} \right) d(x_0, x_1) \in V$, pour tout $n \geq N_1$. Alors, $\left(\frac{(\sqrt{\lambda})^n}{1 - \sqrt{\lambda}} \right) d(x_0, x_1) \ll c$, pour tout $n \geq N_1$. Ainsi,

$$d(x_m, x_n) \leq \left(\frac{(\sqrt{\lambda})^n}{1 - \sqrt{\lambda}} \right) d(x_0, x_1) \ll c, \quad (2.20)$$

pour tout $m > n$. Donc, $\{x_n\}_{n \geq 1}$ est une suite de Cauchy. Puisque X est complet, il existe $u \in X$ tel que $x_n \rightarrow u$. Puisque

$$H(Tx_n, Tu) \leq \lambda d(x_n, u) < \sqrt{\lambda} d(x_n, u). \quad (2.21)$$

Pour tout n , $x_{n+1} \in Tx_n$, on a $y_n \in Tu$ tel que $d(x_{n+1}, y_n) < \sqrt{\lambda} d(x_n, u)$.

Maintenant, on choisit $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que

$$d(x_n, u) \ll \frac{c}{2}, \quad \forall n \geq N_2. \quad (2.22)$$

Alors pour tout $n \geq N_2$,

$$\begin{aligned}
 d(u, y_n) &\leq d(u, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, y_n) \\
 &\leq d(u, x_{n+1}) + \sqrt{\lambda} d(x_n, u) \\
 &\leq d(u, x_{n+1}) + d(x_n, u) \ll \frac{c}{2} + \frac{c}{2} = c.
 \end{aligned} \quad (2.23)$$

Alors $y_n \rightarrow u$, ce qui donne $u \in Tu$. □

Exemple 2.3.3. Soit $M = [0, 1]$, $E = C_{\mathbb{R}}^2[0, 1]$ avec la norme $\|x\| = \|x\|_{\infty} + \|x'\|_{\infty}$, $P = \{x \in E : x \geq 0\}$, $x(t) = t$ et $y(t) = t^{2K}$. Alors $0 \leq x \leq y$, $\|x\| = 2$ et $\|y\| = 1 + 2K$. Pour tout $K \geq 1$, puisque $K\|x\| < \|y\|$. Donc, P n'est pas normal. On définit $d : X \times X \rightarrow E$ par

$$(d(x, y))(t) = |x - y|e^t.$$

Soit \mathcal{M} un famille des sous-ensembles de X de la forme

$$\mathcal{M} = \{[0, x] : x \in X\} \cup \{\{x\} : x \in X\},$$

et soit $H : \mathcal{M} \times \mathcal{M} \longrightarrow E$ définie par :

$$H(A, B) = \begin{cases} |x - y|e^t & \text{si } A = [0, x], B = [0, y], \\ |x - y|e^t & \text{si } A = \{x\}, B = \{y\}, \\ \max\{y, |x - y|\}e^t & \text{si } A = [0, x], B = \{y\}, \\ \max\{x, |x - y|\}e^t & \text{si } A = \{x\}, B = [0, y]. \end{cases}$$

Facilement qui H vérifié (H1), (H4). On définit l'application $T : X \longrightarrow \mathcal{M}$ comme suite :

$$Tx = \begin{cases} \{0\} & \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \\ \left[0, \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{2}\right)^2\right], & \text{si } x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]. \end{cases}$$

Alors T est une application contractante, avec $\lambda = \frac{1}{2}$ et $x \in \text{Fix}T$.

Chapitre 3

Point fixe commun pour une suite des multifonctions

Dans ce chapitre on donne un théorème de point fixe commun pour une suites des multifonctions satisfait certaines conditions dans un espace métrique partiel complet et un espace métrique cône complet.

3.1 Point fixe commun dans un espace métrique

Définition 3.1.1. [13] *Un espace métrique (X, d) est dit métriquement convexe, si pour tous $x, y \in X$ avec $x \neq y$, il existe $z \in X, x \neq y \neq z$, tel que :*

$$d(x, z) + d(z, y) = d(x, y).$$

Si (X, d) est un espace métrique métriquement convexe et $x, y \in X$, on prend

$$\text{seg}[x, y] \doteq \{z \in X : d(x, y) = d(x, z) + d(z, y)\}.$$

Lemme 3.1.1. [13] *Soit K un sous-ensemble fermé d'un espace métrique complet et métriquement convexe X , alors pour tout $x \in K$ et $y \notin K$ il existe $z \in \partial K$ (la frontière de K) tel que :*

$$d(x, z) + d(z, y) = d(x, y)$$

Lemme 3.1.2. [10] *Si $A, B \in CB(X)$ et $x \in A$, alors pour tout ε , il existe $y \in B$ tel que :*

$$d(x, y) \leq D(A, B) + \varepsilon.$$

Définition 3.1.2. *Soient S, T deux applications d'un espace métrique (X, d) dans lui-même. Si $Sx = Tx$ pour $x \in X$ alors x est appelé un point de coïncidence de S et T .*

Définition 3.1.3. *Soit (X, d) est un espace métrique et soient S, T deux applications définies sur X , on dit que $x \in X$ est un point fixe commun de S, T si $x = S(x) = T(x)$.*

Définition 3.1.4. *Soit (X, d) est un espace métrique et Soient F, G deux multiapplications définies sur X . On dit que $x \in X$ est un point fixe commun de F et G si $x \in F(x)$ et $x \in G(x)$.*

Théorème 3.1.1. [10] *Soit (X, d) un espace métrique complet et métriquement convexe et K un sous-ensemble fermé non vide de X . Soit f est une fonction de K dans $CB(X)$.*

Supposons qu'il existent des constantes réels non négatives α, β, γ , avec $\alpha + 2\alpha + 2\gamma < 1$ telles que pour tous $x, y \in K$,

$$D(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x, y) + \beta \{d(x, f(x)) + d(y, f(y))\} \\ + \gamma \{d(x, f(y)) + d(y, f(x))\}$$

Si $f(x) \subset K$ pour tout $x \in \partial K$ et $(1 + \beta + \gamma)(\alpha + \beta + \gamma)/(1 - \beta - \gamma)^2 < 1$, alors il existe un point fixe commun $z \in K$ tel que $z \in f(z)$.

Démonstration. On note $k = (1 + \beta + \gamma)(\alpha + \beta + \gamma)/(1 - \beta - \gamma)^2$, alors $0 \leq k < 1$. Si $k = 0$, alors la conclusion de Théorème 3.1.1 est évident. Donc on peut supposer que $k > 0$. On choisit deux suites $\{x_n\}$ dans K et $\{y_n\}$ de la manière suivante. Soit $x_0 \in \partial K$ et $x_1 = y_1 \in f(x_0)$, d'après le lemme 3.1.2 il existe $y_2 \in f(x_1)$ tel que

$$d(y_1, y_2) \leq D(f(x_0), f(x_1)) + \frac{(1 - \beta - \gamma)}{(\alpha + \beta + \gamma)} k.$$

Si $y_2 \in K$, soit $y_2 = x_2$. Si $y_2 \notin K$ on choisit un élément $x_2 \in K$ tel que d'après le lemme 3.1.1, $d(x_1, x_2) + d(x_2, y_2) = d(x_1, y_2)$. Par introduction on peut obtenir des suites $\{x_n\}, \{y_n\}$ telles que pour $n = 1, 2, \dots$,

$$(1) \quad y_{n+1} \in f(x_n),$$

$$(2) \quad d(y_n, y_{n+1}) \leq D(f(x_{n-1}), f(x_n)) + \frac{(1 - \beta - \gamma)}{(\alpha + \beta + \gamma)} k^n$$

où

$$(3) \quad \text{Si } y_{n+1} \in K \text{ alors } x_{n+1} = y_{n+1}, \text{ ou}$$

$$(4) \quad \text{Si } y_{n+1} \notin K \text{ alors } d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, y_{n+1}) = d(x_n, y_{n+1}).$$

On va estimer la distance $d(x_n, x_{n+1})$ pour $n \geq 2$. On a trois cas :

(i) $x_n = y_n$ et $x_{n+1} = y_{n+1}$. On a

$$d(x_n, x_{n+1}) = d(y_n, y_{n+1}) \\ = D(f(x_{n-1}), f(x_n)) + \frac{(1 - \beta - \gamma)}{(\alpha + \beta + \gamma)} k^n \\ \leq \alpha d(x_{n-1}, x_n) + \beta \{d(x_{n-1}, f(x_{n-1})) + d(x_n, f(x_n))\} \\ + \gamma \{d(x_{n-1}, f(x_n)) + d(x_n, f(x_{n-1}))\} + \frac{(1 - \beta - \gamma)}{(\alpha + \beta + \gamma)} k^n \\ \leq \alpha d(x_{n-1}, x_n) + \beta \{d(x_{n-1}, x_n) + d(x_n, x_{n+1})\} \\ + \gamma \{d(x_{n-1}, x_n) + d(x_n, x_{n+1})\} + \frac{(1 - \beta - \gamma)}{(\alpha + \beta + \gamma)} k^n.$$

Par conséquent

$$(1 - \beta - \gamma)d(x_n, x_{n+1}) \leq (\alpha + \beta + \gamma)d(x_{n-1}, x_n) + \frac{(1 - \beta - \gamma)}{(\alpha + \beta + \gamma)}k^n$$

et

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \frac{\alpha + \beta + \gamma}{1 - \beta - \gamma}d(x_{n-1}, x_n) + \frac{k^n}{(\alpha + \beta + \gamma)}.$$

(ii) $x_n = y_n$ et $x_{n+1} \neq y_{n+1}$. D'après (4) on obtient que

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq d(x_n, y_{n+1}) = d(y_n, y_{n+1}).$$

Comme dans le cas (i), on a

$$d(y_n, y_{n+1}) \leq \frac{\alpha + \beta + \gamma}{1 - \beta - \gamma}d(x_{n-1}, x_n) + \frac{k^n}{(\alpha + \beta + \gamma)},$$

ainsi

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \frac{\alpha + \beta + \gamma}{1 - \beta - \gamma}d(x_{n-1}, x_n) + \frac{k^n}{(\alpha + \beta + \gamma)}.$$

(iii) $x_n \neq y_n$ et $x_{n+1} = y_{n+1}$. Dans ce cas $x_{n-1} = y_{n-1}$. On a

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq d(x_n, y_n) + d(y_n, x_{n+1}) = d(x_n, y_n) + d(y_n, x_{n+1}).$$

D'après l'inégalité (2), on a

$$\begin{aligned} d(y_n, y_{n+1}) &\leq d(f(x_{n-1}), f(x_n)) + \frac{(1 - \beta - \gamma)}{(\alpha + \beta + \gamma)}k^n \\ &\leq \alpha d(x_{n-1}, x_n) + \beta \{d(x_{n-1}, f(x_{n-1})) + d(x_n, f(x_n))\} \\ &\quad + \gamma \{d(x_{n-1}, f(x_n)) + d(x_n, f(x_{n-1}))\} + \frac{(1 - \beta - \gamma)}{(\alpha + \beta + \gamma)}k^n \\ &\leq \alpha d(x_{n-1}, x_n) + \beta \{d(x_{n-1}, y_n) + d(x_n, x_{n+1})\} \\ &\quad + \gamma \{d(x_{n-1}, x_n) + d(x_n, x_{n+1}) + d(x_n, y_n)\} + \frac{(1 - \beta - \gamma)}{(\alpha + \beta + \gamma)}k^n. \end{aligned}$$

Puisque $0 \leq \alpha < 1$ et $d(x_{n-1}, x_n) + d(x_n, y_n) = d(x_{n-1}, y_n)$, on obtient

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+1}) &\leq (1 + \gamma)d(x_n, y_n) + (\alpha + \gamma)d(x_{n-1}, x_n) \\ &\quad + \beta d(x_{n-1}, y_n) + (\beta + \gamma)d(x_n, x_{n+1}) + \frac{(1 - \beta - \gamma)}{(\alpha + \beta + \gamma)}k^n \\ &\leq (1 + \gamma)d(x_{n-1}, y_n) + \beta d(x_{n-1}, y_n) \\ &\quad + (\beta + \gamma)d(x_n, x_{n+1}) + \frac{(1 - \beta - \gamma)}{(\alpha + \beta + \gamma)}k^n, \end{aligned}$$

et

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \frac{1 + \beta + \gamma}{1 - \beta - \gamma} d(x_{n-1}, y_n) + \frac{k^n}{(\alpha + \beta + \gamma)}.$$

Comme dans le cas (ii), on a

$$d(x_{n-1}, y_n) \leq \frac{\alpha + \beta + \gamma}{1 - \beta - \gamma} d(x_{n-2}, x_{n-1}) + \frac{(1 - \beta - \gamma)}{(\alpha + \beta + \gamma)} k^n.$$

Ainsi

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \frac{(1 + \beta + \gamma)(\alpha + \beta + \gamma)}{(1 - \beta - \gamma)^2} d(x_{n-2}, x_{n-1}) + \frac{k^{n-1}}{(\alpha - \beta - \gamma)} + \frac{k^n}{(\alpha + \beta + \gamma)}.$$

Le cas où $x_n \neq y_n$ et $x_{n+1} \neq y_{n+1}$ ne se pose pas. Puisque

$$\frac{\alpha + \beta + \gamma}{1 - \beta - \gamma} \leq \frac{(1 + \beta + \gamma)(\alpha + \beta + \gamma)}{(1 - \beta - \gamma)^2},$$

pour $n \geq 2$, on a

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \begin{cases} kd(x_{n-1}, x_n) + \frac{k^n}{(\alpha + \beta + \gamma)}, & \text{ou} \\ kd(x_{n-2}, x_{n-1}) + \frac{k^{n-1} + k^n}{(\alpha + \beta + \gamma)}. \end{cases}$$

On pose $\delta = k^{-\frac{1}{2}} \max\{\|x_0 - x_1\|, \|x_1 - x_2\|\}$, alors par induction on peut montrer que

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq k^{\frac{n}{2}} \left(\delta + \frac{n}{1 - \beta - \gamma} \right) \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Alors pour tout $m > n \geq 1$,

$$d(x_n, x_m) \leq \delta \sum_{i=n}^{m-1} k^{\frac{i}{2}} + \frac{1}{1 - \beta - \gamma} \sum_{i=n}^{m-1} ik^{\frac{i}{2}}.$$

Ce qui donne $\{x_n\}$ est une suite de Cauchy. Puisque (X, d) est complet et K est fermé, $\{x_n\}$ converge vers un point $z \in K$. D'après la définition de $\{x_n\}$ il existe une sous-suite $\{x_{n_i}\}$ de $\{x_n\}$ telle que $\{x_{n_i}\} = \{y_{n_i}\}$ pour $i = 1, 2, \dots$. Alors on a

$$\begin{aligned} d(x_{n_i}, f(z)) &= D(f(x_{n_i-1}), f(z)) \\ &\leq \alpha d(x_{n_i-1}, z) + \beta \{d(x_{n_i-1}, f(x_{n_i-1})) + d(z, f(z))\} \\ &\quad + \gamma \{d(x_{n_i-1}, f(z)) + d(z, f(x_{n_i-1}))\} \\ &\leq \alpha \{d(x_{n_i-1}, x_{n_i}) + d(x_{n_i}, z)\} + \beta \{d(x_{n_i-1}, x_{n_i}) + d(z, x_{n_i}) + d(x_{n_i}, f(z))\} \\ &\quad + \gamma \{d(x_{n_i-1}, x_{n_i}) + d(x_{n_i}, f(z)) + d(z, x_{n_i})\}. \end{aligned}$$

Ainsi

$$d(x_{n_i}, f(z)) \leq \frac{\alpha + \beta + \gamma}{1 - \beta - \gamma} \{d(x_{n_i-1}, x_{n_i}) + d(z, x_{n_i})\}.$$

Par conséquent $d(x_{n_i}, f(z)) \xrightarrow{i \rightarrow \infty} 0$. Par l'inégalité $d(z, f(z)) \leq d(z, x_{n_i}) + d(x_{n_i}, f(z))$, alors $d(z, f(z)) = 0$. Puisque $f(z)$ est fermé, ce qui donne $z \in f(z)$. \square

3.2 Point fixe commun dans un espace métrique partiel

Définition 3.2.1. *Un espace métrique partiel (X, p) est dit métriquement convexe si l'espace métrique correspondant (X, p^s) est métriquement convexe.*

Lemme 3.2.1. *Soit (X, p) un espace métrique partiel métriquement convexe. Soient $x, y \in X$, si $z \in \text{seg}[x, y]$ alors :*

1. $p(x, y) + p(z, z) = p(x, z) + p(z, y)$,
2. $p(x, y) \geq p(x, z)$.

Démonstration. Puisque (X, p^s) métriquement convexe et si $z \in \text{seg}[x, y]$, on a :

1. $p^s(x, y) = p^s(x, z) + p^s(z, y)$ et donc

$$2p(x, y) - p(x, x) - p(y, y) = 2p(x, z) - p(x, x) - p(z, z) + 2p(z, y) - p(z, z) - p(y, y)$$

et

$$2p(x, y) = 2p(x, z) - 2p(z, z) + 2p(z, y)$$

D'où

$$p(x, y) + p(z, z) = p(x, z) + p(z, y)$$

2. D'après la condition $p(z, z) \leq p(z, y)$, on a

$$p(x, y) - p(x, z) = p(z, y) - p(z, z) \geq 0$$

et $p(x, y) - p(x, z) \geq 0$. D'où $p(x, y) \geq p(x, z)$.

□

Lemme 3.2.2. *Soit K un sous-ensemble non vide et fermé d'un espace métrique partiel métriquement convexe (X, p) . Alors pour tout $x \in K$ et $y \notin K$, il existe $z \in \partial K$, tel que :*

$$p(x, y) + p(z, z) = p(x, z) + p(z, y)$$

Démonstration. D'après la définition 3.2.1 et lemme 3.2.1 on a :

$$p^s(x, y) = p^s(x, z) + p^s(z, y)$$

donc

$$2p(x, y) - p(x, x) - p(y, y) = 2p(x, z) - p(x, x) - p(z, z) + 2p(z, y) - p(z, z) - p(y, y)$$

et

$$2p(x, y) = 2p(x, z) - 2p(z, z) + 2p(z, y)$$

d'où

$$p(x, y) + p(z, z) = p(x, z) + p(z, y).$$

□

On va généraliser le théorème 3.1.1 pour une suites des fonction dans des espaces métriques partiels.

Théorème 3.2.1. *Soit (X, p) un espace métrique partiel complet et métriquement convexe et K un sous-ensemble fermé non vide de X . Soit f_n ($n = 1, 2, \dots$) est une suite de fonction de K dans X . Supposons qu'il existent des constantes réels non négatives α, β, γ , avec $\alpha + (\alpha + 3)(\beta + \gamma) < 1$ telles que :*

$$\begin{aligned} p(f_i(x), f_j(y)) \leq & \alpha p(x, y) + \beta \{p(x, f_i(x)) + p(y, f_j(y))\} \\ & + \gamma \{p(x, f_j(y)) + p(y, f_i(x))\} \end{aligned}$$

Pour tous $x, y \in K$ et pour $i, j = 1, 2, \dots$. Si $f_n(\partial K) \subset K$ pour tous $n = 1, 2, \dots$, alors il existe un point fixe commun unique $z \in K$.

Démonstration. Puisque X est un espace métrique partiel métriquement convexe, il existe $x_0 \in K$ tel que $f_1(x_0) \subset K$. Si $\alpha = \beta = \gamma = 0$, tout $z = f_1(x_0)$ est point fixe commun. En effet, pour $n = 2, 3, \dots$, $p(f_1(x_0), f_n(z)) = 0$ alors $z = f_n(z)$, $n = 2, 3, \dots$. Puisque $p(f_1(z), f_2(z)) = 0$, on a $z = f_1(z)$. Donc on suppose que $\alpha + \beta + \gamma > 0$.

Puisque $\alpha + (\alpha + 3)(\beta + \gamma) < 1$, on a $(1 + \beta + \gamma)(\alpha + \beta + \gamma)/(1 - \beta - \gamma)^2 < 1$. On choisit deux suites $\{x_n\}$ dans K et $\{y_n\}$ de la manière suivante. Soit $x_1 = y_1 = f_1(x_0)$, il existe $y_2 = f_2(x_1)$ tel que $p(y_1, y_2) = p(f_1(x_0), f_2(x_1))$. Si $y_2 \in K$, soit $y_2 = x_2$. Si $y_2 \notin K$ on choisit un élément $x_2 \in \partial K$ tel que d'après le lemme 3.2.2 :

$$p(x_1, x_2) + p(x_2, y_2) = p(x_1, y_2) + p(x_2, x_2).$$

Par introduction on peut obtenir des suites $\{x_n\}, \{y_n\}$ telles que pour $n = 1, 2, \dots$,

- (a) $y_{n+1} = f_{n+1}(x_n)$
- (b) $p(y_n, y_{n+1}) = p(f_n(x_{n-1}), f_{n+1}(x_n))$

où

- (c) Si $y_{n+1} \in K$ alors $x_{n+1} = y_{n+1}$ et

(d) Si $y_{n+1} \notin K$ alors $x_{n+1} \in \partial K$ et

$$p(x_n, x_{n+1}) + p(x_{n+1}, y_{n+1}) = p(x_n, y_{n+1}) + p(x_{n+1}, x_{n+1})$$

On va estimer la distance $p(x_n, x_{n+1})$ pour $n \geq 2$. On a trois cas :

(i) $x_n = y_n$ et $x_{n+1} = y_{n+1}$. On a

$$\begin{aligned} p(x_n, x_{n+1}) &= p(y_n, y_{n+1}) \\ &= p(f_n(x_{n-1}), f_{n+1}(x_n)) \\ &\leq \alpha p(x_{n-1}, x_n) + \beta \{p(x_{n-1}, f_n(x_{n-1})) + p(x_n, f_{n+1}(x_n))\} \\ &\quad + \gamma \{p(x_{n-1}, f_{n+1}(x_n)) + p(x_n, f_n(x_{n-1}))\} \\ &\leq \alpha p(x_{n-1}, x_n) + \beta \{p(x_{n-1}, x_n) + p(x_n, x_{n+1})\} \\ &\quad + \gamma \{p(x_{n-1}, x_n) + p(x_n, x_{n+1})\}. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$(1 - \beta - \gamma)p(x_n, x_{n+1}) \leq (\alpha + \beta + \gamma)p(x_{n-1}, x_n)$$

et

$$p(x_n, x_{n+1}) \leq \frac{\alpha + \beta + \gamma}{1 - \beta - \gamma} p(x_{n-1}, x_n)$$

(ii) $x_n = y_n$ et $x_{n+1} \neq y_{n+1}$. D'après (d) on obtient que

$$p(x_n, x_{n+1}) \leq p(x_n, y_{n+1}) = p(y_n, y_{n+1}).$$

Comme dans le cas (i), on a

$$p(y_n, y_{n+1}) \leq \frac{\alpha + \beta + \gamma}{1 - \beta - \gamma} p(x_{n-1}, x_n)$$

ainsi

$$p(x_n, x_{n+1}) \leq \frac{\alpha + \beta + \gamma}{1 - \beta - \gamma} p(x_{n-1}, x_n)$$

(iii) $x_n \neq y_n$ et $x_{n+1} = y_{n+1}$. Dans ce cas $x_{n-1} = y_{n-1}$. On a

$$\begin{aligned} p(x_n, x_{n+1}) &\leq p(x_n, y_n) + p(y_n, x_{n+1}) - p(y_n, y_n) \\ &\leq p(x_n, y_n) + p(y_n, x_{n+1}). \end{aligned}$$

D'après l'égalité (b), on a

$$\begin{aligned}
 p(y_n, y_{n+1}) &\leq p(f_n(x_{n-1}), f_{n+1}(x_n)) \\
 &\leq \alpha p(x_{n-1}, x_n) + \beta \{p(x_{n-1}, f_n(x_{n-1})) + p(x_n, f_{n+1}(x_n))\} \\
 &\quad + \gamma \{p(x_{n-1}, f_{n+1}(x_n)) + p(x_n, f_n(x_{n-1}))\} \\
 &\leq \alpha p(x_{n-1}, x_n) + \beta \{p(x_{n-1}, y_n) + p(x_n, x_{n+1})\} \\
 &\quad + \gamma \{p(x_{n-1}, x_n) + p(x_n, x_{n+1}) + p(x_n, y_n)\}.
 \end{aligned}$$

Par conséquent, on obtient

$$\begin{aligned}
 p(x_n, x_{n+1}) &\leq (1 + \gamma)p(x_n, y_n) + (\alpha + \gamma)p(x_{n-1}, x_n) \\
 &\quad + \beta p(x_{n-1}, y_n) + (\beta + \gamma)p(x_n, x_{n+1}) \\
 &\leq (1 + \gamma)p(x_{n-1}, y_n) + \beta p(x_{n-1}, y_n) \\
 &\quad + (\beta + \gamma)p(x_n, x_{n+1}),
 \end{aligned}$$

ce qui donne

$$p(x_n, x_{n+1}) \leq \frac{1 + \beta + \gamma}{1 - \beta - \gamma} p(x_{n-1}, y_n).$$

Puisque $x_{n-1} = y_{n-1}$ et $x_n \neq y_n$, on a d'après le cas (ii)

$$p(x_{n-1}, y_n) \leq \frac{\alpha + \beta + \gamma}{1 - \beta - \gamma} p(x_{n-2}, x_{n-1}).$$

Ainsi, pour tout $n \geq 2$

$$p(x_n, x_{n+1}) \leq \frac{(1 + \beta + \gamma)(\alpha + \beta + \gamma)}{(1 - \beta - \gamma)^2} p(x_{n-2}, x_{n-1}).$$

Le cas où $x_n \neq y_n$ et $x_{n+1} \neq y_{n+1}$ ne se pose pas. Puisque

$$\frac{\alpha + \beta + \gamma}{1 - \beta - \gamma} \leq \frac{(1 + \beta + \gamma)(\alpha + \beta + \gamma)}{(1 - \beta - \gamma)^2},$$

pour $n \geq 2$, on a

$$p(x_n, x_{n+1}) \leq \begin{cases} \lambda p(x_{n-1}, x_n), & \text{ou} \\ \lambda p(x_{n-2}, x_{n-1}). \end{cases}$$

Où $\lambda = (1 + \beta + \gamma)(\alpha + \beta + \gamma)/(1 - \beta - \gamma)^2$. On pose $\delta = \lambda^{-\frac{1}{2}} \max\{p(x_0, x_1), p(x_1, x_2)\}$, alors par induction on peut montrer que

$$p(x_n, x_{n+1}) \leq \lambda^{\frac{n}{2}} \delta \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Alors pour tout $m > n \geq 1$,

$$p(x_n, x_m) \leq \delta \sum_{i=n}^{m-1} \lambda^{\frac{i}{2}}.$$

Par la définition de p^s , on a $p^s(x_n, x_m) \leq 2p(x_n, x_m) \xrightarrow{n, m \rightarrow +\infty} 0$, ce qui donne $\{x_n\}$ est une suite de Cauchy dans (X, p^s) , puisque (X, p) est complet d'après le lemme 1.2.1, l'espace métrique correspondent (X, p^s) est également complet. Donc la suite $\{x_n\}$ convergente, puisque K est fermé, $\{x_n\}$ converge vers un point $z \in K$. D'après la définition de $\{x_n\}$ il existe une sous-suite $\{x_{n_i}\}$ de $\{x_n\}$ telle que $\{x_{n_i}\} = \{y_{n_i}\}$ pour $i = 1, 2, \dots$. Alors pour $n = 1, 2, \dots$, on a

$$\begin{aligned} p(x_{n_i}, f_n(z)) &= p(f_{n_i}(x_{n_{i-1}}), f_n(z)) \\ &\leq \alpha p(x_{n_{i-1}}, z) + \beta \{p(x_{n_{i-1}}, f_{n_i}(x_{n_{i-1}})) + p(z, f_n(z))\} \\ &\quad + \gamma \{p(x_{n_{i-1}}, f_n(z)) + p(z, f_{n_i}(x_{n_{i-1}}))\} \\ &\leq \alpha \{p(x_{n_{i-1}}, x_{n_i}) + p(x_{n_i}, z)\} + \beta \{p(x_{n_{i-1}}, x_{n_i}) + p(z, x_{n_i}) + p(x_{n_i}, f_n(z))\} \\ &\quad + \gamma \{p(x_{n_{i-1}}, x_{n_i}) + p(x_{n_i}, f_n(z)) + p(z, x_{n_i})\}. \end{aligned}$$

Ainsi

$$p(x_{n_i}, f_n(z)) \leq \frac{\alpha + \beta + \gamma}{1 - \beta - \gamma} \{p(x_{n_{i-1}}, x_{n_i}) + p(z, x_{n_i})\}.$$

Par conséquent $p(x_{n_i}, f_n(z)) \xrightarrow{i \rightarrow \infty} 0$. Par l'inégalité $p(z, f_n(z)) \leq p(z, x_{n_i}) + p(x_{n_i}, f_n(z))$, alors $p(z, f_n(z)) = 0$, ainsi $z = f_n(z)$ ($n = 1, 2, \dots$).

L'unicité : on suppose que $\bar{z} \in K$ et $\bar{z} = f_n(\bar{z})$, alors

$$\begin{aligned} p(\bar{z}, z) &= p(f_n(\bar{z}), f_n(z)) \\ &\leq \alpha p(\bar{z}, z) + \beta \{p(\bar{z}, f_n(\bar{z})) + p(z, f_n(z))\} \\ &\quad + \gamma \{p(\bar{z}, f_n(z)) + p(z, f_n(\bar{z}))\} \\ &= \alpha p(\bar{z}, z) + \beta p(\bar{z}, \bar{z}) + 2\gamma p(\bar{z}, z) \\ &\leq \alpha p(\bar{z}, z) + \beta p(\bar{z}, z) + \beta p(z, \bar{z}) - \beta p(z, z) + 2\gamma p(\bar{z}, z) \\ &\leq (\alpha + 2\beta + 2\gamma)p(\bar{z}, z) \end{aligned}$$

et comme $\alpha + 2\beta + 2\gamma < 1$, on obtient $p(\bar{z}, z) = 0$ et $\bar{z} = z$.

Alors f_n admet un point fixe commun unique. □

On va généraliser le théorème 3.1.1 pour une suites des multifonctions dans des espaces métriques partiels.

Théorème 3.2.2. Soient (X, p) un espace métrique partiel complet et métriquement convexe et K un sous-ensemble fermé non vide de X . Soit $T_n (n = 1, 2, \dots)$ est une suite des multifonctions de K dans $CB(X)$ à valeurs non vides. Supposons qu'ils existent des constantes réels non négatives α, β, γ avec $\alpha + (\alpha + 3)(\beta + \gamma) < 1$ tel que

$$H(T_i(x), T_j(y)) \leq \alpha p(x, y) + \beta \{D_p(x, T_i(x)) + D_p(y, T_j(y))\} \\ + \gamma \{D_p(x, T_j(y)) + D_p(y, T_i(x))\}$$

pour tous $x, y \in K$ et $\forall i, j = 1, 2, \dots$. Si $T_n(x) \subset K$ pour tout $x \in \partial K$ et $\forall n = 1, 2, \dots$. Alors la suite $T_n (n = 1, 2, \dots)$ est a un point fixe commun dans K .

Démonstration. Puisque X est métriquement convexe, il existe $x_0 \in K$ tel que $T_1(x_0) \subset K$. Si $\alpha = \beta = \gamma = 0$, alors $z \in T_1(x_0)$ est un point fixe commun. En effet, pour $n = 2, 3, \dots$, $H(T_1(x_0), T_n(z)) = 0$, alors $z \in T_n(z)$, $n = 2, 3, \dots$. Puisque $H(T_1(x_0), T_2(z)) = 0$, on a $z \in T_1(z)$. Donc on suppose que $\alpha + \beta + \gamma > 0$. Puisque $\alpha + (\alpha + 3)(\beta + \gamma) < 1$ il existe $k > 1$ tel que $(1 + k\beta + k\gamma)(k\alpha + k\beta + k\gamma)/(1 - k\beta - k\gamma)^2 < 1$. On choisit deux suites $\{x_n\}$ dans K et $\{y_n\}$ de la manière suivante. Soit $x_1 = y_1 \in T_1(x_0)$. D'après le lemme 3.2.1, il existe $y_2 \in T_2(x_1)$ tel que $p(y_1, y_2) \leq kH(T_1(x_0), T_2(x_1))$. Si $y_2 \in K$, soit $x_2 = y_2$. Si $y_2 \notin K$, on choisit un élément $x_2 \in \partial K$ tel que, D'après le lemme 3.2.2 :

$$p(x, y) + p(z, z) = p(x, z) + p(z, y)$$

Par introduction on obtient deux suites $\{x_n\}, \{y_n\}$ telles que pour $n = 1, 2, \dots$

- (a) $y_{n+1} \in T_{n+1}(x_n)$,
- (b) $p(y_n, y_{n+1}) \leq kH(T_n(x_{n-1}), T_{n-1}(x_n))$,
- où
- (c) Si $y_{n+1} \in K$, alors $x_{n+1} = y_{n+1}$ et
- (d) Si $y_{n+1} \notin K$, alors $x_{n+1} \in \partial K$ et

$$p(x_n, y_{n+1}) + p(x_{n+1}, x_{n+1}) = p(x_n, x_{n+1}) + p(x_{n+1}, y_{n+1})$$

On va estimer la distance $p(x_n, x_{n+1})$ pour $n \geq 2$. Il se pose trois cas :

- (i) $x_n = y_n$ et $x_{n+1} = y_{n+1}$. On a :

$$\begin{aligned}
 p(x_n, x_{n+1}) &= p(y_n, y_{n+1}) \\
 &\leq kH(T_n(x_{n-1}), T_{n+1}(x_n)) \\
 &\leq k\alpha p(x_{n-1}, x_n) + k\beta \{D_p(x_{n-1}, T_n(x_{n-1})) + D_p(x_n, T_{n+1}(x_n))\} \\
 &\quad + k\gamma \{D_p(x_{n-1}, T_{n+1}(x_n)) + D_p(x_n, T_n(x_{n-1}))\} \\
 &\leq k\alpha p(x_{n-1}, x_n) + k\beta \{p(x_{n-1}, x_n) + p(x_n, x_{n+1})\} \\
 &\quad + k\gamma \{p(x_{n-1}, x_{n+1}) + p(x_n, x_n)\} \\
 &\leq k\alpha p(x_{n-1}, x_n) + k\beta \{p(x_{n-1}, x_n) + p(x_n, x_{n+1})\} \\
 &\quad + k\gamma \{p(x_{n-1}, x_n) + p(x_n, x_{n+1})\}.
 \end{aligned}$$

Par conséquent

$$(1 - k\beta - k\gamma)p(x_n, x_{n+1}) \leq (k\alpha + k\beta + k\gamma)p(x_{n-1}, x_n),$$

et

$$p(x_n, x_{n+1}) \leq \frac{k\alpha + k\beta + k\gamma}{1 - k\beta - k\gamma} p(x_{n-1}, x_n).$$

(ii) $x_n = y_n$ et $x_{n+1} \neq y_{n+1}$. D'après le lemme 3.2.1 on obtient :

$$p(x_n, x_{n+1}) \leq p(x_n, y_{n+1}) = p(y_n, y_{n+1}).$$

Comme dans le cas (i), on a

$$p(y_n, y_{n+1}) \leq \frac{k\alpha + k\beta + k\gamma}{1 - k\beta - k\gamma} p(x_{n-1}, x_n),$$

ainsi

$$p(x_n, x_{n+1}) \leq \frac{k\alpha + k\beta + k\gamma}{1 - k\beta - k\gamma} p(x_{n-1}, x_n).$$

(iii) $x_n \neq y_n$ et $x_{n+1} = y_{n+1}$. Dans ce cas on a $x_{n-1} = y_{n-1}$ et

$$\begin{aligned}
 p(x_n, x_{n+1}) &\leq p(x_n, y_n) + p(y_n, x_{n+1}) - p(y_n, y_n) \\
 &\leq p(x_n, y_n) + p(y_n, y_{n+1})
 \end{aligned}$$

D'après l'inégalité (b) on a

$$\begin{aligned}
 p(y_n, y_{n+1}) &\leq kH(T_n(x_{n-1}), T_{n+1}(x_n)) \\
 &\leq k\alpha p(x_{n-1}, x_n) + k\beta \{D_p(x_{n-1}, T_n(x_{n-1})) + D_p(x_n, T_{n+1}(x_n))\} \\
 &\quad + k\gamma \{D_p(x_{n-1}, T_{n+1}(x_n)) + D_p(x_n, T_n(x_{n-1}))\} \\
 &\leq k\alpha p(x_{n-1}, x_n) + k\beta \{p(x_{n-1}, y_n) + p(x_n, x_{n+1})\} \\
 &\quad + k\gamma \{p(x_{n-1}, x_{n+1}) + p(x_n, y_n)\} \\
 &\leq k\alpha p(x_{n-1}, x_n) + k\beta \{p(x_{n-1}, y_n) + p(x_n, x_{n+1})\} \\
 &\quad + k\gamma \{p(x_{n-1}, x_n) + p(x_n, x_{n+1}) + p(x_n, y_n)\}.
 \end{aligned}$$

Puisque $0 \leq \alpha < \frac{1}{k}$ et $p(x_{n-1}, y_n) \leq p(x_n, y_n) + p(x_{n-1}, x_n)$ on obtient :

$$\begin{aligned} p(x_n, x_{n+1}) &\leq (1 + k\gamma)p(x_n, y_n) + (k\alpha + k\gamma)p(x_{n-1}, x_n) \\ &\quad + k\beta p(x_{n-1}, y_n) + (k\beta + k\gamma)p(x_n, x_{n+1}) \\ &\leq (1 + k\gamma)p(x_{n-1}, y_n) + k\beta p(x_{n-1}, y_n) + (k\beta + k\gamma)p(x_n, x_{n+1}) \end{aligned}$$

Ce qui donne

$$p(x_n, x_{n+1}) \leq \frac{1 + k\beta + k\gamma}{1 - k\beta - k\gamma} p(x_{n-1}, y_n).$$

Puisque $x_{n-1} = y_{n-1}$ et $x_n \neq y_n$, d'après le cas (ii) on a :

$$p(x_{n-1}, y_n) \leq \frac{k\alpha + k\beta + k\gamma}{1 - k\beta - k\gamma} p(x_{n-2}, x_{n-1}).$$

Ainsi, pour tout $n \geq 2$

$$p(x_n, x_{n+1}) \leq \frac{(1 + k\beta + k\gamma)(k\alpha + k\beta + k\gamma)}{(1 - k\beta - k\gamma)^2} p(x_{n-2}, x_{n-1}).$$

Le cas que $x_n \neq y_n$ et $x_{n+1} \neq y_{n+1}$ ne se pose pas. Puisque

$$\frac{k\alpha + k\beta + k\gamma}{1 - k\beta - k\gamma} \leq \frac{(1 + k\beta + k\gamma)(k\alpha + k\beta + k\gamma)}{(1 - k\beta - k\gamma)^2}$$

Pour $n \geq 2$ on a

$$p(x_n, x_{n+1}) \leq \begin{cases} \lambda p(x_{n-1}, x_n), & \text{ou} \\ \lambda p(x_{n-2}, x_{n-1}). \end{cases}$$

Où $\lambda = (1 + k\beta + k\gamma)(k\alpha + k\beta + k\gamma)/(1 - k\beta - k\gamma)^2$.

On pose

$$\delta = \lambda^{-\frac{1}{2}} \max \{p(x_0, x_1), p(x_1, x_2)\},$$

alors par induction on peut montrer que

$$p(x_n, x_{n+1}) \leq \lambda^{\frac{n}{2}} \delta \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Alors, pour tous $m > n \geq 1$,

$$p(x_n, x_m) \leq \delta \sum_{i=n}^{m-1} \lambda^{\frac{i}{2}}$$

Par la définition de p^s , on a $p^s(x_n, x_m) \leq 2p(x_n, x_m) \rightarrow 0$ quand $n, m \rightarrow +\infty$ ce qui donne $\{x_n\}$ est une suite de Cauchy dans (X, p^s) , puisque (X, p) est complet par le lemme 1.2.1, l'espace métrique correspondant (X, p^s) est également complet et K est fermé. Donc, la suite $\{x_n\}$ est convergente vers un point $z \in K$. D'après la définition

de $\{x_n\}$, il existe une sous-suite $\{x_{n_i}\}$ de $\{x_n\}$ telle que $x_{n_i} = y_{n_i}$ ($i = 1, 2, \dots$). Alors pour $n = 1, 2, \dots$, on a

$$\begin{aligned}
 D_p(x_{n_i}, T_n(z)) &\leq H(T_{n_i}(x_{n_i-1}), T_n(z)) \\
 &\leq \alpha p(x_{n_i-1}, z) + \beta \{D_p(x_{n_i-1}, T_{n_i}(x_{n_i-1})) + D_p(z, T_n(z))\} \\
 &\quad + \gamma \{D_p(x_{n_i-1}, T_n(z)) + D_p(z, T_{n_i}(x_{n_i-1}))\} \\
 &\leq \alpha \{p(x_{n_i-1}, x_{n_i}) + p(x_{n_i}, z) - p(x_{n_i}, x_{n_i})\} \\
 &\quad + \beta \{p(x_{n_i-1}, x_{n_i}) + p(z, x_{n_i}) + D_p(x_{n_i}, T_n(z)) - p(x_{n_i}, x_{n_i})\} \\
 &\quad + \gamma \{p(x_{n_i-1}, x_{n_i}) + D_p(x_{n_i}, T_n(z)) - p(x_{n_i}, x_{n_i}) + p(z, x_{n_i})\} \\
 &\leq \alpha \{p(x_{n_i-1}, x_{n_i}) + p(x_{n_i}, z)\} \\
 &\quad + \beta \{p(x_{n_i-1}, x_{n_i}) + p(z, x_{n_i}) + D_p(x_{n_i}, T_n(z))\} \\
 &\quad + \gamma \{p(x_{n_i-1}, x_{n_i}) + D_p(x_{n_i}, T_n(z)) + p(z, x_{n_i})\}.
 \end{aligned}$$

Ainsi

$$D_p(x_{n_i}, T_n(z)) \leq \frac{\alpha + \beta + \gamma}{1 - \beta - \gamma} \{p(x_{n_i-1}, x_{n_i}) + p(z, x_{n_i})\}.$$

Par conséquent, $D_p(x_{n_i}, T_n(z)) \rightarrow 0$ quand $i \rightarrow +\infty$. Et par l'inégalité

$D_p(z, T_n(z)) \leq p(x_{n_i}, z) + D_p(x_{n_i}, T_n(z))$ et ceci donne $D_p(z, T_n(z)) = 0$. On a $p(z, z) = \lim_{i \rightarrow \infty} p(x_{n_i}, z) = 0$, on obtient $p(z, z) = D_p(z, T_n(z))$ et puisque $T_n(z)$ est fermé, ce qui donne $z \in \overline{T_n(z)} = T_n(z)$, $n = 1, 2, \dots$. \square

3.3 Point fixe commun dans un espace métrique cône

On va généraliser le théorème 3.1.1 pour une suites des fonction dans des espaces métriques cônes.

Théorème 3.3.1. *Soit (X, d) un espace métrique cône complet et K un sous-ensemble fermé non vide de X tel que pour tout $x \in K$ et $y \notin K$ il existe un point $z \in \partial K$ tel que $d(x, z) + d(z, y) = d(x, y)$. Soit f_n ($n = 1, 2, \dots$) est une suite de fonction de K dans X . Supposons qu'il existent des constantes réels non négatives α, β, γ , avec $\alpha + (\alpha + 3)(\beta + \gamma) < 1$ telles que :*

$$\begin{aligned}
 d(f_i(x), f_j(y)) &\leq \alpha d(x, y) + \beta \{d(x, f_i(x)) + d(y, f_j(y))\} \\
 &\quad + \gamma \{d(x, f_j(y)) + d(y, f_i(x))\}
 \end{aligned}$$

Pour tous $x, y \in K$ et pour $i, j = 1, 2, \dots$. Si $f_n(\partial K) \subset K$ pour tous $n = 1, 2, \dots$, alors il existe un point fixe commun unique $z \in K$.

Démonstration. Il existe $x_0 \in K$ tel que $f_1(x_0) \subset K$. Si $\alpha = \beta = \gamma = 0$, tout $z = f_1(x_0)$ est point fixe commun. En effet, pour $n = 2, 3, \dots$, $d(f_1(x_0), f_n(z)) = 0$ alors $z = f_n(z)$, $n = 2, 3, \dots$. Puisque $d(f_1(z), f_2(z)) = 0$, on a $z = f_1(z)$. Donc on suppose que $\alpha + \beta + \gamma > 0$. Puisque $\alpha + (\alpha + 3)(\beta + \gamma) < 1$, on a $(1 + \beta + \gamma)(\alpha + \beta + \gamma) / (1 - \beta - \gamma)^2 < 1$. On choisit deux suites $\{x_n\}$ dans K et $\{y_n\}$ de la manière suivante. Soit $x_1 = y_1 = f_1(x_0)$, il existe $y_2 = f_2(x_1)$ tel que $d(y_1, y_2) = d(f_1(x_0), f_2(x_1))$. Si $y_2 \in K$, soit $y_2 = x_2$. Si $y_2 \notin K$ on choisit un élément $x_2 \in \partial K$ tel que

$$d(x_1, x_2) + d(x_2, y_2) = d(x_1, y_2).$$

Par introduction on peut obtenir des suites $\{x_n\}, \{y_n\}$ telles que pour $n = 1, 2, \dots$,

- (a) $y_{n+1} = f_{n+1}(x_n)$
- (b) $d(y_n, y_{n+1}) = d(f_n(x_{n-1}), f_{n+1}(x_n))$
où
- (c) Si $y_{n+1} \in K$ alors $x_{n+1} = y_{n+1}$ et
- (d) Si $y_{n+1} \notin K$ alors $x_{n+1} \in \partial K$ et

$$d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, y_{n+1}) = d(x_n, y_{n+1})$$

On va estimer la distance $d(x_n, x_{n+1})$ pour $n \geq 2$. On a trois cas :

- (i) $x_n = y_n$ et $x_{n+1} = y_{n+1}$. On a

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+1}) &= d(y_n, y_{n+1}) \\ &= d(f_n(x_{n-1}), f_{n+1}(x_n)) \\ &\leq \alpha d(x_{n-1}, x_n) + \beta \{d(x_{n-1}, f_n(x_{n-1})) + d(x_n, f_{n+1}(x_n))\} \\ &\quad + \gamma \{d(x_{n-1}, f_{n+1}(x_n)) + d(x_n, f_n(x_{n-1}))\} \\ &\leq \alpha d(x_{n-1}, x_n) + \beta \{d(x_{n-1}, x_n) + d(x_n, x_{n+1})\} \\ &\quad + \gamma \{d(x_{n-1}, x_n) + d(x_n, x_{n+1})\}. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$(1 - \beta - \gamma)d(x_n, x_{n+1}) \leq (\alpha + \beta + \gamma)d(x_{n-1}, x_n)$$

et

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \frac{\alpha + \beta + \gamma}{1 - \beta - \gamma} d(x_{n-1}, x_n)$$

(ii) $x_n = y_n$ et $x_{n+1} \neq y_{n+1}$. D'après (d) on obtient que

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq d(x_n, y_{n+1}) = d(y_n, y_{n+1}).$$

Comme dans le cas (i), on a

$$d(y_n, y_{n+1}) \leq \frac{\alpha + \beta + \gamma}{1 - \beta - \gamma} d(x_{n-1}, x_n)$$

ainsi

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \frac{\alpha + \beta + \gamma}{1 - \beta - \gamma} d(x_{n-1}, x_n)$$

(iii) $x_n \neq y_n$ et $x_{n+1} = y_{n+1}$. Dans ce cas $x_{n-1} = y_{n-1}$. On a

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+1}) &\leq d(x_n, y_n) + d(y_n, x_{n+1}) - d(y_n, y_n) \\ &\leq d(x_n, y_n) + d(y_n, x_{n+1}). \end{aligned}$$

D'après l'égalité (b), on a

$$\begin{aligned} d(y_n, y_{n+1}) &\leq d(f_n(x_{n-1}), f_{n+1}(x_n)) \\ &\leq \alpha d(x_{n-1}, x_n) + \beta \{d(x_{n-1}, f_n(x_{n-1})) + d(x_n, f_{n+1}(x_n))\} \\ &\quad + \gamma \{d(x_{n-1}, f_{n+1}(x_n)) + d(x_n, f_n(x_{n-1}))\} \\ &\leq \alpha d(x_{n-1}, x_n) + \beta \{d(x_{n-1}, y_n) + d(x_n, x_{n+1})\} \\ &\quad + \gamma \{d(x_{n-1}, x_n) + d(x_n, x_{n+1}) + d(x_n, y_n)\}. \end{aligned}$$

Par conséquent, on obtient

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+1}) &\leq (1 + \gamma)d(x_n, y_n) + (\alpha + \gamma)d(x_{n-1}, x_n) \\ &\quad + \beta d(x_{n-1}, y_n) + (\beta + \gamma)d(x_n, x_{n+1}) \\ &\leq (1 + \gamma)d(x_{n-1}, y_n) + \beta d(x_{n-1}, y_n) \\ &\quad + (\beta + \gamma)d(x_n, x_{n+1}), \end{aligned}$$

ce qui donne

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \frac{1 + \beta + \gamma}{1 - \beta - \gamma} d(x_{n-1}, y_n).$$

Puisque $x_{n-1} = y_{n-1}$ et $x_n \neq y_n$, on a d'après le cas (ii)

$$d(x_{n-1}, y_n) \leq \frac{\alpha + \beta + \gamma}{1 - \beta - \gamma} d(x_{n-2}, x_{n-1}).$$

Ainsi, pour tout $n \geq 2$

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \frac{(1 + \beta + \gamma)(\alpha + \beta + \gamma)}{(1 - \beta - \gamma)^2} d(x_{n-2}, x_{n-1}).$$

Le cas où $x_n \neq y_n$ et $x_{n+1} \neq y_{n+1}$ ne se pose pas. Puisque

$$\frac{\alpha + \beta + \gamma}{1 - \beta - \gamma} \leq \frac{(1 + \beta + \gamma)(\alpha + \beta + \gamma)}{(1 - \beta - \gamma)^2},$$

pour $n \geq 2$, on a

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \begin{cases} \lambda d(x_{n-1}, x_n), & \text{ou} \\ \lambda d(x_{n-2}, x_{n-1}). \end{cases}$$

Où $\lambda = (1 + \beta + \gamma)(\alpha + \beta + \gamma)/(1 - \beta - \gamma)^2$. On pose $\delta = \lambda^{-\frac{1}{2}} \max\{d(x_0, x_1), d(x_1, x_2)\}$, alors par induction on peut montrer que

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \lambda^{\frac{n}{2}} \delta \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Alors pour tout $m > n \geq 1$,

$$d(x_n, x_m) \leq \delta \sum_{i=n}^{m-1} \lambda^{\frac{i}{2}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

D'après la remarque 1.3.1 et le corollaire 1.3.1 on obtient $d(x_n, x_m) \ll c$. Alors $\{x_n\}$ est une suite de Cauchy dans un espace complet (X, d) . Donc la suite $\{x_n\}$ converge vers un point $z \in K$. D'après la définition de $\{x_n\}$ il existe une sous-suite $\{x_{n_i}\}$ de $\{x_n\}$ telle que $\{x_{n_i}\} = \{y_{n_i}\}$ pour $i = 1, 2, \dots$. Alors pour $n = 1, 2, \dots$ et $0 \ll c$, on a

$$\begin{aligned} d(x_{n_i}, f_n(z)) &= d(f_{n_i}(x_{n_i-1}), f_n(z)) \\ &\leq \alpha d(x_{n_i-1}, z) + \beta \{d(x_{n_i-1}, f_{n_i}(x_{n_i-1})) + d(z, f_n(z))\} \\ &\quad + \gamma \{d(x_{n_i-1}, f_n(z)) + d(z, f_{n_i}(x_{n_i-1}))\} \\ &\leq \alpha \{d(x_{n_i-1}, x_{n_i}) + d(x_{n_i}, z)\} + \beta \{d(x_{n_i-1}, x_{n_i}) + d(z, x_{n_i}) + d(x_{n_i}, f_n(z))\} \\ &\quad + \gamma \{d(x_{n_i-1}, x_{n_i}) + d(x_{n_i}, f_n(z)) + d(z, x_{n_i})\}. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} d(x_{n_i}, f_n(z)) &\leq \frac{\alpha + \beta + \gamma}{1 - \beta - \gamma} \{d(x_{n_i-1}, x_{n_i}) + d(z, x_{n_i})\} \\ &\ll \frac{\alpha + \beta + \gamma}{1 - \beta - \gamma} \left(\frac{c}{2 \left(\frac{\alpha + \beta + \gamma}{1 - \beta - \gamma} \right)} + \frac{c}{2 \left(\frac{\alpha + \beta + \gamma}{1 - \beta - \gamma} \right)} \right) \\ &\ll c \end{aligned}$$

et donc $z = f_n(z)$ ($n = 1, 2, \dots$).

L'unicité : on suppose que $\bar{z} \in K$ et $\bar{z} = f_n(\bar{z})$, alors

$$\begin{aligned}
 d(\bar{z}, z) &= d(f_n(\bar{z}), f_n(z)) \\
 &\leq \alpha d(\bar{z}, z) + \beta \{d(\bar{z}, f_n(\bar{z})) + d(z, f_n(z))\} \\
 &\quad + \gamma \{d(\bar{z}, f_n(z)) + d(z, f_n(\bar{z}))\} \\
 &= \alpha d(\bar{z}, z) + \beta d(\bar{z}, \bar{z}) + 2\gamma d(\bar{z}, z) \\
 &\leq \alpha d(\bar{z}, z) + \beta d(\bar{z}, z) + \beta d(z, \bar{z}) - \beta d(z, z) + 2\gamma d(\bar{z}, z) \\
 &\leq (\alpha + 2\beta + 2\gamma) d(\bar{z}, z)
 \end{aligned}$$

et comme $\alpha + 2\beta + 2\gamma < 1$, on obtient $d(\bar{z}, z) = 0$ et $\bar{z} = z$.

Alors f_n admet un point fixe commun unique. □

Conclusion

Le théorème du point fixe est fondamental en analyse. Il a des applications nombreuses, à la fois théoriques et pratiques. Ce mémoire fournit des outils qui vont contribuer au développement de la théorie de point fixe dans les espaces métriques ordonnés.

Au premier chapitre, on a donné les outils mathématiques nécessaires sur les espaces métriques, espaces métriques partiels et espaces métriques cônes.

Au deuxième chapitre, on a présenté des généralisations de théorèmes de point fixe pour les multifonction contractantes dans les espaces métriques partiels et cônes.

Ainsi, les travaux présentés dans le troisième chapitre dans ce document fournissent des résultats obtenus sur les généralisations de théorème de point fixe dans les espaces ordonnés.

Bibliographie

- [1] H. D. Abu Sarries, Cone metric space, 2016, An-Najah National Univ. Nablus Palestine, (Supervisor : A. A. Hakawati).
- [2] R. P. Agarwal, M. Meehan, D. O'regan, Fixed point theory and applications, Cambridge Tracts in Mathematics, Vol. 141, Cambridge University Press (2001).
- [3] M. Arshad, J. Ahmad, On multivalued contractions in cone metric spaces without normality, S. W. J. Vol. 2013, Article ID 481601, 3 pages, (2013).
- [4] M. Asadi, H. Soleimani, Examples in cone metric spaces : a survey, Middle-East Journal of Scientific Research 11 (12) : 1636-1640, 2012.
- [5] H. Aydi, M. Abbas, C. Vetro, Partial Hausdorff metric and Nadler's fixed point theorem on partial metric spaces, Topology Appl. 159 (2012) 32343242.
- [6] S. Banach, Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales, Fund. Math., 3 (1922), 133-181.
- [7] Z. Gherbia, Théorèmes du point fixe des contractions multi-voques dans l'espace métrique partiel cône, Soutenue 2016, Univ. de M'hamed Boumerdes, (Encadreur : Y. Adjabi).
- [8] O. Hassani, Analyse multivoque et inclusions différentielles, Soutenue le 11 Juin 2015, Univ. Dr Tahar Moulay - Saïda, (Encadreur : H. Abbas).
- [9] L.-G. Huang, X. Zhang, Cone metric spaces and fixed point theorems of contractive mappings, J. Math. Anal. Appl., 332, 1468-1476.2 (2007).
- [10] S. Itoh, Multivalued generalized contractions and fixed point theorems, Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 18, No. 2, 247-258 (1977).
- [11] E. Karapinar, W. Shatanawi, K. Tas, Fixed point theorem on partial metric spaces involving rational expressions, Miskolc Mathematical Notes (2012).

- [12] M. A. Khamsi, Remarks on cone metric spaces and fixed point theorems of contractive mappings, *Fixed Point Theory and Applications* Vol. 2010, Article ID 315398, p 7, (2010).
- [13] S. Kumar, T. Rugumisa, M. Imdad, Common fixed points in metrically convex partial metric spaces, *K. J. Math.*, Vol. 5, No. 2 pp. 54-69 (2017).
- [14] S. G. Matthews, Partial metric topology, In : *Proc. 8th Summer Conference on general topology and applications. Ann. New York Acad. Sci.*, vol. 728, pp. 183-197 (1994).
- [15] S. B. Nadler, Multi-valued contraction mappings, *Pacific J. Math.*, Vol. 30, No. 2, (1969).
- [16] F. Nier, D. Iftimie, *Introduction à la topologie, Licence de Mathématiques Univ. de Rennes 1.*
- [17] T. Oner, M. B. Kandemir, B. Tanay, Fuzzy cone metric spaces, *J. Nonlinear Sci. Appl.* 8 (2015), 610-616.
- [18] T. -E. Oussaeif, A. Aliouche, Fixed point theorems in convex partial metric spaces, *K. J. Math.*, Vol. 2, No. 2 pp. 96-101 (2014).
- [19] S. Radenović, Z. Kadelburg, Quasi-contractions on cone symmetric spaces, *Banach J. Math. Anal.* 5(2011), No. 1, 3850.
- [20] H. A. Tedjani, *Topologie générale et applications, Univ. El-Oued Algeria, (2017).*
- [21] K. Yanagi, A common fixed point theorem for a sequence of multivalued mappings, *Publ. RIMS, Kyoto Univ.*, 15 (1979), 47-52.

Résumé

L'objectif de notre travail est de trouver des points fixes pour une suite de fonctions et multifonctions satisfaisant certaines conditions dans les espaces métriques partiels et les espaces métriques cônes. On a présenté quelques résultats de la théorie du point fixe de Banach et de Nadler pour les fonctions et les multifonctions contractantes définies sur les espaces métriques, les espaces métriques partiels et les espaces métriques cônes. Et on a terminé par des généralisations sur l'existence d'un point fixe commun d'une suite de fonctions sur les espaces ordonnés.

Mots clés: Point fixe, point de coïncidence, point fixe commun, espace métrique, espace ordonné, espace cône.

Abstract

The objective of our work is to find fixed point for a sequence of functions and multifunctions satisfying certain conditions in partial metric spaces and cones metric spaces. Some results from the Banach and Nadler fixed point theory have been presented for the functions and multifunctions of metric spaces, partial metric spaces and cones metric spaces. And we ended with generalizations about the existence of a common fixed point of a sequence of functions on ordered space.

Keywords: Fixe point, point of coincidence, common fixed point, metric space, espace ordered space, cone space.

ملخص

الهدف من عملنا هو العثور على النقاط الثابتة لمجموعة من الدوال و الدوال المتعددة التي تلي شروط معينة في الفضاءات المترية الجزئية و الفضاءات المترية المخروطية، ثم تقديم بعض النتائج عن نظرية بناخ و نادلر للنقطة الثابتة للدوال و الدوال المتعددة المعرفة في فضاءات مترية مرتبة و فضاءات مترية مخروطية. و انتهينا بتعميمات حول وجود نقطة ثابتة مشتركة لمتتالية من الدوال على الفضاءات المترية. الكلمات المفتاحية: نقطة ثابتة، نقطة صدفية، نقطة ثابتة مشتركة، فضاء مترى، فضاء مترى مرتب، فضاء مترى مخروطي.