

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère De L'Enseignement Supérieur Et De La Recherche Scientifique



UNIVERSITE ECHAHID HAMMA LAKHDAR  
D ' EL OUED  
FACULTE DES SCIENCES EXACTES  
Département des Mathématiques

## MEMOIRE DE FIN D'ETUDE

Présenté pour l'obtention du Diplôme de **MASTER**

**Domaine :** Mathématiques et informatique

**Filière:** Mathématiques

**Option:** Mathématiques fondamentales et appliquées

### Thème:

**Espaces généralisés au sens de Perov:  
Points fixes et applications aux équations intégro-  
différentielles.**

**Présenté par :** Laouid Sara et Matoug Fadhila  
**Soutenu publiquement devant le jury composé de:**

Beloul Said	MCA	Univ.El-Oued	Président.
Nisse Khadidja	MCA	Univ.El-Oued	Rapporteur.
Nouar Aziza Souad	MAA	Univ. El-Oued	Examineur.

**Promotion :** 2021 – 2022

## Résumé

Dans ce mémoire, on s'intéresse à des applications des théorèmes de points fixes dans les espaces généralisés au sens de Perov (métrique, normé, et de gauge). On commence par définir ces espaces et introduire quelques propriétés et exemples.

On présente ensuite quelques versions des théorèmes de points fixes dans ces espaces.

Enfin, on donne des applications aux équations intégrales et systèmes intégraux.

**Mots clés :** Espaces généralisés, théorème de Perov, point fixe, équation intégrale, systèmes intégraux.

## مُلخَص

- ) في هذه المذكرة نحن مهتمون بتطبيقات نظريات النقطة الثابتة في الفضاءات المعممة بمعنى بيروف (متري، نظيمي وقياس). نبدأ بتعريف هذه الفضاءات ونقدم بعض الخصائص و الأمثلة ثم نقدم بعض الاصدارات من نظريات النقطة الثابتة في هذه الفضاءات. أخيرا يتم إعطاء تطبيقات على معادلات التكامل التفاضلي و أنظمة متكاملة. كلمات مفتاحية: الفضاء المعمم، نظرية بيروف ، النقطة الثابتة، معادلات التكامل التفاضلي، نظام متكامل

## Abstract

In this memory, we are interested in applications of fixed point theorems in generalized space in the sense of Perov( metric, normed and gauge).

We begin by defining these spaces and introducing some properties and examples. We present some versions of fixed point theorem in space.

Finally, applications to integro-differential equation and integral system are given.

**Key words :** Generalized space, Perov's theorem, fixed point, integro-differential equations, integral system.

# Remerciements

On dit souvent que le trajet est aussi important que la destination. Ces quelques années nous ont permis de bien comprendre la signification de cette phrase toute simple. Ce parcours, en effet, ne s'est pas réalisé sans défis et sans soulever de nombreuses questions pour lesquelles les réponses nécessitent de longues heures de travail.

En premier lieu, je remercie " **Allah** " qui ma donné la volonté pour la réalisation de ce modeste mémoire.

De plus, nous tenons à exprimer notre profonde de gratitude à notre message Mme **Nice Khadija**, Docteur à l'université de El-Oued, pour la confiance qu'elle nous à accordée, ainsi que pour ses qualités scientifiques et humaines et notamment sa patience dans la direction de ce travail. Nous avons eu tellement de plaisir à travailler avec celle .

Nous remercions tous ceux qui nous ont aidés à réaliser ce travail.

# Table des matières

<b>Notations</b>	<b>x</b>
<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Préliminaires</b>	<b>4</b>
1.1 Rappel sur quelques notions topologique . . . . .	4
1.2 Structure de gauge . . . . .	6
1.3 Quelques versions du théorème de Point fixe . . . . .	9
1.4 Matrice convergentes . . . . .	11
<b>2 Théorème de Perov dans les espaces généralisés ( métrique et normé ) et application</b>	<b>16</b>
2.1 Espace généralisé (métrique et normé) . . . . .	16
2.2 Théorème de Perov dans les espaces généralisés (métrique et normé) . . . . .	21
2.3 Application aux équations Intégro-différentielles . . . . .	24
<b>3 Théorème de Perov dans les espaces de gauge généralisés et application</b>	<b>36</b>
3.1 Espace de gauge généralisé . . . . .	36
3.2 Théorème de Perov dans l'espace de gauge généralisé . . . . .	37
3.3 Application à un système intégral . . . . .	41

Conclusion générale

46

Bibliographie

46



# Notations

$\mathbb{R}$	: Ensemble des nombres réels.
$\mathbb{R}_+$	: Ensemble des nombres positifs.
$\mathbb{R}^n$	: Espace vectoriel de dimension $n$ contraint sur le corps de réels.
$\mathbb{N}$	: Ensemble des nombres naturels.
$(X, \tau)$	: Espace topologique.
$(X, \mathcal{D})$	: Espace de gauge.
$(X, \mathcal{D}_G)$	: Espace de gauge généralisé.
$(X, d)$	: Espace métrique.
$(X, d_G)$	: Espace métrique généralisé.
$\mathcal{M}_{n \times n}$	: L'ensemble des matrice carré d'ordre $n$ .
$\  \cdot \ _G$	: Norme généralisé.
$\  \cdot \ $	: Norme (scalaire).
$d(., .)$	: Distance.
$d_G(., .)$	: Distance généralisé.
$D_\lambda(x, y)$	: Semi-distance.
$D_{\lambda G}(x, y)$	: Semi-distance généralisé.
$B(x_0, r)$	: Boule ouverte.
$B_G(x_0, r)$	: Boule ouverte généralisé.
$b(x_0, r)$	: Semi-boule ouverte.
$b_G(x_0, r)$	: Semi-boule ouverte généralisé.

# Introduction

En 1905, le mathématicien français Maurice Fréchet introduit le concept d'espaces métriques, bien que le terme « métrique » est dû à Hausdorff. En 1934, le mathématicien serbe Duro Kurepa, doctorant de Fréchet, introduit les espaces métriques dans lesquels un espace vectoriel ordonné est utilisé comme co-domaine d'une distance au lieu de l'ensemble des nombres réels [7].

Le principe bien connu d'application contractive de Banach joue un rôle crucial dans l'analyse fonctionnelle et assure l'existence et l'unicité d'un point fixe sur un espace métrique complet. De nombreuses généralisations de ce principe ont été données au cours des dernières années. Nous pouvons observer deux directions principales dans cet axe de recherche, l'une est en trouvant une inégalité de contraction plus générale et l'autre est en modifiant la structure de l'espace. Dans le contexte de la deuxième direction, le mathématicien russe A. I. Perov a présenté ce principe dans des espaces métriques généralisés dont la distance est à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$ . En fait, cette structure généralisée lui a permis de définir une nouvelle classe d'applications, appelées contractions de Perov, qui satisfont un type de contraction similaire à celui de Banach, mais avec une matrice  $M \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$  qui tend vers zéro au lieu d'une constante  $0 < q < 1$ . Ce résultat a trouvé une application principale dans le domaine des équations différentielles ([5], [8])

D'autre part, la question de l'existence et de l'unicité des solutions d'équations et systèmes intégrales et différentiels de divers types est d'un intérêt croissant. Récemment, l'utilisation

## Introduction

---

de certains principes de point fixe pour obtenir ce type de résultat pour des équations différentielles fractionnaires ou ordinaires a été largement envisagée par de nombreux auteurs (voir [1] et les références qui y sont cités). Le thème abordé dans ce mémoire s'inscrit dans cet axe de recherche, où nous allons envisager quelques applications du principe de contraction généralisé au sens de Perov dans le cadre d'espaces généralisés (métriques et de gauges), à quelques systèmes et équations intégro-différentiels.

Le contenu du mémoire est composé de trois chapitres réparti comme suit :

Le premier chapitre est consacré aux rappels de quelques notions qui nous seront utiles par la suite : quelques notions topologiques, la structure de gauge, quelques versions des théorèmes de point fixe et les matrices convergentes.

Dans le deuxième chapitre, nous commençons par définir les espaces métriques (et normés) généralisés et nous donnons quelques exemples. Ensuite, nous présentons la généralisation du principe de Banach dans cette structure (**théorème de Perov**). Enfin, nous envisageons l'application de ce théorème au problème intégro-différentiels suivant

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t), x'(t - \tau)) + \int_{t-\tau}^t g(t, s, x(s), x'(s)) ds, & t \in [0, b] \\ x(t) = \varphi(t) & t \in [-\tau, 0] \end{cases} \quad (1)$$

Nous allons reproduire le résultat d'existence et d'unicité des solutions de (1). établi dans [2]. Ceci est en ajoutant quelques détails d'une part, et en divisant la preuve en plusieurs étapes qui la rendent plus claire pour le lecteur non expert d'autre part.

Dans le troisième chapitre, nous considérons la généralisation des espaces dont la topologie est engendré par une famille de semi-distances, appelés aussi espaces de gauge. Nous présentons la version du théorème de Perov dans cette structure, puis nous appliquons ce théorème

## Introduction

---

au système intégral avec avance dans la demi-droite réelle, suivant (considéré dans[3])

$$\begin{cases} x(t) = \int_{t-1}^t f(s, x(s+2), y(s+2)) ds \\ y(t) = \int_{t-1}^t g(s, x(s+2), y(s+2)) ds \end{cases}$$

pour  $t \in [0, \infty)$ .

Notons que l'utilisation de ce type de version de la théorie du point fixe est très peu dans la littérature bien qu'elles soient plus appropriées dans l'étude du comportement des problèmes de long terme, c'est-à-dire lorsque le problème est posé pour  $t \in [t_0, \infty)$ . Sous certaines conditions suffisantes, on montre l'existence d'une solution du problème considéré.

# Chapitre 1

## Préliminaires

### 1.1 Rappel sur quelques notions topologique

**Définition 1.1.1. (Topologie, ouvert)[14]**

Soient  $X$  un ensemble,  $\mathcal{P}(X) = \{A/A \subseteq X\}$  l'ensemble des parties de  $X$  et  $\tau$  un sous ensemble des  $\mathcal{P}(X)$  (i.e.,  $\tau \subset \mathcal{P}(X)$ ). On dit que  $\tau$  définit une topologie sur  $X$  si elle vérifie les propriétés suivantes, appelées **axiomes des ouverts** :

1.  $\emptyset \in \tau$  et  $X \in \tau$
2. Toute l'intersection finie d'éléments de  $\tau$  est un élément de  $\tau$  i.e.,

$$\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n \in \tau \implies \bigcap_{i=1}^n \theta_i \in \tau.$$

3. Toute réunion (finie ou infinie) d'éléments de  $\tau$  est un élément de  $\tau$  i.e.,

$$\forall i \in I, \theta_i \in \tau \implies \bigcup_{i \in I} \theta_i \in \tau$$
 Les éléments de  $\tau$  sont appelés ouvert de  $X$ .

Le couple  $(X, \tau)$  est appelé espace topologique.

Les éléments de  $\tau$  sont appelés les ouverts, ou les parties ouvertes, de  $X$ .

### Définition 1.1.2. (Fermés)[14]

Soient  $(X, \tau)$  un espace topologique et  $A \subset X$ . On dit que  $A$  est un fermé de  $X$  si son complémentaire  $\complement_X A$  est un ouvert de  $X$  (i.e,  $\complement_X A \in \tau$ ).

### Définition 1.1.3. (Base d'une topologie)[14]

Soient  $(X, \tau)$  un espace topologique et  $\mathcal{B}$  une partie de  $\tau$  ( i.e.,  $\mathcal{B} \subset \tau$ ). On dit que  $\mathcal{B}$  est une base de la topologie  $\tau$  si tout ouvert non vide de  $X$  est réunion d'une famille d'ouverts de  $\mathcal{B}$  i.e.,

$$\forall \theta \in \tau, \theta \neq \emptyset, \exists \mathcal{B}' \subset \mathcal{B} / \theta = \cup_{B \in \mathcal{B}'} B.$$

### Définition 1.1.4. (Sous-base d'une topologie)[9]

Soit  $(X, \tau)$  un espace topologique , et soit  $S$  une famille de sous-ensemble de  $X$ . On dit que  $S$  est une sous-base de  $\tau$  si la famille des intersections finis de  $S$  forme une base de  $\tau$ .

$\{\bigcap_{i=1}^n : u_i \in S\}$  est une base de  $\tau$ .

### Définition 1.1.5. (Voisinage d'un point ) [14]

Soient  $(X, \tau)$  un espace topologique,  $a \in X$  et  $V$  une partie de  $X$ .  $V$  est dit voisinage de  $a$  et on note  $V \in \mathcal{V}_\tau(a)$  s'il existe un ouvert  $\theta$  de  $X$  tel que  $a \in \theta \subset V$ . Ce qui est encore équivalent à :

$$V \in \mathcal{V}_\tau(a) \Leftrightarrow \exists \theta \in \tau / a \in \theta \subset V.$$

$\mathcal{V}_\tau(a)$  est appelé ensemble des  $\tau$ - voisinages ou famille des  $\tau$ - voisinages de  $a$ .

### Définition 1.1.6. (Voisinage d'une partie)[14]

Soient  $(X, \tau)$  un espace topologique,  $A$  une partie de  $X$  et  $V$  une partie de  $X$ .  $V$  est dit voisinage de  $A$  s'il existe un ouvert  $\theta$  de  $X$  tel que  $A \subset \theta \subset V$ .

### Définition 1.1.7. (Espace séparé)[14]

Un espace topologique  $X$  est dit espace séparé ou un  $T_2$ -espace, ou encore espace de Haus-

doit s'il vérifié l'axiome suivant :

$$\forall x, y \in X, x \neq y \implies \exists V \in \mathcal{V}_\tau(x), \exists W \in \mathcal{V}_\tau(y) : V \cap W = \emptyset.$$

Ce qui signifie que "deux points distincts quelconque de  $X$  peuvent être séparés par des voisinages disjoints".

### Définition 1.1.8. (Topologie engendrée par une famille d'ensembles)

Soient  $X$  un ensemble et  $\mathcal{A}$  un ensemble de parties de  $X$ . L'intersection de toutes les topologies qui contiennent  $\mathcal{A}$  est appelée topologie engendrée par  $\mathcal{A}$ . C'est la topologie la moins fine sur  $X$  qui contient l'ensemble de parties  $\mathcal{A}$ .

En général, la description des éléments d'une topologie engendrée par un ensemble de parties  $\mathcal{A}$  à partir d'éléments de  $\mathcal{A}$  est peu commode.

## 1.2 Structure de gauge

On va introduire des espaces dont la topologie est définie par une famille de semi-distances (ou semi-normes).

### Définition 1.2.1. (semi-distance gauge)[11]

Soit  $X$  un ensemble une application  $D : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$  est dite semi-distance si elle satisfait les propriétés suivantes :

- i)  $D(x, x) = 0$  pour tout  $x \in X$ ,
- ii)  $D(x, y) = D(y, x)$  pour tout  $x, y \in X$ ,
- iii)  $D(x, y) \leq D(x, z) + D(z, y)$  pour tout  $x, y, z \in X$ .

**Remarque 1.2.1.** Dans la littérature, on rencontre aussi le terme "**gauge**" au lieu de semi-distance qu'on admettra par la suite.

### Exemples :

1. Toute distance est une semi-distance mais l'inverse n'est pas vrai.
2. Pour toute application  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$D_f(x, y) = |f(x) - f(y)|$$

est une semi-distance sur  $X$ .

Notons que  $D_f$  n'est une distance sur  $X$  que lorsque  $f$  est injective.

3. Soient  $Y = Y_1 \times \dots \times Y_n$  et  $D_i$  une semi-distance sur  $Y_i (i = 1, 2, \dots, n)$ , alors  $\tilde{D}(x, y) = D_i(\pi_i(x), \pi_i(y))$  est une semi-distance sur  $Y$ , où  $\pi_i$  est l'opérateur de projection de  $Y$  sur  $Y_i$ .

**Définition 1.2.2.** [11] Soit  $X$  un ensemble non vide et  $\mathcal{D} = \{D_\lambda : \lambda \in \Lambda, \Lambda \neq \emptyset\}$  famille de semi-distance sur  $X$ ,  $\mathcal{D}$  est appelée gauge sur  $X$ .

### Définition 1.2.3. (semi-boule fermé et ouverte)[6]

Soit  $\mathcal{D} = \{D_\lambda : \lambda \in \Lambda, \Lambda \neq \emptyset\}$  une gauge sur  $X$ .

Pour tout  $x \in X$  et  $r > 0$ , on définit la semi-boule ouverte (fermée respectivement) et qu'on note par  $b_\lambda(x, r)$  ( $\bar{b}_\lambda(x, r)$  respectivement) comme suit :

$$b_\lambda(x, r) = \{y \in X : D_\lambda(x, y) < r\}$$

semi- boule ouverte

$$(\bar{b}_\lambda(x, r) = \{y \in X, D_\lambda(x, y) \leq r\} \text{ respectivement})$$

semi-boule fermée

**Définition 1.2.4. (Espace de gauge séparé) [11]**

Soit  $\mathcal{D}_\lambda = \{D_\lambda : \lambda \in \Lambda, \Lambda \neq \emptyset\}$  gauge sur  $X$ . On dit que  $X$  est séparé ou que

**Définition 1.2.5. (Topologie de gauge)[6]**

Soit  $\mathcal{D}$  une gauge séparante sur  $X$ .

La topologie  $\tau(\mathcal{D})$  qui admet comme sous-base

$$\mathcal{B}(\mathcal{D}) = \{b_\lambda(x, \varepsilon), x \in X, \lambda \in \Lambda, \varepsilon > 0\}$$

est dite la topologie de  $X$  engendré par  $\mathcal{D}$

**Remarque 1.2.2.** 1. La topologie  $\tau(\mathcal{D})$  est séparante ( $(X, \tau(\mathcal{D}))$  est un espace de Hausdorff).

2. Si  $\mathcal{D}$  contient seulement une seule semi-distance, pour que  $\mathcal{D}$  soit séparante, il faut que la seule semi-distance soit une distance, par la suite  $\tau(\mathcal{D})$  est la topologie engendré par cette distance.

**Définition 1.2.6. (Espace de gauge)[6]**

Une structure de gauge pour un espace topologique  $(X, \tau)$  est une famille séparante de gauges  $\mathcal{D}$  telle que  $\tau = \tau(\mathcal{D})$ .

Un espace topologique qui admet une structure de gauge est appelé espace de gauge qu'on note par  $(X, \mathcal{D})$ .

**Définition 1.2.7. [11]** Soit  $\mathcal{D} = \{D_\lambda, \lambda \in \Lambda, \Lambda \neq \emptyset\}$  une gauge sur  $X$ . Une suite  $(x_n)$  est dite suite de Cauchy dans  $(X, \mathcal{D})$  si  $\lim_{m, n \rightarrow \infty} D_\lambda(x_m, y_n) = 0$  pour chaque  $\lambda \in \Lambda$ . Un espace de gauge  $X$  est dit séquentiellement complet si toute séquence de Cauchy dans  $X$  converge vers un élément de  $X$ .

**Théorème 1.2.1. [6]** Soit  $\mathcal{D} = \{D_\lambda, \lambda \in \Lambda, \Lambda \neq \emptyset\}$  une gauge séparante de  $X$  et  $\mathcal{D}^+$  la

famille de gauge définie par

$$\mathcal{D}^+ = \{\max(D_{\lambda_1}, \dots, D_{\lambda_n}) / \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \text{ partie finie de } \Lambda\}$$

Alors

$$\mathcal{B}(\mathcal{D}^+) = \{b_\lambda(x, \varepsilon) / x \in X \lambda \in \mathcal{D}^+, \varepsilon > 0\}$$

est une base de  $\tau(\mathcal{D})$ .

Notons que si  $(X, \mathcal{D})$  est un espace de gauge, toutes les notions topologique dans  $X$  tel que : voisinage, convergence, continuité, compacité, complétude, ..., s'expriment à trouver  $\mathcal{D}$ .

**Par exemple :**

Si  $\{x_n\}_{n \geq 1}$  est une suite dans  $X$  on dit que  $\{x_n\}_{n \geq 1}$  est une suite de Cauchy si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall m, n > n_0 : D_\lambda(x_n, x_m) < \varepsilon, \forall \lambda \in \Lambda$$

$\{x_n\}_{n \geq 1}$  converge vers  $x$  si :

Pour tout  $\lambda \in \Lambda$  on a :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0, \forall n \geq n_0 : D_\lambda(x_n, x) < \varepsilon.$$

### 1.3 Quelques versions du théorème de Point fixe

**Définition 1.3.1. (Point fixe)[4]**

Soit  $T : X \rightarrow X$  est dit point fixe ou point invariant de l'application  $T$  si  $Tx = x$ .

Par théorème de Point fixe, on entendra un énoncé qui affirme que sous certaines condition (sur l'application  $T$  et sur l'espace  $X$ ) une application  $T$  de  $X$  en elle-même admet un

ou plusieurs point fixes.

### Définition 1.3.2. [4]

Un espace topologique  $X$  est dit posséder la propriété de point fixe si toute fonction continue de  $X$  en lui-même possède un point fixe.

**Théorème 1.3.1.** [4] Soient  $X, Y$  deux espaces topologiques. Si  $X$  est homéomorphe à  $Y$  et que  $X$  a la propriété de point fixe, alors  $Y$  a la propriété de point fixe.

### Théorème 1.3.2. (Schauder) [4]

Soient  $X$  un espace de Banach,  $D \subset X$  une partie convexe et fermé de  $X$  et  $T : D \rightarrow D$  un opérateur complètement continu (i.e,  $T$  continu et  $T(D)$  est relativement compact). Alors,  $T$  possède au moins un point fixe.

**Théorème 1.3.3.** [4]. Soit  $K$  un sous ensemble non vide, compact et convexe d'un espace normé  $X$  et soit  $T$  une application continue de  $K$  dans lui-même. Alors  $T$  admet un point fixe dans  $K$ .

**Théorème 1.3.4.** [4] Soit  $T$  une application compacte et continue du espace normé  $X$  dans lui-même et soit  $T(X)$  borné. Alors,  $T$  admet un point fixe.

**Théorème 1.3.5.** [4] Soit  $X$  un espace de Banach réflex,  $K$  un sous-ensemble fermé et convexe de  $X$  et  $T$  une application faiblement continue de  $K$  dans un sous-ensemble borné de  $K$ . Alors,  $T$  admet un point fixe.

**Théorème 1.3.6.** [4] Soit  $X$  un espace normé. Supposons que  $K$  est un sous ensemble non vide, fermé et convexe de  $X$ , et  $T$  une application continue de  $K$  sur lui-même telle que  $T(K)$  est relativement compact dans  $X$ . Alors,  $T$  admet un point fixe.

### Théorème 1.3.7. (Leray-Schauder)[12]

Soient  $(X, \| \cdot \|_X)$  un espace de Banach,  $R > 0$  et  $T : \bar{B}_R(0; X) \rightarrow X$  un opérateur

## Chapitre 1 .

---

complètement continu. Si  $\|U\|_X < R$  pour toute solution  $u$  de l'équation  $u = \lambda T(u)$  et tout  $\lambda \in (0, 1)$ . Alors,  $T$  admet au moins un point fixe.

Nous allons maintenant donner l'analogie du principe de contraction de Banach dans un espace muni d'une structure de gauge.

**Définition 1.3.3.** [3] Soit  $(X, \mathcal{D})$  un espace de gauge avec  $\mathcal{D} = \{D_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  une application  $T : F(T) \subset X \rightarrow X$  est contraction s'il existe une fonction  $\varphi : \Lambda \rightarrow \Lambda$  et  $a \in \mathbb{R}_+^\Lambda$ ,  $\mathbf{a} = \{a_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  tel que

$$D_\lambda(T(x), T(y)) \leq a_\lambda D_{\varphi(\lambda)}(x, y),$$

et

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_\lambda a_{\varphi(\lambda)} a_{\varphi^2(\lambda)} \dots a_{\varphi^{i-1}(\lambda)}(x, y) < \infty,$$

pour tout  $\lambda \in \Lambda$  et  $x, y \in F(T)$ . Ici  $\varphi^i : \varphi^i = \varphi \circ \varphi^{i-1}$ .

**Théorème 1.3.8. (Gheorghiu)** [3]

Soit  $(X, \mathcal{D})$  un espace de gauge complet et soit  $T : X \rightarrow X$  une contraction. Alors,  $T$  possède un unique point fixe qui peut être obtenu par approximations successives à partir de tout élément de  $X$ .

## 1.4 Matrice convergentes

On note  $\mathcal{M}_{n \times n}$  l'ensemble de toutes les matrices carré d'ordre  $n$ , par  $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R}^+)$  l'ensemble des matrices  $n \times n$  à entrées non négatives, on note  $0_n$  la matrice  $n \times n$  nulle et  $I$  pour la matrice unitaire et plus loin on identifie vecteur ligne et vecteur colonne dans  $\mathbb{R}^n$ .

**Définition 1.4.1.** [7] Une matrice carrée  $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$  avec des éléments non négatifs est dite

## Chapitre 1 .

---

convergente vers zéro si

$$M^k \longrightarrow 0, \text{ comme } k \longrightarrow \infty.$$

### Propriété 1.4.1. [7]

Soit  $M \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$  à éléments non négatifs. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i)  $M$  est convergente vers zéro.
- (ii)  $(I - M)$  est non singulier et :  $(I - M)^{-1} = I + M + M^2 + \dots + M^k + \dots + \dots$  tel que  $I$  représente la matrice unitaire de même ordre que  $M$ .
- (iii)  $|\lambda| < 1$  pour tout  $\lambda \in \mathbb{C}$  tel que  $d(M - \lambda I) = 0$ .
- (iv)  $(I - M)$  est non singulier et  $(I - M)^{-1}$  a des éléments non négatifs.

**Définition 1.4.2. [13]** Une matrice définie positive  $M$  sera toute matrice  $n \times n$  tel que  $x.Mx > 0$  pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ .

### Propriété 1.4.2. [13]

Nous utiliserons les propriétés suivantes d'une matrice définie positive  $M$  :

- (i)  $\det M > 0$ .
- (ii) Tous les mineurs principaux de  $M$  sont définis positifs.
- (iii) Si tous les éléments de  $M$  sont définis positifs. Alors,  $M^{-1}$  non négatif.
- (iv) Si  $M > 0$  alors  $\sum_{n=0}^{\infty} M^n$  converge si et seulement si pour certains  $m$ ,  $I - M^m$  est défini positif au quel cas

$$(I - M)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} M^n,$$

## Chapitre 1 .

---

**Lemme 1.4.1.** [12] Soit  $M \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R}^+)$ , la matrice  $M$  est convergente vers zéro si et seulement si  $I - M$  est non singulier et

$$(I - M)^{-1} = I + M + M^2 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} M^k, \quad (1.1)$$

**Preuve.** Supposons d'abord que  $M$  convergente vers zéro. Pour montrer que  $I - M$  est non singulier, il suffit de montrer que le système linéaire  $(I - M)Z = 0$  n'a que la solution nulle. Supposons que  $Z \in \mathbb{R}^n$  soit un solution de ce système, alors :

$$Z = MZ = M^2Z = M^3Z = \dots = M^kZ = \dots$$

et en laissant  $k \rightarrow \infty$  on en déduit  $Z = 0$ . Donc,  $I - M$  est non singulier.

De plus, (1.1) découle de l'identité

$$I - (I - M)(I + M + M^2 + \dots + M^k) = M^{k+1}.$$

Inversement, si  $I - M$  est non singulier et que (1.1) est vérifiée, alors de la convergence de la série  $\sum_{k=0}^{\infty} M^k$  nous concluons que

$$M^k \rightarrow 0 \text{ comme } k \rightarrow \infty.$$

□

**Lemme 1.4.2.** [7] Soit  $M \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R}_+)$  être convergente vers zéro, puis  $Z < (I - M)^{-1}Z$  pour tout  $Z \in \mathbb{R}_+^n$ .

**Preuve.** De puis  $M \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R}_+)$  est convergente vers zéro, puis de Proposition 1.4.1  $(I - M)^{-1} \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R}_+)$  et  $(I - M)^{-1} = I + M + M^2 + \dots$

## Chapitre 1 .

---

Ainsi pour chaque  $Z \in \mathbb{R}_+^n$ , nous avons

$$(I - M)^{-1}Z = \sum_{i=0}^{\infty} M^i Z \Rightarrow Z \leq (I - M)^{-1}Z.$$

□

**Définition 1.4.3.** [7] On dit matrice non singulière

$$A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$$

possède la propriété de valeur absolue si  $A^{-1} |A| \leq I$  comme

$$|A| = (|a_{ij}|)_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R}_+)$$

**Lemme 1.4.3.** [7] Soit  $M = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R}_+)$  est une matrice triangulaire avec  $\max\{|a_{ii}|, i = 1, \dots, n\} < \frac{1}{2}$ .

Ensuite la matrice  $A = (I - M)^{-1}M$  est convergente vers zéro.

**Preuve.** Suppose

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & & \\ 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R}_+),$$

alors les valeurs propres de  $M$  sont  $\lambda_i = \frac{a_{ii}}{1 - a_{ii}}$  pour  $i = 1, \dots, n$ . Puisque toutes les valeurs propres de  $M$  sont dans boule d'unité ouvert, la conclusion découle du Proposition 1.4.1. □

Voilà quelques exemples de matrice convergentes vers zéro.

**Exemple 1.4.1.**

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix},$$

comme  $a, b \in \mathbb{R}_+$  et  $\max(a, b) < 1$ .

**Exemple 1.4.2.**

$$A = \begin{pmatrix} a & -c \\ 0 & b \end{pmatrix},$$

comme  $a, b, c \in \mathbb{R}_+$  et  $a + b < 1$ ,  $c < 1$

**Exemple 1.4.3.**

$$A = \begin{pmatrix} a & -a \\ b & -b \end{pmatrix},$$

comme  $a, b, c \in \mathbb{R}_+$  et  $|a - b| < 1$ ,  $a > 1$ ,  $b > 0$ .

# Chapitre 2

## Théorème de Perov dans les espaces généralisés ( métrique et normé ) et application

### 2.1 Espace généralisé (métrique et normé)

Dans cette section, nous allons définir l'espace métrique généralisé (ou les espaces métriques vectoriels ) et prouvons certaines propriétés.

Si  $x, y \in \mathbb{R}^n$ ,  $x = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $y = (y_1, \dots, y_n)$

Par  $x \leq y$  Nous voulons dire  $x_i < y_i$  pour tout  $i = 1, \dots, n$ . Ainsi  $|x| = (|x_1|, \dots, |x_n|)$  et  $\max(x, y) = \max(\max(x_1, y_1), \dots, \max(x_n, y_n))$ .

Si  $c \in \mathbb{R}$ , puis  $x \leq c$  alors  $x_i \leq c$  pour chaque  $i = 1, \dots, n$ , pour  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $(x)_i = x_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

**Définition 2.1.1.** [7] Soit  $X$  un ensemble (non vide). Une distance généralisée pour  $X$  est une application  $d_G : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^n$  telle que :

a)  $d_G(x, y) = d_G(y, x)$ ,

## Chapitre 2.

---

b)  $d_G(x, y) \geq O_n$  et  $d_G(x, y) = O_n$  si et seulement si  $x = y$  où  $O_n = (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$ ,

c)  $d_G(x, y) \leq d_G(x, z) + d_G(z, y)$  pour tout  $x, y, z$  dans  $X$ .

Notez que pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$   $(d(x, y))_i = d_i(x, y)$  est un espace métrique dans  $X$ .

On appelle le couple  $(X, d_G)$  un espace métrique généralisé.

Pour  $r = (r_1, r_2, \dots, r_n) \in \mathbb{R}_+^n$  Nous notons par

$$B_G(x_0, r) = \{x \in X, : d_G(x_0, x) < r\}$$

La boule ouverte de centre  $x_0$  et un rayon  $r$ .

et

$$\bar{B}_G(x_0, r) = \{x \in X, : d_G(x_0, x) \leq r\}.$$

La boule fermé de centre  $x_0$  et un rayon  $r$ , comme  $r = (r_1, r_2, \dots, r_n) > 0$ ,  $r_i > 0$ ,  
 $i = 1, \dots, n$ .

**Définition 2.1.2.** [7] Soit  $(X, d_G)$  être un espace métrique généralisé, un sous-ensemble  $A \subseteq X$  est dit ouvert si pour toute  $x_0 \in A$ , il existe  $r \in \mathbb{R}_+^n$  avec  $r > 0$  tel que  $B_G(x_0, r) \subseteq A$ . Toute boule ouverte est un ensemble ouvert et la collection de toutes les boules ouvertes de  $X$  générée la topologie métrique généralisée

**Théorème 2.1.1.** [7] Pour l'espace métrique généralisé  $(X, d_G)$  les hypothèses suivantes sont valables :

1. Toute suite convergente est une suite de Cauchy.
2. Toute suite de Cauchy est bornée.

## Chapitre 2.

---

3. Si une suite de Cauchy  $(x_p)$  a une sous-suite  $(x_{p_k})$  tel que

$$x_{p_k} \rightarrow x, \text{ comme } p_k \rightarrow \infty,$$

alors

$$x_p \rightarrow x, \text{ comme } p \rightarrow \infty.$$

**Preuve.** (1) Soit  $(x_p)_{p \in \mathbb{N}}$  une suite convergente dans  $X$ . Pour chaque  $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^n$  il existe  $p_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  tel que  $d_G(x_p, x) \leq \frac{\varepsilon}{2}$  pour toute  $p \geq p_0(\varepsilon)$ . Alors pour chaque  $p, q \geq p_0(\varepsilon)$  Nous avons

$$d_G(x_p, x_q) \leq d_G(x_p, x) + d_G(x_q, x) \Rightarrow d_G(x_p, x_q) \leq \varepsilon.$$

Ainsi  $(x_p)_{p \in \mathbb{N}}$  est une suite de Cauchy dans  $X$ .

(2) Soit  $(x_p)_{p \in \mathbb{N}}$  une suite de Cauchy.

On fixe  $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^n$ . Il existe  $p_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  tel que

$$d_G(x_p, x_q) \leq \varepsilon, \text{ pour toute } p, q \geq p_0(\varepsilon).$$

Ainsi pour chaque  $p \in \mathbb{N}$ , on a

$$x_p \in B(x_{p_0(\varepsilon)}, \varepsilon + r), \quad r = \max_{1 \leq i, j \leq p_0(\varepsilon) - 1} d_G(x_i, x_j)$$

cela implique que  $(x_p)_{p \in \mathbb{N}}$  limité dans  $X$ .

(3) Soit  $(x_p)_{p \in \mathbb{N}}$  une suite de Cauchy et soit  $(x_{p_k})_{p_k \in \mathbb{N}}$  une sous-suite de  $(x_p)_{p \in \mathbb{N}}$  tel que

$\lim_{p_k \rightarrow \infty} x_{p_k} = x$ . Pour chaque  $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^n$  il existe  $p_*(\varepsilon), q_*(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  tel que

$$d_G(x_p, x_q) \leq \frac{\varepsilon}{2}, \text{ pour toute } p, q \geq p_*(\varepsilon).$$

et

$$d_G(x_{p_k}, x) < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ pour toute } p_k \geq q_*(\varepsilon).$$

Alors

$$d_G(x_p, x) \leq d_G(x_p, x_{p_k}) + d_G(x_{p_k}, x) < \varepsilon,$$

pour tout  $p \geq \max(q_*(\varepsilon), p_*(\varepsilon))$ .

Ainsi

$$x_p \rightarrow x \text{ comme } p \rightarrow \infty.$$

□

**Théorème 2.1.2.** [7] Tout espace métrique généralisé complet est un espace de Baire.

**Définition 2.1.3.** ( espace normé généralisé ) [13]

Soit  $X$  un espace vectoriel réel. Un espace normé généralisée pour  $X$  est une application :

$\| \cdot \|_G: X \rightarrow \mathbb{R}$  dénoté par  $\| x \|_G = (a_1(x), \dots, a_n(x))$  tel que

1.  $\| x \|_G \geq 0$ ; c'est-à-dire,  $a_i(x) \geq 0$  pour tout  $i$ ,
2.  $\| x \|_G = 0$  si et seulement si  $x = 0$  c'est-à-dire,  $a_i(x) = 0$  pour tout  $i$ , si et seulement si  $x = 0$ ,
3.  $\| \lambda x \|_G = |\lambda| \| x \|_G$ ; c'est-à-dire,  $a_i(\lambda x) = |\lambda| a_i(x)$ ,
4.  $\| x + y \|_G \leq \| x \|_G + \| y \|_G$ , c'est-à-dire,

$$a_i(x + y) \leq a_i(x) + a_i(y).$$

**Définition 2.1.4.** ( Espace normé généralisé ) [13]

Soit  $X$  un espace vectoriel réel, et  $\| \cdot \|_G$  Une normé généralisée sur  $X$ .

$$\mathcal{B} = \{B_\varepsilon(x) : \varepsilon \in \mathbb{R}^n, \varepsilon > 0, x \in X\}$$

## Chapitre 2.

---

comme

$$B_\varepsilon(x) = [y \in X : \|y - x\|_G < \varepsilon].$$

$X$  muni de la topologie qui admet  $\mathcal{B}$  comme base est dit espace normé généralisé.

**Proposition 2.1.1.** *Soient  $(X_i, \|\cdot\|_i)$  un espace normé, alors :  $X = X_1 \times \dots \times X_n$ ,*

*et  $\|\cdot\|_X : X \rightarrow \mathbb{R}^n$*

$$(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (\|x_1\|_1, \dots, \|x_n\|_n)$$

*est une normé généralisé.*

**Preuve.** 1.  $\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in X; \|x\|_X = (\|x_1\|_1, \dots, \|x_n\|_n) = 0,$

$$\iff \|x_i\|_i = 0 \quad \forall i = \overline{1, n}$$

puisque  $\|\cdot\|_i$  est normé alors  $x_i = 0, \forall i = \overline{1, n}$

donc

$$x = (0, \dots, 0) = 0_X$$

2.  $\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in X; \forall \lambda \in \mathbb{R},$

$$\|\lambda x\|_X = \|(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)\|_X = (\|\lambda x_1\|_1, \dots, \|\lambda x_n\|_n)$$

puisque pour tout  $i = \overline{1, n}, \|\lambda x_i\|_i = |\lambda| \|x_i\|_i$ , on a :

$$\|\lambda x\|_X = (\lambda \|x_1\|_1, \dots, \lambda \|x_n\|_n) = \lambda (\|x_1\|_1, \dots, \|x_n\|_n) = \lambda \|x\|_X$$

3.  $\forall x, y \in X :$

$$\|x + y\|_X = \|(x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)\|_X = (\|x_1 + y_1\|_1, \dots, \|x_n + y_n\|_n)$$

puisque, pour tout  $i = \overline{1, n}$ ,  $\|x_i + y_i\|_i \leq \|x_i\|_i + \|y_i\|_i$ , on a alors

$$\begin{aligned} \|x + y\|_X &\leq (\|x_1\|_1 + \|y_1\|_1, \dots, \|x_n\|_n + \|y_n\|_n) \\ &= (\|x_1\|_1, \dots, \|x_n\|_n) + (\|y_1\|_1, \dots, \|y_n\|_n) \\ &= \|x\|_X + \|y\|_Y \end{aligned}$$

d'où le resultat. □

L'exemple suivant est une conséquence immédiate rapide de la proposition précédente.

**Exemple 2.1.1.** Soit  $X = (C[-\tau, b] \times C[-\tau, b], \mathbb{R})$ ,  $d_G : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^2$  défini par de :

$$d_G((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = (\|x_1 - x_2\|_G, \|y_1 - y_2\|_G)$$

où  $\|\cdot\|_G$  est la norme de type Bielecki défini par :

$$\|u\|_G = \max\{|u(t)| \cdot e^{-\theta(t+\tau)} : t \in [-\tau, b]\}, \quad \forall u \in C[-\tau, b], \text{ avec } \theta > 0.$$

est une distance généralisé sur  $X$ . On peut même vérifier que  $(X, d_G)$  est un espace métrique généralisé complet.

## 2.2 Théorème de Perov dans les espaces généralisés (métrique et normé)

Le mathématicien russe A.I Perov a défini l'espace canonique généralisé en introduisant une métrique à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$ . En suite, ce concept d'espace métrique lui a permis de

## Chapitre 2.

---

définir une nouvelle classe d'applications appelées contractions de Pervo qui satisfesaient une condition contractive similaire à celle de Banach, mais avec une matrice  $M \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R}^+)$  (avec des entrées non négatives) au lieu d'une constante  $q$ . [10]

**Définition 2.2.1.** [12] Soit  $(X, d_G)$  un espace métrique généralisé. Une application  $T : X \rightarrow X$  est dite contractive s'il existe une matrice  $M \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$  convergente vers zéro.

et

$$d_G(T(u), T(v)) \leq M d_G(u, v), \forall u, v \in X.$$

**Théorème 2.2.1. (Pervo)** [12]

Soit  $(X, d_G)$  un espace métrique généralisé complet et  $T : X \rightarrow X$  une application contractive avec les matrice de Lipschitz  $M$ , alors  $T$  possède un unique point fixe  $u^*$ , et pour tout  $u_0 \in X$  on a :

$$d_G(T^k(u_0), u^*) \leq M^k (I - M)^{-1} d_G(u_0, T(u_0)), \quad (2.1)$$

pour tout  $k \in \mathbb{N}$ .

**Preuve.** Soit  $u_0$  un élément quelconque de  $X$ . Définissons une suite  $(u_k)$  par

$$u_{k+1} = T(u_k), \quad k \in \mathbb{N} \quad (2.2)$$

$$d_G(T(u), T(v)) \leq M d_G(u, v)$$

, pour tout  $u, v \in X$ , une matrice  $M$  convergente vers zéro. Alors,

$$d_G(u_k, u_{k+1}) \leq M^k d_G(u_0, u_1)$$

## Chapitre 2.

---

, et par conséquent

$$d_G(u_k, u_{k+m}) \leq (M^k + M^{k+1} + \dots + M^{k+m-1})d_G(u_0, u_1).$$

En utilisant  $\sum_{k=0}^{\infty} M^k$ , on déduit que

$$d_G(u_k, u_{k+m}) \leq M^k(I - M)^{-1}d_G(u_0, u_1). \quad (2.3)$$

Donc,  $(u_k)$  est une suite de Cauchy, soit  $u^*$  sa limite alors à partir de (2.2) on a

$$u^* = T(u^*),$$

tandis qu'à partir (2.3) et en laissant  $m \rightarrow \infty$  on obtient (2.1).

**Par l'unicité :** Soit  $u_1, u_2$  deux points fixes de  $T$  alors

$$d_G(u_1, u_2) = d_G(T^k(u_1), T^k(u_2)) \leq M^k d_G(u_1, u_2)$$

Puisque

$$M^k \rightarrow 0 \text{ comme } k \rightarrow \infty,$$

cela implique  $d_G(u_1, u_2) = 0$  donc  $u_1 = u_2$ . □

**Corollaire 2.2.1.** [13] Soit  $X$  un espace métrique généralisé complet et soit  $T : X \rightarrow X$  tel que

$$d_G(T(x), T(y)) \leq M d_G(x, y)$$

où  $M$  est une matrice positive. S'il existe un  $x_0 \in X$  tel que  $\sum_{n=0}^{\infty} M^n d_G(T(x_0), x_0)$ , converge, alors  $T$  a un point fixe  $x^*$  tel que  $x^* = \lim_{n \rightarrow \infty} T^n(x_0)$ .

## 2.3 Application aux équations Intégro-différentielles

Dans cette partie, nous allons étudier le problème intégro-différentiel suivant :

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t), x'(t - \tau)) + \int_{t-\tau}^t g(t, s, x(s), x'(s)) ds, & t \in [0, b] \\ x(t) = \varphi(t) & t \in [-\tau, 0] \end{cases} \quad (2.4)$$

Après avoir fait une lecture détaillée de [2], nous allons dans ce qui suit reproduire ce résultat concernant l'existence et l'unicité des solutions de (2.4).

Ceci est en ajoutant quelques détails d'une part, et en divisant la preuve en plusieurs étapes qui la rendent plus claire pour le lecteur non expert d'autre part.

La preuve de ce résultat est basée sur le Théorème 2.2.1.

On considère  $X = C[-\tau, b] \times C[-\tau, b]$ , muni de la distance généralisée définie dans l'exemple 2.1.1 :

$$d_G((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = (\|x_1 - x_2\|_G, \|y_1 - y_2\|_G) \quad (2.5)$$

Où

$$\|u\|_G = \max\{|u(t)| \cdot e^{-\theta(t+\tau)} : t \in [-\tau, b]\}, \quad \forall u \in C[-\tau, b]. \quad (2.6)$$

**Hypothèse :** On considère les hypothèses suivantes :

(H1) Conditions de continuité :

$$f \in C([0, b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}), g \in C([0, b] \times [-\tau, b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$$

## Chapitre 2.

---

$$\varphi \in C^1[-\tau, 0]$$

(H2) Conditions de bornitude :

$$\exists M, K > 0 \text{ telque } |f(t, u, v)| \leq M, \forall (t, u, v) \in [0, b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \text{ et } |g(t, s, u, v)| \leq k, \forall (t, s, u, v) \in [0, b] \times [-\tau, b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

(H3) Condition de compatibilite :

$$\varphi'(0) = f(0, \varphi(0), \varphi'(-\tau)) + \int_{-\tau}^0 g(0, s, \varphi(s), \varphi'(s)) ds.$$

(H4) Condition de Lipschitz :  $\exists \alpha, \beta > 0$  et  $\exists L_1, L_2 > 0$  tel que

$$|f(t, u_1, v_1) - f(t, u_2, v_2)| < \alpha|u_1 - u_2| + \beta|v_1 - v_2|.$$

$$\forall t \in [0, b], \forall u_1, u_2, v_1, v_2 \in \mathbb{R}$$

$$\text{et } |g(t, s, u_1, v_1) - g(t, s, u_2, v_2)| \leq L_1|u_1 - u_2| + L_2|v_1 - v_2|$$

$$\forall (t, s) \in [0, b] \times [-\tau, b], \forall u_1, u_2, v_1, v_2 \in \mathbb{R}.$$

**Lemme 2.3.1.** On suppose que (H3) est vérifié. Alors  $x \in C^1([-\tau, b])$  est solution de l'équation intégro-différentielle (2.4) si et seulement si  $(x, x')$  est solution du système intégrale suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi(0) + \int_0^t f(s, x(s), y(s-\tau)) ds + \\ \int_0^t \left( \int_{\eta-\tau}^{\eta} g(\eta, s, x(s), y(s)) ds \right) d\eta \\ (f(t, x(t), y(t-\tau)) + \int_{t-\tau}^t g(t, s, x(s), y(s)) ds) \end{pmatrix}, \text{ pour } t \in [0, b] \\ (x(t), y(t)) = (\varphi(t), \varphi'(t)) \text{ pour } t \in [-\tau, 0] \end{array} \right. \quad (2.7)$$

**Preuve.** On suppose que  $x \in C^1([-\tau, b])$  est solution de l'équation intégro-différentielle (2.4). En integrant les deux cotes de la première equation de (2.4), et en dérivant la deuxième

## Chapitre 2.

---

equation on trouve

$$\begin{cases} \int_0^t x'(s)ds = \int_0^t f(s, x(s), x'(s - \tau))ds + \int_0^t \left( \int_{\eta-\tau}^{\eta} g(\eta, s, x(s), x'(s))ds \right) d\eta, \\ x'(t) = \varphi'(t) \end{cases}$$

Ainsi :

$$\begin{cases} x(t) - x(0) = \int_0^t f(s, x(s), x'(s - \tau))ds + \int_0^t \left( \int_{\eta-\tau}^{\eta} g(\eta, s, x(s), x'(s))ds \right) d\eta, \\ x'(t) = \varphi'(t) \end{cases}$$

Donc

$$\begin{cases} x(t) = x(0) + \int_0^t f(s, x(s), x'(s - \tau))ds + \int_0^t \left( \int_{\eta-\tau}^{\eta} g(\eta, s, x(s), x'(s))ds \right) d\eta, \\ x'(t) = \varphi'(t) \end{cases}$$

On pose :  $(x)' = y$  et en tenant compte que  $x(0) = \varphi(0)$ , on arrive à (2.7).

On suppose maintenant que (2.7) est satisfait. Notons que la deuxième equation de (2.4) est vérifié, il suffit donc de prouve la première equation

$$x(t) = \varphi(0) + \int_0^t f(s, x(s), y(s - \tau))ds + \int_0^t \left( \int_{\eta-\tau}^{\eta} g(\eta, s, x(s), y(s)) ds \right) d\eta \quad (2.8)$$

et

$$y(t) = f(t, x(t), y(t - \tau)) + \int_{t-\tau}^t g(t, s, x(s), y(s)) ds \quad \forall t \in [-\tau, 0] \quad (2.9)$$

En derivant en  $t$  de , on obtient

$$(x)'(t) = f(t, x(t), x'(t-\tau)) - f(0, x(0), x'(-\tau)) + \int_{t-\tau}^t g(t, s, x(s), x'(s)) ds - \int_{-\tau}^0 g(0, s, x(0), x'(0)) ds$$

D'après (H3)

$$(x)'(t) = f(t, x(t), x'(t-\tau)) + \int_{t-\tau}^t g(t, s, x(s), x'(s)) ds \quad (2.10)$$

Maintenant, en comparant (2.10) et la deuxième equation de (2.9) on déduit que  $(x)' = y$  et ainsi  $x' \in C^1([-\tau, b])$  et devient la première equation de (2.4).  $\square$

On défini l'opérateur  $A : X \rightarrow X$  par  $A = (A_1, A_2)$  avec

$$(A_1(x(t), y(t)), A_2(x(t), y(t))) = (\varphi(t), \varphi'(t)) \quad \forall t \in [-\tau, 0]. \quad (2.11)$$

$$A_1(x(t), y(t)) = \varphi(0) + \int_0^t f(s, x(s), y(s-\tau)) ds + \int_0^t \left( \int_{\eta-\tau}^{\eta} g(\eta, s, x(s), y(s)) ds \right) d\eta \quad (2.12)$$

$$A_2(x(t), y(t)) = f(t, x(t), y(t-\tau)) + \int_{t-\tau}^t g(t, s, x(s), y(s)) ds, \quad \forall t \in [0, b] \quad (2.13)$$

**Proposition 2.3.1.** *On suppose que les hypothèses (H1)-(H4) sont vérifiées. Alors les opérateurs  $A_1$  et  $A_2$  définissent respectivement par (2.12) et (2.13), vérifié pour tout  $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X$  les inégalités suivantes :*

$$\| A_1(x_1, y_1) - A_1(x_2, y_2) \|_G \leq \left( \frac{\alpha}{\theta} + \frac{L_1}{\theta^2} \right) \| x_1 - x_2 \|_G + \left( \frac{\beta}{\theta} e^{-\theta\tau} + \frac{L_2}{\theta^2} \right) \| y_1 - y_2 \|_G \quad (2.14)$$

et

$$\| A_2(x_1, y_1) - A_2(x_2, y_2) \|_G \leq \left( \alpha + \frac{L_1}{\theta} \right) \| x_1 - x_2 \|_G + \left( \beta e^{-\theta\tau} + \frac{L_2}{\theta} \right) \| y_1 - y_2 \|_G \quad (2.15)$$

**Preuve.** Pour  $t \in [-\tau, 0]$  on a

$$|A_1(x_1, y_1)(t) - A_1(x_2, y_2)(t)| = 0 \quad (2.16)$$

et

$$|A_2(x_1, y_1)(t) - A_2(x_2, y_2)(t)| = 0 \quad (2.17)$$

pour  $t \in [0, b]$  on obtient

$$\begin{aligned} |A_1(x_1, y_1)(t) - A_1(x_2, y_2)(t)| &= \left| \varphi(0) + \int_0^t f(s, x_1(s), y(s - \tau)) ds \right. \\ &\quad + \int_0^t \left( \int_{\eta - \tau}^{\eta} g(\eta, s, x_1(s), y_1(s)) ds \right) d\eta \\ &\quad - \varphi(0) - \int_0^t f(s, x_2(s), y_2(s - \tau)) ds \\ &\quad \left. - \int_0^t \left( \int_{\eta - \tau}^{\eta} g(\eta, s, x_2(s), y_2(s)) ds \right) d\eta \right| \\ &\leq \left| \int_0^t (f(s, x_1(s), y_1(s - \tau)) - f(s, x_2(s), y_2(s - \tau))) ds \right. \\ &\quad \left. + \int_0^t \left( \int_{\eta - \tau}^{\eta} (g(\eta, s, x_1(s), y_1(s)) - g(\eta, s, x_2(s), y_2(s))) ds \right) d\eta \right| \\ &\leq \left| \int_0^t (f(s, x_1(s), y_1(s - \tau)) - f(s, x_2(s), y_2(s - \tau))) ds \right. \\ &\quad \left. + \int_0^t \left( \int_{\eta - \tau}^{\eta} (g(\eta, s, x_1(s), y_1(s)) - g(\eta, s, x_2(s), y_2(s))) ds \right) d\eta \right| \\ &\leq \int_0^t |f(s, x_1(s), y_1(s - \tau)) - f(s, x_2(s), y_2(s - \tau))| ds \\ &\quad + \int_0^t \left( \int_{\eta - \tau}^{\eta} |g(\eta, s, x_1(s), y_1(s)) - g(\eta, s, x_2(s), y_2(s))| ds \right) d\eta \end{aligned}$$

## Chapitre 2.

---

En utilisant (H4) trouver

$$\begin{aligned}
|A_1(x_1, y_1)(t) - A_1(x_2, y_2)(t)| &\leq \int_0^t [\alpha |x_1(s) - x_2(s)| + \beta |y_1(s - \tau) - y_2(s - \tau)|] ds \\
&+ \int_0^t \left( \int_{\eta - \tau}^{\eta} [L_1 |x_1(s) - x_2(s)| + L_2 |y_1(s) - y_2(s)|] ds \right) d\eta \\
&\leq \int_0^t [\alpha |x_1(s) - x_2(s)| e^{-\theta(s+\tau)} \cdot e^{\theta(s+\tau)} \\
&+ \beta |y_1(s - \tau) - y_2(s - \tau)| e^{-\theta(s)} e^{\theta(s)} e^{-\theta(\tau)} e^{\theta(\tau)}] ds \\
&+ \int_0^t \left( \int_{\eta - \tau}^{\eta} [L_1 |x_1(s) - x_2(s)| e^{-\theta(s+\tau)} e^{\theta(s+\tau)} \right. \\
&+ \left. L_2 |y_1(s) - y_2(s)| e^{-\theta(s+\tau)} e^{\theta(s+\tau)}] ds \right) d\eta
\end{aligned}$$

En utilisant (2.6), on trouve

$$\begin{aligned}
|A_1(x_1, y_1)(t) - A_1(x_2, y_2)(t)| &\leq \int_0^t [\alpha \|x_1 - x_2\|_G e^{\theta(s+\tau)} + \beta \|y_1 - y_2\|_G e^{\theta(s+\tau)} e^{-\tau}] ds \\
&+ \int_0^t \left( \int_{\eta - \tau}^{\eta} [L_1 \|x_1 - x_2\|_G e^{\theta(s+\tau)} + L_2 \|y_1 - y_2\|_G e^{\theta(s+\tau)}] ds \right) d\eta \\
&\leq \frac{\theta}{\theta} \times \int_0^t [\alpha \|x_1 - x_2\|_G + \beta \|y_1 - y_2\|_G e^{-\theta\tau}] e^{\tau(s+\tau)} ds \\
&+ \frac{\theta}{\theta} \times \int_0^t \left( \int_{\eta - \tau}^{\eta} [L_1 \|x_1 - x_2\|_G + L_2 \|y_1 - y_2\|_G] e^{\theta(s+\tau)} ds \right) d\eta \\
&\leq \left[ \frac{\alpha}{\theta} \|x_1 - x_2\|_G + \frac{\beta}{\theta} \|y_1 - y_2\|_G e^{-\theta(\tau)} \right] \int_0^t \theta e^{\theta(s+\tau)} ds \\
&+ \left[ \frac{L_1}{\theta} \|x_1 - x_2\|_G + \frac{L_2}{\theta} \|y_1 - y_2\|_G \right] \int_0^t \left( \int_{\eta - \tau}^{\eta} \theta e^{\theta(s+\tau)} ds \right) d\eta
\end{aligned}$$

## Chapitre 2.

---

Par intégration, on trouve

$$\begin{aligned}
|A_1(x_1, y_1)(t) - A_1(x_2, y_2)(t)| &\leq \left[ \frac{\alpha}{\theta} \|x_1 - x_2\|_G + \frac{\beta}{\theta} \|y_1 - y_2\|_G e^{-\theta(\tau)} \right] \cdot [\theta e^{\theta(t+\tau)}] \\
&+ \left[ \frac{L_1}{\theta} \|x_1 - x_2\|_G + \frac{L_2}{\theta} \|y_1 - y_2\|_G \right] \int_0^t [e^{\theta(s+\tau)}]_{\eta-\tau}^{\eta} d\eta \\
&\leq \left[ \frac{\alpha}{\theta} \|x_1 - x_2\|_G + \frac{\beta}{\theta} \|y_1 - y_2\|_G e^{-\theta(\tau)} \right] e^{\theta(s+\tau)} \\
&+ \left[ \frac{L_1}{\theta} \|x_1 - x_2\|_G + \frac{L_2}{\theta} \|y_1 - y_2\|_G \right] \left[ \frac{1}{\theta} e^{\theta(\eta+\tau)} - \frac{1}{\theta} e^{\theta\eta} \right]_0^t \\
&\leq \left[ \frac{\alpha}{\theta} \|x_1 - x_2\|_G + \frac{\beta}{\theta} \|y_1 - y_2\|_G e^{-\theta(\tau)} \right] e^{\theta(s+\tau)} \\
&+ \left[ \frac{L_1}{\theta^2} \|x_1 - x_2\|_G + \frac{L_2}{\theta^2} \|y_1 - y_2\|_G \right] [e^{\theta(t+\tau)} - e^{\theta\eta} - (e^{\theta t} - 1)] \\
&\leq \left[ \left( \frac{\alpha}{\theta} + \frac{L_1}{\theta^2} \right) \|x_1 - x_2\|_G + \left( \frac{\beta}{\theta} \cdot e^{-\theta\tau} + \frac{L_2}{\theta^2} \right) \|y_1 - y_2\|_G \right] \cdot e^{\theta(t+\tau)}.
\end{aligned}$$

$\forall t \in [0, b]$ .

d'où (2.14) est satisfaite.

De même, on trouve (2.15).

□

**Proposition 2.3.2.** Soient  $\alpha, \beta, L_1, L_2$  et  $\theta$  des nombres réels positifs et soit  $M$  la matrices carré réelle définie par :

$$M = \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{\theta} + \frac{L_1}{\theta^2} & \frac{\beta}{\theta} \cdot e^{-\theta\tau} + \frac{L_2}{\theta^2} \\ \alpha + \frac{L_1}{\theta} & \beta \cdot e^{-\theta\tau} + \frac{L_2}{\theta} \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

pour tout  $\alpha, \beta, L_1$  et  $L_2$ , il existe  $\theta^*$  tel que pour tout  $\theta > \theta^*$ , valeurs propres de  $M$  appartiennent à  $] -1, 1[$ .

**Preuve.** Calculons les valeurs propre de la matrice donné par (2.18) :

$$\det(M - \lambda I) = 0.$$

$$\begin{aligned}
 \det(M - \lambda I) &= \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{\theta} + \frac{L_1}{\theta^2} - \lambda & \frac{\beta}{\theta} \cdot e^{-\theta\tau} + \frac{L_2}{\theta^2} \\ \alpha + \frac{L_1}{\theta} & \beta \cdot e^{-\theta\tau} + \frac{L_2}{\theta} - \lambda \end{pmatrix} \\
 &= \left( \frac{\alpha}{\theta} + \frac{L_1}{\theta} - \lambda \right) \left( \beta e^{-\theta\tau} + \frac{L_2}{\theta} - \lambda \right) - \left( \frac{\beta}{\theta} e^{-\theta\tau} + \frac{L_2}{\theta^2} \right) \left( \alpha + \frac{L_1}{\theta} \right) \\
 &= \lambda^2 - \lambda \left( \frac{\alpha}{\theta} + \frac{L_1}{\theta^2} + \beta e^{-\theta\tau} + \frac{L_2}{\theta} \right) \\
 &= \lambda \left( \lambda - \left( \frac{\alpha}{\theta} + \frac{L_1}{\theta^2} + \beta e^{-\theta\tau} + \frac{L_2}{\theta} \right) \right) = 0.
 \end{aligned}$$

Alors :

$\lambda_1 = 0$  et

$$\lambda_2 = \left( \frac{\alpha}{\theta} + \frac{L_1}{\theta^2} + \beta e^{-\theta\tau} + \frac{L_2}{\theta} \right) > 0.$$

Nous avons

$$\begin{aligned}
 0 < \lambda_2 < 1 &\Leftrightarrow 0 < \frac{\alpha}{\theta} + \frac{L_1}{\theta^2} + \beta e^{-\theta\tau} + \frac{L_2}{\theta} < 1 \\
 &\Leftrightarrow \theta\alpha + L_1 + \theta^2\beta e^{-\theta\tau} + \theta L_2 < \theta^2 \\
 &\Leftrightarrow -\theta^2 + \theta(\alpha + L_2) + L_1 < -\theta^2\beta e^{-\theta\tau} \\
 &\Leftrightarrow \theta^2 - \theta(\alpha + L_2) - L_1 > \theta^2\beta e^{-\theta\tau}.
 \end{aligned}$$

Soit  $h(\theta) = \theta^2 - \theta(\alpha + L_2) - L_1$ . Etudions l'équation  $h(\theta) = 0$ .

$$\Delta = (\alpha + L_2)^2 + 4L_1 > 0$$

alors :

$$\theta_1 = \frac{\alpha + L_2 - \sqrt{\Delta}}{2} < 0$$

et

$$\theta_2 = \frac{\alpha + L_2 + \sqrt{\Delta}}{2} > 0$$

Donc  $h$  admet un extremum en  $V\left(\frac{\alpha + L_2}{2}, -\frac{\Delta}{4}\right)$ .

## Chapitre 2.

---

Si on représente géométriquement les graphes des fonctions  $h(\theta)$  et  $u(\theta) = \theta^2 \beta e^{-\theta\tau}$  alors on voit qu'il existe un unique point  $\theta^* > \theta_2$  tel que

$$h(\theta^*) = u(\theta^*) \text{ et } h(\theta) > \theta^2 \beta \cdot e^{-\theta\tau}, \quad \forall \theta > \theta^*.$$

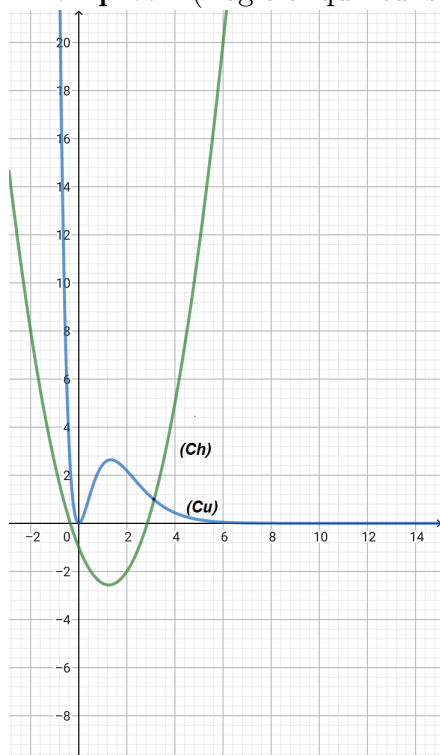
D'autre part, ceci découle des propriétés :

$$h(\theta) < 0, \quad \forall \theta \in [0, \theta_2), \quad u(\theta) > 0, \quad \forall \theta > 0$$

$$\lim_{\theta \rightarrow \infty} h(\theta) = \infty, \quad \lim_{\theta \rightarrow \infty} \theta^2 \cdot \beta e^{-\theta\tau} = 0.$$

et parce que la fonction  $u(\theta) = \theta^2 \cdot \beta \cdot e^{-\theta\tau}$  admet en  $\theta = 0$  un minimum globale et en  $\theta = \frac{2}{\tau}$  un maximum local.

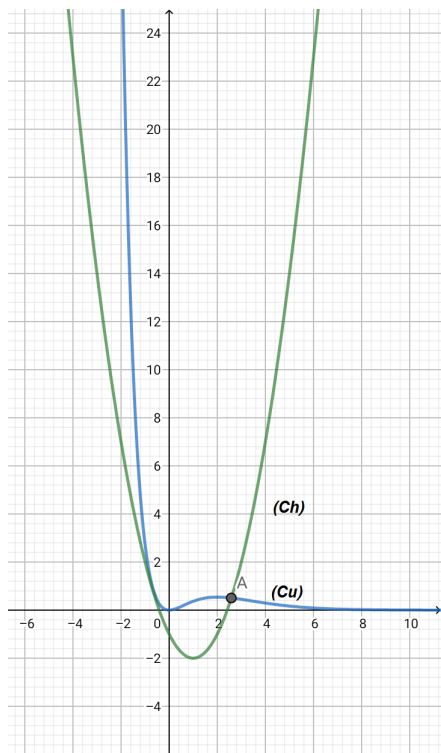
**Exemples :** (Logiciel qui utilisé GeoGebra)



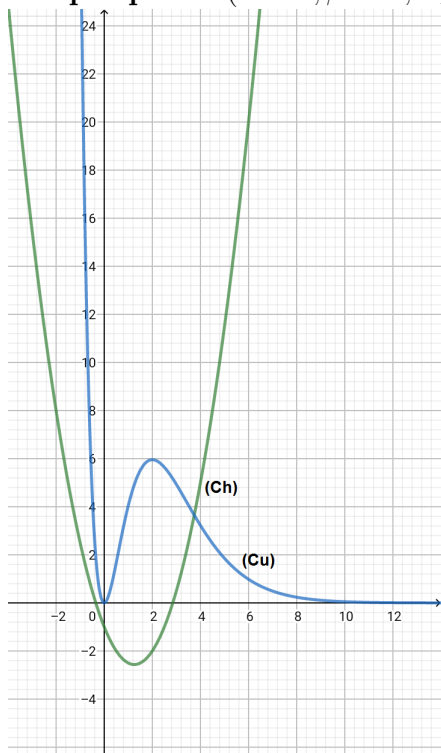
**Graphique 1 :** ( $\tau = 1.5, \beta = 11, L_1 = 1, L_2 = 1, \alpha = 1.5$ )

## Chapitre 2.

---



Graphique 2 :  $(\tau = 1, \beta = 1, L_1 = 1, L_2 = 1, \alpha = 1)$



Graphique 3 :  $(\tau = 1, \beta = 11, L_1 = 1, L_2 = 1, \alpha = 1.5)$

## Chapitre 2.

---

Expliquant maintenant comment peut on obtenir  $\theta^*$  :

$$\begin{aligned}
 h(\theta) &= \theta^2 \beta e^{-\theta\tau} \\
 \Leftrightarrow \theta^2 - \theta(\alpha + L_2) - L_1 &= \theta^2 \beta e^{-\theta\tau} \\
 \Leftrightarrow \theta^2 &= \theta^2 \beta e^{-\theta\tau} + \theta(\alpha + L_2) + L_1 \\
 \Leftrightarrow \theta &= \alpha + L_2 + \frac{L_1}{\theta} + \theta \beta e^{-\theta\tau} \\
 \Leftrightarrow \theta &= H(\theta) = \alpha + L_2 + \frac{L_1}{\theta} + \theta \beta e^{-\theta\tau}
 \end{aligned}$$

Si  $\theta'$  un point fixe de  $H$ , de plus

$$\begin{aligned}
 H'(\theta) &\leq 0 \\
 \Leftrightarrow \frac{-L_1}{\theta^2} + \beta e^{-\theta\tau} - \tau\theta\beta e^{-\theta\tau} &< 0 \\
 \Leftrightarrow -\frac{L_1}{\theta^2} + \beta e^{-\theta\tau}(1 - \tau\theta) &< 0
 \end{aligned}$$

-Si  $\theta \geq \frac{1}{\tau}$  puis  $H'(\theta) < 0$  et  $H'\left(\frac{1}{\tau}\right) = -\tau^2 L_1 < 0$  alors,

$$H'(\theta) < 0 \quad \forall \theta \geq \frac{1}{\tau}.$$

-Si  $\frac{1}{\tau} < \theta_2$  nous pouvons prendre  $\bar{\theta} = H(\theta_2) > \theta^*$  et pour toute  $\theta > \bar{\theta}$  nous avons  $0 < \lambda_2 < 1$ .

-Si  $\frac{1}{\tau} > \theta_2$  Nous avons alors deux possibilités :

1. Si  $h\left(\frac{1}{\tau}\right) < \frac{1}{\tau^2} \beta e^{-1}$  puis en prendre  $\bar{\theta} = H\left(\frac{1}{\tau}\right) > \theta^*$  et pour toute  $\theta > \bar{\theta}$  Nous  $0 < \lambda_2 < 1$ .

2. Si  $h\left(\frac{1}{\tau}\right) > \frac{1}{\tau^2} \beta e^{-1}$  alors il est clair que  $\frac{1}{\tau} > \theta^*$  et pour tout  $\theta > \frac{1}{\tau}$  en aura  $0 < \lambda_2 < 1$ .

Par conséquent dans les conditions d'énonciation, on peut choisir  $\bar{\theta}$  (qui peut être  $h(\theta_2)$ ,

ou  $h\left(\frac{1}{\tau}\right)$ , ou  $\left(\frac{1}{\tau}\right)$ ) tel que :  $0 < \lambda_2 < 1, \forall \theta > \bar{\theta}$ .

□

**Théorème 2.3.1.** Sous les hypothèses (H1) – (H4), le problème (2.4) admet une solution unique dans  $C^1([-\tau, b])$ .

**Preuve.** D'après le Lemme 2.3.1, il suffit d'obtenir une solution de (2.7).

Comme conséquence de Proposition 2.3.1, on a :

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X$$

$$\begin{aligned} d_G(A(x_1, y_1), A(x_2, y_2)) &\leq \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{\theta} + \frac{L_1}{\theta^2} \frac{\beta}{\theta} \cdot e^{-\theta\tau} + \frac{L_2}{\theta} \\ \alpha + \frac{L_1}{\theta} \beta \cdot e^{-\theta\tau} + \frac{L_2}{\theta} \end{pmatrix} \cdot d_G((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \\ &= M \cdot d_G((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \end{aligned}$$

où  $M$  est la matrice donné par (2.18).

Maintenant, choisissant  $\theta$  dans (2.6) tel que  $\theta > \theta^*$  où  $\theta^*$  est donné par la Proposition 2.3.2.

Ainsi, d'après Proposition 2.3.2, et Lemme 2.3.1,  $M$  converge vers zéro. Ainsi le Théorème 2.2.1 implique l'existence d'une seule solution de

$$A(x, y) = (x, y)$$

où  $A$  est par donné par (2.11) qui n'est autre que la de solution (2.7).

□

# Chapitre 3

## Théorème de Perov dans les espaces de gauge généralisés et application

### 3.1 Espace de gauge généralisé

Dans cette section, nous introduisons les notions de semi-distance à valeurs vectoriels d'espaces de gauge généralisé et de contraction généralisé.

**Définition 3.1.1.** [3] Soit  $X$  un ensemble, une application vectorielle  $D_G : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^n$  est dite une semi-distance ou une gauge vectorielle sur  $X$ , si elle a les conditions suivantes :

- i)*  $D_G(u, u) = 0$  pour tout  $u \in X$ ,
- ii)*  $D_G(u, v) = D_G(v, u)$  pour tout  $u, v \in X$ ,
- iii)*  $D_G(u, v) \leq D_G(u, z) + D_G(z, v)$  pour tout  $u, v, z \in X$ .

Là encore, si  $u = (u_1, u_2, \dots, u_n), v = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$  alors par  $u \leq v$  on entend  $u_i \leq v_i$  pour  $i = 1, 2, \dots, n$ .

**Définition 3.1.2.** Une famille  $\mathcal{D}_G = \{D_{\lambda G} : \lambda \in \Lambda, \Lambda \neq \emptyset\}$  une semi-distance vectorielle sur  $X$  ( ou une structure de gauge généralisé sur  $X$  ) est dite séparante si pour chaque couple de points  $(u, v) \in X$  avec  $u \neq v$ , il existe un  $D_{\lambda G} \in \mathcal{D}_G$  tel que  $D_{\lambda G}(u, v) \neq 0$ .

**Définition 3.1.3.** Un couple  $(X, \mathcal{D}_G)$  d'un ensemble non vide  $X$  muni d'une structure de gauge généralisé séparatrice  $\mathcal{D}_G$  sur  $X$  est appelé espace de gauge généralisé.

**Remarque 3.1.1.** Pour les espaces de gauge généralisés, les notions de suites de Cauchy et de complétude sont similaires à celles des espaces de gauge usuels.

## 3.2 Théorème de Perov dans l'espace de gauge généralisé

**Définition 3.2.1.** [3] Soit  $(X, \mathcal{D}_G)$  un espace de gauge généralisé, une application  $T : D_G(T) \subset X \rightarrow X$  est une contraction généralisé s'il existe une fonction  $\varphi : \Lambda \rightarrow \Lambda$  et  $M \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R}^+)^{\Lambda}$ ,  $M = \{M_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  tels que

$$D_{\lambda G}(T(u), T(v)) \leq M_\lambda D_{\varphi(\lambda)G}(u, v) \quad (3.1)$$

pour tout  $\lambda \in \Lambda$  et  $u, v \in D_G(T)$ .

$$\sum_{i=1}^{\infty} M_\lambda M_{\varphi(\lambda)} M_{\varphi^2(\lambda)} \dots M_{\varphi^{i-1}(\lambda)} D_{\varphi^i(\lambda)G}(u, v) < \infty, \quad (3.2)$$

pour tout  $\lambda \in \Lambda$  et  $u, v \in D_G(T)$ .

Maintenant, l'analogie de type Pervo pour les contractions généralisés du théorème de point fixe de Gheorghui se lit comme suite.

**Théorème 3.2.1.** [3] Soit  $(X, \mathcal{D}_G)$  un espace de gauge généralisé complet et soit  $T : X \rightarrow X$  une contraction généralisé. Alors,  $T$  possède un unique point fixe qui peut être obtenu par approximations successives à partir de n'importe quel élément de  $X$ .

**Preuve.** Soit  $u_0$  un élément arbitraire de  $X$ . Définissons une suite  $(u_k)$  par

$$u_{k+1} = T(u_k), \quad k \in \mathbb{N}, \quad (3.3)$$

### Chapitre 3.

---

puis en utilisant (3.1) nous avons

$$\begin{aligned}
D_{\lambda G}(u_k, u_{k+1}) &= D_{\lambda G}(T(u_{k-1}), T(u_k)) \\
&\leq M_{\lambda} D_{\varphi(\lambda)G}(u_{k-1}, u_k) \\
&= M_{\lambda} D_{\varphi(\lambda)G}(T(u_{k-2}), T(u_{k-1})) \\
&\leq M_{\lambda} M_{\varphi(\lambda)} D_{\varphi(\lambda)G} D_{\varphi^2(\lambda)G}(u_{k-2}, u_{k-1}) \\
&\vdots \\
&\leq M_{\lambda} M_{\varphi(\lambda)} \dots M_{\varphi^{k-1}(\lambda)} D_{\varphi^k(\lambda)G}(u_0, u_1)
\end{aligned}$$

pour tout  $\lambda \in \Lambda$  et  $k = 1, 2, \dots$ , comme conséquence nous avons

$$\begin{aligned}
D_{\lambda G}(u_k, u_{k+m}) &= D_{\lambda G}(u_k, u_{k+1}) + \dots + D_{\lambda G}(u_{k+m-1}, u_{k+m}) \\
&\leq \sum_{n=0}^{m-1} M_{\lambda} M_{\varphi(\lambda)} M_{\varphi^2(\lambda)} \dots M_{\varphi^{k+n-1}(\lambda)} D_{\varphi^{k+n}(\lambda)G}(u_0, u_1) \\
&= \sum_{i=k}^{k+m-1} M_{\lambda} M_{\varphi(\lambda)} M_{\varphi^2(\lambda)} \dots M_{\varphi^{i-1}(\lambda)} D_{\varphi^i(\lambda)G}(u_0, u_1).
\end{aligned}$$

Ainsi, d'après (3.2),  $(u_k)$  est une suite de Cauchy.

Soit  $u^* = T(u^*)$ .

**Pour l'unicité :** Supposons que  $u_1, u_2$  sont deux points fixes de  $T$ , alors

$$\begin{aligned}
D_{\lambda G}(u_1, u_2) &= D_{\lambda G}(T(u_1), T(u_2)) \\
&\leq M_{\lambda} D_{\varphi(\lambda)G}(u_1, u_2) \\
&\leq M_{\lambda} M_{\varphi(\lambda)} D_{\varphi^2(\lambda)G}(u_1, u_2) \\
&\vdots \\
&\leq M_{\lambda} M_{\varphi(\lambda)} M_{\varphi^2(\lambda)} \dots M_{\varphi^{k-1}(\lambda)} D_{\varphi^k(\lambda)G}(u_1, u_2)
\end{aligned}$$

### Chapitre 3.

---

et en utilisant (3.2) on obtient que  $D_{\lambda G}(u_1, u_2) = 0$  pour tout  $\lambda \in \Lambda$ . Puisque la famille  $\mathcal{D}_G$  est séparante on en déduit que  $u_1 = u_2$ .  $\square$

**Corollaire 3.2.1.** De la démonstration du théorème déjà prouvée on obtient immédiatement le résultat suivant garantissant l'existence d'un point fixe comme limite de la séquence d'approximation successive qui part d'un élément dans l'espace.

**Théorème 3.2.2.** [3] Soit  $(X, \mathcal{D}_G)$  un espace de gauge généralisé complet avec  $\mathcal{D}_G = \{D_{\lambda G}\}_{\lambda \in \Lambda}$  et soit  $T : X \rightarrow X$  une application. Supposons qu'il existe  $u_0 \in X$ ,  $C > 0$ ,  $\varphi : \Lambda \rightarrow \Lambda$  et  $M \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R}^+)^{\Lambda}$ ,  $M = \{M_{\lambda}\}_{\lambda \in \Lambda}$  de sorte que les conditions suivantes soient satisfaites :

$$D_{\lambda G}(T(u), T(v)) \leq M_{\lambda} D_{\varphi(\lambda)G}(u, v)$$

pour tout  $\lambda \in \Lambda$  et  $u, v \in X$ .

$$\sum_{i=1}^{\infty} M_{\lambda} M_{\varphi(\lambda)} M_{\varphi^2(\lambda)} \dots M_{\varphi^{i-1}(\lambda)} < \infty, \quad (3.4)$$

pour tout  $\lambda \in \Lambda$ .

$D_{\lambda G}(u_0, T(u_0)) \leq C$  pour tout  $\lambda \in \Lambda$ .

Alors,  $T$  possède au moins point fixe qui peut être obtenu par approximations successives à partir de  $u_0$ .

**Corollaire 3.2.2.** Voici quelques utilises :

1. S'il existe un entier  $p \geq 2$  avec  $\varphi^p = \varphi$ , alors le condition (3.2) et (3.4) se réduisent à l'hypothèse qui  $M_{\varphi(\lambda)} \dots M_{\varphi^{p-1}(\lambda)}$  est convergente vers zéro pour tout  $\lambda \in \Lambda$ .
2. Ainsi, si  $p = 2$ , c'est-à-dire  $\varphi^2 = \varphi$  (situation de Marinescu) alors (3.2) et (3.4) sont valables si  $M_{\varphi(\lambda)}$  est convergente vers zéro pour tout  $\lambda \in \Lambda$

3. En particulier, si  $p = 1_\Lambda$  (situation de Trafdar) alors (3.2) et (3.4) sont satisfaites à condition que  $M$  soit convergente vers zéro pour tout  $\lambda \in \Lambda$ .

Pour résoudre système opérateur semi-linéaire

$$\begin{cases} A(x, y) = x \\ B(x, y) = y \end{cases} \quad (3.5)$$

dans un espace de gauge complet  $X$  (espace doté d'une famille de semi-distance), ici  $A, B : X^2 \rightarrow X$  sont donnés des opérateurs non linéaires.

Supposons que le système (3.5) peut être vu comme un problème de point fixe  $T(x) = x$ .

On suppose que  $X$  est un espace de gauge complet avec la famille de semi-distance  $\mathcal{D} = \{D_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$

On note  $Z := X^2$ ,  $T := (A, B)$  et  $\mathcal{D}_G = \{D_{\lambda G}\}_{\lambda \in \Lambda}$  où

$$D_{\lambda G}(u, v) = \begin{pmatrix} D_\lambda(x, x_1) \\ D_\lambda(y, y_1) \end{pmatrix}$$

pour tout  $u := (x, y)$  et  $v := (x_1, y_1) \in X^2$  et  $\lambda \in \Lambda$  alors  $(Z, \mathcal{D}_G)$  est un espace de gauge généralisé complet.

**Théorème 3.2.3.** [3] S'il existe  $u_0 = (x_0, y_0) \in X^2$  et  $C > 0$  tel que

$$D_{\lambda G}(u_0, Tu_0) \leq C \quad (3.6)$$

et

$$\sum_{i=1}^{\infty} M_{\lambda} M_{\varphi(\lambda)} M_{\varphi^2(\lambda)} \dots M_{\varphi^{i-1}(\lambda)} < \infty, \quad (3.7)$$

pour tout  $\lambda \in \Lambda$ , alors le système (3.5) a au moins une solution qui est la limite de la suite

$$u_k(x_k, y_k), \quad x_{k+1} = A(x_k, y_k), \quad y_{k+1} = B(x_k, y_k) \quad k = 0, 1, \dots \quad (3.8)$$

à partir de  $u_0$ .

### 3.3 Application à un système intégral

On considère le système intégral à avec arguments avancés suivant :

$$\begin{cases} x(t) = \int_{t-1}^t f(s, x(s+2), y(s+2)) ds \\ y(t) = \int_{t-1}^t g(s, x(s+2), y(s+2)) ds \end{cases} \quad (3.9)$$

pour  $t \in [0, \infty)$ .

Supposons que

$$\begin{cases} |f(t, x, y) - f(t, x_1, y_1)| \leq K_1(t) |x - x_1| + K_2(t) |y - y_1| \\ |g(t, x, y) - g(t, x_1, y_1)| \leq K_3(t) |x - x_1| + K_4(t) |y - y_1| \end{cases} \quad (3.10)$$

pour tout  $x, x_1, y, y_1 \in \mathbb{R}$  et  $t \in [-1, +\infty)$  avec  $K_i \in L^1([-1, +\infty), \mathbb{R}_+)$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ .

Pour chaque  $\lambda \in \mathbb{N}$ , on pose

$$a_{\lambda} = \int_{\lambda-1}^{2\lambda+1} K_1 d(t), \quad b_{\lambda} = \int_{\lambda-1}^{2\lambda+1} K_2 d(t)$$

### Chapitre 3.

---

$$\bar{a}_\lambda = \int_{\lambda-1}^{2\lambda+1} K_3 d(t), \quad \bar{b}_\lambda = \int_{\lambda-1}^{2\lambda+1} K_4 d(t)$$

On considère la matrice

$$M_\lambda = \begin{pmatrix} a_\lambda & b_\lambda \\ \bar{a}_\lambda & \bar{b}_\lambda \end{pmatrix}$$

On définit aussi la matrice  $M_\infty$  par

$$M_\infty = \begin{pmatrix} \|K_1\|_{L^1} & \|K_2\|_{L^1} \\ \|K_3\|_{L^1} & \|K_4\|_{L^1} \end{pmatrix}$$

Calculons les valeurs propres de cette matrice

$$\det(M_\infty - \lambda I) = 0$$

$$\begin{aligned} \det(M_\infty - \lambda I) &= (\|K_1\|_{L^1} - \lambda)(\|K_4\|_{L^1} - \lambda) - \|K_2\|_{L^1} \times \|K_3\|_{L^1} \\ &= \lambda^2 - \lambda(\|K_1\|_{L^1} + \|K_4\|_{L^1}) + \|K_1\|_{L^1} \times \|K_4\|_{L^1} \\ &\quad - \|K_2\|_{L^1} \times \|K_3\|_{L^1} \end{aligned}$$

Alors :

$$\Delta = (\|K_1\|_{L^1} + \|K_4\|_{L^1})^2 - 4(\|K_1\|_{L^1} \times \|K_4\|_{L^1} - \|K_2\|_{L^1} \times \|K_3\|_{L^1})$$

On trouve

$$\lambda_1 = \frac{(\|K_1\|_{L^1} + \|K_4\|_{L^1}) - \sqrt{\Delta}}{2} \quad \lambda_2 = \frac{(\|K_1\|_{L^1} + \|K_4\|_{L^1}) + \sqrt{\Delta}}{2}$$

### Chapitre 3.

---

Si  $|\lambda_i| < 1; i = 1; 2$ . Alors la matrice  $M_\infty$  est convergente vers zero.

**Théorème 3.3.1.** [3] Soient  $f, g : [-1, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions continues et supposons que la condition (3.10) est satisfaite supposons en plus qu'il existe  $u_0 = (x_0, y_0) \in C([0, \infty), \mathbb{R}^2)$  et  $C > 0$  tel que

$$|T(u_0)(t) - u_0(t)| \leq C, \quad \text{pour tout } t \in [0, \infty) \quad (3.11)$$

où

$$T = (A, B) \quad (3.12)$$

est donné ci-dessous si la matrice  $M_\infty$  est convergente vers zéro.

Alors le système (3.9) admet au moins solution  $(x, y) \in C([0, \infty), \mathbb{R}^2)$ .

**Preuve.** Nous utiliserons Théorème 3.2.3 ici,  $\Lambda = \mathbb{N}$  et pour  $X = (C([0, \infty[), \mathbb{R})$   $\lambda \in \mathbb{N}$ ,  $D_{\lambda G} : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+^2$  est donné par

$$D_{\lambda G}(u, v) = \begin{pmatrix} D_\lambda(x, x_1) \\ D_\lambda(y, y_1) \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

Où  $D_\lambda$  est définie pour  $x, y \in X$  par

$$D_\lambda(x, y) = \max_{t \in [\lambda, 2\lambda+1]} |x(t) - y(t)|$$

Soit  $A, B : X \times X \rightarrow X$  être défini par

$$A(x, y)(t) = \int_{t-1}^t |f(s, x(s+2), y(s+2))| ds \quad (3.14)$$

$$B(x, y)(t) = \int_{t-1}^t |g(s, x(s+2), y(s+2))| ds \quad (3.15)$$

### Chapitre 3.

---

On prouve d'abord la condition de Lipschitz (3.16)  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  donné par  $\varphi(\lambda) = \lambda + 1$ .

Soit  $t \in [\lambda, 2\lambda + 1]$  nous avons  $t - 1 \in [\lambda - 1, 2\lambda]$  et lorsque  $s \in [t - 1, t]$ , puis

$$|A(x, y)(t) - A(x_1, y_1)(t)| \leq \int_{\lambda-1}^{2\lambda+1} |f(s, x(s+2), y(s+2)) - f(s, x_1(s+2), y_1(s+2))| ds$$

Selon (3.10), on trouve

$$\begin{aligned} |A(x, y)(t) - A(x_1, y_1)(t)| &\leq \int_{\lambda-1}^{2\lambda+1} K_1(s) |x(s+2) - x_1(s+2)| ds \\ &\quad + \int_{\lambda-1}^{2\lambda+1} K_2(s) |y(s+2) - y_1(s+2)| ds \\ &\leq \max_{s \in [\lambda-1, 2\lambda+1]} |x(s+2) - x_1(s+2)| \int_{\lambda-1}^{2\lambda+1} K_1(s) ds \\ &\quad + \max_{s \in [\lambda-1, 2\lambda+1]} |y(s+2) - y_1(s+2)| \int_{\lambda-1}^{2\lambda+1} K_2(s) ds \\ &= \max_{\tau \in [\lambda+1, 2\lambda+3]} |x(\tau) - x_1(\tau)| \int_{\lambda-1}^{2\lambda+1} K_1(s) ds \\ &\quad + \max_{\tau \in [\lambda-1, 2\lambda+1]} |y(\tau) - y_1(\tau)| \int_{\lambda-1}^{2\lambda+1} K_2(s) ds \\ &= a_\lambda D_{\lambda+1}(x, x_1) + b_\lambda D_{\lambda+1}(y, y_1). \end{aligned}$$

Prenant le maximum sur  $[\lambda, 2\lambda + 1]$

$$D_\lambda(A(x, y), A(x_1, y_1)) \leq a_\lambda D_{\lambda+1}(x, x_1) + b_\lambda D_{\lambda+1}(y, y_1).$$

Pour chaque  $(x, y), (x_1, y_1) \in X^2$ , de même pour  $B$ . Prenant le maximum sur  $[\lambda, 2\lambda + 1]$

$$D_\lambda(B(x, y), B(x_1, y_1)) \leq \bar{a}_\lambda D_{\lambda+1}(x, x_1) + \bar{b}_\lambda D_{\lambda+1}(y, y_1).$$

pour tout  $(x, y), (x_1, y_1) \in X^2$ . Donc et selon Théorème 3.2.2,

### Chapitre 3.

---

$a_\lambda, b_\lambda, \bar{a}_\lambda, \bar{b}_\lambda$  sont des constantes positive

$$\begin{cases} D_\lambda(A(x, y), A(x_1, y_1)) \leq a_\lambda D_{\varphi(\lambda)}(x, x_1) + b_\lambda D_{\varphi(\lambda)}(y, y_1) \\ D_\lambda(B(x, y), B(x_1, y_1)) \leq \bar{a}_\lambda D_{\varphi(\lambda)}(x, x_1) + \bar{b}_\lambda D_{\varphi(\lambda)}(y, y_1) \end{cases} \quad (3.16)$$

pour tout  $x, x_1, y, y_1 \in X$  et  $\lambda \in \Lambda$ , soit

$$M_\lambda := \begin{pmatrix} a_\lambda & b_\lambda \\ \bar{a}_\lambda & \bar{b}_\lambda \end{pmatrix}$$

Si

$$\sum_{i=1}^{\infty} M_\lambda M_{\varphi(\lambda)} M_{\varphi^2(\lambda)} \dots M_{\varphi^{i-1}(\lambda)} D_{\varphi^i(\lambda)G}(u, v) < \infty, \quad (3.17)$$

pour tout  $u, v \in X^2$  et  $\lambda \in \Lambda$ , alors le système (3.9) a un solution unique approximation (3.8) à partir de tout couple initiale  $(x_0, y_0) \in X^2$ . tel que (3.16) De plus, la condition (3.6) est garantie par l'hypothèse (3.11) . De plus, pour tout  $\lambda \in \mathbb{N}$  ,  $M_\lambda < M_\infty$  et donc la série (3.7) par  $\sum_{k=0}^{\infty} M_\infty^k$  qui est convergente vers zero. Donc, (3.7) est satisfaite. Par conséquent, le Théorème 3.2.3 peut être appliqué.  $\square$

# Conclusion générale

Dans ce mémoire, nous nous intéressons à des applications de théorèmes de points fixes dans les espaces généralisés au sens de Perov (métrique, normé, et de gauge). nous avons commencé par définir ces espaces et introduire quelques propriétés et exemples.

Puis nous avons donné quelques versions de théorèmes de points fixes dans ces espaces.

Enfin, nous avons présenté des applications aux équations inégré-différentiels et systèmes intégral.

# Bibliographie

- [1] A.Aghajani , E.Pourhadi,M. Rivero and J.J.Trujillo Application of Perov's Fixed Point Theorem to Fredholm type integro-differential equations in two variables ,Mathematica Slovaca , 2014.
- [2] A. Mihai Bica and S. Muresan, Approching nonlinear volterra Neutral delay integro-differential equations with the perov's Fixed point Theorem,Mathematics, University of Oradea Armatei Romane, 2017.
- [3] A. Novac.R. Precup, Perov type results in gauge spaces et their applications to integral Systems on Semi-Axis,Mathematica Slovaco, 2014.
- [4] H. Kumar Pathak, An Introdution to Nonlinaire Analysis and Fixed Point, Springer, 2017, p(232-303).
- [5] I.Altun, N.Hussain, M.Qasim, and H.Al-sulami, A New Fixed Point Result Of Perov Type And Application To a Semilinear Operator System, mathematics, 2019.
- [6] J. Dugundji, Topologiy,Allyn and Bacon, Boston, 1967, p(198-200).
- [7] J. R. Graef, J.Henderson, A.Ouahab, Topological methods for differential Equation and Inclusions,CRC Press 2019, p(127-139).
- [8] M. Cvetkovic, On the Equivalence between Perov Fixed Point Theorem and Banach Contraction Principle, Published by Faculty of Sciences and mathematics, University of Nis, Serbia, 2017.

## Bibliographie

---

- [9] M.Kheir Ahmad and B.Dghaim, Topology (2), Aleppo University Publications Faculty of Science, 2009, p(74-75).
- [10] M. S. Cvetkovic, Fixed point theorems of Perov Type. Doctoral DISSERTATION, University of Nis Faculty of Sciences and mathematics 2017, P(11) .
- [11] P. V. Subrahmanyam, Elementary fixed point theorems, Springer, 2018, p(107-108)
- [12] R. Precup, Methods in nonlinear integral equation, Department of Applied Mathematics, Babes-Bolyai University, Cluj, Romania 2018, p(42-43, 151-153).
- [13] V. Lakshmikantham, An Introduction to Nonlinear Boundary value Problems, Academic Press, Inc. New York and London, 1974, p(225-228).
- [14] Y. Miloudi, Topologie, Edition Ibn Nadin, 2022, p(03-55).