N° d'ordre :
N° de série :

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Superieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ HAMMA LAKHDAR D'EL OUED

FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES

Mémoire de fin d'étude

MASTER ACADEMIQUE

Domaine: Mathématiques et Informatique
Filière: Mathématiques
Spécialité: Mathématiques fondamentales

Thème

Opérateurs inverses Propriétés et applications

Présenté par: Medjhouda Messaouda.

Soutenu devant le jury composé de

Guesba Messaoud	MCB	Président	Univ. d'El Oued.
Mansour Abdelouahab	MCA	Rapporteur	Univ. d'El Oued.
Ahfouda Belhadi	MAA	Examinateur	Univ. d'El Oued.

Année universitaire 2016 – 2017

Remerciements

Je remercie « Allah » qui m'a donné la volonté pour la réalisation de ce modeste mémoire.

Je remercie Monsieur ***Mansour Abdelouahab*** *: Professeur à* ***l'université d'El_ Oued****, qui a encadré ce mémoire avec beaucoup de patience et de gentillesse. Il a su motiver chaque étape de mon travail par des remarques pertinentes. Je lui remercie très sincèrement pour sa disponibilité.*

Ainsi que tous nos professeurs qui nous ont enseigné durant nos études à la faculté des sciences exactes.

Je remercie également tous nos collègues d'étude, particulièrement notre promotion de master mathématique, 2016/2017 à l'université ***d'Echahid Hama Lakhdar El_ Oued.***
A tous mes amis surtout : Hammana Ikram, Elaogbi Sara, Bey Abir.

Enfin, je ne voudrais pas oublier ma famille qui m'a soutenu moralement, sans les nommer explicitement, je leur remercie pour leurs encouragements.

Notations

$\mathbb{K}$ le corps des nombres réels ou complexes,

H Espace de Hilbert,

$B(H)$ L'espace des opérateurs linéaires bornée sur un espace de Hilbert H,

$\langle ., . \rangle$ Produit scalaire,

$\|.\|$ La norme,

A L'opérateur linéaire,

I_H L'opérateur identité,

O_H L'opérateur nul,

A^t L'opérateur transposée de A,

A^* L'opérateur adjoint de A,

A^{-1} L'inverse d'un opérateur A,

$\sigma(A)$ Le spectre de A,

$\rho(A)$ La résolvante de A,

$\sigma_p(A)$ Le spectre ponctuel de A,

$\sigma_c(A)$ Le spectre continu de A,

A_0 ou A^- L'inverse généralisée de A,

$rang(A)$ Le rang de A,

$N(A)$ Le noyau de A,

$R(A)$ L'espace image de A,

$ind(A)$ L'indice de A,

$\bigoplus$ La somme directe ,

A^+ L'inverse de Moore-Penrose de A,

$A^\#$ Le groupe inverse de A,

A^D L'inverse de Drazin de A.

Table des matières

Introduction

Il est bien connu qu'une matrice sur un corps a une inverse si elle est carrée de déterminant non nul. Cependant, dans plusieurs domaines des mathématiques appliquées on a besoin de quelques types d'inverses partielles d'une matrice singulière, ou même rectangulaires.

Par exemple, les solutions d'un système linéaire peuvent exister même si la matrice définissant ce système est singulière. Ce qui conduit à l'inverse ainsi nommé généralisée d'une matrice.

L'inversibilité des matrices ou des opérateurs est l'une des disciplines les plus répandues en mathématique, beaucoup de problèmes sont interprétés par une équation du type $Ax = y$, où A est une transformation linéaire donnée, qui est dans notre situation une matrice de type $m \times n$ sur K (un opérateur linéaire défini d'un espace vectoriel $\mathbb{E}$ dans un autre $\mathbb{F}$ de dimensions respective n et m) : comme l'analyse numérique, l'optimisation, la statistique et les modèles linéaires, ce problème est aussi manipulé via le concept d'une inverse généralisée d'une matrice (ou d'un opérateur linéaire).

Devant des questions de ce type on cherche un opérateur ayant le maximum de propriétés dont l'inverse usuel réjouit, et d'une manière que cet inverse existe pour une classe aussi large d'opérateurs linéaires.

Parmi la terminologie existante, citons par exemple : inverse partielle, inverse intérieure, inverse extérieure, quasi inverse, pseudo inverse, inverse généralisée,.... D'autres inverses portent les noms de leurs fondateurs, par exemple : l'inverse de Moore, l'inverse de Moore-Penrose, l'inverse de Drazin, de Duffin,...

La majorité des propriétés de l'inverse généralisée ont été traitées dans le livre de A. Ben Israel [11] et T. N. E. Greville [20], et aussi dans le livre du Z. Nashed [27].

Ce mémoire se compose de troix chapitres. On commence tout d'abord au premier chapitre par présenter brefièvement certaines notions et rappels sur la théorie des opérateurs utilisées tout le long de ce mémoire.

Le deuxième chapitre traite quelque théorèmes sur l'inversibilité d'un opérateur au sens usuel et ses propriétés, aussi quelque méthodes pour calculer l'inverse d'une matrice carrée.

Le troisième chapitre est consacré à l'étude des quelques types d'inverse généralisées : l'inverse de Moore-Penrose A^{+}, le groupe inverse $A^{\#}$, et l'inverse de Drazin A^{D}, en citant quelques propriétés algébriques et applications.

Chapitre 1

Notions et préliminaires

1.1 Espace de Hilbert

1.1.1 Produit scalaire

On rappelle dans ce chapitre quelques définitions et propriétés utiles.

Définition 1.1.1 *Soit E un espace vectoriel sur le corps des nombres réels. Un produit scalaire sur E est une application $f : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$, définie sur le produit cartésien $E \times E$ à valeurs dans l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels que l'on note $\langle , \rangle$ ou $\langle . \mid . \rangle$ et qui vérife les cinq propriétés :*

1. $\forall u \in E, \forall v \in E, \forall w \in E : f(u+v, w) = f(u, w) + f(v, w)$ *(additivité par rapport á la premiére variable, la seconde étant fixée quelconque).*
2. $\forall u \in E, \forall v \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R} : f(\lambda u, v) = \lambda f(u, v)$ *(homogénénéité par rapport à la premiére variable étant fixée quelconque).*
3. $\forall u \in E, \forall v \in E : f(u, v) = f(v, u)$ *(symétrie).*
4. $\forall u \in E, \forall v \in E : f(u, v) \geq 0$ *(positivité).*
5. $f(u, u) = 0 \Longrightarrow u = 0$ *(séparation, mais on dit plutot que f est définie). Pour $u \in E, v \in E$ donnés le nombre réel $f(u, v)$ s'appelle le produit scalaire de u et v (ou bien de u par v).*

Définition 1.1.2 *Soit E un espace vectoriel réel et soit $\langle . \mid . \rangle$ un produit scalaire sur E. On associe au produit scalaire une norme (dite associée) en posant*

$$\forall u \in E : \| u \| = \sqrt{\langle u \mid u \rangle}.$$

Remarque 1.1.1 *Si E un espace vectoriel complexe, la condition 3 est remplacée par la condition $\forall u \in E : h(u,v) = \overline{h(u,v)}$ conjugué complexe (symétrie hermitienne).*

Définition 1.1.3 *Soit E un espase vectoriel sur un corps K, une forme sesquilinéaire sur E est une application (,) de $E \times E$ dans K quelque soient α et β dans K et x, y, z dans E qui vérifie :*

1. $(\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x,z) + \beta(y,z)$.
2. $(x, \alpha y + \beta z) = \overline{\alpha}(x,y) + \overline{\beta}(x,z)$. *On dit que (,) est hermitienne si elle vérifie de plus*
3. $(x,y) = \overline{(y,x)}, \forall x, y \in E$.
4. $(x,x) \geq 0, \forall x \in E$.

Quelques propriétées

Théorème 1.1.1 [26] *Soit H un espase de Hilbert.*

Toute forme bilinéaire symetrique (,) vérifie :

$$4(x,y) = (x+y, x+y) - (x-y, x-y), \forall x, y \in H.$$

Toute forme sesquilinéaire (,) (hermitienne ou non) vérifie :

$$4(x,y) = (x+y, x+y) - (x-y, x-y) + i(x+iy, x+iy) - i(x+iy, x+iy).$$

Théorème 1.1.2 [26] *Soit H un espase de Hilbert, et soit (,) une forme hermitienne sur E si $(x,y) \geq 0, \forall x, y \in H$ alors elle vérifie les propriétés fondamentales suivantes :*

i) L'inégalité de Cauchy-Schwartz :

$$| (x,y) | \leq \| x \| \| y \| .$$

ii) L'inégalité de Minkowski :

$$(x+y, x+y)^{\frac{1}{2}} \leq (x,x)^{\frac{1}{2}} (y,y)^{\frac{1}{2}}.$$

iii) L'inégalité du triangle

$$\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \| .$$

Preuve. Pour la preuve voir . ■

Définition 1.1.4 *Un espace de Hilbert est un espace préhilbertien sur K qui est complet pour la norme $\| x - y \| = \sqrt{\langle x, y \rangle}$.*

1.2 Opérateurs linéaires bornés

1.2.1 Opérateurs linéaires dans les espaces de Hilbert

Définition 1.2.1 *Une application T définie d'un espace de Hilbert H dans K est dit Opérateur linéaire si T satisfait les deux propriétés suivantes :*

1. $\forall x, y \in H, T(x+y) = T(x) + T(y)$. *(Additivité)*
2. $\forall x \in H, \forall \alpha \in K : T(\alpha x) = \alpha T(x)$.*(Homogénité)*

Notations

- *L'opérateur identité I est défini par $Ix = x$ pour tout $x \in H$.*
- *L'opérateur nul 0 est défini par $0x = 0$, pour tout $x \in H$.*
- *Le noyau de T notée ker(T) et l'image de T, notée R(T) sont définis par :*

Soit $T : H$

$Ker(T) = \{x \in H, Tx = 0\}$ *et* $R(T) = \{Tx, x \in H\}$.

Définition 1.2.2 *Soit X un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{C}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, l'application $T_\lambda : H \longrightarrow H$ définie pour $x \in H$ par :*

$$T_\lambda(x) = \lambda x,$$

est un opérateur linéaire.

En effet, pour $x_1, x_2 \in H$ et $\alpha \in \mathbb{C}$ on a

$$\begin{aligned} T_\lambda(\alpha x_1 + x_2) &= \lambda(\alpha x_1 + x_2) \\ &= \alpha(\lambda x_1) + (\lambda x_2) \\ &= \alpha T_\lambda(x_1) + T_\lambda(x_2). \end{aligned}$$

$$(1.2)$$

Cet opérateur est appelé une homothétie de rapport λ de l'espace linéaire H ou opérateur de multiplication.

Définition 1.2.3 *L'opérateur linéaire T sur un espace de Hilbert H est dit borné s'il existe un nombre positif c tel que :*

$$\| Tx \| \leq c \| x \|, \text{ pour tout } x \in H.$$

Définition 1.2.4 *On définit la norme de l'opérateur linéaire borné T par*

$$\| T \| = inf\{c > 0 \ : \| Tx \| \leq c \| x \|, \forall x \in H\}.$$

Théorème 1.2.1 [21] *Soit $A, B \in B(H)$ et $\lambda \in K$, alors*

1. $\| \lambda A \| = | \lambda | \| A \|$.
2. $\| A + B \| \leq \| A \| + \| B \|$.
3. $\| AB \| \leq \| A \| \| B \|$.
4. $\| A^n \| \leq \| A \|^n \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Théorème 1.2.2 *Soit $T \in B(H)$, la norme de T est donnée par*

$$\| Tx \| = sup\{\| Tx \|, x \in H, \| x \| = 1\}.$$

Preuve.

On a les inégalités dans le deux sens.

1. Posons
$$a = sup\{\| Tx \|, x \in H, \| x \| = 1\},$$
si l'opérateur T est borné, alors :
$$\| Tx \| \leq \| T \| \| x \| = \| T \| \ pour \ \| x \| = 1$$
donc $a \leq \| T \|$ d'aprés la définition de $\| T \|$.

2. Pour tout vecteur $x \in H$ on a :

$$\| Tx \| = \| T(\| x \| \frac{x}{\| x \|}) \| = \| T(\frac{x}{\| x \|}) \| \ \| x \| \quad \leq a \| x \|$$

d'où

$$\| T \| \leq a = sup\{\| Tx \|, x \in H, \| x \|= 1\}.$$

En combinant les deux inégalités dans 1) et 2) on obtient l'égalité d'ésirée.

■

Théorème 1.2.3 [21] *Pour tout opérateur linéaire sur un espace de Hilbert H, les assertions suivantes sont equivalentes :*

— *T est borné.*

— *T est continu sur l'espace H.*

— *T est continu en un point x_0 (x_0 est un vecteur) de l'espace H.*

Théorème 1.2.4 [21] *Soit H un espace de Hilbert, et f est une forme linéaire continue sur H. Il existe un vecteur $a \in H$ et un seul, tel que :*

$$\forall x \in H, f(x) =< a, x > .$$

Espace vectoriel normé

Définition 1.2.5 *Soit E un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Une norme sur E et une application $N : E \longrightarrow \mathbb{R}^+$, définie sur E à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ vérifiant les quatre propriétés suivantes :*

1. $\forall u \in E : N(u) \geq 0$ *(positivité).*
2. $N(u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$ *(sparation).*
3. $\forall u \in E, \forall \lambda \in \Bbbk : N(\lambda u) =\mid \lambda \mid N(u)$ *(homogénéité).*
4. $\forall u \in E, \forall v \in E : N(u + v) \leq N(u) + N(v)$ *(inégalité triangulaire).*

Pour $u \in E$ donné, le nombre réel positif N (u) est appelé norme de u .

Définition 1.2.6 *Un espace vectoriel normé réel (resp.complexe) est un couple constitué par un espace vectoriel E réel (resp.complexe) et par une norme $\| . \|$ sur l'espace vectoriel*

E.
Il ne faut pas qu'il y ait la moindre ambiguité sur le corps des scalaires de E. Si l'on ne précise pas le corps, cela signifie que les résultats concernent aussi bien un e.v.n. réel qu'un e.v.n. complexe.

Définition 1.2.7 *On appelle espace de Banach un espace vectoriel normé complet, sur le corps K des réels ou des complexes.*

Par exemple $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{C}^n$, avec leurs normes usuelles sont des Banach.

L'adjoint d'un opérateur

Théorème 1.2.5 *Soit $T \in B(H)$, il existe un unique opérateur $T^* \in B(H)$, pour tout $x, y \in H$, on ait*

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle.$$

Preuve. Soit y donné dans H, l'application $x \mapsto \langle Tx, y\rangle$ est une forme linéaire continue sur H, il suit qu'il existe un unique $z \in H$ tel que, pour tout $x \in H$, on ait $\langle Tx, y\rangle = \langle x, z\rangle$. On note $z = T^*y$.
T^* est bien défini, et ce de manière unique, en tant qu'application de H dans H car pour y donné, on définit z, l'image de y par T^*, de façon unique.
Montrons que T^* est linéaire :

$$\begin{aligned}
\langle x, T^*(\alpha y_1 + \beta y_2)\rangle &= \langle Tx, \alpha y_1 + \beta y_2\rangle \\
&= \langle Tx, \alpha y_1\rangle + \langle Tx, \beta y_2\rangle \\
&= \overline{\alpha}\langle Tx, y_1\rangle + \overline{\beta}\langle Tx, y_2\rangle \\
&= \overline{\alpha}\langle x, T^*y_1\rangle + \overline{\beta}\langle x, T^*y_2\rangle \\
&= \langle x, \alpha T^*y_1 + \beta T^*y_2\rangle,
\end{aligned}$$

d'où $\forall x \in H, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$

$$\langle x, T^*(\alpha y_1 + \beta y_2)\rangle = \langle x, \alpha T^* y_1 + \beta T^* y_2\rangle.$$

Montrons maintenant que T^* est borné.

$$\| T^*y \|_2 = \langle T^*y, T^*y\rangle = \langle TT^*y, y\rangle \leq \| TT^*y \| \| y \| \leq \| T \| \| T^*y \| \| y \|$$

donc

$$\| T^*y \| \leq \| T \| \| y \|,$$

alor, T^* est borné et de plus

$$\| T^* \| \leq \| T \|$$

il s'en suit que $T^* \in B(H)$. ■

Définition 1.2.8 *L'opérateur T^* définit ci-dessus est appelé l'opérateur adjoint de T.*

Exemple 1.2.1 *On considère l'opérateur shift $S : l^2(\mathbb{C}) \to l^2(\mathbb{C})$ défini par :*

$$S(x_1, x_2, ...) = (0, x_1, x_2, ...).$$

Soit (x_n) et (y_n) dans $l^2(\mathbb{C})$. Alors

$$\begin{aligned} \langle S^*x_n, y_n\rangle &= \langle x_n, Sy_n\rangle \\ &= \langle (x_1, x_2, ...), (0, y_1, y_2, ...)\rangle \\ &= x_2\overline{y_1} + x_3\overline{y_2} + ... \\ &= \langle (x_2, x_3, ...), (y_1, y_2, ...)\rangle. \end{aligned}$$

Alors S^* est défini par :

$$S^*(x_1, x_2, ...) = (x_2, x_3, ...).$$

Théorème 1.2.6 *Soit $T, S \in B(H), \forall \alpha \in K$ et T^*, S^* leurs adjoints (respectivement), alors on a les propriétés suivantes :*

1. $(T^*)^* = T$.
2. $(T + S)^* = T^* + S^*$.
3. $(\alpha T)^* = \overline{\alpha} T^*$. $\forall \alpha \in K$

4. $\| T^* \|=\| T \|$.

5. $(TS)^* = S^*T^*$.

Preuve.

1. soit $x, y \in H$

$$\langle x, (T^*)^*y\rangle = \langle T^*x, y\rangle = \overline{\langle y, T^*x\rangle} = \overline{\langle Ty, x\rangle} = \langle x, Ty\rangle,$$

d'où :

$$(T^*)^* = T.$$

2. soit $x, y \in H$

$$\begin{aligned}
\langle x, (T+S)^*y\rangle &= \langle (T+S)x, y\rangle \\
&= \langle Tx, y\rangle + \langle Sx, y\rangle \\
&= \langle x, T^*y\rangle + \langle x, S^*y\rangle \\
&= \langle x, (T^*+S^*)y\rangle
\end{aligned}$$

d'où :

$$(T+S)^* = T^* + S^*.$$

3. soit $x, y \in H, \alpha \in \mathbb{C}$

$$\langle \alpha Tx, y\rangle = \alpha\langle Tx, y\rangle = \alpha\langle x, T^*y\rangle = \langle x, \overline{\alpha}T^*y\rangle$$

d'où :

$$(\alpha T)^* = \overline{\alpha}T^*.$$

4. On a

$$\begin{aligned}
\| A^*(x) \|_2 &= \langle A^*(x), A^*(x)\rangle \\
&= \langle AA^*(x), x\rangle \\
&\leq \| AA^*(x) \|\| x \| \\
&\leq \| A \|\| A^*(x) \|\| x \|
\end{aligned}$$

et pour conséquence

$$\| A^*(x) \| \leq \| A \| \| x \|$$

comme

$$\| A^* \| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|A^*(x)\|}{\|x\|}$$

donc on a

$$\| A^*(x) \| \leq \| A \|$$

On a aussi $(A^*)^* = A$, donc

$$\| A \| = \| (A^*)^* \| \leq \| A^* \| .$$

D'ou l'égalité

$$\| A \| = \| A^* \| .$$

5. pour vérifie que $(TS)^* = S^*T^*$ il suffit de montre que

$$\langle (TS)^*x, y\rangle = \langle S^*T^*x, y\rangle$$

on a par définition de l'adjoint

$$\langle (TS)^*x, y\rangle = \langle x, (TS)y\rangle = \langle T^*x, Sy\rangle = \langle S^*T^*x, y\rangle,$$

donc,

$$(TS)^* = S^*T^*.$$

■

Corollaire 1.2.1 *Pour $T \in B(H)$ on a :*

1. $\| TT^* \| = \| T^*T \| = \| T \|^2$
2. $T^*T = 0 \Leftrightarrow T = 0.$

Preuve.

on a

$$\| T^*T \| \leq \| T^* \| \| T \| = \| T \|^2$$

$$\| Tx \|^2 = | \langle Tx, Tx\rangle | = \langle x, T^*Tx\rangle | \leq \| x \| \| T^*T \| \| x \| \leq \| T^*T \| \| x \|^2,$$

$$\| Tx \| \leq \| T^*T \|^{\frac{1}{2}} \| x \|,$$

passon

$$\| T \| \leq \| T^*T \|^{\frac{1}{2}}$$

$$\| T \|_2 \leq \| T^*T \|$$

d'où

$$\| T^*T \| = \| T \|^2.$$

La deuxième égalité il suffit de changer T par T^*.

On montre si $T^*T = 0$ alors $T = 0$,

$$\begin{aligned} \| T^*T \| = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \langle T^*Tx, x\rangle = 0, \forall x \in H \\ &\Leftrightarrow \quad \langle Tx, Tx\rangle = 0, \forall x \in H \\ &\Leftrightarrow \quad Tx = 0, \forall x \in H \end{aligned}$$

.

Réciproquement, si $T = 0$ alors $TT^* = 0$,

$$T = 0 \Leftrightarrow Tx = 0, \ \forall x \in H$$

$$\langle Tx, Tx\rangle = 0, \ \forall x \in H$$

$$\langle T^*Tx, x\rangle = 0, \ \forall x \in H.$$

$$T^*T = 0.$$

■

Théorème 1.2.7 *Soit H un opérateur de Hilbert complexe et $T \in B(H)$, si $\langle Tx, x\rangle = 0$ alors T est identique nule pour tout $x \in \mathbb{C}$.*

Preuve. Comme

$$\langle T(x+y), x+y\rangle = 0$$

on voit que

$$\langle Tx, y\rangle + \langle Ty, x\rangle = 0, \ \ \forall x, y \in H. \tag{1.3}$$

On remplace y par iy en 1.3 , le rsultat est

$$-i\langle Tx, y\rangle + i\langle Ty, x\rangle = 0 \tag{1.4}$$

Multiplions 1.4 par i et additionne à 1.3 on trouve :

$$\langle Tx, y\rangle = 0 \tag{1.5}$$

on pose

$$y = Tx$$

1.5 donne $\| Tx \|_2 = 0$, alors

$$Tx = 0, \forall x \in H$$

donc

$$T = 0.$$

■

1.2.2 Quelques classes d'opérateurs

Définition 1.2.9 *Soit T un opératreur dans $B(H)$, on dit que T est positif et on note $T \geq 0$, si et seulement si*

$$\langle Tx, x\rangle \geq 0, \forall x \in H \ .$$

Définition 1.2.10 *Soit $T \in B(H)$, on dit que T est isométrie : si et seulement si*

$$T^*T = I_H.$$

Exemple 1.2.2 *L'opéateur de décalage S (shift) est un opérateur isométrique, car on a*

$$S(x_1, x_2, ...) = (0, x_1, x_2, ...)$$

$$S^*(x_1, x_2, ...) = (x_2, x_3, ...)$$

on a :

$$S^*S(x_1, x_2, ...) = S^*(0, x_1, x_2, ...) = (x_1, x_2, ...).$$

Alors,

$$S^*S = I_H.$$

Définition 1.2.11 *Soit T un opératreur dans $B(H)$, on dit que T est unitaire : si et seulement si*

$$T^*T = TT^* = I_H.$$

Exemple 1.2.3 *Soit $H = L_2[0,1]$ définissons un opérateur U sur H par*

$$(U)[x(t)] = x(1-t)$$

$$\langle Ux, x\rangle = \langle x(1-t), x\rangle = \langle x, (1-t)^{-1}x\rangle = \langle x, U^*x\rangle$$

donc,

$$UU^* = U^*U = I_H$$

d'où, U est unitaire.

Définition 1.2.12 *Soit T un opératreur dans $B(H)$, on dit que T est normal : si et seulement si*

$$T^*T = TT^*.$$

Exemple 1.2.4 *La mutiplication T_φ par une fonction mesurable bornée φ est un opérateur normal sur $L_2([0,1])$, car*

$$T_\varphi : L_2([0,1]) \to L_2([0,1]),\ telque\ \varphi \in \mathbb{C}([0,1])$$

$$(T_\varphi f)(t) = \varphi(t)f(t).$$

On a

$$\langle T_\varphi f, g\rangle = \langle f, T_\varphi^* g\rangle \ \forall f, g \in L_2([0,1])$$

$$\langle \varphi(t)f(t), g(t)\rangle = \langle f(t), \overline{\varphi(t)}g(t)\rangle$$

donc

$$(T^*\varphi g)(t) = \overline{\varphi(t)}g(t)$$

d'où

$$T^*\varphi = T_{\overline{\varphi}}.$$

Alors,

$$T_\varphi^* T_\varphi = T_{\overline{\varphi}} T_\varphi = T_\varphi T_{\overline{\varphi}} = T_\varphi T_\varphi^*.$$

Donc T_φ est un opérateur normal.

Définition 1.2.13 *Soit T un opératreur dans $B(H)$, on dit que T est idempotente ou projection : si $T^2 = T$*

Définition 1.2.14 *Soit T un opératreur dans $B(H)$, on dit que T est projection orthogonale : si $T^2 = T$ et $T^* = T$.*

Opérateur auto-adjoint

Définition 1.2.15 *Un opérateur T est dit auto-adjoint si $T = T^*$, i.e.*

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle, \ \forall x, y \in H.$$

Exemple 1.2.5 *1. Considérons l'opérateur T défini sur $L_2(\mathbb{R})$ par*

$$(Tx)(t) = \exp^{-|t|} x(t)$$

T est un opérateur borné auto-adjoint. En effet,

$$\begin{aligned}
\langle Ax, y\rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp^{-|t|} x(t)\overline{y(t)}dt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\overline{[\exp^{-|t|} y(t)]}dt \\
&= \langle x, Ay\rangle.
\end{aligned}$$

2. *L'opérateur identité I_H est un opérateur auto-adjoint car : $I_H^* = I_H$*

$$\langle I_H x, y\rangle = \langle x, I_H^* y\rangle,\ \forall x, y \in H.$$

Proposition 1.2.1 *Soit $T \in B(H)$ alors T est auto-adjoint si et seulement si le produit scalaire*

$$\langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R},\ \forall x \in H$$

Preuve. Soit T est un opérateur auto-adjoint dans $B(H)$ (i.e : $T^* = T$)

si T auto-adjoint alors $\langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R}, \forall x \in H$.

$$\langle Tx, x\rangle = \langle x, T^* x\rangle = \langle x, Tx\rangle = \overline{\langle Tx, x\rangle}$$

donc,

$$\langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R}, \forall x \in H.$$

Réciproquement, si $\langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R}$ alors T est auto-adjoint.

Soit $\langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R}$

$$\langle Tx, x\rangle = \overline{\langle Tx, x\rangle} = \langle x, Tx\rangle = \langle T^* x, x\rangle$$

$\forall x \in H$, $T^* = T$. Donc T est auto-adjoint.

■

1.2.3 Spectre d'un opérateur

Soit $T \in B(E)$ avec E un K-espace vectoriel, $K = \mathbb{C}$.

La valeur propre d'un opérateur

Définition 1.2.16 *Le nombre complexe λ est dite valeur propre de T s'il existe un vecteur x dans H (s'appelle vecteur propre associé à λ) tel que*

$$(T - \lambda I_H)x = 0,\ Tx = \lambda x.$$

Remarque 1.2.1

1. *x n'est pas unique car tout vecteur αx, $\alpha \in \mathbb{C} - \{0\}$ vérifie*

$$T(\alpha x) = \alpha Tx = \alpha\lambda x = \lambda(\alpha x)$$

αx est un vecteur propre associé aussi à λ.

2. Pour un vecteur $x \neq 0$ fixé : λ est unique, en effet :

si $\lambda_1 \neq \lambda_2$ valeur propre associé à x

$$Tx = \lambda_1 x,\ Tx = \lambda_2 x \Rightarrow \lambda_1 x = \lambda_2 x.$$

Donc $\lambda_1 = \lambda_2$.

Théorème 1.2.8 *Pour $T \in B(H)$, H est un Hilbert si T est auto-adjoint, alors toutes les valeurs propres de T sont réelles.*

Preuve. Soit T un opérateur auto-adjoint dans $B(H)$ et λ un valeur propre de T (i.e. $Tx = \lambda x, x \neq 0$)

$$\lambda(x, x) = (\lambda x, x) = (Tx, x) = (x, T^*x) = (x, Tx) = (x, \lambda x) = \overline{\lambda}(x, x),$$

mais

$$x \neq 0 \Rightarrow \lambda = \overline{\lambda} \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}.$$

■

Résolvante et spectre d'un opérateur

Définition 1.2.17 *On appelle spectre de T, on note $sp(T)$ ou $\sigma(T)$ l'ensemble des valeurs spectrales de T.*

Définition 1.2.18 *On appelle valeur propre de T tout scalaire $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $T - \lambda I$ n'est pas injectif (une valeur propre est donc une valeur spectrale), on note $VP(T) = \sigma_p(T)$ l'ensemble des valeurs propres de T.*

Remarque 1.2.2 *On dit parfois que les valeurs propres forment le spectre ponctuel (d'où la notation).*

Définition 1.2.19 *On appelle espace propre associé à la veleur propre $\lambda \in VP(T)$ le sous-espace vectoriel*

$$Ker(T - \lambda I) = N(T - \lambda I) \neq \{0\}.$$

Définition 1.2.20 *On appelle spectre continu de T, on note $\sigma_c(T)$ l'ensemble :*

$$\sigma_c(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}, (T - \lambda I) \text{ injectif et } Im(T - \lambda I) \neq \overline{Im(T - \lambda I)} = E\}.$$

Définition 1.2.21 *On appelle spectre résiduel de T, on note $\sigma_r(T)$ l'ensemble :*

$$\sigma_r(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}, (T - \lambda I) \text{ injectif et } \overline{Im(T - \lambda I)} \neq E\}.$$

Définition 1.2.22 *On appelle point régulier de T si $T - \lambda I$ est bijective.*

Définition 1.2.23 *On appelle la résolvante de T l'ensemble des points régulier de T et on note par $\rho(T)$, d'ou*

$$\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda I \text{ est bijective } \}.$$

Définition 1.2.24 *On définit l'application résolvante de T par :*

$$R_\lambda(T) = (T - \lambda I)^{-1}, \, \forall \lambda \in \rho(T).$$

Remarque 1.2.3 *On a*

$$\sigma(T) \bigcup \rho(T) = \mathbb{C}$$

$$\sigma(T) \bigcap \rho(T) = \varnothing$$

$$\sigma(T) = \sigma_p(T) \bigcup \sigma_c(T) \bigcup \sigma_r(T).$$

Exemple 1.2.6 *Soit $T : \; l_p \longmapsto l_p \; (1 \leq P < \infty)$ tel que*

$$T(x_1, x_2, \cdots) = (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \cdots) \; , \lambda_n \in \mathbb{C}.$$

Les valeurs propres sont :

$$\sigma_p(T) = \{\lambda_n, n \in \mathbb{N}^*\}$$

Le spectre de T est :

$$\sigma(T) = \{\overline{\lambda_n, n \in \mathbb{N}^*}\}.$$

Chapitre 2

Inversibilité d'un opérateur au sens usuel

2.1 L'inverse d'un opérateur

Définition 2.1.1 *Soit $T \in B(H)$ on dit que T est inversible s'il existe un opérateur $S \in B(H)$, qui vérifie*

$$T.S = S.T = I_H.$$

Un tel opérateur S (lorsqu'il existe) est unique. On l'appelle opérateur inverse de T et on le note $S := T^{-1}$.

Exemple 2.1.1 *Soit* $T = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, *et* $S = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. *Alors*

$$TS = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-5 & -10+10 \\ 3-3 & -5+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_H.$$

$$ST = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-5 & -10+10 \\ 3-3 & -5+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_H.$$

Alors, A et B sont inversibles et chacun est l'inverse de l'autre.

2.1.1 Quelques propriétés sur l'inversibilité des opérateurs

Proposition 2.1.1

1 Soit B_1 et B_2 sont deux opérateurs inverses du même opérateur A, alors B_1 et B_2 sont identiquement égaux.

2 Si deux matrices A et B sont inversibles alors leur produit est inversible et l'inverse du produit est le produit des inverses effectué dans l'ordre inverse

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

3 Soitent $A_1, A_2, \ldots, A_n$ des matrices carrée inversibles, alors leur produit est inversible et l'inverse du produit est le produit des inverses effectué dans l'ordre inverse

$$(A_1A_2 \ldots A_n)^{-1} = A_n^{-1} \ldots A_2^{-1}A_1^{-1}.$$

Preuve.

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I.$$

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I.$$

On montre par récurence :

Pour $n = 2$ on a

$$(A_1A_2)^{-1} = A_2^{-1}A_1^{-1}.$$

On suppose que la relation est vrai pour n et on montre la vrai pour $n + 1$, donc on a :

$$\begin{aligned}(\mathrm{A}_1A_2 \ldots A_nA_{n+1})^{-1} &= [(A_1A_2 \ldots A_n)(A_{n+1})]^{-1} \\ &= A_{n+1}^{-1}(A_1A_2 \ldots A_n)^{-1} \\ &= A_{n+1}^{-1}A_n^{-1} \ldots A_2^{-1}A_1^{-1}.\end{aligned}$$

■

Remarque 2.1.1 *Si A inversible alors kA est inversible pour $k \neq 0$ et leur inverse est $k^{-1}A^{-1}$.*

2.1.2 Quelques propriétés sur les matrices

Proposition 2.1.2

1 Déterminant de l'inverse d'une matrice $\det \mid A^{-1} \mid = \frac{1}{det|A|}$.

2 Une matrice carrée n'admettant pas d'inverse est dit singulière.

3 Une matrice carrée admettant une inverse est dite inversible ou régulière.

4 $A^{-1}A = AA^{-1} = I_H$.

5 $(A^{-1})^{-1} = A$.

6 $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

7 $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.

Théorème 2.1.1 *L'opérateur inverse d'un opérateur* $A \in (E, F)$ *est aussi lineaire.*

Preuve.

Soit $A : E \to F$ est lineaire.

1) On va montre $A^{-1}(x+y) = A^{-1}(x) + A^{-1}(y)\ \forall x, y \in F$

$x \in F \Rightarrow \exists! x' \in E : x = Ax'\ (i.e : x' = A^{-1}x)$

$y \in F \Rightarrow \exists! y' \in E : y = Ay'\ (i.e : y' = A^{-1}y)$

on a $A^{-1}(x+y) = A^{-1}(Ax' + Ay') = A^{-1}(A(x'+y')) = x' + y' = A^{-1}x + A^{-1}y$

2) On va montre $A^{-1}(\lambda x) = \lambda A^{-1}(x)\ \forall x \in F\ \forall \lambda$

on a $A^{-1}(\lambda x) = A^{-1}(\lambda A x') = A^{-1}A(\lambda x') = \lambda x' = \lambda A^{-1}x$.

■

Remarque 2.1.2 *L'inverse d'un opérateur borné n'est pas forcément borné.*

Exemple 2.1.2 *Soit dans* $l_2(\mathbb{C})$ *l'opérateur* A *définie par :*

$$A(x_1, x_2, \ldots) = (x_1, \tfrac{x_2}{2}, \ldots, \tfrac{x_n}{n}, \ldots).$$

Soit $X = (x_1, x_2, \ldots)$, *donc*

$$\| Ax \| = \| (x_1, \tfrac{x_2}{2}, \ldots, \tfrac{x_n}{n}, \ldots) \| = (\sum_{i \geq 1} \tfrac{|x_i|^2}{i^2})^{\frac{1}{2}} \leq (\sum_{i \geq 1} \mid x_i \mid^2)^{\frac{1}{2}} = \| x \|_{l_2} .$$

D'où $\| Ax \| \leq \| x \|$, *donc* A *est borné et son inverse est doné par :*

$$A^{-1}(x_1, x_2, \ldots) = (x_1, 2x_2, \ldots, nx_n, \ldots)$$

cependant A^{-1} *est non borné.*

En effet si $e_n = (0, \ldots, 1, 0, \ldots)$*, on a*

$$\| e_n \| = 1, \text{ et } \| A^{-1} e_n \| = n$$

d'où A^{-1} *n'est pas borné.*

Théorème 2.1.2 *Soit* A *et* B *deux matrices sont inversibles telque* $0 < A, 0 < B$*, si* $A \leq B$*, alors* $B^{-1} \leq A^{-1}$*.*

Preuve.

La condition

$$A \leq B \Leftrightarrow B^{\frac{-1}{2}} A B^{\frac{-1}{2}} \leq I$$

on a de pluse

$$B^{-1} \leq A^{-1} \Leftrightarrow I \leq B^{\frac{1}{2}} A^{-1} B^{\frac{-1}{2}}$$

si $X = B^{\frac{-1}{2}} A B^{\frac{-1}{2}}$, alors nous devons montrer que

$$X \leq I \Rightarrow X^{-1} \geq I$$

la condtion $X \leq I$ signifie que toutes les valeurs propres de X sont dans l'intervale $]0, 1]$.

Cela implique que toutes les valeurs propres de X^{-1} sont dans $[1, \infty[$. ■

Théorème 2.1.3 *Si* T *est inversible, alors le spectre de l'inverse de* T *est :*

$$\sigma(T^{-1}) = \{\tfrac{1}{\lambda} : \lambda \in \sigma(T)\}.$$

Preuve.

Soit $\lambda \in \sigma(T^{-1})$.

Comme T^{-1} est inversible, nécessairement $\lambda \neq 0$. Comme

$$T^{-1} - \lambda I_H \text{ est non inversible, et } T^{-1} - \lambda I_H = \lambda T^{-1}(\tfrac{1}{\lambda} I_H - T)^{-1},$$

l'opérateur $(\frac{1}{\lambda} I_H - T)^{-1}$ est non inversible, i.e.$\frac{1}{\lambda} \in \sigma(T)$.

On a donc montré que

$$\sigma(T^{-1}) \subset \sigma(T)^{-1} := \{\tfrac{1}{\lambda} : \lambda \in \sigma(T)\}.$$

En échangeant le rôle de T et T^{-1} on obtient l'inclusion réciproque

$$\sigma(T)^{-1} \subset \sigma(T^{-1}),$$

ce qui achève la preuve de la première assertion.

■

Théorème 2.1.4 *Si $dimH < +\infty$, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *T est inversible.*
2. *T est injectif.*
3. *T est surjectif.*
4. *T admet une inverse à droite (i.e. il existe $U \in L(H)$ tel que $T \circ U = I_H$).*
5. *T admet une inverse à gauche (i.e. il existe $V \in L(H)$ tel que $V \circ T = I_H$).*

Remarque et contre-exemple

Attention si $dimH = +\infty$, les propriétés équivalentes du théorème précédent ne sont plus vraies.

Soit $H = l_2$, l'espace des suites de nombres complexes de carré sommable, muni de sa norme

$$\| x \|_{l_2} = (\sum_{n=1}^{+\infty} | x |^2)^{\frac{1}{2}}, \text{ telque } x = (x_n)_{n\geq 1}.$$

Considérons l'application $S : l_2 \to l_2$ définie pour tout $x = (x_n)_{n\geq 1}$ par $Sx = y = (y_n)_{n\geq 1}$ où

$$y_1 = 0, y_2 = x_1, \cdots, y_n = x_{n+1}, \; (n \geq 1).$$

Autrement dit Sx est la suite qui commence par 0 et qui ensuite est composée des mêmes termes que la suite x mais décalés d'un rang. L'application S est linéaire de l_2 dans lui même et c'est une isométrie puisque $\| Sx \|_{l_2} = \| x \|_{l_2}$.

Donc $S \in L(l_2)$. On appelle S l'opérateur de décalage dans l_2. On voit alors facilement que :

1. S est injective (car isométrique).
2. S n'est pas surjective.

3. S admet une inverse à gauche

$$T : x = (x_n)_{n\geq 1} \mapsto Tx = (x_{n+1})_{n\geq 1}$$

c'est l'opérateur qui «efface» la première coordonnée donc on a clairement $T \circ S = I_{l_2}$.

4. L'opérateur T n'est pas inverse à droite de l'opérateur S.

2.1.3 quelque méthode pour calculer l'inverse d'une matrice carrée

Adjoint d'une matrice

Définition 2.1.2

Soit A une matrice carrée $n \times n$ et (i, j) un couple d'entiers entre 1 et n.

On appelle mineur de A_{ij} de déterminant de la matrice $(n-1) \times (n-1)$ obtenue en supprimant la i éme ligne et la j éme colonne de A.

On note $\triangle_{ij}^{A}$ le mineur de A_{ij}.

On appelle cofacteur de A_{ij} le scalaire $(-1)^{i+j}\triangle_{ij}^{A}$.

On appelle comatrice de A notée $com(A)$ la matrice des cofacteurs de A.

Théorème 2.1.5 *Soit A une matrice carrée $n \times n$ alors :*

$$A^T.com(A) = com(A).A = (detA).I_H.$$

Ce théorème montre que A est inversible si et seulement si son déterminant est inversible c'est-à-dire non nul pour des matrices à coefficients dans un corps commutatif et

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} com^T(A).$$

Exemple 2.1.3 *Soit*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 5 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

On calcule det(A).

Si $det(A) = 0$ la matrice A n'est pas inversible.

Si $det(A) \neq 0$ la matrice A est inversible et l'on peut commencer le calcul de la matrice inverse.

Pour notre exemple $det(A) = -3$, et A est inversible.

On commence à remplir la " coquille " de la matrice inverse avec les signes alternés, l'inverse du déterminant sans oublier la transposition

$$\frac{1}{-3}\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}^T.$$

On compléte avec les mineurs pour obtenir l'inverse :

$$A^{-1} = \frac{1}{-3}\begin{pmatrix} +3 & -(-3) & +6 \\ -1 & +0 & -1 \\ +(-7) & -9 & +(-13) \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} (-1) & \frac{1}{3} & \frac{7}{3} \\ (-1) & 0 & 3 \\ (-2) & \frac{1}{3} & \frac{13}{3} \end{pmatrix}.$$

Matrices élémentaire (pivot de gauss)

Gauss a inventé une technique algorithmique sur les matrices Jordan a affiné de detterminer l'inverse d'une matrice carrée.

Cette méthode consiste par différentes manipulations sur les lignes formant la matrice, telque les termes de la diagonale principale sont tous égale à un et les autres termes sont tous nuls, et de faire subir en même temps le même processus de transformation sur la matrice identité.

Ainsi on passe de la matrice A à la matrice identité I_H et de la matrice I_H à la matrice que l'on cherche A^{-1}.

Pour ce la, il a même inventé une notation particuliére, la voici : $L_i + \alpha L_j \to L_i$ signifie qu'on multiplie la ligne L_j par le coefficient α, qu'on l'additionne à la ligne L_i et on réinjecte le tout dans L_i.

On a aussi $\alpha L_i \to L_i$ qui multiplie la ligne L_i par α et le réinjecte dans L_i, on peut aussi permuter deux lignes ainsi : $L_i \leftrightarrow L_j$: ce la peut paraitre inutile mais vous allez voir qu'il est nécessaire d'opérer ainsi pour toujours avoir un pivot non nul.

Exemple 2.1.4 *Cherchons si elle existe l'inverse de*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pour celà on adopte la notation suivante, dans la quelle on associe dans une même simili-matrice la matice A à gauche et la matrice identité I_H à droite

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Etape 1 :

$L_2 - L_1 \to L_2$

$L_3 - 2L_1 \to L_3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Etape 2 :

$L_3 + L_1 \to L_3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Etape 3 :

$\frac{-1}{4} L_3 \to L_3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ \frac{3}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{-1}{4} \end{pmatrix}.$$

Etape 4 :

$L_1 - 2L_3 \to L_1$

$L_2 + L_3 \to L_2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{-1}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{-1}{4} \end{pmatrix}.$$

Etape 5 :

$L_1 - L_2 \to L_1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-1}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{-1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{-1}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{-1}{4} \end{pmatrix}$$

La matrice inverse est donc

$$A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

2.1.4 Autre théorèmes sur l'inversibilité d'opérateur

Remarque 2.1.3 *On peut utiliser l'inversibilité d'un opérateur T pour résoudre les problèmes : équation ou système. Soit l'equation : $AX = B$, où A et B sont deux opérateurs donnés et X inconnu, si A est inversible, alors : l'equation $A^{-1}AX = A^{-1}B$, d'où $IX = A^{-1}B$, donc $X = A^{-1}B$.*

Pour résoudre le système :

$$\begin{cases} a_1x + a_2y = c_1 \\ b_1x + b_2y = c_2 \end{cases} \tag{2.1}$$

Les a_i et b_i sont donnés et le couple (x, y) est inconnu.

Le système 2.1 sera sous la forme

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

si on pose

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

alors $AX = C \Leftrightarrow$ si A inversible $\Rightarrow X = A^{-1}C$.

Exemple 2.1.5 *Soit $h \in C[0,1]$ et soit $T_h \in B(l_2[0,1])$ definit par*

$$(T_h)(t) = h(t)g(t)$$

si $f \in C[0,1]$ definit par $f(t) = 1 + t$, alors T_f est inversible.

Soit $k(t) = \frac{1}{1+t}$, alors $k \in C[0,1]$ et

$$(T_k T_{fg})(t) = (T_k f_g)(t) = k(t)f(t)g(t) = g(t),$$

$$\forall t \in [0,1] \text{ alors } (T_k T_f)g = g, \forall g \in l_2[0,1],$$

$$T_k T_f = I, \text{ et } T_f T_k = I$$

alors, T_f est inversible $T_f^{-1} = T_k$.

Lemme 2.1.1 *Soit $T \in B(H)$ est inversible alors*

$$\forall x \in H, \parallel Tx \parallel \geq \parallel T^{-1} \parallel^{-1} \parallel x \parallel .$$

Preuve. $\forall x \in H$ on a

$$\parallel x \parallel = \parallel T^{-1}(Tx) \parallel \leq \parallel T^{-1} \parallel \parallel Tx \parallel$$

alors

$$\frac{\|x\|}{\|T^{-1}\|} \leq \parallel Tx \parallel$$

donc

$$\parallel T^{-1} \parallel^{-1} \parallel x \parallel \leq \parallel Tx \parallel .$$

■

Théorème 2.1.6 *Un opérateur $T \in B(H)$ est inversible si et seulement si T^* est inversible, et alors on a*

$$(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*.$$

Preuve. Si $T \in B(H)$ est inversible alors, on a

$$T \text{ inversible} \Leftrightarrow T^{-1}T = TT^{-1} = I_H,$$

on passe à l'adjoint

$$(T^{-1})^*T^* = (TT^{-1})^* = I_H^* = I_H,$$

$$T^*(T^{-1})^* = (T^{-1}T)^* = I_H$$

d'où $T^* \in B(H)$ est inversible et

$$(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*.$$

Réciproquement, si $T^* \in B(H)$ est inversible alors l'étape précédente montre que $(T^*)^* = T \in B(H)$ est inversible. ■

Lemme 2.1.2 *Soit $T \in B(E)$ avec $\| T - I_H \| < 1$. Alors T est inversible et on a la formule suivante (dite série de Neumann) :*

$$T^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (I_H - T)^k.$$

Preuve.

On pose $S = I_H - T$, et soit $r := \| S \|$, on a $r < 1$.

Puisque $\| S^k \| \leq \| S \|^k = r^k$, la série $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \| S^k \|$ converge et donc la série $R := \sum\limits_{k=0}^{\infty} S^n$ converge.

On a

$(I_H+S+S^2+\ldots+S^n)(I_H-S) = (I_H+S+\ldots+S^n)-(S+S^2+\ldots+S^{n+1}) = I_H-S^{n+1}$.

Comme $\| S^{n+1} \| \to 0$, on a $R(I_H - S) = I_H$.

De même, on a $(I_H - S)R = I_H$. Ainsi $T = I_H - S$ est inversible et $T^{-1} = R$.

■

Corollaire 2.1.1 *Soit T_0 un opérateur inversible. Si un opérateur T vérifie*

$$\| T - T_0 \| < \| T_0^{-1} \|^{-1},$$

alors T est inversible.

Preuve. On a

$$\| T_0^{-1}T - I_H \| = T_0^{-1}(T - T_0) \| \leq \| T_0^{-1} \| . \| T - T_0 \| < 1.$$

Par le lemme précédent, $T_0^{-1}T$ est inversible. ∎

Théorème 2.1.7 *L'ensemble $GLB(H)$ des éléments inversibles de $B(H)$ est ouvert (pour la topologie induite par la norme opérateur). De plus, l'application $T \to T^{-1}$ est continue de $GLB(H)$ dans $GLB(H)$.*

Preuve.

Soit $T \in GLB(H)$ et soit $\eta = \| T^{-1} \|^{-1}$. On a $GLB(H)$ est ouvert si

$$\| T - S \| < \eta \Rightarrow S \in GLB(H).$$

Soit $\| T - S \| < \eta$, alors

$$\| (T - S)T^{-1} \| = \| I_H - ST^{-1} \| \leq \| T - S \| \| \| T \|^{-1} < \| T^{-1} \|^{-1} \| T^{-1} \| = 1.$$

d'où $I_H - (T - S)T^{-1}$ est inversible par théorème 2.1.8, donc

$$I_H - (T - S)T^{-1} = I_H - (I_H - ST^{-1}) = ST^{-1}.$$

$S = ST^{-1}T$ est inversible par conséquent par propriétés 2 de 2.1.1, alors $S \in GLB(H)$.

Montrons d'abord que $T \to T^{-1}$ est continue en I_H.

Soit (T_n) une suite convergeant vers I_H. Soit $0 < \delta < 1$ et supposons que

$$\| T_n - I_H \| \leq \delta.$$

Par le lemme précédent,

$$T_n^{-1} = (I_H - (I_H - T_n))^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (I_H - T_n)^k = I_H + \sum_{k=1}^{\infty} (I_H - T_n)^k$$

et donc

$$\| T_n^{-1} - I_H \| = \| \sum_{k=1}^{\infty} (I_H - T_n)^k \| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \| I_H - T_n \|^k \leq \tfrac{\delta}{(1-\delta)}.$$

Cette quantité peut être rendue inférieure à n'importe quel $\varepsilon > 0$ fixé en choisissant δ assez petit.

Alors

$$\| T_n - I_H \| < \delta \Rightarrow \| T_n^{-1} - I_H \| \leq \varepsilon$$

ce qui prouve la continuité voulue.

Soit $(T_n), T \in GLB(H)$. Si

$$(T_n) \text{ converge vers } T, \text{ alors } (T^{-1}T_n) \text{ converge vers } I_H.$$

Par ce qui procèdent on a,

$$(T_n^{-1}T) = ((T^{-1}T_n)^{-1}) \text{ converge vers } I_H,$$

et en multipliant à droite par T^{-1} on obtient que

$$(T_n)^{-1} \text{ converge vers } T^{-1}.$$

■

Remarque 2.1.4 *Si A et B des opérateur sont inversibles alors, $A+B$ n'est pas nécessaire inverible.*

Contre exemple

Si on prend $B = (-1)A$, donc $A + B = 0_H$ n'est pas inversible.

Théorème 2.1.8

i) Soit $T \in B(E)$ tel que $\| T \|_{B(E)} < 1$, alors $I_H - T$ est inversible, et $(I_H - T)^{-1} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} T^k$.

ii) Si T est inversible alors $T + S$ est inversible pour tout S tel que $\| S \| < \| T^{-1} \|^{-1}$, et on a

$$(T + S)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (T^{-1}S)^k T^{-1},$$
$$(T + S)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} T^{-1-k} S^k \text{ si } S \text{ et } T \text{ commutent.}$$

Preuve.

(i) *On a*

$$(I_H - T)(I_H + T + \ldots + T^n) = (I_H + T + \ldots + T^n)(I_H - T) = I_H - T^{n+1}.$$

On passe à la limite $n \to 1$ *en remarquant que*

$$S_n = I_H + T + \ldots + T^n$$

est une suite de Cauchy donc converge vers un opérateur S, *et on obtient*

$$(I_H - T)S = S(I_H - T) = I_H.$$

(ii) *On écrit* $T + S = T(I_H + T^{-1}S)$.

Comme $\| T^{-1}S \| \leq \| T^{-1} \| \| S \| < 1$, *on peut appliquer (i) à* $T^{-1}S$ *ce qui montre que* $I_H + T^{-1}S$ *est inversible et donc également* $T + S$.

■

Corollaire 2.1.2 *Soit* $T_i \in B(H)$ *pour tout* $i \geq 1$. *Si* T_i *est inversible alors* $(\sum\limits_{i\geq 1} T_i + S)$ *est inversible pour tout* S *tel que* $\| S \| < \| (\sum\limits_{i\geq 1} T_i)^{-1} \|^{-1}$, *et on a*

$$(\sum_{i\geq 1} T_i + S)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} [(\sum_{i\geq 1} T_i)^{-1} S]^k (\sum_{i\geq 1} T_i)^{-1}.$$

Preuve. *Tout d'abord, afin de prouver pour deux opérateurs :*

Soit $T, P \in B(H)$. *Si* T, P *est inversible, alors,* $(T + P + S)$ *est inversible pour tout* S *tel que*

$$\| S \| < \| (T + P)^{-1} \|^{-1}, \text{ et } \| P \| < \| T^{-1} \|^{-1},$$

et on a

$$(T + P + S)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} [(T + P)^{-1} S]^k (T + P)^{-1}.$$

En effet, on pose

$$Y = -(T + P)^{-1} S,$$

alors,

$$\| Y \| = \| (T + P)^{-1} S \| \leq \| (T + P)^{-1} \| \| S \| < 1$$

donc

$$\| (T + P)^{-1} S \| < 1,$$

et si $(T+P)^{-1}S \in B(H)$, *alors, par théorème 2.1.8 i), on a :*

$$(I-(T+P)^{-1}S)$$

est inversible, et on a

$$[I-(T+P)^{-1}S]^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty}[(T+P)^{-1}S]^k.$$

On écrit

$$(T+P+S) = (T+P)[I+(T+P)^{-1}S],$$

alors

$$(T+P+S)^{-1} = [(T+P)[I+(T+P)^{-1}S]]^{-1}$$

donc

$$[I+(T+P)^{-1}S]^{-1}(T+P)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty}[(T+P)^{-1}S]^k(T+P)^{-1}$$

alors,

$$(T+P+S)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty}[(T+P)^{-1}S]^k(T+P)^{-1}.$$

En second lieu, afin de prouver pour trois opérateurs :

soit $T, P, Q \in B(H)$. *Si* T, P, Q *est inversible, alors,* $(T+P+S+Q)$ *est inversible pour tout* S *tel que*

$$\| S \| < \| (T+P+Q)^{-1} \|^{-1},$$

et on a

$$(T+P+Q+S)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty}[(T+P+Q)^{-1}S]^k(T+P+Q)^{-1}.$$

En effet, on pose

$$Y = -(T+P+Q)^{-1}S,$$

alors,

$$\| Y \| = \| (T+P+Q)^{-1}S \| \leq \| (T+P+Q)^{-1} \| \| S \| < 1$$

donc

$$\| (T+P+Q)^{-1}S \| < 1,$$

et si $(T+P+Q)^{-1}S \in B(H)$*, alors, par théorème 2.1.8 i), on a :*

$$(I-(T+P+Q)^{-1}S)$$

est inversible, et on a

$$[I-(T+P+Q)^{-1}S]^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty}[(T+P+Q)^{-1}S]^k.$$

On écrit

$$(T+P+Q+S) = (T+P+Q)[I+(T+P+Q)^{-1}S],$$

alors

$$(T+P+Q+S)^{-1} = [(T+P+Q)[I+(T+P+Q)^{-1}S]]^{-1}$$

donc

$$[I+(T+P+Q)^{-1}S]^{-1}(T+P+Q)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty}[(T+P+Q)^{-1}S]^k(T+P+Q)^{-1}$$

alors,

$$(T+P+Q+S)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty}[(T+P+Q)^{-1}S]^k(T+P+Q)^{-1}.$$

Donc sur ce dernier on pose

$$Y = -(\sum_{i\geq 1}T_i)^{-1}S,$$

alors

$$\| Y \| = \| (\sum_{i\geq 1}T_i)^{-1}S \| \leq \| (\sum_{i\geq 1}T_i)^{-1} \| \| S \| < 1$$

donc

$$\| (\sum_{i\geq 1}T_i)^{-1}S \| < 1,$$

et si $(\sum_{i\geq 1}T_i)^{-1}S \in B(H)$*, alors, par théorème 2.1.8 i),on a :*

$$(I-(\sum_{i\geq 1}T_i)^{-1}S)$$

est inversible, et on a

$$[I - (\sum_{i\geq 1} T_i)^{-1}S]^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty}[(\sum_{i\geq 1} T_i)^{-1}S]^k.$$

On a

$$(\sum_{i\geq 1} T_i + S) = \sum_{i\geq 1} T_i[I + (\sum_{i\geq 1} T_i)^{-1}S],$$

alors

$$(\sum_{i\geq 1} T_i + S)^{-1} = [\sum_{i\geq 1} T_i[I + (\sum_{i\geq 1} T_i)^{-1}S]]^{-1}$$

donc

$$[I + (\sum_{i\geq 1} T_i)^{-1}S]^{-1}(\sum_{i\geq 1} T_i)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty}[(\sum_{i\geq 1} T_i)^{-1}S]^k(\sum_{i\geq 1} T_i)^{-1}$$

alors,

$$(\sum_{i\geq 1} T_i + S)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty}[(\sum_{i\geq 1} T_i)^{-1}S]^k(\sum_{i\geq 1} T_i)^{-1}.$$

■

Lemme 2.1.3 *Soit $T \in B(H)$, si T est infrieurment borné alors, son image $Im(T)$ est fermé.*

Preuve.

Soit $T \in B(H)$, tel que $\exists k > 0 : \| Tx \| \geq k \| x \|$;$\forall x \in H$.

Soit $y_n \in Im(T)$ $y_n = Tx_n$, tel que $y_n \to y_0$.

$$\| y_m - y_n \| = \| Tx_m - Tx_n \| = \| T(x_m - x_n) \| \geq k \| x_m - x_n \| .$$

$\{y_n\}$ est de cauchy $\Rightarrow \{x_n\}$ l'est aussi.

$\{x_n\}$ est de cauchy dans un Hilbert donc elle est convergente vers un $x_0 \in H$ on a

$$\begin{aligned} \| y_0 - Tx_0 \| &= \| y_0 - Tx_n + Tx_n - Tx_0 \| \\ &\leq \| Tx_n - y_0 \| + \| Tx_n - Tx_0 \| \\ &\leq \| y_n - y_0 \| + \| T \| \| x_n - x_0 \| \underset{n\to+\infty}{\to} 0 \end{aligned}$$

donc

$$y_0 = Tx_0 \Rightarrow y_0 \in Im(T)$$

donc $Im(T)$ est fermé, i.e $\overline{Im(T)} = Im(T)$. ■

Théorème 2.1.9 *Soit $T \in B(H)$, H est Hilbert, T est inversible si et seulement si*

i) T est inferieurement borné, (i.e. $\exists \alpha > 0 \parallel Tx \parallel \geq \alpha \parallel x \parallel \forall x \in H$).

ii) $Im(T)$ est dense dans H i.e($\overline{Im(T)} = H$).

Preuve.

On montre que

$$\text{T est inversible} \Rightarrow \overline{Im(T)} = H,$$

soit

$$y \in H \Rightarrow \exists x \in H, \text{ tel que } x = T^{-1}y,$$

alors

$$H = T = Im(T),$$

donc

$$\overline{Im(T)} = Im(T).$$

On montre que

$$\text{T est inversible} \Rightarrow T \text{ est inferieurement borné,}$$

On a

$$x = T^{-1}Tx \Rightarrow \parallel x \parallel = \parallel T^{-1}Tx \parallel, \forall x \in H$$

alors

$$\parallel x \parallel \leq \parallel T^{-1} \parallel \parallel Tx \parallel$$

d'où

$$\frac{1}{\parallel T^{-1} \parallel} \parallel x \parallel \leq \parallel Tx \parallel$$

alors

$$\exists k > 0 \ (k = \frac{1}{\| T^{-1} \|}) : \| Tx \| \geq k \| x \|, \forall x \in H$$

Donc T est inferieurement borné.

Réciproquement, si T est inversible au lieu, on a

$$H = Im(T) \subset \overline{Im(T)} \subset H.$$

Donc

$$\overline{Im(T)} = Im(T) = H,$$

($Im(T)$ est fermé dans H), ce qui donne le résultat.

Si $Tx_1 = Tx_2$, alors

$$0 = \| Tx_1 - Tx_2 \| = \| T(x_1 - x_2) \| \geq k \| x_1 - x_2 \|$$

donc

$$x_1 = x_2.$$

Alors : $\forall y \in H$, il existe unique $x \in H : y = Tx$, il existe une transformation : $S : H \to H$ tel que $Sy = x$. On a

$$\| y \| = \| Tx \| \geq c \| x \| > 0$$

alors

$$\| y \| \geq c \| Sy \| \Rightarrow \| Sy \| \leq \frac{1}{c} \| y \|$$

d'où

$$\| S \| \leq \frac{1}{c}$$

et on a

$$STx = Tx = y \ \forall y \in H$$

d'où,

$$TS = ST = I_H$$

donc, T est inversible et son inverse S.

Chapitre 3

Inverse généralisée

Dans tout le contenu, K désigne le corps des nombres réels ou complexes et les coefficients de nos opérateurs appartiennent à ce corps.

3.1 Existence de G^k-inverses

Définition 3.1.1 *Si A est un opérateur linéaire défini d'un espace vectoriel E dans un autre F de dimensions respectivement n et m, considérons A_0, un opérateur linéaire vérifiant*

$$\begin{cases} AA_0A = A \\ A_0AA_0 = A_0 \end{cases} \quad (1.2\,)\text{-}\textit{inverse de } A.$$

alors A_0 s'appelle G^1-inverse est dit aussi g-inverse réflexif ou une $(1,2)$-inverse de A.

ces propriétés, qui sont celles de l'inverse ordinaire, rendent A_0 aussi proche de l'inverse de A, ou autrement dit on est proche d'obtenir $A_0A = I_n$, l'identité dans E. Les opérateurs les plus proches de l'identité du point de vue propriétés, sont les projecteurs (l'application identique est une projection dont l'image est l'espace tout entier).

pour cela, cherchons A_0 vérifiant l'une ou les deux équations :

$$\begin{cases} A_0A = P_E \\ AA_0 = P_F \end{cases}$$

où P_E et P_F sont des projecteurs vérifiant de plus $P_FA = A$ et (ou) $P_EA_0 = A_0$.

Définition 3.1.2 *Soit A une matrice de type $m \times n$ et k un entier positif. Un G^k-inverse de A est une matrice A_0 de type $m \times n$ satisfaisant les deux équations :*

$$\begin{cases} (AA_0)^k A = A \\ (A_0A)^k A_0 = A_0 \end{cases} \quad G^k\text{-inverse de } A.$$

Définition 3.1.3 *On dit que A_0 est 1^1-inverse de A et dit aussi g-inverse ou (1)-inverse de A, s'il vérifie*

$$AA_0A = A$$

Définition 3.1.4 *On dit que A_0 est 1^k-inverse de A s'il vérifie*

$$(AA_0)^k A = A$$

Remarque 3.1.1 *Soit A_0 un 1^k-inverse de A, alors*

$$(AA_0)^{2k} = (AA_0)^k,\ (A_0A)^{2k} = (A_0A)^k$$

En effet, comme $A = (AA_0)^k A = A(A_0A)^k$, on a

$$(AA_0)^{2k} = ((AA_0)^k A)A_0(AA_0)^{k-1} = AA_0(AA_0)^{k-1} = (AA_0)^k$$

$$(A_0A)^{2k} = (A_0A)^{k-1}A_0(A(A_0A)^k) = (A_0A)^{k-1}A_0A = (A_0A)^k.$$

Lemme 3.1.1 *Toute matrice possède un G^k-inverse, qui en général, n'est pas unique.*

Preuve. Soient P et Q deux matrices inversibles telles que

$$A = Q \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P, \text{avec r le rang de A.}$$

Si on prend

$$A_0 = P^{-1} \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q^{-1},$$

avec $S^k = I_r$, alors A_0 est un G^k-inverse de A.

Prenons

$$A_0' = P^{-1} \begin{pmatrix} S & SX \\ Y & YX \end{pmatrix} Q^{-1},$$

avec X et Y des matrices non nulles, alors on obtient

$$(AA_0')^k = Q \begin{pmatrix} I_r & X \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q^{-1},$$

on multiplie par A à droit on obtient

$$(AA_0')^k A = A$$

$$(A_0'A)^k = P^{-1} \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ YS^{k-1} & 0 \end{pmatrix} P,$$

et

$$(A_0'A)^k A_0' = A_0'.$$

ce qui montre que, A_0' est un autre G^k-inverse de A. ■

3.2 Quelques exemples sur les inverses généralisées

1. Soit $M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ une matrice par blocs, alors $M_0 = \begin{pmatrix} A_0 & X \\ Y & Z \end{pmatrix}$ est une (1)-inverse de M, avec A_0 une (1)-inverse de A et X, Y et Z sont arbitraires.

   En effet, soit M_0 une (1)-inverse de M i.e il vérifie $M = MM_0M$, alors,

$$\begin{aligned} MM_0M &= \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_0 & X \\ Y & Z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AA_0 & AX \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} AA_0A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = M \end{aligned}$$

2. Si A est une matrice inversible, alors $A_0 = A^{-1}$ est le seule (1)-inverse de A.

   Cependant les G^k-inverse de A sont de la forme SA^{-1} et $A^{-1}S$ qui sont vérifiant

$$\begin{cases} (AA^{-1}S)^k A = A \\ (SA^{-1}S)^k A = A \end{cases} \Rightarrow S^k A = A.$$

   où S est une k-racine de l'unité.

3. Étant donné une matrice symétrique $A = P^t \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P$, avec P orthogonal, et $r = r(A)$, le rang de A.

   On voit aisément que $A_0 = P^t \begin{pmatrix} I_r & X \\ Y & YX \end{pmatrix}$ P, est une (1.2)-inverse de A. Pour X et Y différentes, $(A_0)^t$ est une (1.2)-inverse de A.

4. Pour une matrice inversible à droite (resp. à gauche) A, une inverse à droite (resp. à gauche) est une $\{1, 2\}$-inverse de A.

5. Soient A et A_0 satisfaisant $AA_0 = -I$. Alors A_0 est un G^2-inverse de A.

6. Considérons les matrices A et A_0 telles que $AA_0 = S$ où S une racine de l'unité d'ordre k, alors A_0 est un G^k-inverse de A.

7. Une racine de l'unité d'ordre k est un G^k-inverse de l'identité.

Remarque 3.2.1 *1. Une* (1)*-inverse (resp.* (1.2)*-inverse) est un* 1^k*-inverse*

En effet, soit A_0 *une* (1)*-inverse de A. Alors*

$$A = AA_0A = (AA_0)A,\ (AA_0) = (AA_0)^2$$

et une simple récurrence montre que $(AA_0)^kA = A$ *pour tout* $k \geq 2$

2. Si A_0 *est un* G^k*-inverse de A, alors* $(A_0)^t$ *(resp.* $(A_0)^*$ *) est un* G^k*-inverse de* A^t *(resp.* A^* *).*

En particulier, si A est symétrique (resp. auto- adjointe) et A_0 est un G^k-inverse de A, on a $(A_0)^t$ (resp.$(A_0)^*$) est un G^k-inverse de A qui, en général est différent de A_0.

3.3 Quelques types d'inverses généralisées

3.3.1 L'inverse de Moore-Penrose

Définition 3.3.1 *On appele rang de la matrice A le nombre des vecteurs linéaires independantes soit les colonnes où lignes, et l'on note $r(A)$.*

L'inverse de Moore-Penrose de la matrice A, noté A^+, est l'unique matrice X satisfaisant les équations :

$$\begin{cases} AXA = A \ (1) \\ XAX = X \ \ (2) \\ (AX)^* = AX \ (3) \\ (XA)^* = XA \ (4) \end{cases} \quad (\ 1.\ 2.3.4\ )$$

A partir de (1.2.3.4) , on déduit que :

1. *Les valeurs propres λ^+ de la matrice A^+ sont difinit par :*

$$0^+ = 0 \ et \ \lambda^+ = \frac{1}{\lambda}, \ pour \ \lambda \neq 0,$$

2. $(A^+)^+ = A$,
3. *Si A est inversible alors A^{-1} est l'inverse de Moore-Penrose de A,*
4. *AA^+ est une projection orthogonale sur $R(A)$, de noyau $N(A^+)$,*
5. *A^+A une projection orthogonale sur $R(A^+)$, de noyau $N(A)$.*

Propriétés algébriques de l'inverse de Moore-Penrose.

1. L'existence et l'unicité :

Étant donné une matrice rectangulaire A. Alors A^+ existe et unique.

L'existence : *l'existence de A^+ est assurée par la condition du lemme suivant, puisque K est le corps réel ou le domaine complexe.*

Lemme 3.3.1 *Pour toute matrice A de type $m \times n$ de rang r, il existe une matrice inversible à gauche B et une matrice inversible à droite C, de rang r telles que $A = BC$. De plus, B^tB et CC^t sont inversibles. Alors,*

$$A_0 = C^t(CC^t)^{-1}S(B^tB)^{-1}B^t,$$

où $S^k = I$, est un G^k-inverse de A.

Preuve. *Soit $\{B_1, \cdots, B_r\}$ une base de $R(A)$. Si on pose $B = [B_1, \cdots, B_r]$ une matrice colonne de type $m \times r$ de rang r, alors,*

$$\exists c_{ij} \text{ tels que } A_j = c_{1j}B_1 + \ldots + c_{rj}B_r,$$

d'où, il existe une matrice unique C constituée de c_{ij} qui est de type $r \times n$ telle que $A = BC$, et du fait que

$$min(r, n) \geq r(C) \geq r(BC) = r(A) = r,$$

on déduit que $r(C) = r$. Soit B, C des matrice tels que :

$$N(B) = N(B^tB),$$

d'où,

$$r(B) = r(B^tB),$$

En effet,

si $Bx = 0$ pour un certain x, alors $B^tBx = 0$.

Inversement, si $B^tBx = 0$, alors $x^tB^tBx = 0$, ce qui donne $Bx = 0$.

(La même chose pour la matrice C).

En outre, on a B^tB et CC^t sont des matrices carrées d'ordre r de rang r, donc inversibles. Posons,

$$A_0 = C^t(CC^t)^{-1}S(B^tB)^{-1}B^t,$$

où $S^k = I$, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
(AA_0)^k A &= \underbrace{BCC^t(CC^t)^{-1}S(B^tB)^{-1}B^t \ldots BCC^t(CC^t)^{-1}S(B^tB)^{-1}B^t}_{k facteurs}BC, \\
&= BS^kC = BC = A, \\
(A_0A)^k A_0 &= \underbrace{C^t(CC^t)^{-1}S(B^tB)^{-1}B^tBC \ldots}_{k facteurs} C^t(CC^t)^{-1}S(B^tB)^{-1}B^t \\
&= C^t(CC^t)^{-1}S(B^tB)^{-1}B^t \\
&= A_0
\end{aligned}$$

.

Ainsi A_0 est un G^k-inverse de A.

■

l'unicité : *on suppose qu'on a A_1^+, A_2^+ deux inverses de Moore-Penrose de A. On a $A^+ = A^+AA^+$ et la partie 2 de la remarque 3.2.1, on obtient*

$A_1^+ = A_1^+AA_1^+ = A_1^+(AA_1^+)^* = A_1^+(A_1^+)^*A^* = A_1^+(A_1^+)^*A^*(A_2^+)^*A^*$

$= A_1^+(AA_1^+)^*(AA_2^+)^* = A_1^+(AA_1^+)(AA_2^+) = A_1^+AA_2^+ = A_1^+AA_2^+AA_2^+$

$= (A_1^+A)^*(A_2^+A)^*A_2^+ = A^*(A_1^+)^*A^*(A_2^+)^*A_2^+ = A^*(A_2^+)^*A_2^+$

$= (A_2^+A)^*A_2^+ = (A_2^+A)A_2^+ = A_2^+.$

2. A^+A et AA^+ auto-adjoints (orthoprojecteurs) :

Les projecteurs A^+A et AA^+ sont auto-adjoints par définition de A^+.

En effet,

$$A^+A = (A^+A)^* = (AA^+(A^+A))^* = (A^+A)^*(AA^+)^* = A^+A(AA^+) = AA^+.$$

3.La régle de +-simplification :

Pour toutes matrices X et Y, si $A^+AX = A^+AY$, alors,

$$AA^+AX = AA^+AY = AX = AY.$$

4.L'inversibilité de $A^+A + \alpha I_n$, $A^+A + \alpha I_m$ pour $\alpha > 0$:

Comme A^+A (resp. AA^+) est un projecteur, alors, ses valeurs propres sont 0 ou 1.

D'autre part,

$$det(A^+A + \alpha I_n) = 0 \Leftrightarrow \alpha = -1 \text{ ou } 0.$$

Par conséquent,

$$\forall \alpha > 0, det(A^+A + \alpha I_n) \neq 0,$$

ce qui signifie que $A^+A + \alpha I_n$ (resp. $A^+A + \alpha I_m$) est inversible.

Toutefois, si A est une matrice carrée, on a

$$AA^+ - A^+A \neq I, \text{ sinon, } AA^+ = A^+A + I$$

est inversible.

D'autre part, AA^+ est un projecteur, se qui implique $AA^+ = I, A^+$ est l'inverse à droite de la matrice carrée A, ce qui exige d'être de rang maximum, et que $AA^+ = I = A^+A$. Par conséquent, nous avons $I = 2I$, ce qui est impossible.

5.Puissance d'une inverse de Moore-Penrose :

Soit A^+ l'inverse de Moore-Penrose de A. L'égalité suivante n'est pas vrai pour toutes les matrices

$$\text{pour } k > 0 \ (A^+)^k = (A^k)^+,$$

contre exemple : On considère

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ alors, } A^2 = A,$$

et on a,

$$A^+ = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ et } (A^+)^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix},$$

alors,

$$(A^2)^+ = A^+. \text{ tandis que } (A^+)^2 = \frac{1}{2}A^+.$$

6.L'adjoint de l'inverse de Moore-Penrose :

D'aprés la définition de A^+, on obtient :

$$(A^*)^+ = (A^+)^*.$$

Preuve. On a

$(A^+)^*A^*(A^+)^* = (A^+AA^+)^* = (A^+)^*,$
$A^*(A^+)^*A^* = (AA^+A)^* = A^*,$
$(A^*(A^+)^*)^* = A^+A = (A^+A)^* = A^*(A^+)^*,$
et
$((A^+)^*A^*)^* = AA^+ = (AA^+)^* = (A^+)^*A^*.$
Donc, $(A^+)^*$ est l'inverse de Moore-Penrose de A^*.

■

Relation entre l'adjoint et l'inverse de Moore-Penrose d'une matrice.

Nous pouvons utiliser l'inverse de Moore-Penrose d'une matrice symétrique pour calculer l'inverse de Moore-Penrose d'une matrice quelconque. En outre, nous avons le lemme suivant :

Lemme 3.3.2 *Étant donné une matrice A de type $m \times n$. Alors*

$$(A^*A)^+A^* = A^+ = A^*(AA^*)^+.$$

Preuve. Pour toute matrice A, on a

$$A^*A((A^*A)^+A^*)A = A^*A(A^*A)^+(A^*A) = A^*A$$

Appliquons la régle de $*$-simplfication, nous obtenons $A((A^*A)^+A^*)A = A$. En revanche,

$$((A^*A)^+A^*)A((A^*A)^+A^*) = ((A^*A)^+(A^*A)(A^*A)^+)A^* = (A^*A)^+A^*,$$

$$(A(A^*A)^+A^*)^* = A((A^*A)^+)^*A^* = A((A^*A)^*)^+A^* = A(A^*A)^+A^*.$$

De même,

$$((A^*A)^+A^*A)^* = A^*A(A^*A)^+ = (A^*A(A^*A)^+)^* = (A^*A)^+A^*A.$$

Par conséquent, nous obtenons $(A^*A)^+A^* = A^+$. De la même manière, nous pouvons prouver que $A^+ = A^*(AA^*)^+$. ■

Application 1

Soit A une matrice de forme normale de Jordan.

Le calcul de l'inverse généralisée de la matrice A est en se servant de la matrice $(A^*A)^+$,il existe alors, une matrice unitaire U telle que

$$A^*A = U^*diag(\lambda_1, ..., \lambda_n)U.$$

du lemme précédent on a

$$(A^*A)^+A^* = A^+,$$

alors,

$$(A^*A)^+A^* = (U^*diag(\lambda_1, ..., \lambda_n)U)^+A^*.$$

Donc

$$U^*diag(\lambda_1^+, ..., \lambda_n^+)UA^* = A^+,$$

où

$$\lambda_i^+ = \begin{cases} \lambda_i^{-1} \text{ si } \lambda_i \neq 0 \\ 0 \ si \ \lambda_i = 0 \end{cases} \qquad \text{pour } i = 1, ..., n.$$

En revanche, cela n'est pas vrai pour d'autres matrices. c. à. d. la forme normale de Jordan d'une matrice n'est pas conservé.

Exemple 3.3.1 *Soit*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ et \ A^+ = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

en remarque que les valeurs propres de A sont 0 et 1, tandis que celles de A^+ sont 0 et $\frac{1}{2}$.

Application 2

Dans [20] T. N. E. Greville a démontré que $(AB)^+ = B^+A^+$, si et seulement si,

$$R(A^*AB) \subset R(B) \text{ et } R(BB^*A^*) \subset R(A^*).$$

Si l'une des ces conditions n'est pas satisfaite, alors, ne peuvent pas obtenir le résultat.

Exemple 3.3.2 *Soient*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Alors,

$$A^+ = A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ B^+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A^*AB = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \ BB^*A^* = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

nous avons

$$R(A^*AB) = vect\{(2,3)\} \nsubseteq vect\{(1,1)\} = R(B).$$

En particulier,

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} = B^+A^+,$$

tandis que,

$$(AB)^+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \neq B^+A^+.$$

Théorème 3.3.1 *Soit A une matrice de dimension $m \times n$ et de rang r.*

Si $\{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ est une base de $R(A^*)$ et $\{w_1, w_2, \ldots, w_{n-r}\}$ est une base de $N(A^*)$, alors

$$A^+ = [v_1, v_2, \ldots, v_r, 0, \ldots, 0][Av_1, Av_2, \ldots, Av_r, w_1, w_2, \ldots, w_{n-r}]^{-1}$$

Preuve. En utilisons la définition de A^+, nous trouvons

$$\begin{aligned} \mathrm{A}^+[Av_1, Av_2, \ldots, Av_r, w_1, w_2, \ldots, w_{n-r}] &= [A^+Av_1, \ldots, A^+Av_r, A^+w_1, A^+w_2, \ldots, A^+w_{n-r}] \\ &= [v_1, v_2, \ldots, v_r, 0, \ldots, 0] \end{aligned} \tag{3.2}$$

Autre part,

$$\{Av_1, Av_2, \ldots, Av_r, w_1, w_2, \ldots, w_{n-r}\}$$

est une base de $\mathbb{C}^n$, donc

$$A^+ = [v_1, v_2, \ldots, v_r, 0, \ldots, 0][Av_1, Av_2, \ldots, Av_r, w_1, w_2, \ldots, w_{n-r}]^{-1}.$$

■

Application 3

Exemple 3.3.3 *Calcul de A^+. Soit*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

telque $\{(2,1,3);(0,-1,-1)\}$ *est une base de* $R(A^*)$

$$A\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\5\\2\\-1\end{pmatrix}\ et\ A\begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-4\\-1\\2\end{pmatrix}$$

donc,

$$A^+\begin{pmatrix}2\\5\\2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}\ et\ A^+\begin{pmatrix}-1\\-4\\-1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix}$$

Nous devons maintenant calculer la base de $R(A)^\perp$. *On remarque que*

$$R(A)^\perp = N(A^*).$$

On résout le système $A^*x = x$, *nous obtenons*

$$x = x_1\begin{pmatrix}1\\-\frac{1}{2}\\0\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}0\\-\frac{1}{2}\\1\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

donc,

$$A^+\begin{pmatrix}1\\-\frac{1}{2}\\0\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}=0\ et\ A^+\begin{pmatrix}0\\-\frac{1}{2}\\1\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}=0.$$

Donc,

$$A^+\begin{pmatrix}2&-1&1&0\\5&-4&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\2&-1&0&1\\-1&2&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&0&0\\1&-1&0&0\\3&-1&0&0\end{pmatrix}$$

Nous avons, $\mathbb{C}^4 = R(A)\oplus R(A)^\perp$. *Donc,*

$$A^{+} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 5 & -4 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}^{-1}.$$

3.3.2 Le groupe inverse

Définition 3.3.2 *Étant donné une matrice carrée A d'ordre n. Le groupe inverse de A notée $A^{\#}$ est la matrice carrée X, du même ordre satisfaisant les équations suivantes :*

$$\begin{cases} AXA = A \\ XAX = X \\ AX = XA \end{cases}$$

Remarque 3.3.1 *Le système précédent est équivalent à*

$$\begin{cases} A^2X = A \\ X^2A = X \\ AX = XA \end{cases}.$$

Remarque 3.3.2 *De la troisième équation, nous obtenons :*

$$R(A) = R(A^{\#}) \text{ et } N(A) = N(A^{\#}).$$

Existence et unicité

Lemme 3.3.3 *Étant donné une matrice carrée A. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. $r(A) = r(A^2)$.
2. $R(A) = R(A^2)$ *et* $N(A) = N(A^2)$
3. $R(A) \bigoplus N(A) = K^n$ *($R(A)$ et $N(A)$ sont supplémentaires).*
4. $A^{\#}$ *existe et il est unique.*

Preuve.

Évidemment, les assertions 1 et 2 sont équivalentes.

$2 \Leftrightarrow 3)$ Partons du fait que

$$r(A) + dimN(A) = n,$$

et que

$$N(A) \subset N(A^2),$$

il suffit de montrer que

$$N(A) \cap R(A) = \{0\}.$$

En raison des dimensions, si

$$r(A) = r(A^2),\text{alors } N(A) = N(A^2).$$

Pour tout $x \in N(A) \cap R(A)$, il existe y telle que $Ay = x \in N(A)$, d'où,

$$A^2y = Ax = 0, \text{ ce qui donne } y \in N(A^2) = N(A).$$

Par conséquent,

$$x = Ay = 0.$$

Inversement, on suppose que $N(A) \cap R(A) = \{0\}$, alors,

$$\text{si } x \in R(A) \text{ avec } Ax = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Il en résulte que, la restriction de A à $R(A)$ (comme endomorphisme) est un automorphisme. Donc

$$R(A^2) = A(R(A)) = R(A).$$

$2 \Leftrightarrow 4$ **L'existence** : Supposons que

$$R(A) = R(A^2),$$

alors,

$$\exists \text{ une matrice X telle que } A = A^2X.$$

Soit $A = BC$ la factorisation préservant le rang de A, et B_l et C_r les inverses à gauche et à droite de B et C respectivement, on obtient

$$A = BC = BCBCX, \text{ et}$$

$$(B_lB)(CC_r) = I = (CB)CXC_r$$

ce qui montre que (CB) est inversible. On pose

$$X = B(CB)^{-2}C.$$

On a

$$AXA = BCB(CB)^{-2}CBC = BC = A,$$

$$XAX = B((CB)^{-2}CBCB)(CB)^{-2}C = B(CB)^{-2}C = X,$$

et

$$AX = BCB(CB)^{-2}C = B(CB)^{-1}C = XA.$$

Il s'ensuit que $X = A^{\#}$. Inversement, si $A^{\#}$ existe, alors

$$A^2X = A \Leftrightarrow R(A) = R(A^2).$$

Unicité : Supposons que G_1 et G_2 sont deux groupe inverses de A, on obtient :

$$G_1 = G_1^2A = G_1^2(A^2G_2) = G_1(G_1A^2)G_2 = G_1AG_2$$

$$= G_1(A^2G_2)G_2 = (G_1A^2)G_2^2 = AG_2^2 = G_2.$$

■

Remarque 3.3.3 *Si A est idempotente, alors $A = A^{\#}$.*

En effet, $A = A^2$ implique l'existence de $A^{\#}$.

Tout d'abord de la remarque 3.3.1, on a

$$(A^{\#})^2A = A^{\#}, \text{ et } AA^{\#} = A^{\#}A,$$

donc si A est idempotente, alors

$$A^{\#} = (A^{\#})^2A = (A^{\#})^2A^2 = (A^{\#}A)^2 = (AA^{\#})^2 = A^2X^2 = A(A^{\#})^2,$$

$$A^{\#} = (A^{\#})^2A = A(A^{\#})^2,$$

nous obtenons

$$A = A^2A^{\#} = AA^{\#} = A(A(A^{\#})^2) = A^2(A^{\#})^2 = A(A^{\#})^2 = A^{\#}.$$

Quand $A^+ = A^\#$?

Définition 3.3.3 *Soit $A \in B(H)$. On dit que A est EP opérateur ou opérateur à projection égales si*

$$A^+A = AA^+.$$

Remarque 3.3.4 *Soit $A \in B(H)$. Alors A est un EP opérateur si et seulement si*

$$A^\# \text{ existe et } A^\# = A^+.$$

3.3.3 L'inverse de Drazin

Définition 3.3.4

On appele indice de la matrice carrée A et on note $ind(A)$, le plus petit entier p non négatif pour lequel $R(A^p) = R(A^{p+1})$, ($R(A)$ c'est l'espace image de la matrice A).

Remarque 3.3.5 *Si $ind(A) = p$, alors $ind(A^p) = 1$, donc $(A^p)^\#$ existe.*

Définition 3.3.5 *Soit A une matrice carrée d'indice p : L'inverse de Drazin de A est une matrice carrée notée A^D, qui satisfait les équations suivantes :*

$$\begin{cases} A^DAA^D = A^D \\ A^DA = AA^D \\ A^{p+1}A^D = A^p \end{cases}$$

Corollaire 3.3.1 *1. A^DA est un projecteur sur $R(A^D)$.*

2. $R(A^D) = R(A^p)$ et $N(A^D) = N(A^p)$.

3. Si A est inversible, alors $A^D = A^{-1}$.

4. Si $ind(A) = 1$, alors $A^D = A^\#$.

Preuve.

1. L'égalité $AA^D = A^DA$, entraîne $(A^DA)^2 = A^DAA^DA = A^DA$, donc A^DA est un projecteur sur $R(A^D)$.
2. On a $R(A^p) \subset R(A^D)$. De ce qui précédent, on a :

$$A^p(A^D)^{p+1} = (AA^D)^p A^D = A^D AA^D = A^D,$$

ce qui signifie que

$$R(A^D) \subset R(A^p).$$

D'où,

$$R(A^D) = R(A^p).$$

Maintenant, les équations :

$$A^{p+1}A^D = A^p, \text{ et } (A^D)^{p+1}A^p = A^D$$

entraînent $N(A^D) = N(A^p)$.

3. Si A est inversible, nous avons

$$R(A) = R(A^0) = R(I).$$

D'où,

$$A^D A = I = AA^D \Rightarrow A^D = A^{-1}.$$

4. Nous avons vu que si $ind(A) = 1$, alors, $A^{\#}$ existe. Ainsi, à partir des définitions du groupe inverse et l'inverse de Drazin, il suffit de prouver que $AA^D A = A$. D'aprés les deux dernières équations de la définition 3.3.5 , nous avons

$$A = A^D A^2 = A^D AA = AA^D A.$$

Proposition 3.3.1 *A^D est un inverse de A, $ind(A) = p$ alors*

$$A^p(A^D)^{p+1} = A^D.$$

Preuve. On a

$$A^p(A^D)^{p+1} = A^p(A^D)^p A^D = (AA^D)^p A^D = AA^D A^D = A^D AA^D = A^D.$$

■ L'inverse de Drazin a une représentation simple en termes de forme de Jordan :

Théorème 3.3.2 *Soit $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ une matrice de forme de Jordan*

$$A = XJX^{-1} = X \begin{pmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_0 \end{pmatrix} X^{-1}$$

où J_0 et J_1 sont les parties de J correspondant à des valeurs propres zéro et non nulles. Alors,

$$A^D = X \begin{pmatrix} J_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} X^{-1}. \ (3.3)$$

Preuve. Soit A le singulier de l'indice p (c'est-à-dire le plus grand blocK de la sous-matrice J_0 est $p \times p$). Ensuite, la matrice donnée par 3.3 est un inverse de Drazin de A satisfaisant les équations :

$$\begin{cases} A^p A^D A = A^p \\ A^D A A^D = A^D \\ A A^D = A^D A. \end{cases}$$

■

Exemple 3.3.4 *Calcul de A^D.Soit*

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & -5 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 1 & -8 & 4 \end{pmatrix}$$

a la forme de Jordan

$$A = X \begin{pmatrix} J_1(1) & & \\ & J_2(2) & \\ & & J_2(0) \end{pmatrix} X^{-1} = X \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 2 & 1 & & \\ & 0 & 2 & & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & 0 & 0 \end{pmatrix} X^{-1}$$

donc,

$$A^D = X \begin{pmatrix} (J_1(1))^{-1} & & \\ & (J_2(2))^{-1} & \\ & & 0 \end{pmatrix} X^{-1} = X \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & & \\ & 0 & \frac{1}{2} & & \\ & & & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 \end{pmatrix} X^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{7}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ \frac{1}{2} & 2 & -\frac{1}{4} & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bibliographie

[1] P. Aiena, S.Triolo, *Local spectral theory for Drazin invertible operators. J. Math. Anal. Appl.435, 414-424 (2016).*

[2] E. L. Allgower and K. Georg, *Numerical path following, Handbook of Numerical Analysis, Vol. V, North-Holland, Amsterdam, 1997, pp. 3-207.*

[3] D. Alpay, J. A. Ball, and V. Bolotnikov, *On the bitangential interpolation problem for contractive valued functions in the polydisk, J. Operator Theory 44(2000), no. 2, 277-301.*

[4] A. C. Antoulas, *Approximation of linear operators in the2-norm, Linear Algebra Appl.278(1998), no. 1-3, 309-316.*

[5] E. Arghiriade, *Sur les matrices qui sont permutables avec leur inverse généralisée, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (8)35(1963), 244-251.*

[6] G.Aubrun, *Théorie des Opérateurs, M1 Mathématiques, Université de la Réunion.*

[7] J. K. Baksalary and G. P. H. Styan, *Generalized inverses of partitioned matrices in Banachiewicz-Schur form, Linear Algebra Appl. 354(2002), 41-47, Ninth special issue on linear algebra and statistics.*

[8] S. Barnett, *Matrices in Control Theory, Van Nostrand Reinhold, London, 1971.*

[9] D. Batigne, *Integral generalized inverses of integral matrices, Linear Algebra Appl. 22(1978), 125-134.*

[10] K.H.Bellwald EPFL, *Algèbre linéaire I et II Notes de cours, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne.*

[11] A. Ben-Israel and T. N. E. Greville, *Generalized inverses, theory and applications, Springer-Verlag NewYork, Inc, (2003).*

[12] M. Boumazgour, *Drazin invertibility of upper triangular operator matrices, Lin. and Multi. Alg, 61(5) (2013), 627-634.*

[13] D. S. Cvetkovic-Ilic, *Invertible and regular completions of operator matrices, Elec. J.of Lin. Alg, 30 (2015), 530-549.*

[14] D.Djordjevic, S. Rakocevic , *Lectures on Generalized Inverses. University of Nis, Faculty of Science and Mathematics (2008).*

[15] D. S. Djordjevic, P. S. Stanimirovic, *On the generalized Drazin inverse and generalized resolvent , Czech. Math. J. 51(3) (2001), 617-634.*

[16] N, Dunford, J, Scwartz, *Linear operators, vol, 1, 2 et 3, Interscience, Newyork, 1964.*

[17] I. Erdelyi, *On the "Reverse Order Law" Related to the Generalized Inverse of Matrix Products, Journal of the Association for Computing Machinery. 13 (1966), 493-443.*

[18] E.Fricain, *Analyse fonctionelle et théorie des opérateur : cours et exercices, 2009-2010.*

[19] J.D.Fulton, *Generalized inverses of matrices over a finite field, Discrete Math. 21 (1978), 23-29.*

[20] T. N. E. Greville, *Note on the generalized inverse of a matrix product, J. Soc. Indust. Appl. Math. 9 (1966), 109-115.*

[21] M.Guesba *Sur quelques équations intégrales non linéaires, mémoire de magister.04-07-2012.*

[22] P.R.Halmos, *A Hilbert space problem book, springer verlag, 1982.*

[23] F.Hiai and D.Petz, *Introduction to Matrix Analysis and Applications, Graduate School of Information Sciences Tohoku University, Aoba-ku, Sendai, 980-8579.*

[24] R.E.Kalman, *Algebraic aspects of the generalized inverse of a rectangular matrix, Academic Press, New York (1976), 111-124.*

[25] A.Kara *Rôle des projections dans la théorie des inverses généralisés.2012.*

[26] H.Lekhoua et S.Mestour *Inverses de Drazin Propriétés et applications.2014-2015.*

[27] M. Z. Nashed, *Generalized Inverses, Theory and Applications, Academic Press, NY (1976).*

[28] M. H. Pearl, *Generalized inverses of matrices with entries taken from an arbitrary field, Linear Algebra Appl. 1 (1968), 571-587.*

[29] A.E.Taylor, D.C .Lay, *Introduction to Functional Analysis. Wiley, New York (1980).*

[30] H.Zekraoui *Les propriétés algébriques des* G^k*-inverses des matrice.*

Résumé

**Dans ce mémoire, on s'interesse aux opérateurs inverses.
J'ai commencé par la présentation de quelques préliminaires sur la théorie des opérateurs, puis, j'ai traité quelque théorèmes sur l'inversibilité d'un opérateur au sens usuel et ses propriétés.
Enfin, j'ai étudié des quelques types d'inverses généralisées: l'inverse de Moore-Penrose, le groupe inverse , et l'inverse de Drazin, et j'ai cité quelques propriétés algébriques.**

ملخص

**في هذه المذكرة تطرقنا إلى مفهوم مقلوب مؤثر.
استهلنا بالمفاهيم الأولية و المبرهنات التي تبنى عليها المؤثرات وأدرجنا أهم خصائصها ثم تطرقنا إلى مفهوم مقلوب مؤثر في حالة المحدد يختلف عن الصفر.
وفي الختام قمنا بدراسة بعض أشباه المقاليب في حالة المحدد مساوي للصفر من حيث الخصائص الجبرية واعطينا بعض الأمثلة و التطبيقات .**

Abstract

**In this mémory, I interested in the inverse operator.
I began by presenting some preliminaries on the theory of operators, also, I treated some theorems on the invertability of operators in the usual sense and its properties.
Finally, I have studied some generalized inverse types: the inverse of Moore-Penrose, the inverse group, and the inverse of Drazin, and I have cited some of its algebraic properties.**