رقم الترتيب:
رقم التسلسل:

**الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية**

**وزارة التعليم العالي والبحث العلمي**

---


**جامعة الوادي**

**كلية العلوم والتكنولوجيا**

**قسم رياضيات وإعلام آلي**


**مذكرة تخرج لنيل شهادة**

# ليسانس أكاديمي

الميدان: رياضيات وإعلام آلي

الشعبة:رياضيات

التخصص: نمذجة رياضية ومحاكاة عددية


**من إعداد الطالبات:**

سعاد كنيوة

عقيلة عطاءالله

مروة حنكة


**الموضوع**

# مدخل إلى الحساب الاحتمالي

**وتطبيقه في المالية: نموذج بلاك ـ سكولز**


**الأستاذ المؤطر**: محمد السعيد تواتي ابراهيم
**الأستاذ المناقش**: محمد بقاص
**الأستاذ المناقش**: بشير دحده


الموسم الجامعي : 2013-2014

# الفهرس

**شكر وعرفان**

**المقدمة** ..... i

**الفصل الأول:عموميات**

I- تعاريف..... 1

I.1- تعريف الفضاء الاحتمالي..... 1

I.2- الاحتمال الشرطي..... 1

I.3- تعريف المتغير العشوائي الحقيقي..... 1

I.4- أنواع المتغير العشوائي..... 2

I.4.1- المتغير العشوائي النقطي..... 2

I.4.2- المتغير العشوائي المستمر..... 2

I.5- استقلال المتغيرات العشوائية..... 2

I.6-دالة الكثافة..... 2

I.7- دالة التوزيع..... 2

I.8- القيم العددية لمتغير عشوائي..... 3

I.8.1- التوقع الرياضي..... 3

I.8.2- التباين..... 3

I.9- الدالة المميزة..... 3

I.10- قوانين المتغير العشوائي..... 4

I.11- خصائص التوزيعات..... 5

I.12- تعريف المتتالية العشوائية..... 5

I.13- متباينة بنيامي نشيبتشيف..... 5

I.14- أنواع التقاربات..... 6

I.14.1- التقارب بالاحتمال..... 6

I.14.2- التقارب بالقانون..... 7

I.14.3- التقارب شبه مؤكد..... 7

I.14.4- التقارب النظيمي من الرتبة r..... 8

I.15- العلاقة بين أنواع التقاربات..... 9

I.16- القانون الضعيف للأعداد الكبرى ..... 9

I.17- القانون القوي للأعداد الكبرى..... 9

I.8- نظرية النهاية المركزية..... 10
**الفصل الثاني:الحساب العشوائي**
II.1- مفاهيم أولية..... 11
II.1.1- تعريف الترشيح..... 11
II.1.2- الأمل الرياضي الشرطي..... 11
II.2- المارتينغال..... 11
II.2.1- تعاريف..... 12
II.2.2- المارتينغال المتقطع..... 12
II.2.3- المارتينغال المستمر..... 13
II.3- الحركة البراونية..... 14
II.4- أشكال ITô ..... 15
II.4.1- الشكل الأول لـ ITô..... 15
II.4.2- الشكل الثاني لـ ITô..... 15
II.4.3- الشكل الثالث لـ ITô ..... 16
II.5- تقسيم دوب..... 16
II.6- التكامل العشوائي..... 16
II.7- العملية العشوائية..... 17
II.8- التكامل الاحتمالي..... 17
II.9- عملية ITô ..... 19
II.10- المعادلات التفاضلية العشوائية..... 20
**الفصل الثالث: نموذج بلاك ـ سكولز**
III.1- مفاهيم أساسية..... 21
III.1.1- السوق ..... 21
III.1.2- السوق المالي..... 21
III.1.3-المشتقات المالية..... 21
III.1.4- محفظة التحوط..... 21
III.1.5- عقود الخيارات العادية..... 21
III.1.5.1- الخيار الأمريكي..... 22
III.1.5.2- الخيار الأوربي..... 22
III.1.6- الأسهم..... 22
III.1.6.1- أنواع الأسهم..... 22

III.1.6.2- خصائص الأسهم العادية..... 23
III.1.7- السندات..... 23
III.1.7.1- أنواع السندات..... 23
III.1.7.2- الفرق ما بين الأسهم والسندات..... 24
III.2- نموذج بلاك ـ سكولز..... 24
III.2.1- فروض النموذج ..... 24
III.2.2- تطوير السوق..... 24
III.2.3- معادلات نموذج بلاك ـ سكولز..... 26
III.2.4- معلمات نموذج بلاك ـ سكولز..... 27
III.2.4.1- المعلمة $\Delta$..... 27
III.2.4.2- المعلمة $\Gamma$..... 27
III.2.4.3- المعلمة $\theta$..... 27
III.2.4.4- المعلمة $\lambda$..... 27
**الخاتمة**
**قائمة المراجع**
**الملحق**
**الملخص**

# شكر و عرفان

الحمد لله الذي علّم بالقلم، علّم الإنسان ما لم يعلم، وكان فضل الله عظيما، ونسلّم على سيدنا محمد "صلّى الله عليه وسلّم" خاتم الأنبياء والمرسلين.

قال تعالى: "وَ إِذْ تَأَذّنَ رَبُكُمْ لَئِنْ شَكَرْتُمْ لَأَزِيدَنَكُمْ وَ لَئِنْ كَفَرْتُمْ إِنَّ عَذَابِي لَشَدِيدْ" إبراهيم الآية:7

و قال عليه الصلاة والسلام:"من لم يشكر الناس لم يشكر الله".

ـ نشكر الله ونحمده على إتمامنا لهذا البحث المتواضع راجين منه أن يكلّل بالنجاح والتوفيق.

كما نتقدم بأسمى عبارات الشكر والتقدير والامتنان إلى من ساهم معنا في انجاز هذا البحث، ونخص بالذكر الأستاذ المشرف:"تواتي إبراهيم محمد السعيد" على نصائحه و توجيهاته دون تقصير.

كما نتقدم بجزيل الشكر والعرفان إلى من مداّ لنا يد العون واللذان أعطيانا الانطلاقة الأولى للبدء في عملنا هذا "حنكة خليفة ـ حنكة أحمد".

كما لا ننسى شكر الزميلتين "بوعافية خديجة ـ خنوفة إيمان" اللتان لم تبخلا علينا بشيء.

كما نشكر كل من ساعدنا على البحث والكتابة من قريب و بعيد في إخراج ثمرة هذا المجهود المتواضع ونخص بالذكر "عطاءالله ثريا".

**سعاد ـ عقيلة ـ مروة**

# المقدمة العامة

ارتبط ظهور نظرية الاحتمالات بألعاب الحظ التي كانت سائدة بكثرة في أوربا في القرن 17، وتنظمها البنوك بشكل خاص، وفي القرن 19 برزت إحدى أهم عناصر نظرية الاحتمالات، وهي "التوزيع الطبيعي" وذلك لقياس نسبة الخطأ في مجال الحسابات الفلكية.

باختلاف العلوم التطبيقية وكثرة المجالات المستخدمة للرياضيات والاحتمالات بصفة خاصة، ولدت علاقة بينهما على سبيل المثال تطبيق علم الرياضيات على الجانب الاقتصادي، حيث سعى الرياضيون لسنوات عديدة للإجابة عن التساؤلات المطروحة في عالم المالية، ومن أهم هذه الانشغالات:

هل يمكن التفكير في البورصة كنموذج احتمالي؟ ولماذا يعد النموذج الاحتمالي دراسة مثالية لوضعية السوق؟.

ففي سنة 1901م قدم " Louis Bachelier " مذكرة بعنوان " Théorie de la spéculation " حملت دراسة حول هذا الموضوع، ثم عمل الكثير من المنشغلين بالاحتمالات على تشكيل نموذج قياسي، لكن وبلا أدنى شك تعتبر أعمال بلاك ـ سكولز ـ ميرتون هي أهم إجابة للتساؤلات المطروحة آنفا، فقد قدم كل من هؤلاء الثلاثة في سنة 1973م العلاقة المعروفة اليوم بأسمائهم من اجل تسعير الخيار الأوربي، هذه العلاقة ذات استعمال عملي واسع جدا خاصة في الخيارات ذات المدى القصير ومعدلات الفائدة الثابتة.

ويعتبر النموذج الرياضي الدال عن السوق المالي بسيط وفعال، وتجدر الإشارة أن ميرتون وسكولز نالا جائزة نوبل للاقتصاد في عام 1997م، في حين توفي بلاك سنة 1995م.

يعد نموذج بلاك ـ سكولز ـ ميرتون نموذجا قياسيا لتسعير الخيار الأوربي وهو النموذج الأشهر والأبسط من بين النماذج المالية المقترحة للأسواق المالية.

تجيب مذكرتنا على التساؤل المهم:

ما هو نموذج بلاك ـ سكولز؟ وما أهم فرضياته ومجالات استخدامه؟.

ولقد حاولنا الإحاطة بجميع المعلومات الممكنة عن الموضوع رغم كل الصعوبات التي واجهتنا والمتمثلة أولا و أهمها في عدم توفر المراجع باللغة العربية مما زاد صعوبة الترجمة العربية الرياضية الصحيحة، وعدم دراستنا للسلاسل الزمنية في أعوامنا السابقة التي يرتكز عليها الفصل الثاني من هذه المذكرة، وقلة الأساتذة الدارسين والملمين بالموضوع، وعدم توفر سوق مالي في الجزائر ـ بورصة ـ للدراسة التطبيقية، وبصفة عامة الموضوع بأكمله صعب ورغم كل هذا فهو جد شيق، بحيث أوضح لنا بأن الرياضيات ليست علما مجردا فقط، بل يمكن تطبيقها في الحياة العملية، ولقد سرنا بأن تكون لنا الأسبقية لطرح الموضوع باللغة العربية.

ولقد جزأنا بحثنا هذا إلى 3 فصول كالآتي:

**الفصل الأول:** قدمنا فيه نظرية الاحتمالات وبعض القيم العددية لمتغير عشوائي، وكذلك نظرية النهاية المركزية، والتقاربات وخصائصها.

**الفصل الثاني:** شمل هذا الفصل إحدى أهم العمليات المستعملة في هذا النموذج المطروح وهي عملية Ito وأشكاله الثلاث، وكذلك حركة براون، ولعبة السوق المسماة بالمارتينغال والمعادلات التفاضلية العشوائية الجزئية.

**الفصل الثالث:** تعرضنا في هذا الفصل للعنوان الأساسي والمهم لمذكرتنا ألا وهو نموذج بلاك ـ سكولز، وكذلك خصائصه وفرضياته ومثال بسيط عن كيفية تطبيقه.

# الفـــــــصل الأول

## عموميـــات

**تمهيد:**

من بين علوم الرياضيات تعتبر الاحتمالات من بين أهم العلوم التطبيقية، إن الطريقة المستخدمة لتحويل عناصر فضاء العينة للتجربة العشوائية إلى قيم عددية حقيقية وهي ما يسمى بالمتغير العشوائي، تتحكم فيه عدة قوانين وخصائص وهو ما تطرقنا إليه في هذا الفصل.

## f- تعاريف:

### 1.f- تعريف الفضاء الاحتمالي:

نسمي فضاء احتماليا الثلاثية $(\Omega, \ , P)$ حيث:

$\Omega$: مجموعة.

$\beta$: عشيرة من أجزاء $\Omega$.

$P$: قياس موجب على $\beta$ بحيث: $P(\Omega)=1$.

### 2.f- الاحتمال الشرطي:

$(\Omega, \ , P)$فضاء احتمال، $A$ حدث بحيث $P(A)\neq 0$إذا علم أن $A$ قد وقع فيمكن عندئذ الحصول على فضاء احتمالي جديد $(\Omega^*, A, P)$حيث:

$$\forall B \in \ , P_A(B)=\frac{p(A\bigcap B)}{P(A)} \qquad (1.1)$$

وعموما $P_A(B)\neq P(B)$

1. $P_A(¤)=0.$
2. $p_A(\Omega)=1.$
3. $\forall(B_n)\subset$ متناقصة مثنى مثنى. $(B_n).$

$$P_A\left(\dot{\bigcup_n} B_n\right)=\frac{p\left[A\bigcap\left(\dot{\bigcup_n} B_n\right)\right]}{p(A)}=\frac{p\left[\dot{\bigcup_n}(A\bigcap B_n)\right]}{p(A)}$$

$$=\sum_n \frac{p(A\bigcap B_n)}{p(A)}=\sum_n p_A(B_n)$$

$p_A$

هو احتمال $B$ ويسمى الاحتمال الشرطي علما أن $A$قد وقع.

### 3.f- تعريف المتغير العشوائي الحقيقي:

ليكن $(\Omega, \ , P)$ فضاء احتمال ونعتبر التطبيق:

$$X:(\Omega, \ , P)\rightarrow \ (\mathbb{R}, B_{\mathbb{R}})$$

بحيث: $X^{-1}(B_{\mathbb{R}})\subset$

إذا كان $X$ تطبيق قابل للقياس يحقق:

$$\forall B \in B_{\mathbb{R}} : X^{-1}(B) \in$$

فيسمى عندئذ $X$ متغيرا عشوائيا حقيقيا.

## f .4ـ أنواع المتغير العشوائي الحقيقي:

### f.4.1ـ المتغير العشوائي النقطي:

المتغير العشوائي الذي يأخذ عددا منتهيا أو قابلا للعد من القيم.

### f.4.2ـ المتغير العشوائي المستمر:

المتغير الذي يمكن أن يأخذ كل قيم مجال محدود أو غير محدود.

## f.5ـ استقلال المتغيرات العشوائية:

$A$ و $B$ حدثين عشوائيين مستقلين إذا كان: $P(A\bigcap B)=P(A)P(B)$

تكون المتغيرتان العشوائيتان $X$و $Y$مستقلتان إذا

$X, Y$ متقطعتان:

$$P(X=x, Y=y)=p(X=x)p(Y=y) \qquad (1.2)$$

$X, Y$ مستمرتان:

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y) \qquad (1.3)$$

## f.6ـ دالة الكثافة:

ليكن $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+$تطبيقا يحقق: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt=1$

يمكن عندئذ اعتبار $f$ ككثافة احتمال لمتغير عشوائي مستمر مطلقا.

## f.7ـ دالة التوزيع:

ليكن $X$متغير عشوائي على $(\Omega, \ , P)$ من أجل كل $t$ من $\mathbb{R}$ نضع:

$$F_X(t)=p[X<t]=p_X(]-\infty,t[) \qquad (1.4)$$

فنجد: $0\le F\le 1$

$$P_X([a,b[)=p(]-\infty,b[-]-\infty,a[)$$
$$=p(]-\infty,b[)-p(]-\infty,a[)$$

فيكون $Px$ إذا هو قياسا (لوبيغ– ستيلجيس) الموافق للتابع $F_X$يمكن التأكد من أن:

$F_X$ تابع متزايد.

$F_X$ مستمر من اليمين.

$$\lim_{x\to+\infty} F_X(t)=1 \ ، \ \lim_{x\to-\infty} F_X(t)=0$$

## 8.f ـ القيم العددية لمتغير عشوائي:

### 1.8.f ـ التوقع الرياضي:

ليكن $X$ متغير عشوائي حقيقي على $(\Omega, \ , P)$:

$$X : (\Omega, \ , \mathrm{P}) \to (\mathbb{R}, B_{\mathbb{R}}, P_X)$$

$$E(X) = \int_{\Omega} x dp = \begin{cases} \int_{\mathbb{R}} x f(x) dx & x \text{ مستمر} \\ \sum_{k} k f(k) & x \text{ منقطع} \end{cases} \qquad (1.5)$$

**خواص:**

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$
$$E(aX + b) = aE(X) + b$$

### 2.8.f ـ التباين:

ليكن $X$ متغيرا عشوائيا معرفا على $(\Omega, \ , \mathrm{P})$، نسمي تباين المتغير العشوائي $X$ المقدار الموجب الذي نرمز له بـ $\mathrm{var}(X)$، والمعرف كما يلي:

$$Var(X) = E(X - E(X))^2 \qquad (1.6)$$

**خواص:**

$$Var(aX + b) = a^2 Var(X).$$
$$Var(X) = E(X^2) - E^2(X).$$

## 9.f ـ الدالة المميزة:

الدالة المميزة لمتغير عشوائي $X$ معرفة كما يلي:

$$\forall t \in \mathbb{R} : \ddot{}_X(t) = E\left[e^{ixt}\right]$$

$$\ddot{}_X(t) = E\left(e^{ixt}\right) = \begin{cases} \int_{\mathbb{R}} e^{ixt} f(x) dx & x \text{ مستمر} \\ \sum_{k} e^{ikt} f(k) & x \text{ منقطع} \end{cases} \qquad (1.7)$$

والتي تحقق:

1. $\ddot{}_X(0) = 1$.
2. $\left|\ddot{}(t)\right| \le 1$.
3. $\lim_{x \to \pm\infty} \ddot{}_x(t) = 0$.
4. $\ddot{}_x(t)$ مستمرة على $\mathbb{R}$.

**خواص:**

إذا كانت كل من $X, Y$ مستقلتان فإن:

$$\ddot{\varphi}_{X+Y}(t) = \ddot{\varphi}_X(t)\ddot{\varphi}_Y(t).$$

إذا كان $\ddot{\varphi}_X(t) = \ddot{\varphi}_Y(t)$ فإن $X$ و $Y$ يتبعان نفس القانون.

## 10.f ـ قوانين المتغير العشوائي المتقطع:

| التوزيع | القانون | المميزات العددية |
|---|---|---|
| التوزيع الثنائي $x \to B(n,p)$ | $p(X = x) = C_n^x p^x q^{n-x}$<br>$k = 0,...,n$ | $E(X) = np$<br>$\mathrm{var}(X) = npq$<br>$\ddot{\varphi}_x(t) = \left(pe^{it} + q\right)^n$ |
| الهندسي | $p(X = x) = q^{x-1}p$<br>$n = \{1,...,+\infty\}$ | $E(X) = \frac{1}{p}$<br>$\mathrm{var}(X) = \frac{1}{p^2}$ |
| بواسون $X \to P(\alpha)$ $\alpha > 0$ | $p(X = x) = \frac{\alpha^x e^{-\alpha}}{x!}$<br>$p(X = 0) = e^{-\alpha}$<br>$p(X \geq 1) = 1 - e^{-\alpha}$<br>$x = \{0,...,+\infty\}$ | $E(x) = \alpha$<br>$\mathrm{var}(x) = \alpha$<br>$\ddot{\varphi}_X(t) = e^{\alpha\left(e^{it}-1\right)}$ |

## 11.f- خصائص التوزيعات الاحتمالية المستمرة:

| التوزيع | دالة الكثافة ، التوقع والتباين |
|---|---|
| التوزيع الطبيعي المعياري<br>$X \to N(0,1)$ | $f(z)=\frac{1}{\sqrt{2n}}e^{-\frac{z^2}{2}} \qquad -\infty < Z < +\infty$<br>$E(Z)=0, \quad Var(Z)=1$ |
| التوزيع الأسي<br>$X \to \P(\mathrm{a})$ | $f(²)=\begin{cases}\mathrm{a}e^{-\mathrm{a}²}, & ² > 0\\ 0\end{cases}$<br>$\ddot{}_x(t)=\frac{1}{\left(1-\frac{it}{\mathrm{a}}\right)}$ |
| توزيع قاما<br>$X \to \Gamma(\sim, \ )$ | $\sim > 0, \qquad > 0$<br>$\mathrm{f}(x)=\begin{cases}\frac{x^{\sim-1}e^{-\frac{x}{}}}{\tilde{}\Gamma(\sim)} & X > 0\\ 0 & X \le 0\end{cases}$<br>$\ddot{}_x(t)=(1-i \ t)^{-\tilde{}}$ |

## 12.f- تعريف المتتالية العشوائية:

نقول أن $(X_n)_{n\ge 1}$ متتالية عشوائية حقيقية على $(\Omega, \ , p)$ إذا كان كل $X_n$ متغيرا عشوائيا حقيقيا $(\Omega, \ , \mathrm{P})$ نرمز لقانون احتمال $X_n$ بـ $f_n$ ولتابع التوزيع بـ $F_n$ وللتابع المميز بـ $\varphi_n$.

## 13.f- متباينة بنيامي تشيبتشيف:

هي قانون يخص المتغيرات العشوائية المتصلة والغير المتصلة على السواء، التي تكون لها متوسط (التوقع الرياضي) والتباين محدود يستخدم هذا القانون لقياس الأقصى لاحتمال المفردات التي المسافة بينهما وبين $m$ (التوقع الرياضي) تزيد عن مقدارها $p(-£ \ge (X-m) \ge £)$ أو بعبارة أخرى :

$$\forall £ > 0 \quad p(|X-m| \ge £) \le \frac{\pm^2}{£^2}$$

## 14.f- أنواع التقاربات:

### 1.14.f- التقارب بالاحتمال: "Convergence En Probabilité"

**تعريف:**

نقول أن المتتالية ذات المتغير العشوائي $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تتقارب بالاحتمال نحو المتغير العشوائي $X$ إذا كان من أجل كل $\pounds > 0$ لدينا:

$$X_n \xrightarrow{p} X \Leftrightarrow \forall \pounds > 0, \lim_{n\to\infty} P\left(|X_n - X| > \pounds\right) = 0 \qquad (1.7)$$

$$P\left(|X_n - X| \geq \pounds\right) \to 0 \quad \text{أو} \quad \lim_{n\to\infty} P\left(|X_n - X| \geq \pounds\right) = 0$$

شرط كاف في التقارب بالاحتمال

$$\lim_{n\to+\infty} E(X_n) = C \; et \; \lim_{n\to+\infty} Var(X_n) = 0 \Rightarrow X_n \xrightarrow{P} C$$

**البرهان:**

$$P\left(|X_n - C| > \pounds\right) \leq P\left(|X_n - E(X_n)| > \frac{\pounds}{2}\right) + P\left(|E(X_n - C)| > \frac{\pounds}{2}\right)$$

$$\leq \frac{4Var(X_n)}{\pounds^2} + 1$$

$$|E(X_n) - C| > \frac{\pounds}{2} \to 0 \; \square$$

**خواص: [3]**

**الخاصية 1.1.14.1:**

لتكن $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية المتغيرات العشوائية و $X$ هو متغير عشوائي، إذا كان من أجل كل $a > 0$ لدينا:

$$E\left[|X_n - X|^a\right] < +\infty$$

$$E\left[|X_n - X|^a\right] \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \Rightarrow X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{p} X$$

**الخاصية 2.1.14.1:**

ليكن $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية متغيرات عشوائية و $X$ هو متغير عشوائي من أجل كل دالة مستمرة $h$، لدينا:

$$X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{P} X \Rightarrow h(X_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{P} h(X)$$

**الخاصية 3.1.14.1:**

ليكن $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية متغيرات عشوائية و $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ هو متغير عشوائي، $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية متغير عشوائي $X$ و $Y$ هو متغير عشوائي من أجل كل دالة عددية مستمرة $h$ من $\mathbb{R}^2$ لدينا:

$$\begin{cases} X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{p} X \\ et \\ Y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{p} Y \end{cases} \Rightarrow H(X_n, Y_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{p} H(X, Y)$$

## f.2.14ـ التقارب بالقانون: "Converge En loi"

**تعريف:** نقول أن المتتالية $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة بالقانون من أجل كل نقاط الاستمرارية $t\in\mathbb{R}$ لـ $F_x(t)$ لدينا:

$$\lim_{n\to\infty} F_n(t) = F(t) \qquad (1.8)$$

ونكتب:

$$X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{p} X \text{ أو } X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{loi} X$$
$$X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{loi} X \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} F_n(t) = F(t)$$

**نظرية بول ليفي Paul lévy: [12]**

$$X_n \xrightarrow{n} X \Leftrightarrow \forall X \in \mathbb{R}; \lim_{n\to+\infty} \ddot{}(X) = \ddot{}(X) \qquad (1.9)$$

**نظرية Portmanteau: [12]**

$$X_n \xrightarrow{loi} X \Leftrightarrow \forall g \text{ continue et bornee}.$$
$$\lim_{n\to\infty} E(g(x)) = E(g(x)) \qquad (1.10)$$

**خواص: [12]**

**نظرية3:**

$$\forall C\in\mathbb{R};\quad X_n \xrightarrow{loi} X \quad et \quad Y_n \xrightarrow{loi} C$$
$$\Rightarrow (X_n, Y_n) \xrightarrow{loi} (X, C)$$

**نظرية Slutsky:**

إذا كان:

$$\forall C\in\mathbb{R}; X_n \xrightarrow{loi} X \ et\ Y_n \xrightarrow{loi} C$$

فإن:

1. $X_n + Y_n \xrightarrow{loi} X + C$
2. $X_n Y_n \xrightarrow{loi} X.C$
3. $X_n / Y_n \xrightarrow{loi} X / C \ ; C \neq 0$

**ملاحظة:**

$$X_n \xrightarrow{loi} X \ et\ Y_n \xrightarrow{loi} Y \not\Rightarrow X_n + Y_n \xrightarrow{loi} X + Y$$

## f.3.14ـ التقارب شبه مؤكد: "Convergence presque sure"

**تعريف:**

نقول أن $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية المتغيرات العشوائية متقاربة بالتقارب شبه المؤكد نحو $X$ إذا كان:

$$P\left(\left\{\mu\in\Omega; \lim_{n\to+\infty} X_n(\mu) = X(\mu)\right\}\right) = 1 \qquad (1.11)$$

ونكتب أيضا: $X_n \xrightarrow{P.S} X \Leftrightarrow P\left(\lim_{n\to+\infty} X_n = X\right) = 1$

ويعرف بطريقة أخرى أيضا:

$$X_n \xrightarrow{p.s} X \Leftrightarrow \left\{\mu \in \Omega; \lim_{n\to+\infty} X_n(\mu) \neq X(\mu)\right\} = ¤$$

تقريبا أينما كان

**شرط كفاية للتقارب شبه مؤكد:**

$$\forall £ > 0; \sum_{n=1}^{+\infty} P\left(|X_n - X| > £\right) converge \Rightarrow \left(X_n \xrightarrow{p.s} X\right) \qquad (1.12)$$

**خواص:**

**نظرية "Borel−contelli":[1]**

$(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية متغيرات عشوائية:

$$\forall £ > 0; \sum_{n\in\mathbb{N}} P\left[|X_n - X| > £\right] < +\infty \Rightarrow X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s} X$$

**نظرية "canclry":[1]**

$(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية متغيرات عشوائية متقاربة تقارب شبه مؤكد على $\mathbb{R}$ إذا كان

$$\forall £ > 0; P\left[\sup_{p>n}\left[X_p - X_n\right] > £\right] \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \qquad (1.13)$$

## 4.14.f ـ التقارب النظيمي من الرتبة r:"Convergence En moyenne d' ordre r"

**تعريف:** ليكن $(X_n)_{n\geq 1}$ متتالية المتغيرات العشوائية على $\mathbb{R}^d$ نفرض أن $E\left(\|x_n\|^r\right) < +\infty$ من أجل كل:

$$E\left(\|X\|^r\right) < +\infty \; et \; n \geq 1$$

إذا نقول أن $(X_n)_{n\geq 1}$ متقاربة نحو $x$ في $L^r$ أو بالتقارب النظيمي ذات الرتبة r ونكتب:

$$X_n \xrightarrow{L^r} X \quad \text{أو} \quad X_n \xrightarrow{L^r} X \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} E\left(\|X_n - X\|^r\right) = 0$$

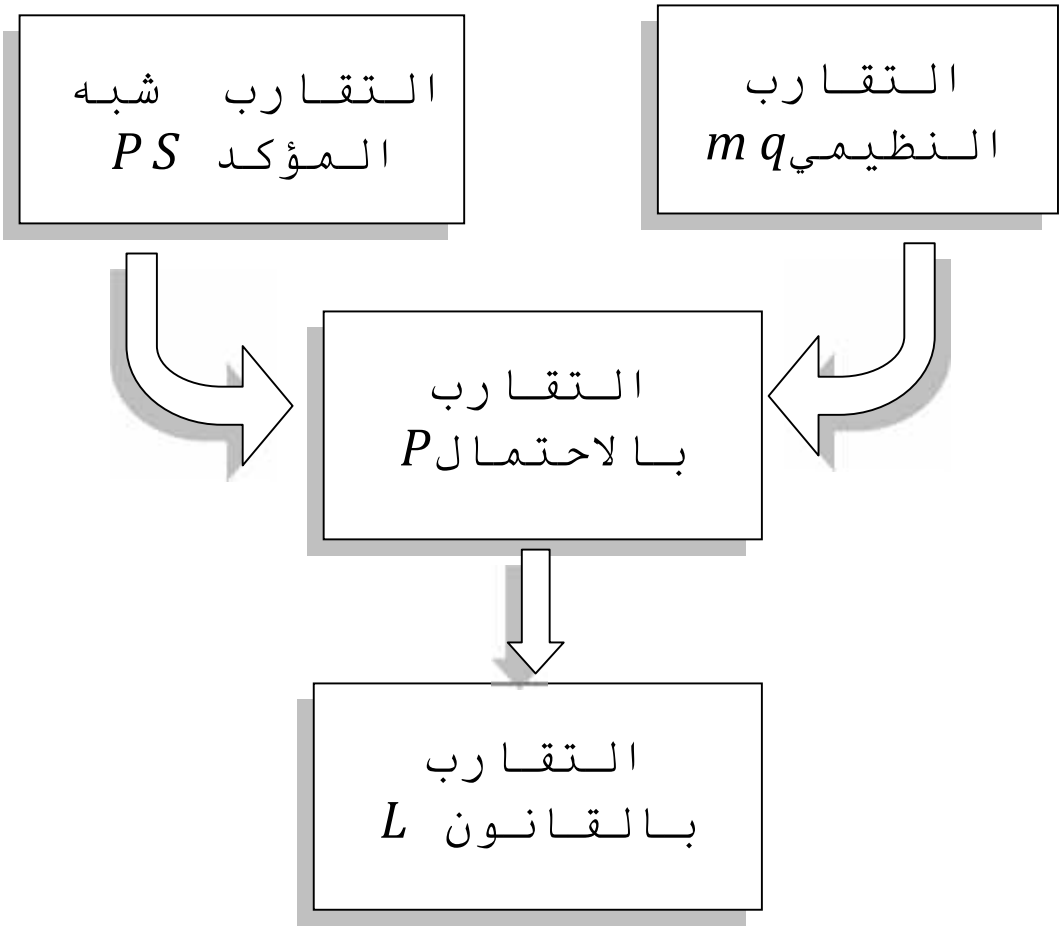
**حالة خاصة:**

إذا كان: $d = 1$ ، $(X_n)_{n\geq 1}$ هي متتالية متغيرات عشوائية حقيقية إذا:

$$X_n \xrightarrow{L^r} X \quad si \quad E\left[X^r\right] \text{Y} +\infty$$

$$E\left[|X_n - X|^r\right] \to 0$$

### 15.f ـ العلاقة بين أنواع التقاربات: [2]




### 16.f ـ القانون الضعيف للأعداد الكبرى:

لتكن $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية متغيرات عشوائية مستقلة متوسطها المشترك m.

$$Y = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$$

متقاربة بالإحتمال نحو m عندما يؤول $n$ إلى $\infty$.

### 17.f ـ القانون القوي للأعداد الكبرى:

لتكن $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$متتالية متغيرات عشوائية مستقلة لها نفس المتوسط m ونفس التباين $\sigma^2$ حينئذ:

$$\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} \xrightarrow{P.S} m \qquad (1.14)$$

لتكن $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية متغيرات عشوائية مستقلة لها نفس التوزيع متوسطهاm وتباينها $\sigma^2$.

## 18.f ـ نظرية النهاية المركزية: [3]

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$Y_n = \frac{S_n - E(s_n)}{\sqrt{Var(s_n)}}$$

حينئذ $Y \to N(0,1)$

**البرهان:**

ليكن · التابع المميز لـ $X_n - m$ و φn التابع المميز لـ $Y_n$ و

$$Var(s_n) = \frac{\pm^2}{n} \quad ; E(s_n) = mn$$

$$\cdot_n(t) = \cdot\left(\frac{t}{\pm\sqrt{n}}\right)$$

لكن $E(X_n - m) = 0$

عند القيام بالنشر المحدود من الرتبة 2 نجد:

$$\cdot\left(\frac{t}{\pm\sqrt{n}}\right) = 1 - \frac{t}{2n} + 0\left(\frac{1}{n}\right)$$

من جهة أخرى لدينا:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{x_n}{n}\right)^n = e^n$$

إذا كان $\lim_{n\to+\infty} X_n = X$ وبالتالي فإن:

$$\lim_{n\to+\infty} \cdot_n(t) = \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) \square$$

**ملاحظة:**

إذا كان المجتمع الذي نسحب منه العينة ذو متوسط $m$ وتباين $\pm^2$ لكن ليس بالضرورة طبيعيا فإن المتغيرة المعيارية لـ $m$ أي $Z = \frac{X - m}{\pm\sqrt{n}}$ تؤول إلى التوزيع الطبيعي المعياري عندما يكون $n$ كبير ونكتب: $Z \to N(0,1)$

في الحقيقة فإن النظرية محققة عندما تكون المتغيرات العشوائية المستقلة $X_1$ لها نفس المتوسط والتباين حتى ولو لم يكن لها بالضرورة نفس التوزيع مع العلم أنه توجد صيغ أخرى لهذه النظرية، حيث لا نشترط أن يكون للمتغيرات نفس التوزيع الاحتمالي ولا تكون مستقلة.

# الفصـــــــل الثـــــــــاني

## الحســـــاب العشوائـــي

**تمهيد:**

تعد المعادلات التفاضلية الاحتمالية أداة فعالة عند الرياضيين، إذ يمكن نمذجة عدة ظواهر ايكولوجية، مالية، تأمينات وغيرها وفق هذه العلاقة، وإعطاء حلول لتلك النماذج. في هذا الفصل نتناول التكامل الاحتمالي، الحركة البراونية والمعادلات التفاضلية العشوائية.

## II_1ـ مفاهيم أولية:

### II_1_1ـ تعريف الترشيح:"Filtration"

**لتكن الأسرة** $F(.)$ ( $\pm$-جبر) $\supseteq A$ **هي ترشيح بالنسبة إلى** (.) **ما إذا كان:**

$F(t) \supset F(s)$ من أجل كل $t \geq s \geq 0$.

$F(t) \supseteq W(t)$ من أجل كل $t \geq 0$.

$F(t)$ هي مستقلة عن $W(t)$ من أجل كل $t \geq 0$.

### II_1_2ـ الأمل الرياضي الشرطي: "Espérance conditionnel"

نسمي أملا ـ توقعا ـ شرطيا لـ $X$ بالنسبة لـ $F$ ونرمز له بـ $E^F(X)$

أو $E(X/F)$ الإسقاط العمودي لـ $X$ على $L^2$ أي:

$$E(X/F) = Y \qquad (p.s)$$

في حالة (X,Y) نقطي نجد أن:

$$\begin{cases} E(X/Y=j) = \sum_i i f_1(i/j) \\ E(X/Y=i) = \sum_j j f_2(j/i) \end{cases} \qquad (2.1)$$

في حالة الاستمرار فإن:

$$\begin{cases} E(X/Y) = \int X f_1(X/Y) dX \\ E(Y/X) = \int Y f_2(Y/X)\, \mathrm{dY} \end{cases} \qquad (2.2)$$

**ملاحظة:**

$$E(X) = E(E(X/\mathrm{F}))$$

### II_2ـ المارتينغال:" Martingale "

المارتينغال هو عملية تكاملية للتنبؤ الجيد بزيادة ورفع فرص الفوز انطلاقا من قيم ماضية وحاضرة مع التقيد بقوانين اللعبة.

## 1.2ff ـ تعاريف:

**تعريف1:**

$X$ عملية ذات متغيرات عشوائية $\{F_t\}_{t\geq 0}$مارتينغال (مارتينغال علوي، مارتينغال سفلي على الترتيب) إذاكان من أجل كل $t \geq 0$:

- $F_t, X_t$ قابلان للقياس.
- $X_t$ قابلة للتكامل أي: $E\left[|X_t|\right] \langle +\infty$.
- من اجل $0 \leq s \leq t$ ( $E(X_t / F_s) \geq X_s; E(X_t / F_s) \leq X_s$ ), $\mathrm{E}(\mathrm{X_t} / \mathrm{F_s}) = \mathrm{X_s}$، على الترتيب ).

**تعريف2:**

العملية $\{M_t\}_{t\geq 0}$مارتينغال (مارتينغال سفلي على الترتيب)

من أجل كل $t \geq 0$:

$M_t$قابلة للقياس بالنسبة إلى $F_t$.

$E\{|M_t|\} \langle +\infty$ أي: $M_t$قابلة للتكامل.

$\mathrm{E}(\mathrm{M_t} / \mathrm{F_s}) : M_s$ من أجل كل $s < t$ ( $E(M_t / \mathrm{F_s}) \geq M_s$ )، على الترتيب ).

**نظرية 2.1: [10]**

إذا كان $\{x_k\}_{k=1}^{+\infty}$مارتينغال جزئي إذا:

$$p(\max_{1\leq k\leq n} X_k \geq \mathsf{a}) \geq \frac{1}{\mathsf{a}} E\left[X_n^t\right] \qquad (2.3)$$

من اجل كل $n = 1.....$ ، $t \geq 0$.

إذا كان : $\{X_k\}_{k=1}^{+\infty}$مارتينغال إذا:

$$E\left[\max_{1\leq k\leq n} |x_k|^p\right] \leq (\frac{p}{p-1})^p E\left[|X_n|^p\right] \qquad (2.4)$$

## II.2.2ـ المارتينغال المتقطع:

**تعريف:**

ليكن $\{X_t\}_{k=1}^{+\infty}$متتالية ذات متغيرات عشوائية حيث:

$$E\left[|X_i|\right] < +\infty$$

إذا كان : $X_k = E\left[X_j / x_1.....x_k\right] ps; \forall j \geq k$

نقول أن $\{X_k\}_{k=1}^{+\infty}$مارتينغال متقطع .

**الحالة المتقطعة:**

نعطي ترشيحا أي عائلة من العشائر الجزئية $F_n$ المتزايدة $(F_n \subset F_{n+1})$، العشيرة $F_0$ تحوي كل المهملات.

**خاصية:**

$$E(X_{n+p}/F_n)=X_n;\forall n\in\mathbb{N};\forall p\in\mathbb{N} \qquad (2.5)$$

**مثال:**

إذا كان $X_n=Y_1+Y_2+.....+Y_n$ حيث $Y_i$ مستقلة ممركزة إذاً $X_n$مارتينغال.

### II.3.2ـ المارتينغال المستمر:

**تعريف:**

ليكن $X(.)$عملية ذات متغيرات عشوائية بحيث:

$$E\left[\left|X(t)\right|\right]<+\infty$$

من أجل كل $t<+\infty$.

إذا كان:

$$X(s)=E\left[X(t)/F^x(s)\right]ps;\forall 0\le s\le t$$

نقول أن $x(.)$هي مارتينغال.

إذا كان:

$$X(s)\le E\left[X(t)/F^x(s)\right]ps;\forall 0\le s\le t$$

نقول أن $x(.)$ هي مارتينغال جزئي.

**الحالة المستمرة:**

نعطي ترشيحا أي عائلة من العشائر الجزئية $F_n$المتزايدة بحيث: $F_s\subset F_t;\forall s\le t$.

**تعريف:**

متتالية المتغيرات العشوائية $(X_t;t\in[0,+\infty[)$مارتينغال بالنسبة للترشيح $(F_t)$إذا:

$X_t$ هي $F_t$ قابلة للقياس وقابلة للمكاملة من أجل كل $t$.

**خواص:**

إذا كان $X$ مارتينغال فإن: $E(X_t)=E(x_0);\forall t$.

إذا كان $(X;t\le T)$مارتينغال يعين $X_t$تماما بالقيمة النهائية أي $X_t=E(X_t/F_n)$ وهذه الخاصية كثيرة الاستعمال في المالية .

**حالة خاصة:**

لدينا: $E[M_t]=E[M_0]$.

إذا كان $M_t$ مارتينغال و $E[M_t]\ge E[M_s]$ من أجل $t>s$.

إذا كان $M_t$ مارتينغال علوي فإن العملية الاحتمالية لـ "وينر" هي مارتينغال لأن:

من أجل كل $Y$ قابل للقياس بالنسبة إلى $F_S$:

$$E(B_tY)=E(B_sY)+E[(B_t-B_s)Y]=E[B_sY] \qquad (2.6)$$

**مثال:**

لتكن $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$متتالية متغيرات عشوائية .

$$X_n^{'} = E(X_{t\vee n} / F_n)$$

لأن:

$$E(|X_n^{'}|) < +\infty, E(X_{n+1}^{'} / F_n) = E(E(X_{T\vee(n+1)} / F_{n+1})) = E(\prod_{T\geq n+1} \mathrm{E}(X_T / F_{n+1}) + X_{n+1} / \mathrm{F}_{T<n+1})$$

$$= \prod_{T\geq n} E(X_T / F_n) + \prod_{T<n} X_n = X_n^{'} \qquad (2.7)$$

## II.3ـ الحركة البراونية:" Mouvement Brownien "

**نبذة تاريخية:**

في سنة 1828 لاحظ العالم"Robert Browen "حركة عصيات الماء المتحركة على سطح ساكن ومع حلول 1877 أعطى "Delsowx"شرحا رياضيا لهذه الحركة أما " Louis Bachelier "نمذج الحركة إلى عملية عشوائية مستقلة وطبيعية في بحثه المعنون" نظرية المؤثرات" سنة 1900؛ أخيرا في عام 1923 قدم "وينر" دراسة كاملة عن الحركة البراونية.

**تعريف:**

نقول أن حركة براون قياسية $W_t$ من أجل كل $t \geq 0$ إذا كانت العملية العشوائية محتواة داخل فضاء احتمالي $(\Omega, F, f, \mathrm{P})$بحيث:

$\forall \mu \in \Omega : W_0(\mu) = 0$ .

$\forall 0 \leq t \leq \ldots \leq t_k$ : المتغيرات العشوائية $\mu_{t_k} - \mu_{t_{k-1}}, \ldots, \mu_{t_1} - \mu_{t_0}$ هي متغيرات مستقلة.

$\forall t, s \rangle t_k$ بحيث: $s < t$فإن المتغيرات العشوائية $\mu_t - \mu_s$ هي القانون الطبيعي متوسطة يساوي 0

و تباينه هو $Var = t - s$.

$\forall \mu \in \Omega$ : المسار $t \to W_t(\mu)$ مستمر.

**مثال 1:**

كل حركة براون هي مارتينغال.

**مثال 2:**

إذا كان W حركة براون إذا:

$$\{W_t^{\,2} - t\}_{t\geq 0} et \left\{\exp(s(w_t - \frac{s^2 t}{2}))\right\}_{t\geq 0}$$

هي مارتينغال.

## II.4ـ أشكال ITô:

### II.4.1ـ الشكل الأول لـ ITô:

نفترض أن f دالة من $C^2$ بحيث:

$$f(X_t) = f(x) + \int_0^t f'(X_s)dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)\pm_s^2 dS \qquad (2.8)$$

إذا كان $f$ دالة محدودة وقابلة للاشتقاق و ¢ محدودة فإن العملية:

$$f(X_t) - \int_0^t f'(X_s)b_s dS - \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)¢_s^2 dS \qquad (2.9)$$

هي مارتينغال، ويكتب على الشكل:

$$df(X_t) = f'(X_t)dX_t + \frac{1}{2}f''(X_t)\pm_t^2 dt \qquad (2.10)$$

يستعمل الترميز التالي:

$$df\langle X_t\rangle = f'(X_t)dX_t + \frac{1}{2}f''(X_t)dX_t \qquad (2.11)$$

ليكن جدول الضرب التالي :

| | $dt$ | $dB_t$ |
|---|---|---|
| $dt$ | 0 | 0 |
| $dB_t$ | 0 | $dt$ |

**حالة خاصة:**

إذا كان لدينا: $t \to f\langle X_t\rangle$، وكان لدينا عملية لـ ITÔ

$$\int_0^t (f(x_s)b_s + \frac{1}{2}f''(x_s)\pm_s^2)\,dS$$

والمارتينغال الجزئي:

$$\int_0^t f'(X_s)¢_s dB_s$$

وكانت المشتقات محدودة فإن:

التكامل الاحتمالي في الشكل الأول لـItô مارتينغال حقيقي ونستنتج :

### II.4.2ـ الشكل الثاني لـ ITÔ:

لتكن $f$ دالة معرفة على $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ من الصنف $C^1$ بالنسبة لـ t ومن الصنف $C^2$ بالنسبة لـ x.

$$f(t,X_s) = f(0,X_0) + \int_0^t f'(s,X_s)dS + \int_0^b f_x'(s,X_s)dX_s + \frac{1}{2}\int f''(s,X_s)\pm_s^2 dS \qquad (2.12)$$

نستطيع كتابة هذا الشكل على الشكل التفاضلي التالي:

$$df(t,x_t)=f_t'(t,x_t)+\frac{1}{2}f_{xx}''(t,x_t)\pm_t^2 dt+f'(t,x_t)dX_t=f'(t,x_t)+f_x'(t,x_t)\,dx_t+\frac{1}{2}f_{xx}''(t,x_t)d\langle x\rangle_t$$

$$=f'(t,x_t)+f_x'(t,x_t)+\frac{1}{2}f''(t,x_t)\pm_s^2 dt+f_x'(t,x_t)¢_t dB_t \qquad (2.13)$$

### II.3.4ـ الشكل الثالث لـ ITÔ:

ليكن $X^1,X^2$ عمليتين لـ **ITÔ**:

تعطى $X^1,X^2$ على الترتيب معاملي الاشتقاق $b^1,b^2$ و على الترتيب والمعاملين $¢^1,¢^2$على الترتيب خاضعين على الترتيب لعملية براون $B^1,B^2$ مرتبطتين بمعامل $°$ .

نفرض أن $F_t^{B^i},¢^i,b^i$ *–adeptés–*

*ليكن f دالة من* $\mathbb{R}^2$ *نحو* $\mathbb{R}$ من الصنف $C^2$ بمشتقات محدودة .

لدينا:

$$f(X_t^1,X_t^2)=f(x_1,x_2)+\int_0^t f_1'(X_s^1,X_s^2)dX_s^1+\int_0^t f_2'(X_s^1,X_s^2)\,dX_s^2$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^t (f_{11}''(X_s^1,X_s^1)(¢_s^1)^2+2°f_{12}''(X_s^1,X_s^2)¢_s^1¢_s^2+f_{22}''(X_s^1,X_s^2)(¢_s^2)^2)dS \qquad (2.14)$$

$f_i$يرمز إلى المشتق $x_i$.

$f_{ij}''$ يرمز إلى المشتق الثاني بالنسبة لـ $x_j$ ثم $x_i$.

شكل التكامل الجزئي:

$$X_t^1X_t^2=x_1x_2+\int X_s^t dX_s^2+\int_0^t X_s^2dX_s^1+°\int_0^t ¢_s^1¢_s^2dS$$

$$d(X^1,X^2)_t=X_t^1dX_t^2+X_t$$

### II.5ـ تقسيم دوب: "Mayer Doob"

إذا كان $M$ مارتينغال مستمر مربع قابل للمكاملة إذا $\langle M\rangle$ هي العملية الوحيدة المستمرة المتزايدة.

بحيث: $M^2-\langle M\rangle$ مارتينغال.

### II.6ـ التكامل العشوائي: "L'intégrale stochastique"

**مدخل:**

ليكن الفضاء الاحتمالي $(\Omega,F,P)$و B حركة براون لهذا الفضاء ونرمز بـ

$$F_t=¢(B_s,s<t) \qquad (2.15)$$

للترشيح الطبيعي لحركة براون.

## 7.II- العملية العشوائية: "La processus stochastique"

**تعريف:**

نعرف عملية عشوائية على فضاء $(\Omega, A, P)$ هي متتالية متغيرات عشوائية $(x_t(w), t \in \mathbb{N})$ بقيم في الفضاء الاحتمالي القياسي $(\mathbb{R}, \Sigma)$.

يمكن اعتبار العملية كمتغير عشوائي $X(t,w)$ معرفة على فضاء الجداء $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$، تتمتع بعشيرة الجداء.

## 8.II- التكامل الاحتمالي:

**تعريف:**

ليكن $n \in \mathbb{N}$ نضع $M_n = M$ هي مارتينغال في زمن متقطع معرف على فضاء احتمال $(\Omega, F, f, P)$ المتوقعة $f$ من أجل كل العمليات $x = X_n, n \in \mathbb{N}$ نعرف التكامل الاحتمالي " $X$ " بالنسبة لـ $M$ بـ:

$$\forall n \in N, \forall \mu \in \Omega : \int X_m dM_m(\mu) = \sum_{m=1}^{n} X_m(\mu) M_m(\mu) - M_{m-1}(\mu)$$

**التفسير:**

نفترض أن $M$ هي مارتينغال تمثل التطور الحالي لسهم مطروح في البورصة ولنفترض أن عدد الأسهم التي تطرح في كل لحظة متغير عشوائي $X$ الذي يمثل القيمة الحالية لثروة المستثمر في وقت $n$ خلافا لتكامل (ستيلجيس) الذي يمثل قيمة ثابتة دائما، أما $\int_{\Omega} X_m dM_m$ فهو متغير عشوائي.

نريد تعميم التكامل وتعريف $\int_0^t \bar{}_s dB_s$ من أجل العمليات العشوائية.

**أ)- حالة العمليات الدرجية :**

نقول أن العملية $\bar{}$ هي درجية إذا وجدت سلسلة من الأعداد الحقيقية $t_j$ بحيث :

$$0 < t_0 < \ldots\ldots\ldots\ldots < t_n$$

وسلسلة من المتغيرات العشوائية $\bar{}_j$.

ليكن $F_{t_j}$ قابلة للقياس في $L^2(\Omega)$ و أن $\bar{}_t = \bar{}_j$، نعرف إذا :

$$\int \bar{}_s dB_s = \sum_{j=0}^{n-1} \bar{}_j (B(t_{j+1}) - B(t_j)) \qquad (2.16)$$

ولدينا:

$$\int_0^{+\infty} \bar{}_s dB_s = E\left(\int \bar{}_s^2 ds \wedge E\left(\int_0^{+\infty} \bar{} dB_s\right)\right) = 0 \qquad (2.17)$$

نحصل على:

$$\int_0^{+\infty} \bar{}_s dB_s = \sum \bar{}_j (B(t_{j+1} \wedge t) - B(t_j \wedge t)) \qquad (2.18)$$

**ب)- الحالة العامة:**

إذا كان $\bar{}$عملية جيدة يوجد $\{\bar{}^n, n \geq 0\}$ متتالية العمليات الدرجية (أو متتالية المعادلات الدرجية) بحيث:

$$E(\int_0^t (\bar{}_s - \bar{}_s^{\,n})^2 ds) \to 0$$

لما يؤول $n$ إلى $+\infty$، نضع : $I_t(\bar{}) = \int_0^t \bar{}_s dB_s$ من أجل كل $t \geq 0$.

**خواص التكامل العشوائي:**

- $E(I_t(\bar{})) = 0, \text{var}(I_t(\bar{})) = E(\int_0^t \bar{}_s^{\,2} ds)$.

- الخطية: $I_t(a_1\bar{}^1 + a_2\bar{}^2) = a_1 I_t(\bar{}^1) + a_2 I_t(\bar{}^2)$.

**خاصية المارتينغال:**

من اجل كل عملية معرفة جيدا، $\bar{}$ العملية من $\{F^{B}{}_t\}$مارتينغال مستمر.

**خاصية:[7]**

من أجل كل $t \geq 0$ لدينا:

$$\int B_s dB_s = \frac{1}{2}B_t^2 - t \qquad (2.19)$$

**البرهان:**

لدينا بالتعريف:

$$\int_0^t B_s dB_s = \lim \sum B_{t_1}(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})$$

لدينا المساواة التالية :

$$2\sum_{i=0}^{n} B_{t_j}(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) = \sum_{i=0}^{n}(B_{t_{i+1}}^2 - B_{t_i}^2) - \sum_{i=0}^{n}(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2$$

$$\int B_s dB_s = \frac{1}{2}\left[B_t^2 - \lim \sum (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2\right] = \frac{1}{2}(B_t^2 - t) \qquad \square$$

**توطئة: [8]**

في ظل القياس $\bar{}_T$ العملية $t < T : w_t - \int_0^t \bar{}_s ds : t \to w$حركة براونية.

**نظرية: Girsanove [7]**

ليكن P و $\bar{}$ قياسين احتماليين متكافئين معرفين على فضاء الترشيح $\{F_t; t \langle T\}$، نفرض أن كل $F$ مارتينغال مستمر إذا عند P يوجد $L$، $F$ مارتينغال مستمر حيث: $\forall t \langle T : \forall A \in F_t : \bar{}[A] = E_P(e^{(L_t - \langle L \rangle_t/2)})$ فوق ذلك إذا كان $M$ مارتينغال محلي مستمر في P فإن العملية $M : t \to M - \langle M, t \rangle_t$ مارتينغال محلي مستمر في $\mathbb{Q}$.

## II.9ـ عملية ITÔ: "La processus d'Itô"

**تعريف:**

نسمي عملية ITÔ كل عملية عشوائية تكتب من الشكل :

$$X_t = x + \int_0^t b_s ds + \int_0^t ¢_s dB_s \qquad (2.20)$$

هي عملية *adapte* بحيث:

تقريب أكيد $\int_0^t |b_s| ds < +\infty$

أي بمعنى: الوجود تقريب أكيد $\int_0^t |b_s| ds$ من اجل كل $t$

العملية $t \to \int_0^t ¢ dB_s$ هي مارتينغال جزئي لـ : $x$ حيث $¢$ معامل محلي.

المعادلة (2.20) للعملية $x$ هي وحيدة في حال أن $x$ تقبل معادلة من الشكل:

$$X_t = x + \int_0^t \tilde{b_s} ds + \int_0^t \tilde{¢} dB_s$$

إذا $b = \tilde{b}$ و $¢ = \tilde{¢}$.

وفي حالة خاصة إذا $X$ من الشكل (2.20) هي مارتينغال محلي إذا وفقط إذا كان $b = 0$.

**مثال:**

برهن أن $B_t^2$ هي عملية *Ito*، إضافة إلى أن: $dB_t^2 = 2B_t dB_t + dt$

نضع : $\sum_j B_{t_j}(w) \cdot (t_j, t_{j+1})(s) = \Phi_n(s,w)$

إذا: $E\left[\int_0^t (\Phi_n - B_s)^2 ds\right] = E\left[\sum_j \int_{t_j}^{t_{j+1}} (B_j - B_s)^2 ds\right] = \sum_j \int_{t_j} t_{j+1}(s - t_j) ds = \frac{1}{2}\sum_j (t_{j+1} - t_j)^2 \xrightarrow[\Delta t \to 0]{} 0$

نستنتج إذا:

$$= \lim_{\Delta t \to 0}\left[B_{t_j}(B_{t_{j+1}} - B_{t_j})\right] \int_0^t B_s dB_s = \lim_{\Delta t \to 0} \int_0^t ¤_n dB_s$$

أو بصورة ابسط :

وبالمرور للنهاية في $L^2(P)$ نجد :

$$\int_0^t B_s dB_s = \frac{1}{2} B_t^2 - \frac{1}{2} t$$

## II.10- المعادلات التفاضلية العشوائية: "Equations différentielles stochastiques"

**تعريف:**

نقول عن معادلة أنها معادلة تفاضلية عشوائية كل معادلة من الشكل :

$$\begin{cases} dX_t = b(t \cdot X_t)dt + ¢(t + X_t)dB_t, \forall t \in [0,T] \\ X_0 = Z \end{cases} \qquad (2.21)$$

حلها يكون من الشكل الآتي :

$$X_t = x + \int_0^t b(s \cdot X_s)ds + \int_0^t ¢(s \cdot X_s)dB_s$$

بحيث $T$ عدد حقيقي موجب تماما.

و $\int_0^t ¢(s \cdot X_t)dB_s$ يمثل حركة (تغير) الأسهم خلال فترة زمنية و $\int_0^t b(s \cdot X_s)ds$ يمثل حركة السندات خلال فترة زمنية.

( $b, ¢$ هما دالتين قابلتين للقياس و $Z$ هو متغير عشوائي لا على التعيين "كيفي").

# الفصـــــل الثـــــالث

## نموذج بلاك – سكولـز

**تمهيد:**

يعتبر السوق المركز الأساسي لتبادل السلع وإجراء معاملات البيع والشراء، لذا كان مستوجبا وضع قوانين لهذه المعاملات والإجراءات ويعتبر شراء أو بيع عقود الخيار من أهم المعاملات المتداولة في السوق وتطرح بنوعين أسهم وسندات، سنتطرق لشرح كل منها في هذا الفصل والفرق بينهما، وللخروج بأقل خسارة من ميدان السوق أو رفع نسبة الأرباح وضعت عدة نماذج لإتباعها من أهمها وأبسطها نموذج بلاك – سكولز الذي اخترناه كنموذج لدراسته في هذا الفصل.

## III.1ـ مفاهيم أساسية:

### III.1.1ـ السوق:

هو مجموعة من الزبائن المحتملين الذين يشاركون في الاحتياجات أو الرغبات المحددة ولديهم الرغبة في دفع النقود لتلبية هذه الاحتياجات أو الرغبات.

### III.1.2ـ السوق المالي:

هو المكان الجغرافي الذي يلتقي فيه البائع والمشتري لأصول مالية من خلال إجراءات قانونية وإدارية، سواء كان البائع أو المشتري مستثمر أو مدخر، بحيث يحقق بينهما وسيط يساعد على تحويل المدخرات القديمة بأصول استثمارية و يتحكم في هذا النظام العرف السائد في السوق المالي وكذلك نمط العلاقة بين العرض والطلب على الأموال، لذا فإن الأسواق المالية تساعد على انتقال الأموال من الوحدات ذات الفائض إلى وحدات ذات العجز من خلال المنشآت المالية.

### III.1.3ـ المشتقات المالية:

وتضم عقود الخيارات (الأسهم، السندات، أسعار العملات ) ومقايضات أسعار الفائدة حيث تقدم كل من هذه الأدوات تغطية مختلفة للسوق وللمخاطر المحتملة.

### III.1.4ـ محفظة التحوط:

هي صندوق استثماري يستخدم سياسات وأدوات استثمارية متطورة لجني عائد السوق أو معيار ربحي معين بدون تحمل نفس مستوى المخاطر.

من الأدوات التي تستخدمها المحافظ الوقائية هي المشتقات المالية، العقود الآجلة والمقايضات، أما أمثلة عن السياسات الاستثمارية المستخدمة فهي الرفع المالي والبيع المكشوف.

### III.1.5ـ عقود الخيارات العادية:

وهي عبارة عن عقد يعطي لحامله (مشتري الخيار) خيار شراء أو بيع أوراق مالية أو أصول نقدية أو سلعية في تاريخ محدد مستقبلا بسعر يتم تحديثه وقت التعاقد، ويسمى بسعر التنفيذ مقابل علاوة نقدية تحصل عليها جهة الإصدار أو البائع ونميز نوعان:

**III.1.5.1- الخيار الأمريكي:**

يتم ممارسة حق تنفيذ الخيار في أي فترة أثناء فترة التعاقد.

**III.1.5.2- الخيار الأوروبي:**

لا يسمح لصاحبه ممارسة حق البيع أو الشراء إلا عند انتهاء تاريخ العقد.

هناك نوعان رئيسيان من عقود الخيارات: خيار الشراء وخيار البيع.

**أ/ خيار الشراء:**

هو عقد الخيار الذي يعطي للمشتري صاحب الخيار الحق وليس الالتزام في شراء الأصل في التاريخ المحدد أو قبله وبالسعر المحدد.

**ب/ خيار البيع:**

هو عقد خيار يعطي لمشتري صاحب الخيار الحق وليس الالتزام في بيع الأصل في التاريخ المحدد أو قبله وبالسعر المحدد.

**III.1.6- الأسهم:**

السهم هو سند مساهمة بشركة أموال والذي يمنح لصاحبه صفة المساهمة ويعطيه حق نسبي في تسيير مؤسسة في الأرباح المحققة.

**III.1.6.1- أنواع الأسهم:**

**أ/الأسهم العادية:**

السهم العادي صك ملكية وله ثلاث قيم اسمية وقيم دفترية وقيم سوقية فالقيمة الاسمية تتمثل في القيمة المدونة على قسيمة السهم وعادة ما يكون منصوصا عليه في عقد التأسيس والقيمة الدفترية تعادل قيمة حقوق الملكية ( الاحتياطات، الأرباح المحتجزة والأسهم العادية) مقسوما على عدد الأسهم العادية المصدرة، أما القيمة السوقية فهي القيمة التي يباع بها السهم في سوق رأس المال وقد تكون هذه القيمة أكثر أو أقل من القيمة الاسمية أو الدفترية.

و القيمة السوقية للسهم تعتبر هي التقييم الحقيقي للسهم العادي و هي تتوقف على العائد المتوقع تولده نتيجة الأرباح الرأس مالية والتوزيعات التي يحصل عليها المستثمر.

وتنقسم الأسهم العادية إلى:

- **الأسهم العادية للأقسام الإنتاجية:**

الأصل أن المنشأة الواحدة مجموعة واحدة من الأسهم العادية ترتبط فيها توزيعات الأرباح التي تحققها المنشأة ككل ولكن بعض الشركات الأمريكية أصدرت في الثمانينات أنواع أخرى من الأسهم الإنتاجية، يرتبط كل نوع منها بالأرباح التي يحققها قسم معين من الأقسام المنتجة للشركة.

- **الأسهم العادية ذات التوزيعات المخصوصة:**

الأصل أن التوزيعات التي يحصل عليها حملة الأسهم العادية لا تعتبر من الأعباء التي تخصم قبل احتساب الضريبة.

- **الأسهم العادية المضمونة:**

الأصل في السهم العادي انه ليس لحامله الحق في الرجوع على المنشأة التي أصدرت وذلك في حالة انخفاض قيمته السوقية، إلا أنه ظهر في الولايات المتحدة الأمريكية عام 1984م لأول مرة أسهما عادية تعطي لحاملها الحق في مطالبة المنشأة بالتعويض إذا انخفضت القيمة السوقية للسهم إلى حد معين خلال فترة محددة عقب الإصدار.

**ب/ الأسهم الممتازة:**

الأسهم الممتازة هي أداة مالية بين الأسهم العادية والسندات لحصولها على عائد محدد يسمى التوزيعات، وتشبه الأسهم العادية من حيث عدم المطالبة القانونية بالتوزيعات إذا لم تحقق ولكنها لا تمنع على حامل السهم الممتاز، وإنما يحصل عليها في السنوات القادمة عند تحقيق الأرباح حيث لا تستطيع الشركة إجراء التوزيعات لحملة الأسهم العادية إلا بعد إعطاء حملة الأسهم الممتازة أرباحهم المستحقة.

**خصائص الأسهم العادية:**

يتمتع السهم بمجموعة من الخصائص تميزه عن غيره من الأوراق المالية من أهمها:

**القابلية للتداول :**

توفر هذه الخاصية للسهم المرونة الكبيرة في سوق الأوراق المالية تجعل بإمكان التنازل عنها بطرق تجارية كالمداولة من يد لأخرى كما هو الحال بالنسبة للسهم الحامل لها أو المقيدة في سجل شركة كالأسهم الاسمية.

**III.7.1- السندات:**

يعرف السند بأنه يمثل جزء من قرض طويل الأجل عادة وتصدر الشركات السندات في شكل شهادة اسمية بقيمة موحدة قابلة للتداول، وتمثل السندات من ذات الإصدار حقوقا متساوية لحاملها في مواجهة الشركة وتعتبر السندات علاقة مديونية بين طرفين، الأول هو مصدر السندات وطرف المدين والثاني هو المكتسب للسندات وهو الطرف الدائن، ويترتب على ذلك حقوق والتزامات أهمها تعهد المقترض بدفعها دون النظر إلى نتيجة النشاط سواء ربحا أو خسارة، إذ أن هذه السندات تتمتع بعدة خصائص أهمها:

صكوك الديون وذات معدل فائدة ثابتة وأنها ذات أجل محدد لسداد أصل الدين (قيمة السند).

**III.7.1.1- أنواع السندات:**

وفقا للجهة المصدرة نجد سندات الدولة تصدرها عادة لتمويل الميزانية العامة. سندات العينات المحلية كالبلديات والسندات الشركات تصدرها بهدف زيادة مواردها المالية: وفقا لآجال الاستحقاق، وفقا لطريقة السداد، ووفقا لعنصر الفائدة.

**III.1.2.7ـ الفرق ما بين الأسهم والسندات:**

- السهم يمثل جزءا من رأس مال الشركة، وأما السند فتمثل جزءا من قرض على الشركة أوالحكومة.
- حامل السند يعتبر مقرضا أما حامل السهم فيعتبر مالكا لجزء من الشركة فإن السهم يعطي حامله حق التدخل في الشركة.
- السهم تتغير قيمته.
- للسند وقت محدد لسداده أما السهم فلا يسدد إلا بعد تصفية الشركة.
- السند عند الإفلاس يوزع بالحصص، أما السهم فيأخذ مالكه نصيبه بعد سداد الديون.

## III.2ـ نموذج بلاك سكولز: Black –Scholes

**تمهيد:**

يستعمل مصطلح بلاك سكولز في مجالين متقاربين:

ـ نمذجة رياضية للسوق من أجل الأسهم حيث يعتبر سعر السهم عملية عشوائية في الزمن المستمر.

ـ المعادلة التفاضلية الجزئية التي تثمن المشتقات المالية.

### III.2.1ـ فروض النموذج:

يستند النموذج على مخرجات اللحظة التالية من الوقت أي أنه نموذج لاستمرارية الوقت. وفرضيات النموذج تتكون من:

- معدل الفائدة القصيرة الأجل (خالي من المخاطرة) معلوم وثابت.
- أسعار الأسهم تتبع طريقة الانتشار المستمر أي تداول الأصل يتم بصورة مستمرة عبر الوقت.
- لا يدفع السهم أي توزيعات نقدية، أثناء الخيار أي عدم تغير الانحراف المعياري خلال عمر عقد الخيار(مخرجات محفظة المكررة هو نفسها مخرجات الخيار).
- معدل الفائدة ثابت (اقتراض أو إقراض) ويساوي معدل الفائدة الخالي من المخاطرة.
- لا توجد تكاليف شراء أو بيع خيارات أو أسهم عادية و لا توجد ضرائب.
- أسلوب الخيار أوروبي.

### III.2.2ـ تطوير السوق:

يعتبر نموذج بلاك –سكولز نموذج للسوق في الزمن المتواصل ويتكون السوق من عاملين :

- عامل بدون خطر B (سندات ، التزامات)
- عامل خطر S "مخزون"

ويفترض أن يكون العاملين "$B$" و "$S$" يتطوران حسب الحركة المحتملة بالمعادلات التفاضلية.

$$\begin{cases} dB_t = rB_t dt \\ dS_t = S_t(\alpha dt + \pm dW_t) \end{cases} \qquad (3.1)$$

مع W حركة براونية فالمعيار r يمثل النسبة المعينة للسندات B، في حين أن »و ¢ يعبران عن ميل وسيولة العامل S.

ويمكن تقديم صيغة واضحة للقيم $B_t$ و $S_t$.

وتطوير B يتبع المعادلة التفاضلية العادية حلها هو :

$$B_t = B_0 e^{rt} \qquad (3.2)$$

والتطور لـ S يتبع المعادلة التفاضلية العشوائية للحركة البراونية وكنتيجة فقيمة العامل S في الزمن t هي:

$$S_t = S_0 e^{(\pm W_t + (\alpha - \frac{\pm^2}{2})t)} \qquad (3.3)$$

أخيرا المعلومات المتوفرة في الزمن t هي:

$$F_t = ¢(S_\alpha, \alpha \le t) = ¢(W_\alpha, \alpha \le t) \qquad (3.4)$$

**توطئة1.3:**

*"خصائص مجموع الأوراق المالية الممولة ذاتيا"* [7]

مجموع الأوراق المالية تسمى ممولة ذاتيا إذا وفقط إذا كانت قيمتها المتجددة $X_t^{®}$ تحقق:

$$Y_t d\tilde{s}_t = d\tilde{x}_t^{®} \qquad (3.5)$$

$$e^{-rt} st = \tilde{S}_t \qquad (3.6)$$

مع

**البرهان:**

حسب الصيغة

$$d\tilde{X}_t^{®} = -re^{-rt} X_t^{®} dt + e^{-rt} X_t^{®} dt + e^{-rt} dX_t^{®}$$

فمجموع الأوراق هو إذا ممول ذاتيا إذا وفقط.

$$\begin{aligned} d\tilde{X}_t^{®} &= -r(B_t e^{-rt} B_t + Y_t e^{-rt} S_t)dt + e^{-rt}(B_t dB_t + Y_t dS_t) \\ &= \underbrace{B_t e^{-rt}(-rB_t dt + dB_t)}_{=0} + \underbrace{Y_t(-re^{-rt} S_t dt + e^{-rt} dS_t)}_{=d\tilde{S}_t} \end{aligned}$$

**توطئة2.3:** [6]

احتمال $P^*$ يعرف بـ :

$$P^*(A) = E(Z_T 1_A), avec \quad Z_T = \exp\left(-\left(\frac{\alpha - r}{\pm}\right)W_T - \left(\frac{\alpha - r}{\pm}\right)^2 \frac{T}{2}\right)$$

وهي عبارة عن احتمال خطر حيادي للنموذج بلاك–سكولز

**توطئة3.3:** [6]

القيمة المتجددة $(\tilde{X}_t^{®})_{t \le T}$ هي مجموع أوراق مالية للتغطية الممولة ذاتيا وتكون مارتينغال جزئي $P^*$.

**3.2.fff ـ معادلات نموذج بلاك–سكولز:**

إن ثمن الخيار الأوربي لزمن الاستحقاق $T$ للدالة $g(S_t)$ هي:

$$c = E^*(e^{-rt} g(S_T)) = G(0, S_0) \qquad (3.7)$$

أي تعرف الدالة G بـ:

$$G(t,x) = e^{-r(T-t)} \int_{-\infty}^{+\infty} g(xe^{(r-\pm^2/2)(T-t)+\pm y}) \exp\left(\frac{-y^2}{2(T-t)}\right) \frac{dy}{\sqrt{2®(T-t)}} \qquad (3.8)$$

ونعرف مجموع الأوراق المالية $^*®$ بـ :

$$¥_t^* = \frac{\partial G}{\partial x}(t, S_t) \quad et \quad {}_t^* = \frac{G(t,S_t) - ¥_t^* S_t}{B_t} \qquad (3.9)$$

وهي حقيقة (مجموع الأوراق المالية) للتغطية الممولة ذاتيا بقيمة ابتدائية C وقيمتها في الزمن t هي:

$$X_t^{®^*} = e^{-r(T-t)} E^*(g(S_T)/F_t) = G(t, S_t) \qquad (3.10)$$

يتبع الخيار العملية التالية:

$$ds = «sdt + \pm sdZ \qquad (3.11)$$

إذا كان $f$ سعر الخيار تطبق توطئة *Itô* للبرهنة أن $f$ يتبع:

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial s} «s + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial s^2} \pm^2 s^2\right) dt + \frac{\partial f}{\partial s} \pm dZ \qquad (3.12)$$

يتبع الطابع المتقطع للمعادلات وهو:

$$\Delta s = «s\Delta t + \pm s\Delta z$$

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial s} «s + «s\Delta t + \pm s\Delta z$$

حيث $\Delta z$ عملية وينر.

وتكتب المعادلة التفاضلية لبلاك سكولز على الشكل :

$$dX_t = \sim(X_t, Y_t, t)dt + ³(X_t, Y_t, t)¦(Y_t, t)dW_t \qquad (3.13)$$

**قضية 3.1: [6]**

سعر الشراء للخيار الأوربي لنموذج بلاك–سكولز لزمن الاستحقاق T وسعر التنفيذ k هو:

$$C = S_0 N(d_1) - Ke^{-rT} N(d_2) \qquad (3.14)$$

$$N(x) = \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} \frac{dt}{\sqrt{2®}} \qquad (3.15)$$

مع

$$d_1 = \frac{\ln(S_0/K) + T\left(r + \frac{\pm^2}{2}\right)}{\pm\sqrt{T}}$$

و

$$d_2 = d_1 - \pm\sqrt{T}$$

و $S_0$ سعر السهم ، r معدل الفائدة الخالي من المخاطرة.

### III.4.2ـ معلمات نموذج بلاك – سكولز:

#### III.4.2.1ـ المعلمة Δ:

تصف Δ مدى حساسية سعر الخيار من التغير في سعر الأصل الموجود وبما أن علاوات الخيار لم تتحرك كثير كتحرك أسعار الأصول (العقود الآجلة)، فتكون Δاقل من 1بالقيمة المطلقة، مع أنها قد تكون موجبة (في حالة خيار الشراء)أو سالبة (في حالة خيار البيع) تمثل Δأحيانا بنسب مئوية من 0% (للخيارات خارج النقود بعمق) إلى 100% (للخيارات في النفوذ بعمق) بالنسبة لـ Δ الخيارات التي عند النقود تكون عادة 50% تسمى أيضا نسبة التحوط ،تساعد قيمة Δالخيار في توقع النسبة النظرية لتغير سعر الخيار من تغير بسيط لسعر العقد الآجل. لا تبقى Δ وقد تتغير عند كل تغير في سعر العقد الآجل.

$$\Delta c = \frac{\partial C}{\partial F} = N(\mathrm{d}_1)$$

$$\Delta p = \frac{\partial P}{\partial F} = N(\mathrm{d}_1) - 1 \qquad (3.16)$$

#### III.4.2.2ـ المعلمة Γ:

نظريا Δخيارات الشراء وخيارات البيع ليست ثابتة، بما أن سعر العقد الآجل يتغير، فالمعلمة Δ تتغير أيضا. التغير في قيمة Δ المتعلق بالتغير في سعر العقد الآجل يسمى بـ Γ كمثال:

إذا كانت Δخيار 0,4و Γ 0,05، إذا ارتفع سعر العقد الآجل بـ 1دولار ترتفع Δ إلى 0,45 يعني 0,4+0,05 وتسمى أيضا تقوس الخيار، تعطي Γ مركز خيار الإشارة إلى ما مدى صعوبة مركز الخيار للتحوط في سوق السلع الآجلة .

$$\Gamma = \pm\,{}^{2}cv\,\frac{\partial^{2p}}{\partial F^{2}} = e^{-\frac{d_1^2}{2}}\,(F \pm \sqrt{2\circledR}\,\mathrm{T}) \qquad (3.17)$$

#### III.4.2.3ـ المعلمة $^{-}$:

هي مقدار تغير علاوة الخيار المتعلق بتغير زمن الانقضاء ليوم، تسمى أيضا بإهلاك الزمن، وتتوقع وتحدد المعدل النظري لزمن الإهلاك للقيمة الزمنية لخيار شراء أو بيع يعبر عنها بقيمة دولار، وتكون رقما سالبا عرفيا، معدل إهلاك الزمن ليس عملية خطية لأنه يزيد كلما اقترب الانقضاء.

$$^{-}c = \frac{\partial c}{\partial T}$$

$$^{-} = \frac{p \pm e^{-\frac{d_1^2}{2}}}{2\sqrt{2\circledR T}} - R_F\,E e^{-R_p N(\mathrm{d})} \qquad (3.18)$$

#### III.4.2.4ـ المعلمة $^{a}$:

هي مقدار حساسية أسعار الخيارات من مدى التقلب في السوق، وهو التغير في علاوة الخيار المربوط بتغير 1%من مدى تقلب سعر العقود الآجلة .

تكون $^{a}$مراكز الشراء موجبة بينما $^{a}$مراكز البيع سالبة، وتعتبر $^{a}$ أيضا أداة زمنية، كلما كان الزمن المتبقي للانقضاء طويلا كانت $^{a}$ أكبر و بالمقابل كلما قصر زمن الانقضاء، كانت $^{a}$ أصغر.

$$^{a} = \pm cv \underbrace{\frac{\partial p}{\partial \Gamma}}_{\nearrow} \qquad (3.19)$$

نسبة التقلب بمعنى الموجود.

**مثال:**

نفرض أن سعر السهم في شركة خاصة هو 415 دج، والمطلوب تقييم خيار الشراء لهذا السهم المستحق في سبتمبر، وذلك بالنسبة لسعر التنفيذ تبلغ 400 دج علما أن الانحراف المعياري على السهم 25% ومعدل الفائدة الخالي من المخاطرة هو 7% وعدد الأيام التي تسبق الاستحقاق 45 يوما.

**الحل:**

$$d_1 = \frac{\ln(\frac{415}{400}) + (0,0676 \times \frac{1}{2}) \times (0,29)^2 \times \frac{45}{365}}{0,25\sqrt{\frac{45}{365}}} = 0,558$$

بقراءة الجدول التوزيع الطبيعي القياسي نجد : 71,2%

$$d_2 = d_1 - \pm\sqrt{t} = 0,558 - 0,25\sqrt{\frac{45}{365}} = 0,470$$

فنجد أن: 68,1%

حسب معادلة بلاك–سكولز

$$c = (415 \times 0,712) - 400(e^{-0,0766 \times \frac{45}{365}})0,681 = 25,21$$

أي أن القيمة 25,2 دج.

# الخاتمة

لقد استخلصنا من هذه المذكرة أهمية وضع قوانين ونماذج للسوق بحيث تعطي للمستثمر أو المساهم في أي شركة رؤية مسبقة لمدى احتمال ربحه أو خسارته، وما هي إمكانية مخاطرته، وهذا ما جسداه بلاك ـ سكولز في نموذجيهما حيث رأيا أن السهم ما هو إلا عبارة عن متغير عشوائي أي أن حركته غير ثابتة، وهذا النموذج يعتبر الأحسن، إذ أنه مطبق في جميع الأسواق الغربية وهو يستعمل الخيار الأوربي (العقود قصيرة المدة)، ويعطي للمستثمر إيحاءات وتنبؤات للربح أو الخسارة. تعرفنا كذلك على محفظة التحوط التي تعد المنقذ في الأزمات الاقتصادية، لكن كغيره من النماذج يبقى لديه بعض النقائص حيث أنه لا يستطيع إعطاء قيمة محددة لتباين وتشتت سعر السهم ويستعمل في العقود قصيرة الأجل.

أثناء بحثنا هذا ازددنا شوقا للغوص في الموضوع أكثر وقد طرأ في تفكيرنا أن نواصل عنه في رسالة الماستر مستقبلا إن كان في العمر بقية.

# المراجع

**المراجع باللغة العربية:**


**[1] أبو عبد الله صالح،** مدخل إلى الاحتمالات والإحصاء الرياضيات.

**[2] جان بول ماندري،** تعريب: **سعد الله،** الاحتمالات، المدرسة العليا للأساتذة القبة الجزائر ديوان المطبوعات الجامعية الجزائر 1986.

**[3] حاكم قصد علي سهام،** الاحتمالات والإحصاء المدرسة العليا للأساتذة القبة البشير الإبراهيمي .2007-2008.

**[4] عبد الحفيظ مصطفى،** نظرية الاحتمالات (مبادئ وتطبيقات الجزء الثاني) ديوان المطبوعات الجامعية 11-2008.

x5z **محمد عبده محمد مصطفى،** تقسيم الشركات والأوراق المالية لأغراض التعامل في البورصة ـ الطبعة الأولى ـ دار الجامعة الإسكندرية ـ1998.


**المراجع باللغة الأجنبية:**


x6z**Christophe Giraud,** Martingale pour la finance(un 'introduction aux mathématique financières ) l'université de Nice-Sophia 2006.

x7z **Frank-E-Beichelt,** Stochastic processes in scince engineering and finance, clapman&hall.2006.

x8z fill:///E/20 %:/ Modèle%20 Black-Scholes%20-%20wikipèdia-htm

x9z**George Papanielaon K.Ronnie Sirear,** General Black-scholes modeles accounting for increased, market volaedtilty from hedging strategies, revised appril1997.

x10z **Monique jeanblanc,Thomas Simon,** élément de calcul stochastique IRBID-septembre 2005.

**[11] Nies Beglund**, Introduction alun équations différentielles stochastiques janvier 2005.

x12z**Thierry Gallonet, Raphaèle Herbin**, Mesure, integration, probabilites, 13 october2013.

# الملحـــــــــــــق

جدول التوزيع الطبيعي:

$$\Phi(x) = \mathbb{P}(X \leq x) \text{ où } X \sim \mathcal{N}(0,1) \text{ et } x = x_1 + x_2$$

| $x_1$ | $x_2$ 0.00 | 0.01 | 0.02 | 0.03 | 0.04 | 0.05 | 0.06 | 0.07 | 0.08 | 0.09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.00 | 0.5000 | 0.5040 | 0.5080 | 0.5120 | 0.5160 | 0.5199 | 0.5239 | 0.5279 | 0.5319 | 0.5359 |
| 0.10 | 0.5398 | 0.5438 | 0.5478 | 0.5517 | 0.5557 | 0.5596 | 0.5636 | 0.5675 | 0.5714 | 0.5753 |
| 0.20 | 0.5793 | 0.5832 | 0.5871 | 0.5910 | 0.5948 | 0.5987 | 0.6026 | 0.6064 | 0.6103 | 0.6141 |
| 0.30 | 0.6179 | 0.6217 | 0.6255 | 0.6293 | 0.6331 | 0.6368 | 0.6406 | 0.6443 | 0.6480 | 0.6517 |
| 0.40 | 0.6554 | 0.6591 | 0.6628 | 0.6664 | 0.6700 | 0.6736 | 0.6772 | 0.6808 | 0.6844 | 0.6879 |
| 0.50 | 0.6915 | 0.6950 | 0.6985 | 0.7019 | 0.7054 | 0.7088 | 0.7123 | 0.7157 | 0.7190 | 0.7224 |
| 0.60 | 0.7257 | 0.7291 | 0.7324 | 0.7357 | 0.7389 | 0.7422 | 0.7454 | 0.7486 | 0.7517 | 0.7549 |
| 0.70 | 0.7580 | 0.7611 | 0.7642 | 0.7673 | 0.7704 | 0.7734 | 0.7764 | 0.7794 | 0.7823 | 0.7852 |
| 0.80 | 0.7881 | 0.7910 | 0.7939 | 0.7967 | 0.7995 | 0.8023 | 0.8051 | 0.8078 | 0.8106 | 0.8133 |
| 0.90 | 0.8159 | 0.8186 | 0.8212 | 0.8238 | 0.8264 | 0.8289 | 0.8315 | 0.8340 | 0.8365 | 0.8389 |
| 1.00 | 0.8413 | 0.8438 | 0.8461 | 0.8485 | 0.8508 | 0.8531 | 0.8554 | 0.8577 | 0.8599 | 0.8621 |
| 1.10 | 0.8643 | 0.8665 | 0.8686 | 0.8708 | 0.8729 | 0.8749 | 0.8770 | 0.8790 | 0.8810 | 0.8830 |
| 1.20 | 0.8849 | 0.8869 | 0.8888 | 0.8907 | 0.8925 | 0.8944 | 0.8962 | 0.8980 | 0.8997 | 0.9015 |
| 1.30 | 0.9032 | 0.9049 | 0.9066 | 0.9082 | 0.9099 | 0.9115 | 0.9131 | 0.9147 | 0.9162 | 0.9177 |
| 1.40 | 0.9192 | 0.9207 | 0.9222 | 0.9236 | 0.9251 | 0.9265 | 0.9279 | 0.9292 | 0.9306 | 0.9319 |
| 1.50 | 0.9332 | 0.9345 | 0.9357 | 0.9370 | 0.9382 | 0.9394 | 0.9406 | 0.9418 | 0.9429 | 0.9441 |
| 1.60 | 0.9452 | 0.9463 | 0.9474 | 0.9484 | 0.9495 | 0.9505 | 0.9515 | 0.9525 | 0.9535 | 0.9545 |
| 1.70 | 0.9554 | 0.9564 | 0.9573 | 0.9582 | 0.9591 | 0.9599 | 0.9608 | 0.9616 | 0.9625 | 0.9633 |
| 1.80 | 0.9641 | 0.9649 | 0.9656 | 0.9664 | 0.9671 | 0.9678 | 0.9686 | 0.9693 | 0.9699 | 0.9706 |
| 1.90 | 0.9713 | 0.9719 | 0.9726 | 0.9732 | 0.9738 | 0.9744 | 0.9750 | 0.9756 | 0.9761 | 0.9767 |
| 2.00 | 0.9772 | 0.9778 | 0.9783 | 0.9788 | 0.9793 | 0.9798 | 0.9803 | 0.9808 | 0.9812 | 0.9817 |
| 2.10 | 0.9821 | 0.9826 | 0.9830 | 0.9834 | 0.9838 | 0.9842 | 0.9846 | 0.9850 | 0.9854 | 0.9857 |
| 2.20 | 0.9861 | 0.9864 | 0.9868 | 0.9871 | 0.9875 | 0.9878 | 0.9881 | 0.9884 | 0.9887 | 0.9890 |
| 2.30 | 0.9893 | 0.9896 | 0.9898 | 0.9901 | 0.9904 | 0.9906 | 0.9909 | 0.9911 | 0.9913 | 0.9916 |
| 2.40 | 0.9918 | 0.9920 | 0.9922 | 0.9925 | 0.9927 | 0.9929 | 0.9931 | 0.9932 | 0.9934 | 0.9936 |
| 2.50 | 0.9938 | 0.9940 | 0.9941 | 0.9943 | 0.9945 | 0.9946 | 0.9948 | 0.9949 | 0.9951 | 0.9952 |
| 2.60 | 0.9953 | 0.9955 | 0.9956 | 0.9957 | 0.9959 | 0.9960 | 0.9961 | 0.9962 | 0.9963 | 0.9964 |
| 2.70 | 0.9965 | 0.9966 | 0.9967 | 0.9968 | 0.9969 | 0.9970 | 0.9971 | 0.9972 | 0.9973 | 0.9974 |
| 2.80 | 0.9974 | 0.9975 | 0.9976 | 0.9977 | 0.9977 | 0.9978 | 0.9979 | 0.9979 | 0.9980 | 0.9981 |
| 2.90 | 0.9981 | 0.9982 | 0.9982 | 0.9983 | 0.9984 | 0.9984 | 0.9985 | 0.9985 | 0.9986 | 0.9986 |
| 3.00 | 0.9987 | 0.9987 | 0.9987 | 0.9988 | 0.9988 | 0.9989 | 0.9989 | 0.9989 | 0.9990 | 0.9990 |
| 3.10 | 0.9990 | 0.9991 | 0.9991 | 0.9991 | 0.9992 | 0.9992 | 0.9992 | 0.9992 | 0.9993 | 0.9993 |
| 3.20 | 0.9993 | 0.9993 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9995 | 0.9995 | 0.9995 |
| 3.30 | 0.9995 | 0.9995 | 0.9995 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9997 |
| 3.40 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9998 |
| 3.50 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 |
| 3.60 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 |
| 3.70 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 |
| 3.80 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 |
| 3.90 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

# الملخص

تناولنا في مذكرتنا هذه العمليات العشوائية والمعادلات التفاضلية العشوائية الجزئية و تطبيقها على السوق، حيث درسنا نموذج هام وبسيط ألا وهو نموذج بلاك . سكولز، ويعد نموذجا لتسعير الخيارات الأوربية ذات المدى القصير، وتطرقنا إلى أهم مميزاته وخصائصه.



**الكلمات المفتاحية:** بلاك . سكولز، مارتينغال، محفظة التحوط، العملية العشوائية، عملية Itô.



# Abstract

**We had in this memory the random processes and stochastic partial differential equations and applied to the market, where we studied the model is simple and important: the Black-Scholes model, and is a model for pricing options with the European short-term, and we dealt with the most important features and characteristics.**



**Keywords: Black Scholes, martingal, portfolio hedging, random process, the process of Itô.**



# résumé

**Nous avons présenté dans notre mémoire des processus aléatoires et équations aux dérivées partielles stochastiques et appliqué au marché, où nous avons étudié le modèle le plus simple et important: le modèle de Black-Scholes, qui est un modèle pour des options européen, et nous avons discuté avec des fonctionnalités et des caractéristiques les plus importantes.**



**Mots-clés: Black Scholes, martingal, portefeuille de couverture, processus aléatoire, le processus de Itô.**