

N° d'ordre :

N° de série :



République Algérienne Démocratique et Populaire

**Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la
Recherche Scientifique**

UNIVERSITÉ HAMMA LAKHDAR D'EL OUED

FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES

Mémoire de fin d'étude

MASTER ACADEMIQUE

Domaine: Mathématiques et Informatique

Filière: Mathématiques

Spécialité: Mathématiques fondamentales

Thème

**Existence des solutions pour une classe
des équations intégrales fractionnaire
par mesure de non compacité**

Présenté par: A Aissaou et A Slimani
Sous la supervision de: Said Beloul

Soutenu devant le jury:

M: Bakar Mnacer	MC	Université d'El-Oued	Président
M: Said Beloul	MC(B)	Université d'El-Oued	Rapporteur
M:Hraiz Bakar Ourabi	MC	Université d'El-Oued	Examineur

Année universitaire 2016 – 2017

Remerciements

Nous remercions avant tout "**ALLAH**" tout puissant de nous avoir guidé tout au long de notre vie dans toutes les années d'étude et de nous avoir donné la croyance, la volonté, la patience et le courage pour terminer ce travail.

Nous remercions nos chers parents qui nous ont donné la volonté pour la réussite dans notre vie.

Au terme de ce travail, nous tenons particulièrement à exprimer notre profonde gratitude à **Dr.BELOUL Said** pour son orientation, sa patience, sa confiance et ses conseils, tout au long de ce parcours scientifique. Nous adressons également nos remerciements, à tous nos enseignants, pour leurs aides inestimables, qui nous ont donné les bases de la science.

Nous remercions très sincèrement, les membres de jury d'avoir bien voulu accepter de faire partie de la commission d'examen. A toute personne qui a participé de près ou de loin pour l'accomplissement de ce travail particulièrement.

Table des matières

Introduction générale	1
Notations générales	3
1 Mesure de non compacité	4
1.1 Espaces métriques	4
1.1.1 Les suites dans les espaces métriques	5
1.1.2 Suites de Cauchy	5
1.1.3 La continuité dans les espaces métrique	6
1.2 Espaces de Banach	7
1.2.1 Topologie des espaces vectoriels normés	8
1.3 La compacité	9
1.3.1 Les parties compactes	9
1.3.2 Les parties relativement compactes	9
1.3.3 Les applications compactes	9
1.4 La convexité	10
1.5 Mesures de non compacité	10
1.5.1 Mesure de non compacité de Kuratowski	13
1.5.2 Mesure de non compacité de Hausdorff	14
1.5.3 Mesure de non compacité de non équicontinuité	15
1.5.4 Applications μ -contractions	16

2	Théorème de Darbo et ses généralisation	17
2.0.5	Théorème de Darbo	17
2.1	Théorème de Darbo	19
2.2	Théorème de Darbo généralisé de type intégrale	20
3	Application	28
3.1	L'intégrale fractionnaire de Riemann Liouville	28
3.2	L'étude d'une équation intégrale fractionnaire	29
	Conclusion	45
	Bibliographie	46

Introduction générale

Le théorème de l'application contractante prouvé par *Banach* en 1922, dit qu'une contraction d'un espace métrique complet dans lui-même admet un point fixe unique. De plus, il fournit un algorithme d'approximation du point fixe comme limite d'une suite itérée. Mais d'une part, montrer que la fonction est contractante peut entraîner de laborieux calculs, d'autre part, les conditions sur la fonction et l'espace étudiés restreignent le nombre de cas auxquels on peut appliquer le théorème.

Le théorème du point fixe de *Brouwer* est un résultat de topologie algébrique, sous sa forme la plus simple, ce théorème exige uniquement la continuité de l'application d'un intervalle fermé borné dans lui-même. Et de façon plus générale, l'application continue doit être définie dans un convexe compact d'un espace euclidien dans lui-même.

Le théorème du point fixe de *Schauder* établi en 1930, est une généralisation du théorème du point fixe de *Brouwer* et affirme qu'une application continue sur un convexe compact admet un point fixe, qui n'est pas nécessairement unique. Il n'est donc pas nécessaire d'établir des estimées sur la fonction, mais simplement sa continuité. Ceci nous donne la possibilité de traiter plus de cas qu'avec le théorème de *Banach* (par exemple, l'identité).

En 1955, et pour la première fois, *Krasnoselskii* a élaboré son théorème du point fixe qui affirme que dans un convexe compact, toute application qui se met sous la forme d'une somme de deux applications dont l'une est contractante et l'autre compacte admet un point fixe.

En 1955, **Darbo** est avéré une propriété de point fixe pour la contraction de l' α -ensemble sur un sous-ensemble fermé, borné et convexe des espaces de Banach en termes de mesure de non compacté. Qui a d'abord été défini par *Kuratowski*. Le théorème du point fixe de *Darbo* est significatif extension du théorème du point fixe de *Schauder*, et joue également un rôle clé en non linéaire pour prouver l'existence de solutions pour beaucoup de classes de non-linéaire équations.

Dans ce mémoire, on étudie le théorème du point fixe de Darbo, et quelques-unes de leurs applications. Etant donné un ensemble et une application: $T : M \rightarrow M$, on s'intéresse à donner des conditions suffisantes sur T et pour que ait un point fixe. Ces résultats théoriques

nous permettent de prouver des solutions pour un classe des équations intégrales non linéaire d'ordre fractionnel dans des espaces de Banach sans les déterminer explicitement.

Dans le premier chapitre Nous avons traité quelque définitions: espaces métriques, espace de Banach, la compacité, la convexité et le mesure de non compacité (*Kuratowski, Hausdorff*, de non équicontinuité) dans l'espace de Banach.

Le deuxième chapitre, on présente le théorème de *Brouwer, Schauder et Darbo* et quelque généralisations.

Dans la troisième chapitre nous avons appliqué la théorie *Darbo* pour prouver l'existence des solutions pour un classe des équations intégrales non linéaires d'ordre fractionnel dans l'espace de Banach.

Notations générales

Certaines notations seront utilisées tout au long de ce mémoire que nous lisons ci-dessous:

\mathbb{R} : ensemble des nombres réels.

\mathbb{R}^n : espace vectoriel de dimension n construit sur le corps des réels.

$|\cdot|$: valeur absolue ou module.

$\|\cdot\|$: norme sur \mathbb{R}^n .

$\|x\|$: norme euclidienne de x .

$\text{conv}\Omega$: l'enveloppe convexe de l'ensemble Ω .

$L(E, F)$: l'espace des applications linéaire continus de E dans F .

Chapitre 1

Mesure de non compacité

1.1 Espaces métriques

Définition 1.1.1 Soit E un ensemble non vide. Une distance (x, y) sur E est une application $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}_+$ vérifiant les conditions suivantes:

- 1) $d(x, y) = 0$ si et seulement si $x = y$, (i.e. d est séparation),
- 2) pour tout $(x, y) \in E^2$, on a $d(x, y) = d(y, x)$, (i.e. d est symétrique),
- 3) pour tout $(x, y, z) \in E^3$, on a $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$, (i.e. d vérifie l'inégalité triangulaire).

Le couple (d, E) est appelé un espace métrique.

Exemple 1.1.1

$d(x, y) = |x - y|$ est une distance sur \mathbb{R} , car pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ on a

1. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow |x - y| = 0 \Leftrightarrow x = y$.
2. $d(x, y) = |x - y| = |-1| |y - x| = |y - x| = d(y, x)$.
3. pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned} d(x, z) &= |x - z| = |x - z + y - y| \\ &\leq |x - y| + |y - z| \\ &= d(x, y) + d(y, z). \end{aligned}$$

Remarque 1.1.1 *L'espace $C([0; 1], \mathbb{R})$ est dit métrique, lorsqu'il est muni d'une des distances suivantes*

1. $d_1(f, g) = \int_0^1 |f(t) - g(t)| dt.$
2. $d_2(f, g) = \sqrt{\int_0^1 [f(t) - g(t)]^2 dt.}$
3. $d_\infty(f, g) = \max_{t \in [0, 1]} |f(t) - g(t)|.$

Définition 1.1.2 *Soit (E, d) un espace métrique et A une partie de E . On dit que A est bornée si et seulement si il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall (x, y) \in A^2$, on a $d(x, y) \leq M$.*

1.1.1 Les suites dans les espaces métriques

Définition 1.1.3 (Convergence)

Soit (E, d) un espace métrique, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite des points de E , et $x \in E$. On dit que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers x et on note $\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n) = x$ si:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} : n \geq N \Rightarrow d(x_n, x) \leq \varepsilon.$$

Définition 1.1.4

- 1) *On dit que la suite (x_n) est convergente s'il existe $x \in E$ tel que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n) = x$.*
- 2) *On dit que la suite (x_n) est divergente s'il n'existe aucun $x \in E$ tel que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n) = x$.*

1.1.2 Suites de Cauchy

Définition 1.1.5 (Suite de Cauchy)

Soit (E, d) un espace métrique et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite des points de E , $(x_n)_{n \geq 0}$ est dite suite de Cauchy si:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall (p, q) \in \mathbb{N}^2 : p, q \geq n_\varepsilon \Rightarrow d(x_p, x_q) < \varepsilon.$$

Cette définition est équivalente la définition suivante:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall (n, h) \in \mathbb{N}^2 : n \geq n_\varepsilon \Rightarrow d(x_{n+h}, x_n) \leq \varepsilon.$$

Exemple 1.1.2 On munit l'espace $C([0; 1], \mathbb{R})$ par la distance fondamentale d_1 et on considère les suites $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ définies par:

$$f_n(x) = \min(n, (\frac{1}{\sqrt{x}})) = \begin{cases} n; & 0 \leq x \leq \frac{1}{n^2}, \\ \frac{1}{\sqrt{x}}; & \frac{1}{n^2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Soit $\varepsilon > 0$, pour tout p et q de \mathbb{N}^* , avec $p > q$, on a:

$$\begin{aligned} d_1(f_p, f_q) &= \int_0^1 |f_p(x) - f_q(x)| dx \\ &= \int_0^{\frac{1}{p^2}} (p - q) dx + \int_{\frac{1}{p^2}}^{\frac{1}{q^2}} (\frac{1}{\sqrt{x}} - q) dx + \int_{\frac{1}{q^2}}^1 (\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}}) dx \\ &= (\frac{1}{p} - (\frac{q}{p^2})) + 2(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}) - q(\frac{1}{q^2} - \frac{1}{p^2}) \\ &= \frac{1}{q} - \frac{1}{p} \\ &< \frac{1}{q}. \end{aligned}$$

Donc, en prenant $n_\varepsilon = \lceil \frac{1}{\varepsilon} \rceil + 1$, on trouve que

$$p > q \geq n_\varepsilon \Rightarrow d(f_p, f_q) < \varepsilon.$$

Propriétés 1.1.1

- 1) Toute suite convergente est de Cauchy.
- 2) Toute suite Cauchy est bornée.

Définition 1.1.6 (Diamètre)

Soit A une partie non vide et bornée de E . On appelle diamètre de A le nombre $\delta(A)$ tel que

$$\delta(A) = \sup_{(x,y) \in A^2} d(x,y).$$

Remarque 1.1.2

$$\delta(\emptyset) = 0$$

1.1.3 La continuité dans les espaces métrique

Définition 1.1.7 (La continuité)

Soit (E, d) et (F, d') deux espaces métriques et $f : E \rightarrow F$. On dit que f est continue si et seulement s'il pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$, tel que pour tout $(x, y) \in E^2$, si $d(x, y) < \eta$, alors $d'(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

Définition 1.1.8 (Uniformément continue)

Soit (E, d) et (F, d') deux espaces métriques et $f : E \rightarrow F$. On dit que f est Uniformément continue si elle vérifie:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha_\varepsilon > 0, \forall x, y \in E, d(x, y) \leq \alpha_\varepsilon \Rightarrow d'(f(x), f(y)) \leq \varepsilon.$$

Définition 1.1.9 (Équicontinuité)

Soit E un espace topologique et (F, d) un espace métrique. Soit \mathcal{F} une famille d'applications de E dans F .

1. \mathcal{F} est dite équicontinue en un point $a \in E$ si et si et seulement si:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists U_a \in \mathcal{V}(a) : x \in U_a \Rightarrow d(f(x), f(a)) \leq \varepsilon; \forall f \in \mathcal{F}.$$

2. On dit de \mathcal{F} qu'elle est équicontinue sur E si et seulement si elle l'est en tout point de E .

Définition 1.1.10 (Applications Lipschitziennes)

Soit (E, d) et (F, d') deux espaces métriques et $f : E \rightarrow F$. On dit que f est K – Lipschitzienne si et seulement si il existe $K > 0$ tel que $(d'(f(x), f(y)) \leq Kd(x, y)$ pour tout $(x, y) \in E^2$.

En particulier, une isométrie est un Lipschitzienne.

1.2 Espaces de Banach

Définition 1.2.1 (La norme)

Une norme est un application définie sur V à valeurs dans \mathbb{R}_+ , notée $\|\cdot\|_V$, est satisfaisant les trois propriétés suivantes:

(i) $\|x\|_E = 0 \Leftrightarrow x = 0$,

(ii) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in E, \|\lambda x\|_E = |\lambda| \|x\|_E$, (homogénéité)

(iii) $\forall x, y \in E, \|x + y\|_E \leq \|x\|_E + \|y\|_E$. (inégalité triangulaire)

1.2.1 Topologie des espaces vectoriels normés

Quelques rappels

Définition 1.2.2 (*Ouvert*)

Un ensemble $O \subset E$ est ouverte dans E si pour tout $x \in O$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(x, \varepsilon) \subset O$ avec $B(x, \varepsilon) = \{y \in E; \|x - y\| < \varepsilon\}$ boule ouverte de centre x et de rayon ε .

Définition 1.2.3 (*Fermé*)

Un ensemble $A \subset E$ est fermé dans E si $E \setminus A$ est ouvert dans E .

Définition 1.2.4 (*Convergence*)

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de E , on dit que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $l \in E$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N}, \forall n \geq N \quad \|x_n - l\|_E \leq \varepsilon.$$

Définition 1.2.5 (*Espace complet*)

\mathbb{R} espace vectoriel, E est dit complet pour la norme $\|\cdot\|_E$ si toute suite de Cauchy (pour cette norme) est convergente (pour cette norme). Un tel espace est aussi appelé espace de Banach.

Proposition 1.2.1 *Tout espace vectoriel sur \mathbb{R} normé de dimension finie est complet.*

Exemple 1.2.1 $E = C([a, b], \mathbb{R})$, $\|f\| = \max_{a \leq t \leq b} |f|$ est un espace de Banach.

La Continuité

Définition 1.2.6 (*Continuité d'une fonction*)

Soient E et F deux espaces vectoriels munis respectivement des normes $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_F$, et f est une fonction de E dans F .

Proposition 1.2.2 *Les propositions suivantes sont équivalentes:*

- 1) f est continue de E dans F ,
- 2) $\forall x_0 \in E, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in E, \|x - x_0\|_E \leq \delta \Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\|_F \leq \varepsilon,$

3) pour tout $x \in E$, pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergente vers x dans E , $f(x_n)$ converge vers $f(x)$ dans F ,

4) Pour tout ouvert O_F de F , l'image réciproque de O_F par f , $f^{-1}(O_F)$, est un ouvert de E ,

5) Pour tout fermé A_F de F , l'image réciproque de A_F par f , $f^{-1}(A_F)$, est un fermé de E .

Définition 1.2.7 Soit A un fermé de E . Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A$ une suite convergente vers l , alors $l \in A$.

1.3 La compacité

1.3.1 Les parties compactes

Définition 1.3.1 Un ensemble $A \subset E$ est compact si de toute suite d'éléments de A , on peut extraire une sous-suite convergente vers un élément de A .

Proposition 1.3.1

- 1) Si A est compact, alors A est fermé et borné.
- 2) Si E est de dimension finie, alors A est compact si et seulement si A est fermé et borné.

1.3.2 Les parties relativement compactes

Définition 1.3.2 Soit $A \subset E$ une partie d'un espace métrique (E, d) . On dit que A est relativement compact si sa fermeture \bar{A} est compacte pour la distance induite d .

1.3.3 Les applications compactes

Définition 1.3.3 Soient E et F deux espaces normés sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} et $f \in L(E, F)$. On dit que f est un application compact si et seulement si une des trois propositions équivalentes suivantes sont vérifiées:

1. toute image d'un borné de E est relativement compact dans F .

2. $f(B_E(0,1))$ est relativement compact dans F .

3. de toute suite bornée $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de F on peut extraire une sous suite telle que $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ converge dans F quand $k \rightarrow \infty$.

L'ensemble des applications compacts est noté par $K(E, F)$.

1.4 La convexité

Définition 1.4.1 Un sous-ensemble S de \mathbb{R} est dit convexe si pour tout $x, y \in S$ et pour tout $\lambda \in [0, 1]$, on a

$$\lambda x + (1 - \lambda)y \in S.$$

Définition 1.4.2 (La fonction convexe)

Soit f une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définie sur un intervalle I de \mathbb{R} .

On dit que f est convexe sur I si, pour tout x et y de I et tout λ dans $[0, 1]$,

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

Exemple 1.4.1 La fonction $f(x) = |x|$ est convexe sur \mathbb{R} car si $\lambda \in [0, 1]$, alors

$$\begin{aligned} f(\lambda x + (1 - \lambda)y) &= |\lambda x + (1 - \lambda)y| \\ &\leq |\lambda x| + |(1 - \lambda)y| \\ &= \lambda |x| + (1 - \lambda) |y| \\ &= \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y). \end{aligned}$$

1.5 Mesures de non compacité

Définition 1.5.1 Soit E un espace Banach et \mathcal{B} la famille des ensembles bornés non vides de E . Une fonction μ définie de \mathcal{B} dans $[0, +\infty[$ est appelée mesure de non compacité sur E si elle vérifie (pour $\Omega \in \mathcal{B}$) les propriétés suivantes:

1) $\mu(\Omega) = 0$ si et seulement si Ω est relativement compact,

2) $\Omega_1 \subset \Omega_2 \Rightarrow \mu(\Omega_1) \leq \mu(\Omega_2)$,

3) $\mu(\Omega) = \mu(\bar{\Omega}) = \mu(\text{conv}\Omega)$, $\forall \Omega \in \mathcal{B}$,

4) $\mu(\lambda\Omega_1 + (1 - \lambda)\Omega_2) \leq \lambda\mu(\Omega_1) + (1 - \lambda)\mu(\Omega_2)$ pour $\lambda \in [0, 1]$,

5) Si $(\Omega_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de sous-ensemble fermée, bornée, non vide et décroissante de E telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(\Omega_n) = 0$, alors $\bigcap_{n=1}^{\infty} \Omega_n = \Omega_{\infty} \neq \emptyset$, et Ω_{∞} compact.

Exemple 1.5.1 La fonction: $\mu : \mathcal{B} \rightarrow [0, +\infty[$ définie par:

$$\mu(\Omega) = \begin{cases} 0; & \text{si } \Omega \text{ est relativement compact,} \\ 1; & \text{sinon,} \end{cases}$$

est une mesure de non compacité car:

1) $\mu(\Omega) = 0 \iff \Omega$ relativement compact par définition.

2) Pour $\Omega_1 \subset \Omega_2$ on a deux cas:

1^{ère} cas: Si Ω_2 est relativement compact $\Rightarrow \Omega_1$ est relativement compact

$$\mu(\Omega_1) = \mu(\Omega_2) = 0 \Rightarrow \mu(\Omega_1) \leq \mu(\Omega_2)$$

2^{ème} cas: Si Ω_2 n'est pas relativement compact

-Si Ω_1 est relativement compact alors: $\mu(\Omega_1) = 0 \leq 1 = \mu(\Omega_2) \Rightarrow \mu(\Omega_1) \leq \mu(\Omega_2)$

-Si Ω_1 n'est pas relativement compact alors: $\mu(\Omega_1) = \mu(\Omega_2) = 1 \Rightarrow \mu(\Omega_1) \leq \mu(\Omega_2)$

3) $\mu(\Omega) = \mu(\bar{\Omega})$ car Ω relativement compact $\iff \bar{\Omega}$ relativement compact.

et d'après 2) on a

$$\mu(\Omega) \leq \mu(\text{conv}\Omega) \leq \mu(\bar{\Omega}),$$

donc si Ω est relativement compact alors

$$0 = \mu(\Omega) \leq \mu(\text{conv}\Omega) \leq \mu(\bar{\Omega}) = 0,$$

ce qui implique

$$\mu(\Omega) = \mu(\text{conv}\Omega) = \mu(\bar{\Omega}).$$

de même argument si Ω n'est pas relativement compact, on trouve que

$$\mu(\Omega) = \mu(\text{conv}\Omega) = \mu(\bar{\Omega}) = 1.$$

4) Si l'ensemble $\lambda\Omega_1 + (1 - \lambda)\Omega_2$ est relativement compact, alors Ω_1 ou Ω_2 est relativement compact et l'inégalité est évidente, car

$$0 = \mu(\lambda\Omega_1 + (1 - \lambda)\Omega_2) \leq \lambda\mu(\Omega_1) + (1 - \lambda)\mu(\Omega_2).$$

Par ailleurs si l'ensemble $\lambda\Omega_1 + (1 - \lambda)\Omega_2$ n'est pas relativement compact, alors Ω_1 et Ω_2 ne sont pas relativement compact, donc

$$1 = \mu(\lambda\Omega_1 + (1 - \lambda)\Omega_2) \leq \lambda\mu(\Omega_1) + (1 - \lambda)\mu(\Omega_2) = 1.$$

5) Soit (Ω_n) une suite décroissante par rapport à l'inclusion des sous-ensembles bornés, fermés et non vides, on a

$$\Omega_\infty \subseteq \dots \subseteq \Omega_2 \subseteq \Omega_1$$

et comme tous les ensembles non vides alors

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \Omega_n = \Omega_\infty$$

est non vide.

D'autre part comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(\Omega_n) = 0$, alors Ω_∞ est relativement compact, donc $\overline{\Omega_\infty} = \Omega_\infty$ est compact.

Les exemples les plus connus de mesure de non compacité sont les suivantes:

1.5.1 Mesure de non compacité de Kuratowski

Définition 1.5.2 Soit (E, d) un espace métrique et A un sous-ensemble borné de E .

La mesure de non compacité de Kuratowski de A est définie par:

$$\alpha(A) = \inf \{ \varepsilon > 0 : A \text{ admet un recouvrement fini par des ensembles de diamètre } \leq \varepsilon \},$$

c'est-à-dire:

$$\alpha(A) = \inf \left\{ \varepsilon > 0 : \exists A_1, A_2, \dots, A_n; A \subseteq \bigcup_{i=1}^n A_i \text{ et } \delta(A_i) \leq \varepsilon, \forall i = 1, 2, \dots, n \right\}.$$

Remarque 1.5.1

1. $0 \leq \alpha(A) \leq \delta(A) < \infty$.
2. A fini $\Rightarrow \alpha(A) = 0$.

Propriétés 1.5.1

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach. La mesure de non compacité de Kuratowski α possède les propriétés suivantes:

1. $\alpha(A) = 0 \Leftrightarrow \bar{A}$ est compact.
2. $A \subset B \Rightarrow \alpha(A) \leq \alpha(B)$ (α est croissante).
3. $\alpha(A) = \alpha(\bar{A})$ (α est invariante par passage à la fermeture).
4. $\alpha(A \cup B) = \max \{ \alpha(A), \alpha(B) \}$.
5. $\alpha(A \cap B) \leq \min \{ \alpha(A), \alpha(B) \}$.
6. $\alpha(\lambda A) \leq |\lambda| \alpha(A), \forall \lambda \in \mathbb{R}$ (α est semi-homogène).
7. $\alpha(A + B) \leq \alpha(A) + \alpha(B)$ (α est sous-additive).
8. $\alpha(A + x) = \alpha(A), \forall x \in E$ (α est invariante par translation).

9. $\alpha(\text{conv}(A)) = \alpha(A)$ (α est invariante par passage à l'enveloppe convexe).

10. α est Lipschitzienne, ie:

$$\exists k > 0 : |\alpha(A_1) - \alpha(A_2)| \leq kH_d(A_1, A_2)$$

où

$$H_d(A_1, A_2) = \inf \{ \varepsilon > 0, A_1 \subset A_2 + \varepsilon \bar{B} \text{ et } A_2 \subset A_1 + \varepsilon \bar{B} \}$$

est la distance de Hausdorff entre les ensembles A et B .

11. α est uniformément continue.

1.5.2 Mesure de non compacité de Hausdorff

Définition 1.5.3 (ε - réseau)

Soit (E, d) un espace métrique et $A \subset E$ une partie non vide. Alors A admet un ε - réseau s'il existe un ensemble fini $S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ tel que

$$A \subset \bigcup_{i=1}^n B(x_i, \varepsilon) \quad (*)$$

i.e

$$\forall x \in A, d(x, S) < \varepsilon$$

Cas particulier: si $(E, \|\cdot\|)$ est un espace normé, alors (*) s'écrit

$$A \subset S + \varepsilon B(0, 1)$$

Définition 1.5.4 Soit E un espace de Banach de dimension infinie et A une partie bornée de E . La mesure de non compacité de Hausdorff est définie par:

$$\chi(A) = \inf \{ \varepsilon > 0 : A \text{ admet un recouvrement fini par des boules de rayon } \leq \varepsilon \}, \text{ i.e,}$$

$$\chi(A) = \inf \{ \varepsilon > 0 : A \subset \bigcup_{i=1}^n B(x_i, r_i), x_i \in E \text{ et } r_i \leq \varepsilon, \forall i = 1, \dots, n \}.$$

Proposition 1.5.1

$$\chi(A) = \inf \{ \varepsilon > 0 : A \text{ admet un } \varepsilon \text{ - réseau} \}.$$

Preuve. En effet, soit $\varepsilon > 0$ tel qu'il existe une suite $\{B_i(x_i, r_i)\}_{i=1}^n : A \subset \bigcup_{i=1}^n B(x_i, r_i)$ et $r_i \leq \varepsilon, \forall i = 1, \dots, n$. Alors

$$\begin{aligned} A &\subset \bigcup_{i=1}^n \{x_i + r_i B_i(0, 1)\}, \text{ et } r_i \leq \varepsilon, \forall i \in [1, n] \\ \Leftrightarrow A &\subset \bigcup_{i=1}^n \{x_i\} + \bigcup_{i=1}^n \{r_i B_i(0, 1)\}_{i=1}^n, \text{ et } r_i \leq \varepsilon, \forall i \in [1, n] \\ \Leftrightarrow A &\subset S + \varepsilon B \end{aligned}$$

i.e. A admet un ε -réseau. Donc $\chi(A) = \inf \{\varepsilon > 0 : A \text{ admet un } \varepsilon - \text{réseau}\}$, où $S = \bigcup_{i=1}^n \{x_i\}$. Cette mesure verifie les propriétés (1)–(9) de la mesure de Kuratowski. ■

Théorème 1.5.1 *Les mesures de non compacité de Kuratowski et de Hausdorff sont reliées par l'inégalité suivante*

$$\chi(A) \leq \alpha(A) \leq 2\chi(A), \forall A \in E.$$

Preuve. En effet si $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ est un ε -réseau de A , alors $\{A \cap (x_k + \varepsilon B)_{k=1}^n\}$ est un recouvrement de A par des ensembles de diamètre 2ε et donc

$$\alpha(A) \leq 2\chi(A).$$

Si $\{A_k\}_{k=1}^m$ est un recouvrement de A tel que $\text{diam}(A_k) \leq d$, alors il faut prendre $x_k \in A_k$, donc $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ est un d -réseau de A , donc

$$\chi(A) \leq \alpha(A)$$

■

1.5.3 Mesure de non compacité de non équicontinuité

Laissez-nous fixer quelques notations qui seront utilisées (3^{ème} chapitre). Nous désignons par $C([a, T]; \mathbb{R})$ L'ensemble des réelles continus fonctions définies dans $[a, T]$. Cet ensemble est un espace de Banach par rapport à la norme

$$\|z\| = \max \{|z(t)| : t \in [a, T], z \in C([a, T]; \mathbb{R})\}.$$

Nous désignons par $\mathcal{P}(C([a, T]; \mathbb{R}))$ l'ensemble de tous les sous-ensembles non vide borné de $C([a, T]; \mathbb{R})$.

Soit $\mathcal{W} \in \mathcal{P}(C([a, T]; \mathbb{R}))$. Pour $w \in \mathcal{W}$ et $\rho \geq 0$, on définit l'application ω par

$$\omega(w, \rho) = \sup \{|w(t) - w(s)| : t, s \in [a, T], |t - s| \leq \rho\}$$

On définit la'application $\Omega : \mathcal{P}(C([a, T]; \mathbb{R})) \times [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ par

$$\Omega(\mathcal{W}, \rho) = \sup \{\omega(w, \rho) : w \in \mathcal{W}\}, (\mathcal{W}, \rho) \in \mathcal{P}(C([a, T]; \mathbb{R})) \times [0, \infty).$$

Il a été prouvé en [5] que l'application $\sigma : \mathcal{P}(C([a, T]; \mathbb{R})) \rightarrow [0, \infty)$ défini par

$$\sigma(\mathcal{W}) = \lim_{\rho \rightarrow 0^+} \Omega(\mathcal{W}, \rho), \mathcal{W} \in \mathcal{P}(C([a, T]; \mathbb{R})),$$

est un mesure de non compacité dans espace de Banach $C([a, T]; \mathbb{R})$.

1.5.4 Applications μ -contractions

Définition 1.5.5 (*Le point fixe*)

Soit E un espace métrique et $f : E \rightarrow E$ une application, $x \in E$ est dit point fixe pour l'application f si $f(x) = x$.

Exemple 1.5.2 Soit f application telle que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$.

$$f(x) = x \Leftrightarrow x^2 = x \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 1.$$

Donc les points fixes de f sont 0 et 1.

Définition 1.5.6 (*Application μ -lipshitzienne*)

Soient E et F deux espaces métriques et $f : E \rightarrow F$ une application continue.

1) On dit que f est une μ -lipshitzienne d'ensemble s'il existe $k > 0$, tel que

$$\mu(f(\Omega)) \leq k\mu(\Omega), \forall \Omega \text{ borné de } E.$$

Définition 1.5.7 (*μ -contraction*)

Soient E et F deux espaces métriques et $f : E \rightarrow F$ une application continue.

1) On dit que f est une μ -contraction d'ensemble s'il existe $k \in [0, 1]$ tel que

$$\mu(f(\Omega)) \leq k\mu(\Omega), \forall \Omega \text{ borné de } E.$$

2) Elle est appelée μ -contraction d'ensemble stricte si $0 \leq k < 1$.

Chapitre 2

Théorème de Darbo et ses généralisations

Ce chapitre a consacré de présenter le théorème de Darbo qui est basée sur le théorème de Schauder dans sa démonstration, ainsi que quelques généralisations de type intégrale pour le théorème de Darbo.

Théorème 2.0.2 (*Brouwer 1912*)

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un compact, convexe, non vide et $T : \Omega \rightarrow \Omega$ une application continue, alors T admet au moins un point fixe dans Ω .

Preuve. voir [11] ■

2.0.5 Théorème de Darbo

Premier théorème de Schauder

Théorème 2.0.3 (*Schauder 1930*)

Soit E un espace de Banach, $\Omega \subset E$ un compact, convexe, et non vide. $T : \Omega \rightarrow \Omega$ est un fonction continue , alors T admet au moins un point fixe dans Ω .

Preuve. Soit $T : \Omega \rightarrow \Omega$ une application continue. Comme Ω est compact, T est uniformément continue; donc, si on fixe $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $x, y \in \Omega$, on ait $\|T(x) - T(y)\| \leq \varepsilon$, dès que $\|x - y\| \leq \delta$.

De plus, il existe un ensemble fini des points $\{x_1, x_2, \dots, x_p\} \subset \Omega$ tel que les boules ouvertes de rayon δ centrées aux x_i recouvrent Ω : $\Omega \subset \bigcup_{1 \leq j \leq p} B(x_j, \delta)$. Si on note $L := \text{Vect}(T(x_j))_{1 \leq j \leq p}$, alors L est dimension finie, et $\Omega^* := \Omega \cap L$ est compact, convexe de dimension finie.

Pour $1 \leq j \leq p$, on définit la fonction continue $\psi_j : E \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$\psi_j = \begin{cases} 0; & \text{si } \|x - x_j\| \geq \delta, \\ 1 - \frac{\|x - x_j\|}{\delta}; & \text{sinon,} \end{cases}$$

et on voit que ψ_j est strictement positive sur $B(x_j, \delta)$ et nulle à l'extérieur.

On a donc, pour tout $x \in \Omega$, $\sum_{j=1}^p \psi_j(x) > 0$, et donc on peut définir sur Ω les fonctions continues positives φ_j par:

$$\varphi_j(x) = \frac{\psi_j(x)}{\sum_{k=1}^p \psi_k(x)}$$

pour les quelles on a $\sum_{j=1}^p \varphi_j(x) = 1$, pour tout $x \in \Omega$.

On pose alors, pour $x \in \Omega$, $S(x) := \sum_{j=1}^p \varphi_j(x)T(x_j)$. La fonction S est continue (car elle est somme de fonction continues), et prend ses valeurs dans Ω^* (car $S(x)$ est un barycentre des $T(x_j)$). Donc, si on considère la restriction $S|_{\Omega^*} : \Omega^* \rightarrow \Omega^*$, par le théorème de Brouwer, S possède un point fixe $y \in \Omega^*$. De plus

$$\begin{aligned} T(y) - y &= T(y) - S(y) = \sum_{j=1}^p \varphi_j(y)T(y) - \sum_{j=1}^p \varphi_j(y)T(x_j) \\ &= \sum_{j=1}^p \varphi_j(y)(T(y) - T(x_j)). \end{aligned}$$

Or si $\varphi_j(y) \neq 0$ alors $\|y - x_j\| < \delta$, et donc $\|T(y) - T(x_j)\| < \varepsilon$. Donc, on a pour tout $j = 1, \dots, p$,

$$\|\varphi_j(y)(T(y) - T(x_j))\| \leq \varepsilon \varphi_j(y),$$

et donc

$$\|T(y) - y\| \leq \sum_{j=1}^p \|\varphi_j(y)(T(y) - T(x_j))\| \leq \sum_{j=1}^p \varepsilon \varphi_j(y) = \varepsilon.$$

Donc, pour tout entier m , on peut trouver un point $y_m \in \Omega$ tel que $\|T(y_m) - y_m\| < 2^{-m}$.

Et puisque Ω est compact, de la suite $(y_m)_{m \in \mathbb{Z}}$ on peut extraire une sous-suite (y_{m_k}) qui converge vers un point $y^* \in \Omega$.

Alors T étant continue, la suite $(T(y_{m_k}))_k$ converge vers $T(y^*)$, et on conclut que $T(y^*) = y^*$ (y^* est un point fixe de T sur Ω). ■

Deuxième théorème de Schauder

Théorème 2.0.4 *Soit E un espace de Banach, $\Omega \subset E$ un ensemble convexe, borné, fermé et non vide. $T : \Omega \rightarrow \Omega$ est une fonction compact, alors T admet au moins un point fixe dans Ω .*

Preuve. voir [1] ■

2.1 Théorème de Darbo

Théorème 2.1.1 (*G. Darbo 1955*)

Soit E un espace de Banach, Ω une partie fermée, bornée, convexe, non vide de E et soit $T : \Omega \rightarrow \Omega$ une K -contraction stricte. Alors T admet au moins un point fixe dans Ω .

Preuve. On considère la suite définie par $\Omega_0 = \Omega$ et $\Omega_{n+1} = \overline{\text{conv}T(\Omega_n)}$.

$$\begin{aligned} \mu(\Omega_{n+1}) &= \mu(\overline{\text{conv}T(\Omega_n)}) = \mu(T(\Omega_n)) \\ &\leq k\mu(\Omega_n) \\ &\leq k^2\mu(\Omega_{n-1}) \\ &\vdots \\ &\leq k^{n+1}\mu(\Omega_0) \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} 0 \leq \mu(\Omega_{n+1}) &\leq k^{n+1}\mu(\Omega_0), \forall 0 \leq k < 1 \\ \Rightarrow 0 \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(\Omega_{n+1}) &\leq \lim_{n \rightarrow +\infty} k^{n+1}\mu(\Omega_0), \end{aligned} \tag{2.1.1}$$

on a $0 \leq k < 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} k^{n+1} = 0$.

$$\begin{aligned}
 0 &\leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(\Omega_{n+1}) \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} k^{n+1} \mu(\Omega_0) \\
 &\iff 0 \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(\Omega_{n+1}) \leq 0 \\
 &\iff \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(\Omega_{n+1}) = 0 \\
 &\iff \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(\Omega_n) = 0 \\
 &\implies \bigcap_{n=1}^{\infty} \Omega_n = \Omega_{\infty} \neq \emptyset
 \end{aligned}$$

D'après le propriété (5) dans définition 1.5.1 de mesure de non compacité, on a $\bigcap_{n=1}^{\infty} \Omega_n = \Omega_{\infty}$ est compacte, fermée, bornée et convexe dans Ω , alors T admet au moins un point fixe d'après le théorème de schauder. ■

2.2 Théorème de Darbo généralisé de type intégrale

Définition 2.2.1

Soit $\Phi, \Psi : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions vérifier les conditions suivantes:

1) pour $u, v \in [0, +\infty)$ on a

$$\Psi(u) \leq \Phi(v) \implies u \leq v,$$

2) Pour $u_n, v_n \in [0, +\infty)$ avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = w$

on a

$$\forall n, \Psi(u_n) \leq \Phi(v_n) \implies w = 0.$$

Théorème 2.2.1

E espace de Banach $\Omega \neq \emptyset \subset E$ est borné, fermé et convexe, soit $T : \Omega \rightarrow \Omega$ est une fonction continue satisfait

$$\Psi\left(\int_0^{\mu(TX)} \varphi(t) dt\right) \leq \Phi\left(\int_0^{\mu(X)} \varphi(t) dt\right), \quad (2.2.1)$$

pour $X \neq \emptyset \subset \Omega$, μ est mesure non compact et $\Phi, \Psi : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ (voir déf (2.2.1)), en outre, soit $\varphi : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty]$ est Lebesgue-intégrable qui est sommable sur chaque un

sous ensemble compact $[0, +\infty)$, et $\int_0^\varepsilon \varphi(t)dt > 0, \forall \varepsilon > 0$. Alors T admet au moins un point fixe dans Ω .

Preuve. $\Omega_0 = \Omega$ et $\Omega_n = \text{conv}(T\Omega_{n-1}), \forall n \geq 1$. T compact, donc il existe $N \geq 0$ tel que $\mu(\Omega_N) = 0$, alors Ω_N compact, et puisque T continue alors $T(\Omega_N) \subset \Omega_N$, donc d'après la théorie de Schauder T admet au moins un point fixe.

On suppose que: $\mu(\Omega_n) > 0, \forall n \geq 0$. Alors

$$\Psi\left(\int_0^{\mu(\Omega_{n+1})} \varphi(t)dt\right) = \Psi\left(\int_0^{\mu(\text{conv}(T\Omega_n))} \varphi(t)dt\right) \quad (2.2.2)$$

$$= \Psi\left(\int_0^{\mu(T\Omega_n)} \varphi(t)dt\right) \quad (2.2.3)$$

$$\leq \Phi\left(\int_0^{\mu(\Omega_n)} \varphi(t)dt\right). \quad (2.2.4)$$

On définit la suite $y_n = \int_0^{\mu(\Omega_n)} \varphi(t)dt$ et $r = \inf \{y_n, n \geq 0\}$.

Puis que $\Omega_{n+1} \subset \Omega_n \Rightarrow \mu(\Omega_{n+1}) \leq \mu(\Omega_n)$ et $\varphi(t) \geq 0, \forall t \geq 0$. Alors

$$\int_0^{\mu(\Omega_{n+1})} \varphi(t)dt \leq \int_0^{\mu(\Omega_n)} \varphi(t)dt;$$

i.e $y_{n+1} \leq y_n$.

Donc y_n est une suite décroissante, et puis que $y_n \geq r, \forall n \geq 0$, alors (y_n) est borné et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = r.$$

On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = r \Rightarrow r = 0$ (d'après la définition précédente)

i.e

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\mu(\Omega_n)} \varphi(t)dt = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(\Omega_n) = 0.$$

D'après la propriété (5) de mesure de non compacité

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(\Omega_n) &= 0 \\ \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} \Omega_n &= \Omega_{\infty} \neq \emptyset \\ \Rightarrow \Omega_{\infty} &\in \ker \mu \text{ et } \Omega_{\infty} \text{ est fermé et borné.} \end{aligned}$$

Alors Ω_{∞} est compact, donc (d'après le théorie de Schauder) $T : \Omega_{\infty} \rightarrow \Omega_{\infty}$ est admet au mois un point fixe. ■

Corollaire 2.2.1 Pour $\varphi(t) = 1, t \in [0, +\infty)$ devient

$$\Psi\left(\int_0^{\mu(TX)} \varphi(t) dt\right) = \Psi(\mu(TX));$$

et

$$\Phi\left(\int_0^{\mu(X)} \varphi(t) dt\right) = \Phi(\mu(X));$$

on a

$$\Psi\left(\int_0^{\mu(TX)} \varphi(t) dt\right) \leq \Phi\left(\int_0^{\mu(X)} \varphi(t) dt\right).$$

Donc

$$\Psi(\mu(TX)) \leq \Phi(\mu(X)).$$

Corollaire 2.2.2 Pour $\varphi(t) = 1, \Psi(t) = t, \text{ et } \Phi(t) = kt, t \in [0, +\infty), k \in [0, 1)$ devient

$$\Psi\left(\int_0^{\mu(TX)} \varphi(t) dt\right) = \mu(TX);$$

et

$$\Phi\left(\int_0^{\mu(X)} \varphi(t) dt\right) = k\mu(X);$$

on a

$$\Psi\left(\int_0^{\mu(TX)} \varphi(t) dt\right) \leq \Phi\left(\int_0^{\mu(X)} \varphi(t) dt\right).$$

Donc

$$\mu(TX) \leq k\mu(X).$$

Corollaire 2.2.3 Pour $\Psi(t) = t, t \in [0, +\infty), \lim_{n \rightarrow +\infty} \Phi^n = 0, \forall t \geq 0.$

Donc on obtient

$$\int_0^{\mu(TX)} \varphi(t)dt = \Psi\left(\int_0^{\mu(TX)} \varphi(t)dt\right) \leq \Phi\left(\int_0^{\mu(X)} \varphi(t)dt\right)$$

Ainsi on obtient l'équation (2.2.1).

Corollaire 2.2.4 On définit $\mu : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$ tel que $\text{diam}(x) = \sup_{x,y \in X} \|Tx - Ty\|$
 μ est une mesure de non compact dans E .

Alors

$$\begin{aligned} \Psi\left(\int_0^{\sup_{x,y \in X} \|Tx - Ty\|} \varphi(t)dt\right) &\leq \Phi\left(\int_0^{\sup_{x,y \in X} \|x - y\|} \varphi(t)dt\right) \\ \Rightarrow \Psi\left(\int_0^{\|Tx - Ty\|} \varphi(t)dt\right) &\leq \Phi\left(\int_0^{\|x - y\|} \varphi(t)dt\right) \end{aligned}$$

Théorème 2.2.2 E espace de Banach $\Omega \neq \emptyset \subset E$ est borné, fermé et convexe, soit $T : \Omega \rightarrow \Omega$ est une fonction continue satisfait

$$\Psi\left(\int_0^{\mu(TX)} \varphi(t)dt\right) \leq \Psi\left(\int_0^{\mu(X)} \varphi(t)dt\right) - \Phi\left(\int_0^{\mu(X)} \varphi(t)dt\right). \quad (2.2.5)$$

Pour $X \subset \Omega$, est une mesure non compact et $\Psi, \Phi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ tel que

1) Ψ croissant et continue

$$2) \begin{cases} \Phi(t) = 0; & t = 0 \\ \Phi(t) > 0; & t > 0 \end{cases} \text{ est continue,}$$

et $\varphi : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty]$ est une fonction intégrable de Lebesgue, qu'il est sommable sur chaque sous ensemble compact de $[0, +\infty)$ et $\int_0^\varepsilon \varphi(t)dt > 0, \forall \varepsilon > 0.$

Alors T admet au moins un point fixe dans Ω .

Preuve. On considère la suite Ω_n définie par:

1) $\Omega_0 = \Omega$, $\Omega_n = \text{conv}(T\Omega_{n-1})$, $\forall n \geq 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\mu(\Omega_{n_0}) = 0$ donc Ω_{n_0} compact. (même argument de théorème (2.2.1))

2) Pour $\mu(\Omega_n) > 0$, $\forall n \geq 1$ on a

$$\Psi\left(\int_0^{\mu(\Omega_{n+1})} \varphi(t) dt\right) = \Psi\left(\int_0^{\mu(\text{conv}(T\Omega_n))} \varphi(t) dt\right) = \Psi\left(\int_0^{\mu(T\Omega_n)} \varphi(t) dt\right). \quad (2.2.6)$$

On a

$$\Psi\left(\int_0^{\mu(T\Omega_n)} \varphi(t) dt\right) \leq \Psi\left(\int_0^{\mu(\Omega_n)} \varphi(t) dt\right) - \Phi\left(\int_0^{\mu(\Omega_n)} \varphi(t) dt\right).$$

Donc

$$\Psi\left(\int_0^{\mu(\Omega_{n+1})} \varphi(t) dt\right) \leq \Psi\left(\int_0^{\mu(\Omega_n)} \varphi(t) dt\right) - \Phi\left(\int_0^{\mu(\Omega_n)} \varphi(t) dt\right). \quad (2.2.7)$$

Puis que $\Phi(t) \geq 0$, $\forall t \geq 0$. Alors

$$\Psi\left(\int_0^{\mu(\Omega_n)} \varphi(t) dt\right) - \Phi\left(\int_0^{\mu(\Omega_n)} \varphi(t) dt\right) \leq \Psi\left(\int_0^{\mu(\Omega_n)} \varphi(t) dt\right).$$

Donc

$$\Psi\left(\int_0^{\mu(\Omega_{n+1})} \varphi(t) dt\right) \leq \Psi\left(\int_0^{\mu(\Omega_n)} \varphi(t) dt\right).$$

On définit la même suite (y_n) qui on définit dans la preuve de la théorème (2.2.1) tel que

$\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = r = 0$. On entre la dans

$$\Psi\left(\int_0^{\mu(\Omega_{n+1})} \varphi(t) dt\right) \leq \Psi\left(\int_0^{\mu(\Omega_n)} \varphi(t) dt\right) - \Phi\left(\int_0^{\mu(\Omega_n)} \varphi(t) dt\right)$$

On obtien

$$\begin{aligned}
 & \Psi\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\mu(\Omega_{n+1})} \varphi(t) dt\right) \\
 & \leq \Psi\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\mu(\Omega_n)} \varphi(t) dt\right) - \lim_{n \rightarrow +\infty} \Phi\left(\int_0^{\mu(\Omega_n)} \varphi(t) dt\right) \\
 & \Leftrightarrow \Psi(r) \leq \Psi(r) - \lim_{n \rightarrow +\infty} \Phi\left(\int_0^{\mu(\Omega_n)} \varphi(t) dt\right) \\
 & \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \Phi\left(\int_0^{\mu(\Omega_n)} \varphi(t) dt\right) \leq 0
 \end{aligned}$$

On a Φ fonction positive, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \Phi\left(\int_0^{\mu(\Omega_n)} \varphi(t) dt\right) = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\mu(\Omega_n)} \varphi(t) dt = 0$.

La même argument de la théorème (2.2.1) on obtien que T admet au moingt un point fixe. ■

Théorèmes de type Darbo via fonctions de déplacement

Dans cette section, on va présenter des autre gnéralisation de la théorème qui sont plus générale que le théorème donné dans la deuxième section.

Théorème 2.2.3 *E espace de Banach $\Omega \neq \emptyset \subset E$ est borné ,fermé et convexe, soit $T : \Omega \rightarrow \Omega$ est un fonction continue satisfait*

$$\Psi\left(\int_0^{\mu(TX)} \varphi(t) dt\right) \leq \Phi\left(\int_0^{\mu(X)} \varphi(t) dt\right) - \theta\left(\int_0^{\mu(X)} \varphi(t) dt\right) \quad (2.2.8)$$

Pour $X \subset \Omega$, est un mesure non compact et $\Psi, \Phi, \theta : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ trois fonction tel que Φ et θ sont bornées sur tout intervalle bornée dans $[0, +\infty)$ et Ψ continue. En plus, on suppose que

- 1) $\Psi(s) \leq \Phi(t) \Rightarrow s \leq t$.
- 2) $\theta(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0$ et $\theta \geq 0$.

3) Pour tout (s_n) suite dans \mathbb{R}_+ , tel que $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = t$ tel que $t > 0$, on a

$$\Psi(t) - \limsup_{n \rightarrow +\infty} \Phi(s_n) + \liminf_{n \rightarrow +\infty} \theta(s_n) > 0.$$

Preuve. La même preuve de théorème (2.2.1), on a la même construction de la suite (Ω_n) .

En générale, on suppose $\mu(\Omega_n) > 0, \forall n \geq 0$. On a

$$\Psi\left(\int_0^{\mu(\Omega_{n+1})} \varphi(t) dt\right) = \Psi\left(\int_0^{\mu(T\Omega_n)} \varphi(t) dt\right) \leq \Phi\left(\int_0^{\mu(\Omega_n)} \varphi(t) dt\right) - \theta\left(\int_0^{\mu(\Omega_n)} \varphi(t) dt\right).$$

Si $\theta \geq 0$ alors

$$\Phi\left(\int_0^{\mu(\Omega_n)} \varphi(t) dt\right) - \theta\left(\int_0^{\mu(\Omega_n)} \varphi(t) dt\right) \leq \Phi\left(\int_0^{\mu(\Omega_n)} \varphi(t) dt\right).$$

Donc

$$\Psi\left(\int_0^{\mu(\Omega_{n+1})} \varphi(t) dt\right) \leq \Phi\left(\int_0^{\mu(\Omega_n)} \varphi(t) dt\right);$$

d'après l'hypothèse 1 de cette théoreme

$$\Rightarrow \int_0^{\mu(\Omega_{n+1})} \varphi(t) dt \leq \int_0^{\mu(\Omega_n)} \varphi(t) dt .$$

On définit la même suite (y_n) qui on définit dans la preuve de la théorème (2.2.1) tel que $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = r = 0$.

On entre la limit dans

$$\Psi\left(\int_0^{\mu(\Omega_{n+1})} \varphi(t) dt\right) \leq \Phi\left(\int_0^{\mu(\Omega_n)} \varphi(t) dt\right) - \theta\left(\int_0^{\mu(\Omega_n)} \varphi(t) dt\right).$$

Devient

$$\begin{aligned} \Psi(r) &\leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \Phi\left(\int_0^{\mu(\Omega_n)} \varphi(t) dt\right) - \lim_{n \rightarrow +\infty} \theta\left(\int_0^{\mu(\Omega_n)} \varphi(t) dt\right). \\ &\leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup \Phi\left(\int_0^{\mu(\Omega_n)} \varphi(t) dt\right) + \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup(-\theta\left(\int_0^{\mu(\Omega_n)} \varphi(t) dt\right)). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \Psi(r) \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \Phi\left(\int_0^{\mu(\Omega_n)} \varphi(t) dt\right) - \liminf_{n \rightarrow +\infty} \theta\left(\int_0^{\mu(\Omega_n)} \varphi(t) dt\right). \\ &\Leftrightarrow \Psi(r) - \limsup_{n \rightarrow +\infty} \Phi\left(\int_0^{\mu(\Omega_n)} \varphi(t) dt\right) + \liminf_{n \rightarrow +\infty} \theta\left(\int_0^{\mu(\Omega_n)} \varphi(t) dt\right) \leq 0. \end{aligned} \quad (2.2.9)$$

Mais on a pour $r > 0$

$$\Psi(r) - \limsup_{n \rightarrow +\infty} \Phi\left(\int_0^{\mu(\Omega_n)} \varphi(t) dt\right) + \liminf_{n \rightarrow +\infty} \theta\left(\int_0^{\mu(\Omega_n)} \varphi(t) dt\right) > 0.$$

Donc (2.2.9) $\Leftrightarrow r \leq 0 \Rightarrow r = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\mu(\Omega_n)} \varphi(t) dt = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(\Omega_n) = 0.$

Par la même argument dans théorème (2.2.1). ■

Chapitre 3

Application

Dans ce chapitre on va appliquer le théorème de Darbo dans l'étude de l'existence des solutions pour une equation integrale fractionnaire dans un espace de Banach.

3.1 L'intégrale fractionnaire de Riemann Liouville

Définition 3.1.1 Soit f une fonction réelle, a appartient au domaine de définition de f et α un nombre réel strictement positif. On appelle intégrale fractionnaire de f d'ordre α , et on la note $I_a^{(\alpha)}$, la fonction définie par

$$I_a^{(\alpha)} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt;$$

où $\Gamma(\alpha)$ est la fonction Gamma d'Euler définie par

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} \exp(-t) dt.$$

Remarque 3.1.1 On peut écrire $I_a^{(\alpha)}$ sous la forme suivante

$$I_a^{(\alpha)} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{x-a} t^{\alpha-1} f(x-t)^{\alpha-1} f(t) dt.$$

Une équation fonctionnelle l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville

On prendre

$$h(t) = t, \quad t \in [a, T],$$

en équation (3.2.1), nous obtenons l'équation

$$y(t) = f(t, y(\mu(t))) + \Gamma(\alpha)g(t, y(v(t)))I_{a^+}^\alpha + (u(t, y(c_1(\cdot)), \dots, y(c_n(\cdot))))(t). \quad (3.1.1)$$

Où

$$I_{a^+}^\alpha \psi(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \frac{\psi(\tau)}{(t-\tau)^{1-\alpha}} d\tau, \quad t \in [a, T].$$

On peut réécrire l'équation (3.1.1) sous la forme

$$y(t) = f(t, y(\mu(t))) + g(t, y(v(t))) + \int_a^t \frac{u(t, \tau, y(c_1(\tau)), \dots, y(c_n(\tau)))}{(t-\tau)^{1-\alpha}} d\tau, \quad t \in [a, T].$$

3.2 L'étude d'une équation intégrale fractionnaire

Dans cette chapitre, nous avons concerné l'existence des solutions des équations intégrale fractionnaire par mesure de non compacité de non équicontinue.

Soit

$$y(t) = f(t, y(\mu(t))) + g(t, y(v(t))) \int_a^t \frac{h'(\tau)u(t, \tau, y(c_1(\tau)), y(c_2(\tau)), \dots, y(c_n(\tau)))}{(h(t) - h(\tau))^{1-\alpha}} d\tau. \quad (3.2.1)$$

Tel que $\alpha \in (0, 1)$, $0 \leq a < T$, $f, g : [a, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\mu, v, c_i : [a, T] \rightarrow [a, T]$, $i = 1, \dots, n$, $u : [a, T] \times [a, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, et $h : [a, T] \rightarrow \mathbb{R}$. Equation (3.2.1) on peut écrit sous la forme

$$y(t) = f(t, y(\mu(t))) + \Gamma(\alpha)g(t, y(v(t)))I_{a^+,h}^\alpha u(t, y(c_1(\cdot)), y(c_2(\cdot)), \dots, y(c_n(\cdot)))(t), \quad t \in [a, T].$$

Tel que $I_{a^+,h}^\alpha$ est l'intégrale fractionnel d'ordre α . En ce qui concerne la fonction h définit par

$$I_{a^+,h}^\alpha \psi(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \frac{h'(\tau)}{(h(t) - h(\tau))^{1-\alpha}} \psi(\tau) d\tau, \quad t \in [a, T].$$

Nous considérons l'hypothèse suivante

(H1) Les fonctions

$$\mu, v, c_i : [a, T] \rightarrow [a, T], \quad i = 1, \dots, n$$

sont continues

(H2) Il existe des constantes positives L et p telles que

$$|\mu(t) - \mu(s)| \leq L |t - s|^p, \quad (t, s) \in [a, T] \times [a, T].$$

(H3) Il existe des constantes positives D et q telles que

$$|v(t) - v(s)| \leq D |t - s|^q, \quad (t, s) \in [a, T] \times [a, T].$$

(H4) La fonction $f : [a, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est continue et satisfait

$$|f(t, \mu) - f(t, v)| \leq \lambda |\mu - v|$$

Pour tout $(t, u, v) \in [a, T] \times \mathbb{R}^2$, où λ est positive constant.

(H5) La fonction $g : [a, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est continue et satisfait

$$|g(t, u) - g(t, v)| \leq \theta |u - v|$$

Pour tout $(t, u, v) \in [a, T] \times \mathbb{R}^2$, où θ est positive constant.

(H6) La fonction $\mu : [a, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est continue et satisfait

$$|u(t, \tau, x_1, x_2, \dots, x_n)| \leq \varphi\left(\max_{i=1, \dots, n} |x_i|\right),$$

pour tout $(t, \tau, x_1, x_2, \dots, x_n) \in [a, T] \times [a, T] \times \mathbb{R}^n$, où $\varphi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ est croissante.

(H7) La fonction $h : [a, T] \rightarrow \mathbb{R}$ est C^1 et croissante.

(H8) Il existe $r_0 > 0$ tel que

$$\lambda r_0 + M + (\theta r_0 + N) \frac{\varphi(r_0)}{\alpha} (h(T) - h(a))^\alpha < r_0,$$

où

$$M = \max \{|f(t, 0)| : t \in [a, T]\} \quad \text{and} \quad N = \max \{|g(t, 0)| : t \in [a, T]\}.$$

Nos résultats principaux sont les suivants.

Théorème 3.2.1 *Sous les hypothèses (H1) - (H8), l'équation (3.2.1) a au moins une solution $y^* \in C([a, T]; \mathbb{R})$. Plus encore, cette solution satisfait*

$$\|y^*\| \leq r_0.$$

Preuve. Pour tout $y \in C([a, T]; \mathbb{R})$, soit

$$(Ty)(t) = f(t, y(\mu(t))) + g(t, y(v(t))) \int_a^t \frac{h'(\tau)u(t, \tau, y(c_1(\tau)), y(c_2(\tau)), \dots, y(c_n(\tau)))}{(h(t) - h(\tau))^{1-\alpha}} d(\tau).$$

On montre que (Ty) est continue pour tout $t \in [a, T]$. On va démontrer que

$$TC([a, T]; \mathbb{R}) \subseteq C([a, T]; \mathbb{R}),$$

f et g sont continues, définissons une fonction suivante: $\gamma : t \rightarrow [a, T]$ telle que

$$\gamma(t) = \int_a^t \frac{h'(\tau)u(t, \tau, y(c_1(\tau)), y(c_2(\tau)), \dots, y(c_n(\tau)))}{(h(t) - h(\tau))^{1-\alpha}} d(\tau),$$

γ est continue dans $[a, T]$.

Soit $\{t_n\}$ suite dans $[a, T]$ tel que $t_n \rightarrow t \in [a, T]$,

$$|\gamma(t_n) - \gamma(t)| = \left| \int_a^{t_n} \frac{h'(\tau)u(t_n, \tau)}{(h(t_n) - h(\tau))^{1-\alpha}} d\tau - \int_a^t \frac{h'(\tau)u(t, \tau)}{(h(t) - h(\tau))^{1-\alpha}} d\tau \right|$$

Où

$$\begin{aligned} u(t_n, \tau) &= u(t_n, \tau, y(c_1(\tau)), y(c_2(\tau)), \dots, y(c_n(\tau))), \\ u(t, \tau) &= u(t, \tau, y(c_1(\tau)), y(c_2(\tau)), \dots, y(c_n(\tau))). \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
 |\gamma(t_n) - \gamma(t)| &= \left| \left(\int_a^t \frac{h'(\tau)u(t_n, \tau)}{(h(t_n) - h(\tau))^{1-\alpha}} d\tau + \int_t^{t_n} \frac{h'(\tau)u(t_n, \tau)}{(h(t_n) - h(\tau))^{1-\alpha}} d\tau \right) - \int_a^t \frac{h'(\tau)u(t, \tau)}{(h(t) - h(\tau))^{1-\alpha}} d\tau \right| \\
 &\leq \left| \left(\int_a^t \frac{h'(\tau)u(t_n, \tau)}{(h(t_n) - h(\tau))^{1-\alpha}} - \int_a^t \frac{h'(\tau)u(t, \tau)}{(h(t) - h(\tau))^{1-\alpha}} \right) d\tau \right| + \left| \int_t^{t_n} \frac{h'(\tau)u(t_n, \tau)}{(h(t_n) - h(\tau))^{1-\alpha}} d\tau \right| \\
 &= \left| \left(\int_a^t \frac{h'(\tau)u(t_n, \tau)}{(h(t_n) - h(\tau))^{1-\alpha}} - \int_a^t \frac{h'(\tau)u(t, \tau)}{(h(t) - h(\tau))^{1-\alpha}} \right) d\tau \right. \\
 &\quad \left. + \left(\int_a^t \frac{h'(\tau)u(t_n, \tau)}{(h(t) - h(\tau))^{1-\alpha}} - \int_a^t \frac{h'(\tau)u(t_n, \tau)}{(h(t) - h(\tau))^{1-\alpha}} \right) d\tau \right| + \left| \int_t^{t_n} \frac{h'(\tau)u(t_n, \tau)}{(h(t_n) - h(\tau))^{1-\alpha}} d\tau \right| \\
 &= \left| \left(\int_a^t \frac{h'(\tau)u(t_n, \tau)}{(h(t) - h(\tau))^{1-\alpha}} - \int_a^t \frac{h'(\tau)u(t, \tau)}{(h(t) - h(\tau))^{1-\alpha}} \right) d\tau \right. \\
 &\quad \left. + \left(\int_a^t \frac{h'(\tau)u(t_n, \tau)}{(h(t_n) - h(\tau))^{1-\alpha}} - \int_a^t \frac{h'(\tau)u(t_n, \tau)}{(h(t) - h(\tau))^{1-\alpha}} \right) d\tau \right| + \left| \int_t^{t_n} \frac{h'(\tau)u(t_n, \tau)}{(h(t_n) - h(\tau))^{1-\alpha}} d\tau \right| \\
 &= \left| \int_a^t \frac{h'(\tau)}{(h(t) - h(\tau))^{1-\alpha}} (u(t_n, \tau) - u(t, \tau)) d\tau \right. \\
 &\quad \left. + \left(\int_a^t \frac{h'(\tau)u(t_n, \tau)}{(h(t_n) - h(\tau))^{1-\alpha}} - \int_a^t \frac{h'(\tau)u(t_n, \tau)}{(h(t) - h(\tau))^{1-\alpha}} \right) d\tau \right| + \left| \int_t^{t_n} \frac{h'(\tau)u(t_n, \tau)}{(h(t_n) - h(\tau))^{1-\alpha}} d\tau \right| \\
 &\leq \left| \int_a^t \frac{h'(\tau)}{(h(t) - h(\tau))^{1-\alpha}} (u(t_n, \tau) - u(t, \tau)) d\tau \right| \\
 &\quad + \left| \left(\int_a^t \frac{h'(\tau)u(t_n, \tau)}{(h(t_n) - h(\tau))^{1-\alpha}} - \frac{h'(\tau)u(t_n, \tau)}{(h(t) - h(\tau))^{1-\alpha}} \right) d\tau \right| + \left| \int_t^{t_n} \frac{h'(\tau)u(t_n, \tau)}{(h(t_n) - h(\tau))^{1-\alpha}} d\tau \right| \\
 &: = A_n + B_n + C_n.
 \end{aligned}$$

Puisque $u(t_n, \tau) \rightarrow u(t, \tau)$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \int_a^t \frac{h'(\tau)}{(h(t) - h(\tau))^{1-\alpha}} (u(t_n, \tau) - u(t, \tau)) d\tau \right| = 0.$$

Une autre part, on a

$$\begin{aligned}
 B_n &= \left| \left(\int_a^t \frac{h'(\tau)u(t_n, \tau)}{(h(t_n) - h(\tau))^{1-\alpha}} - \frac{h'(\tau)u(t_n, \tau)}{(h(t) - h(\tau))^{1-\alpha}} \right) d\tau \right| \\
 &\leq \varphi \|y\| \int_a^t \left(\frac{h'(\tau)}{(h(t) - h(\tau))^{1-\alpha}} - \frac{h'(\tau)}{(h(t_n) - h(\tau))^{1-\alpha}} \right) d\tau \quad (\text{l'hypothèse 6}) \\
 &= \frac{\varphi \|y\|}{\alpha} ((h(t) - h(a))^\alpha + (h(t_n) - h(t))^\alpha - (h(t_n) - h(a))^\alpha) \\
 0 \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} B_n &\leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\varphi \|y\|}{\alpha} ((h(t) - h(a))^\alpha + (h(t_n) - h(t))^\alpha - (h(t_n) - h(a))^\alpha) \right) = 0 \\
 &\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} B_n = 0.
 \end{aligned}$$

Finallement

$$\begin{aligned}
 C_n &= \left| \int_t^{t_n} \frac{h'(\tau)u(t_n, \tau)}{(h(t_n) - h(\tau))^{1-\alpha}} d\tau \right| \\
 &\leq \varphi \|y\| \int_t^{t_n} \frac{h'(\tau)}{(h(t_n) - h(\tau))^{1-\alpha}} d\tau \\
 &= \frac{\varphi \|y\|}{\alpha} ((h(t_n) - h(t))^\alpha) \\
 0 \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} C_n &\leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\varphi \|y\|}{\alpha} ((h(t_n) - h(t))^\alpha) \right) = 0 \\
 &\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} C_n = 0.
 \end{aligned}$$

Par conséquence, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |\gamma(t_n) - \gamma(t)| = 0,$$

qui prouve [7] alors

$$T : C([a, T]; \mathbb{R}) \subseteq C([a, T]; \mathbb{R})$$

est continue et bien défini.

Pour $r > 0$, l'ensemble

$$B(0, r) = \{y \in C([a, T]; \mathbb{R}) : \|y\| \leq r\},$$

Soit $y \in B(0, r)$ pour certains $r > 0$. Pour tout $t \in [a, T]$, on a

$$\begin{aligned} |(Ty)(t)| &= \left| f(t, y(\mu(t))) + g(t, y(v(t))) \int_a^t \frac{h'(\tau) u(t, \tau, y(c_1(\tau)), y(c_2(\tau)), \dots, y(c_n(\tau)))}{(h(t) - h(\tau))^{1-\alpha}} d(\tau) \right| \\ &= |f(t, y(\mu(t))) - f(t, 0) + f(t, 0)| \\ &\quad + (g(t, y(v(t))) + g(t, 0) - g(t, 0)) \int_a^t \frac{h'(\tau) u(t, \tau, y(c_1(\tau)), y(c_2(\tau)), \dots, y(c_n(\tau)))}{(h(t) - h(\tau))^{1-\alpha}} d(\tau) \Big| \\ &\leq |f(t, y(\mu(t))) - f(t, 0)| + |f(t, 0)| \\ &\quad + (|g(t, y(v(t))) - g(t, 0)| + |g(t, 0)|) \int_a^t \frac{h'(\tau) |u(t, \tau, y(c_1(\tau)), y(c_2(\tau)), \dots, y(c_n(\tau)))|}{(h(t) - h(\tau))^{1-\alpha}} d(\tau) \\ &\leq \lambda |y(\mu(t))| + |f(t, 0)| \\ &\quad + (\theta |y(v(t))| + |g(t, 0)|) \int_a^t \frac{h'(\tau) \left| \varphi(\max_{i=1, \dots, n} |y(c_i(\tau))|) \right|}{(h(t) - h(\tau))^{1-\alpha}} d(\tau) \\ &\leq \lambda \|y\| + M + (\theta \|y\| + N) \frac{\varphi(\|y\|)}{\alpha} (h(T) - h(a))^\alpha \\ &\leq \lambda r + M + (\theta r + N) \frac{\varphi(r)}{\alpha} (h(T) - h(a))^\alpha. \end{aligned}$$

Prend $r = r_0$, depuis (H8), on obtient $\|Ty\| \leq r_0$. En conséquence, nous obtenons

$$T(B(0, r_0)) \subseteq B(0, r_0)$$

et $T : B(0, r_0) \rightarrow B(0, r_0)$ est bien défini.

$B(0, r_0)$ est fermée, bornée et non vide.

On montre que T est une application continue en $B(0, r_0)$. Afin de prouver notre demande, prenez $y, z \in B(0, r_0)$ et $\varepsilon > 0$ tel que

$$\|y - z\| \leq \varepsilon.$$

Pour tout $t \in [a, T]$, on a

$$\begin{aligned}
 & |(Ty)(t) - (Tz)(t)| \\
 = & \left| f(t, y(\mu(t))) + g(t, y(v(t))) \int_a^t \frac{h'(\tau)u(t, \tau, y(c_1(\tau)), y(c_2(\tau)), \dots, y(c_n(\tau)))}{(h(t) - h(\tau))^{1-\alpha}} d(\tau) \right. \\
 & \left. - f(t, z(\mu(t))) - g(t, z(v(t))) \int_a^t \frac{h'(\tau)u(t, \tau, z(c_1(\tau)), z(c_2(\tau)), \dots, z(c_n(\tau)))}{(h(t) - h(\tau))^{1-\alpha}} d(\tau) \right| \\
 = & |f(t, y(\mu(t))) \\
 & + (g(t, y(v(t))) + (g(t, z(v(t))) - g(t, z(v(t)))) \int_a^t \frac{h'(\tau)u(t, \tau, y(c_1(\tau)), y(c_2(\tau)), \dots, y(c_n(\tau)))}{(h(t) - h(\tau))^{1-\alpha}} d(\tau) \\
 & - f(t, z(\mu(t))) - g(t, z(v(t))) \int_a^t \frac{h'(\tau)u(t, \tau, z(c_1(\tau)), z(c_2(\tau)), \dots, z(c_n(\tau)))}{(h(t) - h(\tau))^{1-\alpha}} d(\tau) \left| \\
 = & |f(t, y(\mu(t))) - f(t, z(\mu(t))) \\
 & + (g(t, y(v(t))) - g(t, z(v(t)))) \int_a^t \frac{h'(\tau)u(t, \tau, y(c_1(\tau)), y(c_2(\tau)), \dots, y(c_n(\tau)))}{(h(t) - h(\tau))^{1-\alpha}} d(\tau) \\
 & + g(t, z(v(t))) \int_a^t \frac{h'(\tau)u(t, \tau, y(c_1(\tau)), y(c_2(\tau)), \dots, y(c_n(\tau)))}{(h(t) - h(\tau))^{1-\alpha}} d(\tau) \\
 & - g(t, z(v(t))) \int_a^t \frac{h'(\tau)u(t, \tau, z(c_1(\tau)), z(c_2(\tau)), \dots, z(c_n(\tau)))}{(h(t) - h(\tau))^{1-\alpha}} d(\tau) \left|
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= |f(t, y(\mu(t))) - f(t, z(\mu(t)))| \\
&\quad + (g(t, y(v(t))) - g(t, z(v(t)))) \int_a^t \frac{h'(\tau)u(t, \tau, y(c_1(\tau)), y(c_2(\tau)), \dots, y(c_n(\tau)))}{(h(t) - h(\tau))^{1-\alpha}} d(\tau) \\
&\quad + g(t, z(v(t))) \left(\int_a^t \frac{h'(\tau)u(t, \tau, y(c_1(\tau)), y(c_2(\tau)), \dots, y(c_n(\tau)))}{(h(t) - h(\tau))^{1-\alpha}} d(\tau) \right. \\
&\quad \left. - \int_a^t \frac{h'(\tau)u(t, \tau, z(c_1(\tau)), z(c_2(\tau)), \dots, z(c_n(\tau)))}{(h(t) - h(\tau))^{1-\alpha}} d(\tau) \right) \\
&= |f(t, y(\mu(t))) - f(t, z(\mu(t)))| \\
&\quad + (g(t, y(v(t))) - g(t, z(v(t)))) \int_a^t \frac{h'(\tau)u(t, \tau, y(c_1(\tau)), y(c_2(\tau)), \dots, y(c_n(\tau)))}{(h(t) - h(\tau))^{1-\alpha}} d(\tau) \\
&\quad + (g(t, z(v(t))) - g(t, 0) + g(t, 0)) \left(\int_a^t \frac{h'(\tau)u(t, \tau, y(c_1(\tau)), y(c_2(\tau)), \dots, y(c_n(\tau)))}{(h(t) - h(\tau))^{1-\alpha}} d(\tau) \right. \\
&\quad \left. - \int_a^t \frac{h'(\tau)u(t, \tau, z(c_1(\tau)), z(c_2(\tau)), \dots, z(c_n(\tau)))}{(h(t) - h(\tau))^{1-\alpha}} d(\tau) \right) \Big| \\
&\leq |f(t, y(\mu(t))) - f(t, z(\mu(t)))| \\
&\quad + |(g(t, y(v(t))) - g(t, z(v(t))))| \int_a^t \frac{h'(\tau) |u(t, \tau, y(c_1(\tau)), y(c_2(\tau)), \dots, y(c_n(\tau)))|}{(h(t) - h(\tau))^{1-\alpha}} d(\tau) \\
&\quad + (|g(t, z(v(t))) - g(t, 0)| + |g(t, 0)|) \int_a^t \frac{h'(\tau) |V(t, \tau) - W(t, \tau)|}{(h(t) - h(\tau))^{1-\alpha}} d(\tau).
\end{aligned}$$

Où

$$\begin{aligned} V(t, \tau) &= u(t, \tau, y(c_1(\tau)), y(c_2(\tau)), \dots, y(c_n(\tau))), \\ W(t, \tau) &= u(t, \tau, z(c_1(\tau)), z(c_2(\tau)), \dots, z(c_n(\tau))). \end{aligned}$$

En utilisant l'hypothèse considérée, pour tous $t \in [a, T]$, on obtient

$$\begin{aligned} |(Ty)(t) - (Tz)(t)| &\leq |f(t, y(\mu(t))) - f(t, z(\mu(t))) + (g(t, y(v(t))) - g(t, z(v(t))))| \\ &\quad \times \int_a^t \frac{h'(\tau) |u(t, \tau, y(c_1(\tau)), y(c_2(\tau)), \dots, y(c_n(\tau)))|}{(h(t) - h(\tau))^{1-\alpha}} d(\tau) \\ &\quad + (|g(t, z(v(t)))| - g(t, 0) + |g(t, 0)|) \int_a^t \frac{h'(\tau) |V(t, \tau) - W(t, \tau)|}{(h(t) - h(\tau))^{1-\alpha}} d(\tau), \\ &\leq \lambda |y(\mu(t)) - z(\mu(t))| \\ &\quad + \theta |y(v(t)) - z(v(t))| \int_a^t \frac{h'(\tau) \left| \varphi(\max_{i=1, \dots, n} |y(c_i(\tau))|) \right|}{(h(t) - h(\tau))^{1-\alpha}} d(\tau) \\ &\quad + (\theta |z(v(t))| + N) \int_a^t \frac{h'(\tau) \omega_\varepsilon}{(h(t) - h(\tau))^{1-\alpha}} d(\tau) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \lambda |y(\mu(t)) - z(\mu(t))| \\
&\quad + \theta |y(v(t)) - z(v(t))| \varphi(\max_{i=1, \dots, n} |y(c_i(\tau))|) \int_a^t \frac{h'(\tau)}{(h(t) - h(\tau))^{1-\alpha}} d(\tau) \\
&\quad + (\theta |z(v(t))| + N) \omega_\varepsilon \int_a^t \frac{h'(\tau)}{(h(t) - h(\tau))^{1-\alpha}} d(\tau) \\
&= \lambda |y(\mu(t)) - z(\mu(t))| \\
&\quad + \theta |y(v(t)) - z(v(t))| \varphi(\max_{i=1, \dots, n} |y(c_i(\tau))|) \frac{(h(t) - h(a))^\alpha}{\alpha} \\
&\quad + (\theta |z(v(t))| + N) \omega_\varepsilon \frac{(h(t) - h(a))^\alpha}{\alpha} \\
&\leq \lambda \|y - z\| + \frac{\theta \|y - z\| \varphi(\|y\|)}{\alpha} (h(t) - h(a))^\alpha + \frac{(\theta \|z\| + N) \omega_\varepsilon}{\alpha} (h(t) - h(a))^\alpha \\
&\leq \lambda \varepsilon + (h(T) - h(a))^\alpha \left(\frac{\theta \varepsilon \varphi(r_0) + (\theta r_0 + N) \omega_\varepsilon}{\alpha} \right),
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
\omega_\varepsilon &= \sup \{ |u(t, \tau, u_1, u_2, \dots, u_n) - u(t, \tau, v_1, v_2, \dots, v_n)| : t, \tau \in [a, T] \\
&\quad, u_i, v_i \in [-r_0, r_0], |u_i - v_i| \leq \varepsilon, i = 1, \dots, n \}.
\end{aligned}$$

Notez que de la continuité uniforme de la fonction $u \in [a, T] \times [a, T] \times [-r_0, r_0]^n$. Nous observons facilement que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \omega_\varepsilon = 0$. Alors

$$\|Ty - Tz\| \leq \lambda \varepsilon + (h(T) - h(a))^\alpha \left(\frac{\theta \varepsilon \varphi(r_0) + (\theta r_0 + N) \omega_\varepsilon}{\alpha} \right).$$

Passer pour limiter comme $\varepsilon \rightarrow 0^+$, On déduit la continuité de l'opérateur T dans $B(0, r_0)$.

Soit \mathcal{W} est un sous-ensemble non vide de $B(0, r_0)$. Soit $\rho > 0$ est fixé, $z \in \mathcal{W}$ et $t_1, t_2 \in [a, T]$ tel que $|t_1 - t_2| \leq \rho$. Sans restriction de généralité, nous pouvons supposer $t_1 > t_2$. On a

$$\begin{aligned}
 & |(Tz)(t_1) - (Tz)(t_2)| \\
 = & \left| f(t_1, z(\mu(t_1))) + g(t_1, z(v(t_1))) \int_a^{t_1} \frac{h'(\tau)u(t_1, \tau, z(c_1(\tau)), z(c_2(\tau)), \dots, z(c_n(\tau)))}{(h(t_1) - h(\tau))^{1-\alpha}} d(\tau) \right. \\
 & \left. - f(t_2, z(\mu(t_2))) - g(t_2, z(v(t_2))) \int_a^{t_2} \frac{h'(\tau)u(t_2, \tau, z(c_1(\tau)), z(c_2(\tau)), \dots, z(c_n(\tau)))}{(h(t_2) - h(\tau))^{1-\alpha}} d(\tau) \right| \\
 = & |(f(t_1, z(\mu(t_1))) + f(t_1, z(\mu(t_2))) - f(t_1, z(\mu(t_2))) - f(t_2, z(\mu(t_2)))) \\
 & + (g(t_1, z(v(t_1))) + g(t_1, z(v(t_2))) - g(t_1, z(v(t_2))) + g(t_2, z(v(t_2))) - g(t_2, z(v(t_2)))) \\
 & \times \int_a^{t_1} \frac{h'(\tau)u(t_1, \tau, z(c_1(\tau)), z(c_2(\tau)), \dots, z(c_n(\tau)))}{(h(t_1) - h(\tau))^{1-\alpha}} d(\tau) \\
 & - g(t_2, z(v(t_2))) \int_a^{t_2} \frac{h'(\tau)u(t_2, \tau, z(c_1(\tau)), z(c_2(\tau)), \dots, z(c_n(\tau)))}{(h(t_2) - h(\tau))^{1-\alpha}} d(\tau) \Big| \\
 \leq & |(f(t_1, z(\mu(t_1))) - f(t_1, z(\mu(t_2))))| + |f(t_1, z(\mu(t_2))) - f(t_2, z(\mu(t_2)))| \\
 & + (|g(t_1, z(v(t_1))) - g(t_1, z(v(t_2)))| + |g(t_1, z(v(t_2))) - g(t_2, z(v(t_2)))|) \\
 & \times \int_a^{t_1} \frac{h'(\tau)u(t_1, \tau, z(c_1(\tau)), z(c_2(\tau)), \dots, z(c_n(\tau)))}{(h(t_1) - h(\tau))^{1-\alpha}} d(\tau) \\
 & + |g(t_2, z(v(t_2)))| \left(\int_a^{t_1} \frac{h'(\tau)u(t_1, \tau, z(c_1(\tau)), z(c_2(\tau)), \dots, z(c_n(\tau)))}{(h(t_1) - h(\tau))^{1-\alpha}} d(\tau) \right. \\
 & \left. - \int_a^{t_2} \frac{h'(\tau)u(t_2, \tau, z(c_1(\tau)), z(c_2(\tau)), \dots, z(c_n(\tau)))}{(h(t_2) - h(\tau))^{1-\alpha}} d(\tau) \right).
 \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
 |(Tz)(t_1) - (Tz)(t_2)| &\leq |(f(t_1, z(\mu(t_1))) - f(t_1, z(\mu(t_2)))) + |f(t_1, z(\mu(t_2))) - f(t_2, z(\mu(t_2)))| \\
 &+ (|g(t_1, z(v(t_1))) - g(t_1, z(v(t_2)))| + |g(t_1, z(v(t_2))) - g(t_2, z(v(t_2)))|) \\
 &\times \int_a^{t_1} \frac{h'(\tau)u(t_1, \tau, z(c_1(\tau)), z(c_2(\tau)), \dots, z(c_n(\tau)))}{(h(t_1) - h(\tau))^{1-\alpha}} d(\tau) \\
 &+ (|g(t_2, z(v(t_2))) - g(t_2, 0)| + |g(t_2, 0)|) \left(\int_a^{t_1} \frac{h'(\tau)u(t_1, \tau, z(c_1(\tau)), z(c_2(\tau)), \dots, z(c_n(\tau)))}{(h(t_1) - h(\tau))^{1-\alpha}} d(\tau) \right. \\
 &\left. - \int_a^{t_2} \frac{h'(\tau)u(t_2, \tau, z(c_1(\tau)), z(c_2(\tau)), \dots, z(c_n(\tau)))}{(h(t_2) - h(\tau))^{1-\alpha}} d(\tau) \right)
 \end{aligned}$$

En utilisant l'hypothèse envisagée, on obtien

$$\begin{aligned}
 |(Tz)(t_1) - (Tz)(t_2)| &\leq \lambda |z(\mu(t_1)) - z(\mu(t_2))| + \omega_f(\rho) + (\theta |z(v(t_1)) - z(v(t_2))| + \omega_g(\rho)) \\
 &\times \frac{\varphi(\max_{i=1, \dots, n} |z(c_i(\tau))|)}{\alpha} (h(T) - h(a))^\alpha + (\theta |z(v(t_2))| + N) \\
 &\times \left(\int_a^{t_1} \frac{h'(\tau)u(t_1, \tau, z(c_1(\tau)), z(c_2(\tau)), \dots, z(c_n(\tau)))}{(h(t_1) - h(\tau))^{1-\alpha}} d(\tau) \right. \\
 &+ \left(\int_a^{t_2} \frac{h'(\tau)u(t_1, \tau, z(c_1(\tau)), z(c_2(\tau)), \dots, z(c_n(\tau)))}{(h(t_1) - h(\tau))^{1-\alpha}} d(\tau) \right. \\
 &\left. - \int_a^{t_2} \frac{h'(\tau)u(t_1, \tau, z(c_1(\tau)), z(c_2(\tau)), \dots, z(c_n(\tau)))}{(h(t_1) - h(\tau))^{1-\alpha}} d(\tau) \right. \\
 &\left. + \int_a^{t_2} \frac{h'(\tau)u(t_1, \tau, z(c_1(\tau)), z(c_2(\tau)), \dots, z(c_n(\tau)))}{(h(t_2) - h(\tau))^{1-\alpha}} d(\tau) \right. \\
 &\left. - \int_a^{t_2} \frac{h'(\tau)u(t_1, \tau, z(c_1(\tau)), z(c_2(\tau)), \dots, z(c_n(\tau)))}{(h(t_2) - h(\tau))^{1-\alpha}} d(\tau) \right) \\
 &\left. - \int_a^{t_2} \frac{h'(\tau)u(t_2, \tau, z(c_1(\tau)), z(c_2(\tau)), \dots, z(c_n(\tau)))}{(h(t_2) - h(\tau))^{1-\alpha}} d(\tau) \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \lambda |z(\mu(t_1)) - z(\mu(t_2))| + \omega_f(\rho) + (\theta |z(v(t_1)) - z(v(t_2))| + \omega_g(\rho)) \\
&\quad \times \frac{\varphi(\max_{i=1, \dots, n} |z(c_i(\tau))|)}{\alpha} (h(T) - h(a))^\alpha + (\theta |z(v(t_2))| + N) \\
&\quad \times \left(\int_a^{t_1} \frac{h'(\tau) u(t_1, \tau, z(c_1(\tau)), z(c_2(\tau)), \dots, z(c_n(\tau)))}{(h(t_1) - h(\tau))^{1-\alpha}} d(\tau) \right. \\
&\quad - \int_a^{t_2} \frac{h'(\tau) u(t_1, \tau, z(c_1(\tau)), z(c_2(\tau)), \dots, z(c_n(\tau)))}{(h(t_1) - h(\tau))^{1-\alpha}} d(\tau) \\
&\quad + \int_a^{t_2} \left| \frac{h'(\tau) u(t_1, \tau, z(c_1(\tau)), z(c_2(\tau)), \dots, z(c_n(\tau)))}{(h(t_1) - h(\tau))^{1-\alpha}} \right. \\
&\quad \left. - \frac{h'(\tau) u(t_1, \tau, z(c_1(\tau)), z(c_2(\tau)), \dots, z(c_n(\tau)))}{(h(t_2) - h(\tau))^{1-\alpha}} \right| d(\tau) \\
&\quad + \int_a^{t_2} \frac{h'(\tau)}{(h(t_2) - h(\tau))^{1-\alpha}} |u(t_1, \tau, z(c_1(\tau)), z(c_2(\tau)), \dots, z(c_n(\tau))) \\
&\quad - u(t_2, \tau, z(c_1(\tau)), z(c_2(\tau)), \dots, z(c_n(\tau)))| \\
&\leq \lambda \omega_1(\rho) + \omega_f(\rho) + (\theta \omega_2(\rho) + \omega_g(\rho)) \frac{\varphi(r_0)}{\alpha} (h(T) - h(a))^\alpha \\
&\quad + (\theta r_0 + N) \left(\frac{\varphi(r_0)}{\alpha} (h(t_1) - h(t_2))^\alpha + \frac{\varphi(r_0)}{\alpha} ((h(t_2) - h(a))^\alpha \right. \\
&\quad \left. + (h(t_1) - h(t_2))^\alpha - (h(t_1) - h(a))^\alpha) + \frac{\omega_3(\rho)}{\alpha} (h(t_2) - h(a))^\alpha \right) \\
&\leq \lambda \omega_1(\rho) + \omega_f(\rho) + (\theta \omega_2(\rho) + \omega_g(\rho)) \frac{\varphi(r_0)}{\alpha} (h(T) - h(a))^\alpha \\
&\quad + (\theta r_0 + N) \left(\frac{2\varphi(r_0)}{\alpha} \omega(h, \rho) + \frac{\omega_3(\rho)}{\alpha} (h(T) - h(a))^\alpha \right).
\end{aligned}$$

Où

$$\omega_1(\rho) = \sup \{|z(\mu(t)) - z(\mu(s))| : t, s \in [a, T], |t - s| \leq \rho\},$$

$$\omega_2(\rho) = \sup \{|z(v(t)) - z(v(s))| : t, s \in [a, T], |t - s| \leq \rho\},$$

$$\omega_f(\rho) = \sup \{|f(t, u) - f(s, u)| : t, s \in [a, T], |t - s| \leq \rho, u \in [-r_0, r_0]\},$$

$$\omega_g(\rho) = \sup \{|g(t, u) - g(s, u)| : t, s \in [a, T], |t - s| \leq \rho, u \in [-r_0, r_0]\},$$

$$\omega_3(\rho) = \sup \{|u(t_1, s, u_1, \dots, u_n) - u(t_2, s, u_1, \dots, u_n)| : t_1, t_2, s \in [a, T], |t_1 - t_2| \leq \rho, u_i \in [-r_0, r_0], i = 1, \dots, n\},$$

On observe que

$$\omega_1(\rho) \leq \sup \{|z(t) - z(s)| : t, s \in [a, T], |t - s| \leq L\rho^p\} = \omega(z, L\rho^p).$$

De même

$$\omega_2(\rho) = \sup \{|z(t) - z(s)| : t, s \in [a, T], |t - s| \leq D\rho^q\} = \omega(z, D\rho^q).$$

On note également que

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} \omega_f(\rho) = \lim_{\rho \rightarrow 0^+} \omega_g(\rho) = \lim_{\rho \rightarrow 0^+} \omega_3(\rho) = 0.$$

Donc

$$\begin{aligned} \Omega(T\mathcal{W}, \rho) &\leq \lambda\Omega(\mathcal{W}, L\rho^p) + \omega_f(\rho) + (\theta\Omega(\mathcal{W}, D\rho^q) + \omega_g(\rho)) \frac{\varphi(r_0)}{\alpha} (h(T) - h(a))^\alpha \\ &\quad + (\theta r_0 + N) \left(\frac{2\varphi(r_0)}{\alpha} \omega(h, \rho) + \frac{\omega_3(\rho)}{\alpha} (h(T) - h(a))^\alpha \right). \end{aligned}$$

Passer à la limite comme $\rho \rightarrow 0^+$, on a

$$\sigma(T\mathcal{W}) \leq \left(\lambda + \theta \frac{\varphi(r_0)}{\alpha} (h(T) - h(a))^\alpha \right) \sigma(\mathcal{W}).$$

Ensuite, nous avons prouvé cela pour tout sous-ensemble non vide \mathcal{W} de $B(0, r_0)$, nous avons

$$\sigma(T\mathcal{W}) \leq K\sigma(\mathcal{W}),$$

où

$$K = \lambda + \theta \frac{\varphi(r_0)}{\alpha} (h(T) - h(a))^\alpha.$$

On note que de (H8) nous avons $K < 1$, car

$$\begin{aligned} & \lambda r_0 + M + (\theta r_0 + N) \frac{\varphi(r_0)}{\alpha} (h(T) - h(a))^\alpha < r_0, \\ \Leftrightarrow & \lambda + \frac{M}{r_0} + (\theta r_0 + N) \frac{\varphi(r_0)}{\alpha r_0} (h(T) - h(a))^\alpha < 1, \\ \Leftrightarrow & \lambda + \theta \frac{\varphi(r_0)}{\alpha} (h(T) - h(a))^\alpha + \frac{M}{r_0} + N \frac{\varphi(r_0)}{\alpha r_0} (h(T) - h(a))^\alpha < 1, \\ \Leftrightarrow & \lambda + \theta \frac{\varphi(r_0)}{\alpha} (h(T) - h(a))^\alpha < 1. \end{aligned}$$

Donc $B(0, r_0)$ est fermée, bornée, et non vide et $T : B(0, r_0) \rightarrow B(0, r_0)$ est σ -contraction.

En appliquant le théorème de Darbo, on en déduit que T a au moins un point fixe $y^* \in B(0, r_0)$, qui est une solution à équation (3.2.1). ■

Ensuite, du théorème 3.2.1. On en déduit le résultat d'existence suivant.

Corollaire 3.2.1 *Supposons que les hypothèses (H1)–(H6) sont satisfait. Supposons également qu'il y a quelques $r_0 > 0$ tel que*

$$\lambda r_0 + M + (\theta r_0 + N) \frac{\varphi(r_0)}{\alpha} (T - a)^\alpha < r_0.$$

Alors l'équation (3.1.1) a au moins une solution $y^ \in C([a, T]; \mathbb{R})$. De plus, tels satisfait de la solution*

$$\|y^*\| \leq r_0.$$

Nous présentons l'exemple suivant pour illustrer le résultat ci-dessus.

Exemple 3.2.1 *Nous considérons l'équation intégrale*

$$y(t) = \frac{2y(t^2)}{5} + \frac{1+t}{8} + \frac{y(\cos t) + t^2}{36} \int_0^t \frac{\ln(1 + |y(\tau)|)}{(1+t+\tau)\sqrt{t-\tau}} d\tau. \quad (3.2.2)$$

On pose

$$f(t, x) = \frac{2x}{5} + \frac{1+t}{8}, \quad g(t, x) = \frac{x+t^2}{36}, \quad (t, x) \in [0, 1] \times \mathbb{R},$$

$$u(t, s, x) = \frac{\ln(1+|x|)}{1+t+s}, \quad (t, s, x) \in [0, 1] \times [0, 1] \times \mathbb{R},$$

$$\mu(t) = t^2, \quad v(t) = \cos t, \quad c_1(t) = t, \quad t \in [0, 1], \quad \alpha = \frac{1}{2}.$$

Nous pouvons réécrire l'équation (3.2.2) sous la forme

$$y(t) = f(t, y(\mu(t)) + g(t, y(v(t))) \int_0^t \frac{u(t, \tau, y(c_1(\tau)))}{(t-\tau)^{1-\alpha}} d\tau, \quad t \in [0, 1].$$

Pour tout $t, s \in [0, 1]$, on a

$$|\mu(t) - \mu(s)| = |t^2 - s^2| = |t+s||t-s| \leq 2|t-s|.$$

Ensuite, l'hypothèse (H2) est satisfaite de

$$L = 2 \text{ and } p = 1.$$

Pour tout $t, s \in [0, 1]$, on a

$$|v(t) - v(s)| = |\cos t - \cos s| \leq |t - s|.$$

Ensuite, l'hypothèse (H3) est satisfaite de

$$D = q = 1.$$

Pour tout $(t, u, v) \in [0, 1] \times \mathbb{R}^2$, on a

$$|f(t, u) - f(t, v)| \leq \frac{2}{5} |u - v|.$$

Ensuite, l'hypothèse (H4) est satisfaite de

$$\lambda = \frac{2}{5}.$$

Pour tout $(t, u, v) \in [0, 1] \times \mathbb{R}^2$, on a

$$|g(t, u) - g(t, v)| \leq \frac{1}{36} |u - v|.$$

Ensuite, l'hypothèse (H5) est satisfaite de

$$\theta = \frac{1}{36}.$$

Pour tout $(t, s, x) \in [0, 1] \times [0, 1] \times \mathbb{R}$, on a

$$|u(t, s, x)| \leq \ln(1 + |x|) = \varphi(|x|),$$

Où

$$\varphi(r) = \ln(1 + r), \quad r \geq 0.$$

Ensuite, l'hypothèse (H6) est également satisfaite. Notez que dans ce cas, on a

$$M = \frac{1}{4} \text{ et } N = \frac{1}{36}.$$

Soit $r_0 = 1$. On a

$$\lambda r_0 + M + (\theta r_0 + N) \frac{\varphi(r_0)}{\alpha} (T - a)^\alpha = \frac{2}{5} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} \ln 2 \approx 0.727 < r_0 = 1.$$

En appliquant Corollary précédente, nous obtenons l'existence d'au moins une solution $y^* \in C([0, 1]; \mathbb{R})$ à l'équation (3.2.2) tel que

$$\|y^*\| \leq 1.$$

Bibliographie

- [1] R. P. Agarwal, B. Samet, An existence result for a class of nonlinear integral equation of fractional orders, *Nonlinear Analysis: Modelling and Control*, 2016, No 5, 716-729.
- [2] R. P. Agarwal, M. Meehan and D. O'Regan, *Fixed Point Theory and Applications*, Cambridge University Press, Cambridge, 2004.
- [3] R. I. Avery, *Three Positive Fixed Points of Nonlinear Operators on Ordered Banach Spaces*, College of Natural Sciences, Dakota State University Madison , SD 57042 , U.S.A
- [4] J. Banas¹, Measures of noncompactness in the study of solutions of nonlinear differential and integral equations, *Central European Journal of Mathematics*, Poland, (2012). 2003-2011.
- [5] J. Banas, K. Goebel, *Measures of Noncompactness in Banach Spaces*, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, vol 60, Marcel Dekker, New York, 1980.
- [6] B. Bojareski, *Dissertationes Mathematicae*, PWN-Polish Scientific Publishers, Warszawa 1988.
- [7] L. Cai, J. Liang, New generalizations of Darbo's fixed point theorem, *Fixed Point Theory and Applications* (2015) 2015:156.
- [8] G. Darbo, Punti uniti in trasformazioni a condominio non compatto. *Rend. Semin. Mat. Univ. Padova* 24, 84-92 (1955)

- [9] C. Minazzo, K. Rider, Théorème du point fixe et application aux equation différentielles, mémoire de Master 1 de mathématique, Université de Nice-Sophia, Antipolis 2006-2007.
- [10] F. Nier, D. Iftimie, Introduction à la topologie, Licence de Mathématiques Université de Rennes 1.
- [11] E. Zeidler, Nonlinear Functional Analysis and its Applications. I: Fixed-Point Theorems. Springer- Verlag. New York Berlin Heidelberg London Paris. Tokyo Hong Kong Barcelona Budapest.

Conclusion

La théorie du point fixe est d'une importance capitale dans l'étude de l'existence de solution pour les équations intégrales non linéaires d'ordre fractionnaire dans des espaces de Banach. De nombreux théorèmes d'existence sont obtenus à partir de théorème de Darbo, en transformant le problème en un problème de point fixe.

Nous avons essayé dans ce travail de donner une idée complète sur l'existence des solutions pour les équations intégrales non linéaires d'ordre fractionnaire, en utilisant le théorème de Darbo.

Nous espérons aussi que nous avons contribué même un peu pour aider les chercheurs du savoir à surmonter certains des problèmes que vous pouvez rencontrer dans son carrière scientifique.

Nous avons utilisé la technique de mesure non compacité pour prouver l'existence des solutions pour une classe des équations intégrales non linéaires d'ordre fractionnaire dans un espace de Banach.

Nous estimons que cette technique est très efficace et on peut l'utiliser pour des autres et différentes problèmes, notamment les équations différentielles ou intégro-différentielles.

المُلخَص

تقنية قياس عدم التراص، هي أداة فعالة جدا لدراسة المعادلات التفاضلية والتكاملية. في الآونة الأخيرة استخدم العديد من الكتاب نظرية داربو المرتبطة بقياس عدم التراص في فضاءات بناخ لدراسة سلوك وحلول المعادلات التفاضلية والتكاملية. في هذا العمل طبقنا نظرية داربو للنقطة الثابتة المرتبطة بقياس عدم التراص لإثبات وجود حلول للمعادلات غير الخطية ذات الرتب الكسرية في فضاء بناخ.

Résumé

La technique de mesure de non compacité est un outil très efficace pour l'étude des équations différentielle ou intégrales ; récemment plusieurs auteurs ont utilisé le théorème de Darbo associé au mesure de non compacité due à Banas, pour étudier le comportement des solutions pour les équations différentielle ou intégrales

Dans ce travail on va appliquer le théorème de Darbo de point fixe associé au mesure de non compacité, pour démontrer l'existence des solutions pour une classe des équation intégrales non linéaire fractionnaire dans un espace de Banach.

Abstract

The technique of non compactness measure is a very efficient tool for the study of differential or integral equations.

Recently several authors have used the Darbo theorem associated with the measure of non compactness due to Banas, for study the behavior of solutions for differential or integral equations.

In this work, we will apply the Darbo's theorem of fixed point associated to the measure of non compactness, to demonstrate the existence of solutions for a class of nonlinear integral equations of fractional order in Banach space.