République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur
et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ HAMMA LAKHDAR D'EL OUED

FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES

Mémoire de fin d'étude

MASTER ACADEMIQUE

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Spécialité : Mathématiques fondamentales et appliquées

Thème

Polynômes orthogonaux combinaison linéaire des polynômes orthogonaux de Tchebychev de première et seconde espèces

Présenté par : Lebbouz Oulaya et **Chennouf Nafissa**

Encadré Par : Dr. Abdelhamid Rehouma

Année universitaire 2024 - 2025.

ملخص

تهدف هذه المذكرة إلى دراسة الخواص الأساسية لكثيرات الحدود المتعامدة لتشيبشياف كالخاصية التراجعية والخواص الاشتقاقية و التكاملية والخواص الحدية. كما سنتطرق إلى دراسة جمل كثيرات حدود متعامدة جديدة مشكلة من مزج خطي لكثيرات الحدود المتعامدة لتشيبيشاف للفئة الأولى والفئة الثانية بالنسبة لوزن معلوم كما ستتضمن الدراسة تناول الخاصية التراجعية والخاصية الحدية والخواص الاشتقاقية التكاملية لهذه الجملة الجديدة لكثيرات الحدود المتعامدة لتشيبيشاف

الكلمات المفتاحية

كثيرات الحدود المتعامدة, تشيبيشيف, علاقات التكرار , تركيب خطي , دالة الوزن, قطعة مستقيمة.

Résumè

Dans ce mémoire on vise à étudier quelques propriétés fondamentales des polynômes orthogonaux de Tchebychev citons par exemple les propriétés récurrences et propriétés différentielles et intégrales aussi les propriétés extrémales puis nous passons à étudier un nouveau système des polynômes orthogonaux combinaison linéaires des polynômes de Tchebychev de première et seconde espèces nous traitons d'ailleurs les mêmes propriétés récurrences et propriétés différentielles et intégrales aussi les propriétés extrémales de ce nouveau système des polynômes orthogonaux de Tchebychev

Mots clés

Polynômes orthogonaux , Tchebychev, Récurrence relations, Combinaison linéaire , Fonction poids, Segment.

Abstract

We study in this memory the orthogonal polynomials of Tchebychev preciesely we treat the recurrence relations and extremal properties and integrodifferentiations properties .We dicover a new set of orthogonal polynomials linear combination of Tchebychev polynomials of first and second kinds. Howver we study same properties of this new set of orthogonal polynomials of Tchebychev

Keywords

Tchebychev polynomials, Three terms recurrence relations, Linear Combination , Weight function , Segment.

شكر وعرفان

قال الله تعالى "ربي اوزعني ان اشكر نعمتك علي وعلى والدي وان اعمل صالحا ترضاه وأدخلني برحمتك في عبادك الصالحين "سورة النمل الآية 19

من لا يشكر المخلوق لا يشكر الخالق , عندما نبحث عن كلمات شكر وتقدير ، فإن أجمل عبارات الشُكر والتقدير لابد أن تسبق حروفنا وتنهي سُطورنا معبرة عن صدق المعاني النابعة من قلوبنا.

عندما يكون العمل و الجهد مميّزاً ومثمراً و العطاء فعّالاً، تسمو النفوس إلى مرافأ الإبداع و الرقي، وعندما يكون للشكر و التقدير معنى وللثناء فائدة، ندعو الله أن يبارك مسعاكم بالأجر و الثواب.

الف تحية شكر وتقدير وإمتنان على الجهود المبذولة من قبل أستاذنا الفاضل المشرف «عبد الحميد رحومة» الذي كان أستاذا موجّهاً وأخاً ناصحاً صادقاً لنا قبل أن يكون مشرفاً بارعاً جزاك الله كل خير.

ولا ننسى بالتوجيه بجميل الشكر والعرفان والامتنان للجنة المناقشة الافاضل بارك الله فيكم وجزاكم الله عنا خير الجزاء.

قال رسول الله صلى الله عليه وسلم " من صنع إليكم معروفاً فكافئوه فإن لم تجدوا ما تكافئونه فأدعو له حتى تروا أنكم كافأتموه"

لبوز علية و شنوف نفيسة

الإهداء

﴿وَآخِرُ دَعْوَاهُمْ أَنِ الْحَمْدُ لِلَّهِ رَبِّ الْعَالَمِينَ﴾

الحمد لله حمدًا دائمًا طيبًا مباركًا، شكرًا على ما مضى، وامتنانًا على ما هو آت.

ها أنا اليوم أقف على مشارف التخرج، بعد رحلة علمية امتدت لسنوات، تخللتها الليالي الطوال، والأحلام التي كنت أرجو تحقيقها. وها أنا أقطف اليوم أولى ثمار جهدي، راضيةً بحكم الله، شاكرةً له الحمد، وكلّي أمل أن تكون هذه الخطوة بدايةً لما هو أعظم بإذن الله.

أهدي هذا العمل:

إلى من زيّن اسمي بدعائه، وكان سندي في كل مراحل حياتي، إلى من منحني الأمان والحب بلا حدود، إلى من لا تفيه الكلمات حقه : **إلى والدي العزيز.**

إلى من كانت السند الحقيقي، ومصدر العطاء والحنان، ومن سهرت لأجل راحتي وتعبت كي أبلغ ما أنا عليه اليوم : **إلى والدتي العظيمة.**

إلى إخوتي الذين كانوا عوني ورفاق دربي، وشجعوني دومًا على المضي قدمًا: **إلى أحبتي .**

إلى الأساتذة الكرام الذين لم يبخلوا بعلمهم وتوجيههم، وكانوا شعلة تنير طريقي لكم مني كل التقدير والامتنان.

ولا أنسى زملائي الذين شاركوني هذا الطريق، وكانوا رفقاء الدرب في كل خطوة شكرًا لجميل صحبتكم.

أرجو أن يكون هذا العمل ثمرةً طيبةً لجهودكم، وعربون شكرٍ لكل من كان له أثر في رحلتي.

لبوز علية

الإهداء

(يَرْفَعِ اللَّهُ الَّذِينَ آمَنُوا مِنْكُمْ وَالَّذِينَ أُوتُوا الْعِلْمَ دَرَجَاتٍ وَاللَّهُ بِمَا تَعْمَلُونَ خَبِيرٌ)

ما سلكنا البدايات إلا بتيسيره وما بلغنا النهايات إلا بتوفيقه وما حققنا الغايات إلا بفضل الله.

وكان فضل الله علي عظيماً.... الحمدُلله ما أنتهى دربٌ و لا خُتم جهدٌ و لا تمّ سعيٌ إلّا بفضلِه ، الحمدلله على البُلوغ ، الحمدلله على التمَام ، الحمدلله على لذّة الإنجاز. اللَّهُمَّ لَيْسَ بِجَهْدِي وَاجْتِهَادِي إِنَّمَا بَتَوْفِيقِكَ وَكَرمِكَ وَفَضْلِكَ عليّ .

مهما كتبت من عبارات تخرج فلن أجد أصدق من قوله تعالى :وآخِرُ دعواهم أنِ الْحَمْدُ للّهِ رَبّ العالمين "

أهدي تخرُجي وثمرة جُهدي إلى من افنى عمرهُ من اجلنا ومن أجل إيصالنا نحو القِمم وكان دافعاً مكافحًا لتحقيقنا النجاح والتفوق أبي الغالي حفظهُ الله وأطال بعمره

وإلَى مَنْ كَانَ دعاؤها سِرّ نجاحي ، إلَى مَنْ حاكَت سعادتي بِخُيُوط مَنْسُوجَةٍ مِنْ قَلْبهَا الغالية(أُمِّي) .

إلى من كانوا و ما زالوا عوناً و سنداً لي في عثرات أيامي ، إلى من بذلوا جهد السنين من أجل أن أعتلي سلالم النجاح ، إلى من كانت دعواتهم سبب في نجاحي و توفيقي الدائم (أخوتي).

الى توأمي روحي ورفيقتا دربي اختي (رجاء).

إلى من فتحوا افئدتهم لي عندما ضاقت بي دروب الحياة رغم اتساعها مؤنسي الطريق رفاق الدرب اصدقائي كل بإسمه

إلى كل الاساتذة الافاضل الذين درسونا من مرحلة الابتدائي الى جامعي شكرا لكم

أخيراً أود أن اقول لم يكن الامرُ سهلاً ولكنني فعلتها بفضل الله.

شنوف نفيسة

Table des matières

Motivation

"Chebyshev polynomials are everywhere dense in numerical analysis."

Cette remarque a été attribué à un certain nombre d'éminents mathématiciens et numériciens. Il peut être dû à Philip Davis, a certainement parlé par George Forsythe, et c'est un attrayant et apte remarque. Il n'y a guère de domaine de l'analyse numérique où de Tchebychev ne chute pas en surprise comme visiteurs, et en fait, il y a maintenant un certain nombre de sujets dans lesquels ces polynômes prendre une position importante dans les développements modernes - y compris les polynômes orthogonaux, approximation polynomiale, intégration numérique, et des méthodes spectrales pour des équations aux dérivées partielles.
Cependant, il y a un autre aspect que l'on peut donner à la citation ci-dessus, à savoir que par l'étude de Tchebychev l'un est pris dans un voyage qui mène à tous les domaines de l'analyse numérique.

D'ailleurs, parmi leurs célèbres applications Les polynômes de Tchebychev permettent de démontrer le théorème de Weierstrass selon lequel toute fonction continue sur un segment est limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales.
Ils sont également impliqués dans le calcul de filtres en électronique analogique, "les filtres de Tchebychev". Enfin, ils permettent une explication théorique de l'efficacité supérieure de la transformée en cosinus discrète dans le cadre de l'interpolation d'un signal numérique échantillonné, par rapport à d'autres méthodes comme le ≪zéro-padding + filtrage passe-bande≫.

Introduction

La première famille des polynômes orthogonaux apparaît avec les premiers travaux de Legendre sur les mouvements planétaires en 1784. Dans ces travaux, il avait établi plusieurs propriétés communes de ces familles. Il a notamment explicité l'équation différentielle du second ordre ayant pour solution ces polynômes et étudié les zéros de ces polynômes. Cette famille porte aujourd'hui le nom de "polynômes de Legendre". Par la suite, d'autre famille ont été introduites notamment celle de Hermite(1864), qui est utilisé dans la théorie des approximations. Nous pouvons citer aussi les travaux de N.H.Abel, V.L.Lagrange, P.L.Tchebychev qui a commencé, avec T.J.Steiltjes, la création et le développement de la théorie générale des polynômes orthogonaux à l'aide des fractions continues. En 1879 Laguerre avait introduit une famille des polynômes qui portent son nom aujourd'hui. Il a montré entre autre que ces polynômes orthogonaux sont liés à certaines fractions continues. Au milieu du XIX siècle, Jacobi introduit une nouvelle famille qui généralise les polynômes de Legendre et de Tchebychev.Aujourd'hui,ces trois familles Jacobi, Laguerre et Hermite, sont connues par le nom des "vrais polynômes classiques". Le premier ouvrage consacré entièrement aux polynômes orthogonaux est celui de Shohat édité en 1934 sous le titre "Théorie Générale des Polynômes Orthogonaux". Vient ensuite, en 1939, le livre de Szegö intitulé "Orthogonal Polynomials" qui traite la théorie générale des polynômes orthogonaux et leur comportement asymptotique. De nos jours on peut citer le livre de Chihara (1978) qui traite la théorie algébrique de l'orthogonalité et des nouvelles notions introduites ces dernières années. La notion de l'orthogonalité usuelle a subi beaucoup de généralisation, ça a commencé par la notion des p-(p $>$ 1)orthogonalité (Boukhemis 1988) puis la d-orthogonalité (P. Maroni 1989), vient ensuite notamment la biorthogonalité (Brezinski 1992) et enfin l'orthogonalité multiple (Aptekarev, Van Assche...).Bien sûr toutes ces notions ont été introduites afin d'améliorer les méthodes de l'approximation qu'elles soient fonctionnelles au sens des Hermite-Padé généralisée, d'augmenter l'ordre des équations différentielles ayant pour solution ces polynômes et par suite rendre plus compréhensibles les phénomènes modélisés par ces équations différentielles. Dans ce mémoire, qui traite la classe des polynômes de Tchebychev (les quatres espèces de Tchebychev) nous nous somme beaucoup référés aux 2 ouvrages de Mason et Handscomb et de Chihara.

Les polynômes de Tchebychev sont nommés d'après le mathématicien pafnouti Tchebychev. ils forment deux familles de polynômes , indexés par leur degré.

Le polynôme de Tchebychev de première espèce T_n est défini par la propriété suivante : pour tout nombre réel x,$T_n(\cos(x)) = \cos(nx)$.

Le polynôme de Tchebychev de seonde espèce U_n est défini par :$U_n(\cos(x)) = \dfrac{\sin((n+1)x)}{\sin x}$.

Chacune de ces deux suites forme une famille de polynômes orthogonaux par rapport à une certaine fonction poids , et vérifie la relation de récurrence suivante :$f_{n+2}(X) + f_n(X) = 2Xf_{n+1}(X)$.

Les polynômes de Tchebychev sont utilisés comme base de L^p,comme mentionné dans l'article intitulé $\ll$ Mémoire effectué au LMNO à Caen encadré par Eric Ricard (juin-juillet 2015) $\gg$.[15],[16]

Chapitre 1

polynômes de Tchebychev : propriétés et orthogonalité

Dans ce chapitre nous allons exposer quelques propriétés fondamentales des polynômes orthogonaux de Tchebychev de première et seconde et troisième et quatrième espèces citons leur relations de recurrences et leurs propriétés extremales aussi quelques propriétés de leurs équations integrodifferentielles .

1.1 Généralités sur l'orthogonalité

La théorie des polynômes orthogonaux est un sujet lié avec des branches très importantes de l'analyse. Les polynômes orthogonaux, c'est à dire les fonctions trigonométriques, hypergéométriques, Bessel et elliptiques, rentrent dans le cadre des fractions continues, les problèmes d'interpolation (de Lagrange, de Hermite), la théorie des équations différentielles et intégrales. Pour motiver cette idée, remarquons que l'identité

$$2\cos m\theta \cos n\theta = \cos(m+n)\theta + \cos(m-n)\theta \tag{1.1}$$

donne la formule d'intégration suivante :

$$\int_0^{\pi} \cos(m\theta)\cos(n\theta)d\theta = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n, m, n \geqslant 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } m = n, m, n \neq 0 \\ \pi & \text{si } m = n = 0 \end{cases} \tag{1.2}$$

de la formule d'intégration précédente, quand l'intégral s'annule, on dit que $\cos(m\theta)$ et $\cos(n\theta)$ sont orthogonaux dans l'intervalle $[0;\pi]$, pour
$m \neq n$.
Si on pose :

$$x = \cos\theta,$$

alors la formule s'écrit comme suit :

$$\int_{-1}^{1} T_n(x)T_m(x)(1-x^2)^{\frac{-1}{2}}dx = 0, \quad m \neq n \tag{1.3}$$

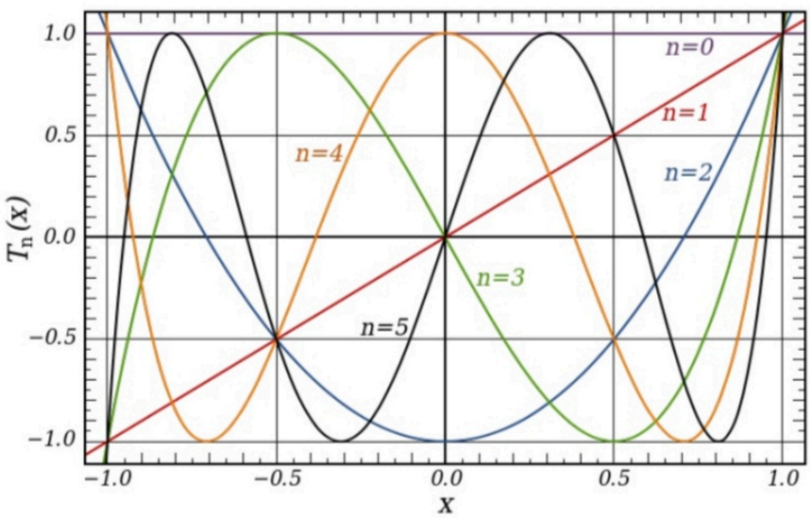
où

$$\cos(n\theta) = T_n(x) = \cos(n \arccos x), \quad -1 \leq x \leq 1, \tag{1.4}$$

on a :

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x,$$
$$T_2(x) = 2x^2 - 1 \quad T_3(x) = 4x^3 - 3x, \ldots$$

Voici les graphes des polynômes $T_0(x), T_1(x), T_2(x), T_3(x), T_4(x), T_5(x)$



Définition 1.1.1. On appelle fonction poids sur intervalle $[a; b] \subset R$, toute fonction w qui vérifie les deux conditions :

$$\forall x \in [a; b], \quad w(x) \geqslant 0 \quad \text{et}$$
$$\textstyle\int_a^b w(x)dx < \infty$$

exemple : Toutes les fonctions continues positives sur un compact sont des fonctions poids.

Définition 1.1.2. Soit $\{P_n(x)\}_{n\geqslant 0}$ une suite de polynômes avec $\deg(P_n) = n$, et soit w une fonction poids sur $[a; b]$, on dit que $\{P_n(x)\}_{n\geqslant 0}$ une suite de polynômes orthogonaux par rapport à la fonction poids w dans $[a; b]$ si

$$\int_a^b P_n(x)P_m(x)w(x)dx = 0, m \neq n \tag{1.5}$$

d'après (1.3), on peut dire que $\{T_n(x)\}_{n\geqslant 0}$ sont des polynômes orthogonaux par rapport à la fonction poids $(1-x^2)^{\frac{-1}{2}}$ dans $[-1; 1]$.

1.2 les polynômes de Chebychev $T_n(x)$

Définition 1.2.1. Les polynômes de Tchebychev de la première espèce $T_n(x)$ (polynôme de Jacobi pour $\alpha = \beta = \frac{-1}{2}$) sont des polynômes en x de degré n définis à l'aide de la relation suivante :

$$\cos(n\theta) = T_n(x), \text{avec } x = \cos\theta, \tag{1.6}$$

pour tout x dans $[-1; 1]$, alors θ appartient à $[0; \pi]$, on peut vérifier facilement que $T_n(x)$ est un polynôme de degré n, voici quelques polynômes $T_n(x)$:

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x,$$
$$T_2(x) = 2x^2 - 1 \quad T_3(x) = 4x^3 - 3x, \ldots$$

on donne quelques valeurs de $T_n(x)$:

$$T_n(1) = 1, T_n(-1) = (-1)^n, T_{2n}(0) = (-1)^n, T_{2n+1}(0) = 0.$$

Proposition 1.2.1. Les polynômes de Tchebychev de la première espèce $T_n(x)$ sont orthogonaux dans l'intervalle $[-1; 1]$ par rapport à la fonction poids $w(x) = (1-x^2)^{\frac{-1}{2}}$
i.e.

$$\int_{-1}^1 T_n(x)T_m(x)(1-x^2)^{\frac{-1}{2}}\, dx = \frac{\pi}{2}\delta_{mn}$$

Proposition 1.2.2. Les polynômes de Tchebychev de la première espèce $T_n(x)$ vérifiant la relation de récurrence d'ordre deux suivante :

$$\begin{cases} T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), \quad \forall n \geq 1, \\ \\ \qquad T_0(x) = 1 \quad \text{ et } \quad T_1(x) = x \end{cases} \tag{1.7}$$

Preuve. Soit $x \in [-1; 1]$, posons $\theta = \arccos x$, ainsi $\theta \in [0; \pi]$,
pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$\begin{aligned} \cos(n+1)\theta + \cos(n-1)\theta &= 2\cos\left[\frac{(n+1)\theta + (n-1)\theta}{2}\right]\cos\left[\frac{(n+1)\theta - (n-1)\theta}{2}\right] \\ &= 2\cos n\theta\cos\theta. \end{aligned}$$

donc

$$\cos(n+1)\theta + \cos(n-1)\theta = 2\cos\theta\cos n\theta,$$

d'où le résultat i.e.

$$T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = 2xT_n(x), \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\text{Avec} \quad T_0(x) = 1 \quad \text{et} \quad T_1(x) = x$$

□

Remarque 1.2.1. D'après (1.7), les polynômes de Tchebychev de la première espèce $T_n(x)$ sont des polynômes de degré n en x.

Proposition 1.2.3. Les polynômes de Tchebychev de la première espèce $T_n(x)$ sont les solutions de l'équation différentielle suivante :

$$(1-x^2)y''(x)-xy'(x)+n^2y(x) = 0. \tag{1.8}$$

Proposition 1.2.4. Les zéros du polynôme $T_n(x)$ sont de la forme :

$$x_k = \cos\frac{(k-\frac{1}{2})\pi}{n}, k = 1, 2, 3, \dots, n$$

Preuve. Les zéros pour x dans $[-1;1]$ de $T_n(x)$ doivent correspondre à les zéros pour θ dans $[0;\pi]$ de $\cos n\theta$, i.e.

$$n\theta = (k-\frac{1}{2})\pi, k = 1, 2, \dots, n.$$

d'où les zéros de $T_n(x)$ sont :

$$x_k = \cos\frac{(k-\frac{1}{2})\pi}{n}, k = 1, 2, 3, \dots, n.$$

□

Exemple on considère le polynôme $T_3(x)$ tel que

$$T_3(x) = 4x^3 - 3x,$$

les zéros du polynôme $T_3(x)$ sont :

$$x_1 = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$
$$x_2 = \cos\frac{\pi}{2} = 0,$$
$$x_3 = \cos\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

On remarque que $T_3(x)$ admet trois racines réelles, simples et distinctes dans $[-1;1]$.

Propriétés

1. Le coefficient dominant des polynômes$T_n(x)$ est $2^{n-1}, \forall n \geq$
2. $T_n(x)$ a la parité de n.

Preuve.

1) Soit le polynôme $T_n(x)$ tel que

$$T_n(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ...,$$

supposons que $a_n \neq 0$, de la relation (7) on obtient :

$$\begin{aligned} a_{n+1}x^{n+1} + ... &= 2x(a_nx^n + ...) - a_{n-1}x^{n-1} - .... \\ &= 2a_nx^{n+1} + ... \end{aligned}$$

par identification on trouve

$$a_{n+1} = 2a_n,$$

i.e.

$$a_{n+1} = 2a_n = 2^2 a_{n-1} = 2^n a_1,$$

puisque $T_1(x) = x$, alors

$$a_n = 2^{n-1}, \forall n \geqslant 1.$$

2)

$$\begin{aligned} T_n(-x) &= T_n(-cosn\theta) \\ &= T_n(cosn(\theta + \pi)) \\ &= cos(n\theta + n\pi) \\ &= (-1)^n cos(n\theta) \\ &= (-1)^n T_n(cos\theta), \end{aligned}$$

d'où le résultat i.e.

$$T_n(-x) = (-1)^n T_n(cos\theta) = (-1)^n T_n(x).$$

□

1.3 D'autres espèces de polynômes de Tchebycheb

1.3.1 Le deuxième espèce $U_n(x)$

Définition 1.3.1. Les polynômes de Tchebychev de la deuxième espèce $U_n(x)$(polynôme de Jacobi pour $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$))sont des polynômes en x degré n définis à l'aide de la relation suivante :

$$\frac{sin(n+1)\theta}{sin(\theta)} = U_n(x), \text{avec } x = \cos\theta \tag{1.11}$$

pour tout x dans $[-1;1]$, alors θ appartient à $[0;\pi]$, voici quelques polynômes $U_n(x)$:

$$U_0(x) = 1,\ U_1(x) = 2x,$$
$$U_2(x) = 4x^2 - 1, ...$$

Proposition 1.3.1. Les polynômes de Tchebychev de la deuxième espèce $U_n(x)$ sont orthogonaux dans l'intervalle [-1; 1] par rapport à la fonction poids $w(x) = \sqrt{1-x^2}$

i.e.

$$\int_{-1}^{1} U_n(x) U_m(x) \sqrt{1-x^2} dx = \frac{\pi}{2} \delta_{mn}$$

Proposition 1.3.2. Les polynômes de Tchebychev de la deuxième espèce $U_n(x)$ vérifiant la relation de récurrence d'ordre deux suivante :

$$\begin{cases} U_n(x) = 2xU_{n-1}(x) - U_{n-2}(x), \forall n \geq 2 \\ U_0(x) = 1 \quad \text{et} \quad U_1(x) = 2x \end{cases} \tag{1.12}$$

Preuve. Soit $x \in$[-1; 1] , **posons** $\theta = \arccos x$, **ainsi** $\theta \in [0;\ \pi]$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$\sin(n+1)\theta = \sin n\theta \cos\theta + \cos n\theta \sin\theta \tag{1.13}$$
$$\sin(n-1)\theta = \sin n\theta \cos n\theta - \cos n\theta \sin\theta, \tag{1.14}$$

les relations (1.13) et (1.14) donnent

$$sin(n+1)\theta + sin(n-1)\theta = 2sin\theta cos\theta,$$

on divise par sinθ on obtient :

$$\frac{sin(n+1)\theta}{sin\theta} + \frac{sin(n-1)\theta}{sin\theta} = 2cos\theta\frac{sinn\theta}{sin\theta}$$

d'où le résultat i.e.

$$U_n(x) = U_{n-1}(x) - 2xU_{n-2}(x), \forall n > 2$$

$$\text{Avec } U_0(x) = 1 \text{ et } U_1(x) = 2x$$ □

Remarque 1.3.1. D'après (1.12), les polynômes de Tchebychev de la deuxième espèce $U_n(x)$ sont des polynômes de degré n en x.

Proposition 1.3.3 Les polynômes de Tchebychev de la deuxième espèce $U_n(x)$ sont les solutions de l'équation différentielle suivante :

$$(1-x^2)y''(x) - 3xy'(x) + n(n+2)y(x) = 0. \tag{1.15}$$

Proposition 1.3.3. Les zéros du polynôme $U_n(x)$ sont déterminés à partir des zéros de $sin(n+1)\theta$, $\theta \in [0;\pi]$ comme suit :

$$x = y_k = cos\frac{k\pi}{n+1}, k = 1, 2, 3, ..., n.$$

Preuve. De la définition (11) ; les zéros pour x dans [-1; 1] de $U_n(x)$ doivent correspondre à les zéros pour θ dans [0; π] de $sin(n+1)\theta$, i.e.

$$(n+1)\theta = k\pi, k = 1, 2, ..., n.$$

d'où les zéros de $U_n(x)$ sont :

$$y_k = cos\frac{k\pi}{n+1}, k = 1, 2, ..., n$$ □

Proposition 1.3.4. Le coefficient dominant des polynômes $U_n(x)$ est 2^n,∀ n ⩾ 2 .

Preuve. Soit le polynôme $U_n(x)$ tel que

$$U_n(x) = a_nx^n + a_{n-1}xn - 1 + ...,$$

supposons que $a_n \neq 0$, de la relation (12) on obtient :

$$a_nx^n + ... = 2x(a_{n-1}x^{n-1} + ...) - (a_{n-2}x^{n-2} + ...),$$

$$\Rightarrow (a_nx^n + ...) = 2(a_{n-1}x^n + ...),$$

par identification on trouve

$$a_n = 2a_{n-1},$$

i.e.

$$a_n = 2a_{n-1} = 2^{n-1}a_1 = 2^na_0,$$

puisque $U_1(x) = 1$, alors

$$a_n = 2^n, \forall n \geq 2.$$ □

1.3.2 Le troisième espèce $Vn(x)$

Définition 1.3.2. Les polynômes de Tchebychev de la troisième espèce $V_n(x)$ (polynôme de Jacobi pour $\beta = -\alpha = \frac{1}{2})$) sont des polynômes en x de degré n définis à l'aide de la relation suivante :

$$\frac{cos(n+\frac{1}{2})\theta}{cos(\frac{1}{2}\theta)} = V_n(x), \text{ avec } \quad x = cos\theta, \tag{1.16}$$

pour tout x dans [-1; 1] , alors θ appartient à [0;π] , voici quelques polynômes $V_n(x)$:

$$V_0(x) = 1, V_1(x) = 2x - 1, ...,$$

Proposition 1.3.5. Les polynômes de Tchebychev de la troisième espèce $V_n(x)$ sont orthogonaux dans l'intervalle [-1; 1] par rapport à la fonction poids $w(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$

i.e.

$$\int_{-1}^{1} V_n(x)V_m(x)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx = \pi\delta_{mn}$$

Proposition 1.3.6. Les polynômes de Tchebychev de la troisième espèce $V_n(x)$ vérifiant la relation de récurrence d'ordre deux suivante :

$$\begin{cases} V_n(x) = 2xV_{n-1}(x) - V_{n-2}(x), \forall n \geqslant 2 \\ V_0(x) = 1 \quad \text{et} \quad V_1(x) = 2x - 1 \end{cases} \tag{1.17}$$

Preuve. Soit $x \in [-1; 1]$, posons $\theta = \arccos x$, ainsi $\theta \in [0; \pi]$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\cos(n+\frac{1}{2})\theta = \cos\theta\cos(n-1+\frac{1}{2})\theta - \sin\theta\sin(n-1+\frac{1}{2})\theta \tag{1.18}$$

$$\cos(n-2+\frac{1}{2})\theta = \cos\theta\cos(n-1+\frac{1}{2})\theta + \sin\theta\sin(n-1+\frac{1}{2})\theta \tag{1.19}$$

les relations (1.18) et (1.19) donnent :

$$cos(n+\frac{1}{2})\theta + cos(n-2+\frac{1}{2})\theta = 2cos\theta cos(n-1+\frac{1}{2})\theta$$

on divise par $cos\frac{1}{2}$ on obtient :

$$\frac{\cos(n+\frac{1}{2})\theta}{\cos\frac{1}{2}\theta} + \frac{\cos(n-2+\frac{1}{2})\theta}{\cos\frac{1}{2}\theta} = 2\cos\frac{\cos(n-2+\frac{1}{2})\theta}{\cos\frac{1}{2}\theta}$$

d'où le résultat i.e.

$$V_n(x) = 2xV_{n-1}(x) - V_{n-2}(x), \forall n \geq 2$$

$$\text{Avec} \quad V_0(x) = 1 \quad et \quad V_1(x) = 2x - 1$$

□

Remarque 1.3.2. D'après (1.17), les polynômes de Tchebychev de la troisième espèce $V_n(x)$ sont des polynômes de degré n en x.

Proposition 1.3.7. Les polynômes de Tchebychev de la troisième espèce $V_n(x)$ sont les solutions de l'équation différentielle suivante :

$$(1-x^2)y''(x)+(1-2x)y'(x)+n(n+1)y(x) = 0. \tag{1.20}$$

Proposition 1.3.8. Les zéros du polynôme$V_n(x)$ sont de la forme :

$$x = x_k = cos\frac{(k-\frac{1}{2})\pi}{n+\frac{1}{2}}, k = 1, 2, 3, ..., n$$

Preuve. De la définition (1.16) ; les zéros pour x dans [-1; 1] de $V_n(x)$ doivent correspondre à les zéros pour θ dans $[0; \pi]$ de $cos(n+\frac{1}{2})\theta$, i.e.

$$(n+\tfrac{1}{2})\theta = (k-\tfrac{1}{2})\pi, k = 1, 2, ..., n.$$

d'où les zéros de $V_n(x)$ sont :

$$y_k = cos\frac{(k-\frac{1}{2})\pi}{n+\frac{1}{2}}, k = 1, 2, ..., n$$

□

Proposition 1.3.9. Le coefficient dominant des polynômes $V_n(x)$ est 2^n,$\forall$ $n \geq$2.

Preuve. Soit le polynôme $V_n(x)$ tel que

$$V_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ...,$$

supposons que$a_n \neq 0$, de la relation (1.17) on obtient :

$$a_n x^n + ... = 2x(a_{n-1}x^{n-1} + ...) - (a_{n-2}x^{n-2} + ...),$$

$$\Rightarrow (a_n x^n + ...) = 2(a_{n-1}x^n + ...),$$

par identification on trouve

$$a_n = 2a_{n-1},$$

i.e.

$$a_n = 2a_{n-1} = 2^{n-1}a_1 = 2^n a_0,$$

puisque $V_1(x) = 1$, alors

$$a_n = 2^n, \forall n \geq 2.$$

□

1.3.3 Le quatrième espèce $W_n(x)$

Définition 1.3.3. Les polynômes de Tchebychev de la quatrième espèce $W_n(x)$ sont des polynômes(polynôme de Jacobi pour $\alpha = -\beta = \frac{1}{2}$)) en x de degré n définis à l'aide de la relation suivante :

$$\frac{sin(n+\frac{1}{2})\theta}{sin(\frac{1}{2}\theta)} = W_n(x), \text{ avec } \quad x = cos\theta, \tag{1.21}$$

pour tout x dans [-1; 1] , alors θ appartient à $[0; \pi]$, voici quelques polynômes $W_n(x)$:

$$W_0(x) = 1, W_1(x) = 2x + 1, ...,$$

Proposition 1.3.10. Les polynômes de Tchebychev de la troisième espèce $W_n(x)$ sont orthogonaux dans l'intervalle [-1; 1] par rapport à la fonction poids $w(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$

i.e.

$$\int_{-1}^{1} W_n(x)W_m(x)\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx = \pi\delta_{mn}$$

Proposition 1.3.11. Les polynômes de Tchebychev de la troisième espèce $W_n(x)$ vérifiant la relation de récurrence d'ordre deux suivante :

$$\begin{cases} W_n(x) = 2xV_{n-1}(x) - W_{n-2}(x), \forall n \geq 2 \\ W_0(x) = 1 \quad et \quad W_1(x) = 2x + 1 \end{cases} \tag{1.22}$$

Preuve. Soit $x \in [-1; 1]$, posons $\theta =$ arccosx, ainsi $\theta \in [0; \pi]$, pour tout $n \in N$ on a

$$sin(n + \frac{1}{2})\theta + sin(n - 2 + \tfrac{1}{2})\theta = 2cossin(n - 1 + \frac{1}{2})\theta$$

on divise par $cos\frac{1}{2}$ on obtient :

$$\frac{sin(n + \frac{1}{2})\theta}{sin\frac{1}{2}\theta} + \frac{sin(n - 2 + \frac{1}{2})\theta}{sin\frac{1}{2}\theta} = 2cos\frac{sin(n - 2 + \frac{1}{2})\theta}{sin\frac{1}{2}\theta}$$

d'où le résultat i.e.

$$W_n(x) = 2xW_{n-1}(x) - W_{n-2}(x), \forall n \geq 2$$

$$\text{Avec} W_0(x) = 1 \quad et \quad W_1(x) = 2x + 1$$

□

Remarque 1.3.3. D'après (1.22), les polynômes de Tchebychev de la troisième espèce $W_n(x)$ sont des polynômes de degré n en x.

Proposition 1.3.12. Les polynômes de Tchebychev de la troisième espèce $W_n(x)$ sont les solutions de l'équation différentielle suivante :

$$(1-x^2)y''(x) - (1+2x)y'(x) + n(n+1)y(x) = 0. \tag{1.23}$$

Proposition 1.3.13. Les zéros du polynôme $W_n(x)$ sont de la forme :

$$x = x_k = cos\frac{k\pi}{n + \frac{1}{2}}, k = 1, 2, 3, ..., n$$

Preuve. De la définition (1.21) ; les zéros pour x dans [-1; 1] de $W_n(x)$ doivent correspondre à les zéros pour θ dans [0; π] de $sin(n + \frac{1}{2})\theta$, i.e.

$$(n + \tfrac{1}{2})\theta = k\pi, \text{ k = 1, 2, ..., n.}$$

d'où les zéros de $W_n(x)$ sont :

$$y_k = cos\frac{k\pi}{n + \frac{1}{2}}, \text{ k = 1, 2, ..., n}$$

□

Proposition 1.3.14. Le coefficient dominant des polynômes $W_n(x)$ est 2^n,$\forall$ n ≥2.

Preuve. Soit le polynôme $W_n(x)$ tel que

$$W_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ...,$$

supposons que$a_n \neq 0$, de la relation (1.22) on obtient :

$$a_n x^n + ... = 2x(a_{n-1}x^{n-1} + ...) - (a_{n-2}x^{n-2} + ...),$$

$$\Rightarrow (a_n x^n + ...) = 2(a_{n-1}x^n + ...),$$

par identification on trouve

$$a_n = 2a_{n-1},$$

i.e.

$$a_n = 2a_{n-1} = 2^{n-1}a_1 = 2^n a_0,$$

puisque $W_0(x) = 1$, alors

$$a_n = 2^n, \forall n \geq 2. \qquad \square$$

Corollaire 1.3.1 Les polynômes T_n, U_{n}, V_n, et W_n vérifiant les propriétés suivantes :

1. $U_n(x) = \frac{1}{2}\left[V_n(x) + W_n(x)\right]$, pour tout $n \in N$,
2. $V_n(x) = U_n(x) - U_{n-1}(x)$,
3. $W_n(x) = U_n(x) + U_{n-1}(x)$,
4. $V_n(x) + V_{n-1}(x) = W_n(x) - W_{n-1}(x) = 2T_n(x)$,
5. $T_n\prime(x) = nU_{n-1}(x)$,
6. $U_n(x) - U_{n-2}(x) = 2T_n(x) \forall n \geq 2$.

1.4 Polynômes de Tchebychev de la variable complexe

Définition 1.4.1. On considère la variable complexe z donnée par :

$$z = \tfrac{1}{2}\left(w + w^{-1}\right), \text{ avec } w = r\cos\theta + ir\sin\theta = re^{i\theta} \tag{1.24}$$

on obtient ainsi l'équation :

$$w^2 - 2zw + 1 = 0$$

qui a pour solutions

$$w = w_{1,2} = z \pm \sqrt{z^2 - 1}$$

lorsque

$$|w| = 1$$

i.e.

$$z = \cos\theta$$

alors, les polynômes de Tchebychev de la première espèce sont donnés dans C par :

$$T_n(z) = \frac{1}{2}\left(w^n + w^{-n}\right) \tag{1.25}$$

en utilisant (1.25)

$$T_{\mathrm{n}}(z) = \tfrac{1}{2}\left(\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right)^n + \left(z - \sqrt{z^2 - 1}\right)^n\right)$$

de la même façon, en utilisant le fait que lorsque $z = \cos\theta$, on obtient la forme des polynômes de Tchebychev de la deuxième espèce dans C suivante :

$$\begin{aligned}
U_{n-1}(z) &= \frac{\sin n\theta}{\sin\theta} \\
&= \frac{w^n - w^{-n}}{w - w^{-1}} \\
&= \frac{1}{2}\frac{\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right)^n + \left(z - \sqrt{z^2 - 1}\right)^n}{\sqrt{z^2 - 1}}
\end{aligned}$$

ainsi, on obtient la forme des polynômes de Tchebychev $V_n(z)$ et $W_n(z)$ dans C suivante :

$$V_n(z) = \frac{w^{n+\frac{1}{2}} + w^{-n-\frac{1}{2}}}{w^{\frac{1}{2}} + w^{-\frac{1}{2}}}$$
$$W_n(z) = \frac{w^{n+\frac{1}{2}} - w^{-n-\frac{1}{2}}}{w^{\frac{1}{2}} - w^{-\frac{1}{2}}}$$

1.5 Synthèse générale

les propriétés de base pour les quatres espèces de polynômes :

kind	1st	2nd	3 rd	4th
$P_n =$	T_n	U_n	V_n	W_n
$P_n(\cos(\theta)) =$	$cosn\theta$	$\frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$	$\frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta}{\cos\frac{1}{2}\theta}$	$\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta}{\sin\frac{1}{2}\theta}$
$P_n\left(\frac{1}{2}\left(w+w^{-1}\right)\right) =$	$\frac{1}{2}\left(w^n + w^{-n}\right)$	$\frac{w^{n+1}-u^{-n-1}}{w-w^{-1}}$	$\frac{w^{n+\frac{1}{2}}+w^{-n-\frac{1}{2}}}{w^{\frac{1}{4}}+w^{-\frac{1}{2}}}$	$\frac{w^{n+\frac{1}{2}}-w^{-n-\frac{1}{2}}}{w^{\frac{1}{4}}-w^{-\frac{1}{2}}}$
$P_0(x) =$	1			
$P_1(x) =$	x	$2x$	$2x-1$	$2x+1$
recurrence	$P_x(x) = 2xP_{n-1}(x) - P_{n-2}(x)$			
x^n coefficient	$2^{n-1}(n>0)$	2^n		
zeros	$x_{k,n} := \cos\frac{\left(k-\frac{1}{2}\right)\pi}{n}$	$\cos\frac{k\pi}{n+1}$	$\cos\frac{\left(k-\frac{1}{2}\right)\pi}{n+\frac{1}{2}}$	$\cos\frac{k\pi}{n+\frac{1}{2}}$
extrema	$w_{k,n} := \cos\frac{k\pi}{n}$	no closed form		
$\Vert P_n\Vert_\infty =$	1	$n+1$	$2n+1$	

les propriétés d'orthogonalité pour les quatres espèces de polynômes :

kind	1st	2nd	3rd	4th
$P_n =$	T_n	U_n	V_n	W_n
weight $w(x) =$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\sqrt{1-x^2}$	$\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$	$\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$
Orthogonality	$\langle P_m, P_n\rangle = \int_{-1}^{1} w(x)P_m(x)P_n(x)\,dx \quad = 0 \quad (m \neq n)$			
$\langle P_n, P_n\rangle =$	$\frac{1}{2}\pi(n>0)$	$\frac{1}{2}\pi$	π	

les propriétés d'orthogonalité dans le cas discret pour les quatres espèces de polynômes :

kind	1st	2nd	3rd	4th
$P_n =$	T_n	U_n	V_n	W_n
weight $w(x) =$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\sqrt{1-x^2}$	$\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$	$\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$
abscissae	$x_{k,N+1} = cos\{(k-\frac{1}{2})\pi/(N+1)\}$			
$\langle P_n, P_n\rangle =$	$\frac{1}{2}(N+1) \quad (0 < n \leq N)$	$\frac{1}{2}(N+1)$	$(N+1)$	

1.6 Propriétés supplementaires des polynômes de Tchebychev

1.6.1 Parité

Pour tout naturel n, T_n a la parité de n. En effet,

$$\begin{aligned} T_n(-x) &= \sum_{p=0}^{E(n/2)} (-1)^p C_n^{2p} (-x)^{n-2p} (1-(-x)^2)^p \\ &= (-1)^n \sum_{p=0}^{E(n/2)} (-1)^p C_n^{2p} x^{n-2p} (1-x^2)^p = (-1)^n T_n. \end{aligned}$$

On peut aussi écrire pour tout réel θ :

$$\begin{aligned} T_n(-\cos\theta) &= T_n(\cos(\theta+\pi)) \\ &= \cos(n\theta + n\pi) = (-1)^n \cos(n\theta) \\ &= (-1)^n T_n(\cos\theta), \end{aligned}$$

et donc, pour tout réel x de $[-1,1]$, $T_n(-x) = (-1)^n T_n(x)$. Puisque $[-1,1]$ est infini,les polynômes $T_n(-x)$ et $(-1)^n T_n$ sont égaux.

On peut encore utiliser la relation de récurrence du 3).

Tout d'abord,

$$T_0(-x) = (-1)^0 T_0 \text{et} T_1(-x) = (-1)^1 T_1.$$

Ensuite, si pour $n \geq 0$

$$T_n(-x) = (-1)^n T_n \text{ et} T_{n+1}(-x) = (-1)^{n+1} T_{n+1}$$

alors

$$\begin{aligned} T_{n+2}(-x) &= 2(-x)T_{n+1}(-x) - T_n(-x) \\ &= 2(-1)^{n+2} x T_{n+1} - (-1)^n T_n \\ &= (-1)^{n+2}(2xT_{n+1} - T_n) = (-1)^{n+2} T_{n+2}. \end{aligned}$$

Pour tout naturel n, T_n a la parité de n.

Par dérivation , on obtient encore :

pour tout naturel non nul n, U_n a la parité contraire de n

1.6.2 $T_n(1), T_n(-1), T_n(0)$

Soit $n \in \mathbb{N}$.

1) $T_n(1) = T_n(\cos 0) = \cos(n \times 0) = 1.$

2) $T_n(-1) = (-1)^n T_n(1) = (-1)^n.$

3) T_{2n+1} est impair et donc $T_{2n+1}(0) = 0$. Puis $T_{2n}(0) = T_{2n}(\cos\frac{\pi}{2}) = \cos(n\pi) = (-1)^n.$

En résumé

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad T_n(1) = 1,$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad T_n(-1) = (-1)^n,$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad T_{2n+1}(0) = 0 \text{ et } T_{2n}(0) = (-1)^n \text{ ou encore } T_n(0) = \cos(n\frac{\pi}{2}).$$

1.6.3 Equation différentielle vérifiée par T_n. Coefficients de T_n

a) Equation différentielle vérifiée par T_n.

Pour trouver les coefficients de T_n,on cherche d'abord une équation différentielle linéaire dont T_n est solution.
Soit $n \in \mathbb{N}$. En dérivant l'égalité $T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$, on obtient :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, -\sin\theta T_n'(\cos\theta) = -n\sin(n\theta)$$

puis en redérivant

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, -\ cos\theta T_n'(\cos\theta) + \sin^2\theta T_n''(\cos\theta) = -n^2\cos(n\theta) = -n^2 T_n(\cos\theta),$$

ou encore,

$$\forall x \in [-1,1], -xT_n'(x) + (1-x^2)T_n''(x) = -n^2 T_n(x).$$

Ainsi, puisque $[-1,1]$ est infini,

$$\forall n \in \mathbb{N}, (1-x^2)T_n'' - xT_n' + n^2 T_n = 0 \quad (E).$$

b) Coefficients de T_n

Soit $n \geq 2$. Puisque T_n est de degré n et a la parité de n, on peut poser

$$T_n = \sum_{0\leq k\leq \frac{n}{2}} a_k x^{n-2k}$$

Reportons alors cette écriture de T_n, dans le premier membre de l'équation (E).

$$\begin{aligned}
(1-x^2)T_n''-xT_n'+n^2T_n &= (1-x^2)\sum_{0\leq k\leq \frac{n}{2}-1}(n-2k)(n-2k-1)a_k x^{n-2k-2} - x\sum_{0\leq k\leq \frac{n-1}{2}}(n-2k)a_k x^{n-2k-1} \\
&+ \quad n^2 \sum_{0\leq k\leq \frac{n}{2}} a_k x^{n-2k} \\
&= \sum_{0\leq k\leq \frac{n}{2}-1}(n-2k)(n-2k-1)a_k x^{n-2k-2} - \sum_{0\leq k\leq \frac{n}{2}}(n-2k)(n-2k-1)a_k x^{n-2k} \\
&- \sum_{0\leq k\leq \frac{n}{2}}(n-2k)a_k x^{n-2k} + n^2\sum_{0\leq k\leq \frac{n}{2}} a_k x^{n-2k} \\
&= \sum_{0\leq k\leq \frac{n}{2}-1}(n-2(k+1)+2)(n-2(k+1)+1)a_k x^{n-2(k+1)} \\
&+ \sum_{0\leq k\leq \frac{n}{2}}(-(n-2k)(n-2k-1)-(n-2k)+n^2)a_k x^{n-2k} \\
&= \sum_{1\leq k\leq \frac{n}{2}}(n-2k+2)(n-2k+1)a_{k-1}\chi^{n-2k} + \sum_{0\leq k\leq \frac{n}{2}}(4kn-4k^2)a_k x^{n-2k} \\
&= \sum_{1\leq k\leq \frac{n}{2}}[(n-2k+2)(n-2k+1)a_{k-1} + 4k(n-k)a_k]x^{n-2k}.
\end{aligned}$$

Par suite,

$$(1-x^2)T_n''-xT_n'+n^2T_n=0 \Leftrightarrow \forall k\in\mathbb{N},\quad (1\leq k\leq \frac{n}{2}\Rightarrow (n-2k+2)(n-2k+1)a_{k-1}+4k(n-k)a_k=0).$$

En tenant compte de $a_0=dom(T_n)=2^{n-1}$, pour $1\leq k\leq \dfrac{n}{2}$, on a alors

$$a_k=\frac{-(n-2k+1)(n-2k+2)}{4k(n-k)}\times\frac{-(n-2k+3)(n-2k+4)}{4(k-1)(n-k+1)}\times\cdots\times\frac{-(n-1)n}{4\times 1\times(n-1)}\times a_0$$

$$=\frac{(-1)^k}{4^k}\frac{(n-2k+1)\times(n-2k+2)\times(n-2k+3)\times(n-2k+4)\times\cdots\times(n-1)\times n}{k\times(k-1)\times\cdots\times 2\times 1\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times(n-k)}2^{n-1}$$
$$=(-1)^k2^{n-2k-1}\frac{n!/(n-2k)!}{k!/\times(n-1)!/(n-k-1)!}=(-1)^k2^{n-2k-1}\frac{n}{n-k}\frac{(n-k)!}{k!(n-2k)!}=(-1)^k2^{n-2k-1}\frac{n}{n-k}C_{n-k}^k.$$

ce qui reste vrai pour $k=0$

$$\forall n\in\mathbb{N}^*, T_n=\sum_{0\leq k\leq \frac{n}{2}}(-1)^k2^{n-2k-1}\frac{n}{n-k}C_{n-k}^kx^{n-2k}.$$

1.6.4 Racines de T_n et factorisation de T_n

Soient $\theta\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{N}^*$

$$\cos(n\theta)=0 \iff n\theta\in\frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z} \iff \theta\in\frac{\pi}{2n}+\frac{\pi}{n}\mathbb{Z}$$

Pour $k\in[0,n-1]$, posons alors $\theta_k=\dfrac{\pi}{2n}+\dfrac{k\pi}{n}$ puis $x_k=\cos\theta_k$. On a d'une part

$$0<\frac{\pi}{2n}=\theta_0<\theta_1<...<\theta_{n-1}=\pi-\frac{\pi}{2n}<\pi,$$

et donc, par stricte décroissance de la fonction $x\mapsto\cos x$ sur $[0,\pi]$,

$$1>x_0>x_1>\cdots>x_{n-1}>-1.$$

En particulier, les n nombres $x_k, 0\leq k\leq n-1$, sont deux à deux distincts. Mais d'autre part, pour $k\in[0,n-1]$,

$$T_n(\cos\theta_k)=\cos(n\theta_k)=0.$$

et les n nombres $x_k, 0\leq k\leq n-1$ sont n racines deux à deux distinctes du polynôme T_n qui est de de degré n. Ce sont donc toutes les racines de T_n, toutes réelles simples et dans $]-1,1[$. En tenant compte de $dom(T_n)=2^{n-1}$, on a montré que

$$1)\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad T_n \quad \text{a} \quad n \quad \text{racines réelles à deux distinctes, toutes dans}]-1,1[.$$
$$2)\forall n\in\mathbb{N}^*, T_n=2^{n-1}\prod_{k=0}^{n-1}\left(x-\cos\left(\frac{\pi}{2n}+\frac{k\pi}{n}\right)\right).$$

1.6.5 Diverses expressions de T_n et U_n

a) Pour x dans $[-1,1]$

.

Soit $n\in\mathbb{N}$. Soient $x\in[-1,1]$ puis $\theta=\arccos x$. On a alors $\theta\in[0,\pi]$ et $\cos\theta=x$. L'égalité $T_n(\cos\theta)=\cos(n\theta)$ s'écrit encore :

$$\forall n\in\mathbb{N},\forall x\in[-1,1],\quad T_n(x)=\cos(n\arccos x).$$

De même, l'égalité $\sin\theta U_n(\cos\theta)=\sin(n\theta)$ s'écrit encore :

$$\forall n\in\mathbb{N},\forall x\in]-1,1[,\quad U_n(x)=\frac{\sin(n\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}$$

b) Pour $|x| \geq 1$.

Montrons par récurrence que, pour tout entier naturel n et tout réel θ, on a $T_n(\cosh\theta) = \cosh(n\theta)$.
• C'est clair pour $n = 0$ et $n = 1$.
• Soit $n \geq 0$. Supposons que $T_n(\cosh\theta) = \cosh(n\theta)$ et que $T_{n+1}(\cosh\theta) = \cosh((n+1)\theta)$.
On en déduit que

$$\begin{aligned} T_{n+2}(\cosh\theta) &= 2(\cosh\theta)T_{n+1}(\cosh\theta) - T_n(\cosh\theta) \\ &= 2(\cosh\theta)(\cosh(n+1)\theta) - \cosh(n\theta) \\ &= \cosh((n+2)\theta) - \cosh(n\theta) + \cosh(n\theta) \\ &= \cosh((n+2)\theta). \end{aligned}$$

On a montré par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall \theta \in \mathbb{R}, \quad T_n(\cosh\theta) = \cosh(n\theta).$$

En dérivant, on obtient $\sinh\theta \times T_n'(\cosh\theta) = n\sinh(n\theta)$.

Et, en tenant compte de $T_n' = nU_n$, on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall \theta \in \mathbb{R}, \quad (\sinh\theta)U_n(\cosh\theta) = \sinh(n\theta).$$

Soient alors x un réel supérieur ou égal à 1 puis $\theta = argchx = ln(x + \sqrt{x^2-1})$.

$$T_n(x) = T_n(\cosh\theta) = \cosh(n\theta)$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^{n\ln(x+\sqrt{x^2-1})} + e^{-n\ln(x+\sqrt{x^2-1})}\right) = \frac{1}{2}\left((x+\sqrt{x^2-1})n + (x+\sqrt{x^2-1})^{-n}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left((x+\sqrt{x^2-1})n + (x-\sqrt{x^2-1})^n\right) \quad (\text{car } (x+\sqrt{x^2-1})(x-\sqrt{x^2-1}) = 1).$$

$$\forall x \in [1, +\infty[, \quad T_n(x) = \frac{1}{2}\left((x+\sqrt{x^2-1})n + (x-\sqrt{x^2-1})^n\right).$$

Par parité, on peut obtenir les valeurs de T_n pour $x \leq -1$.
En dérivant, on obtient pour $x > 1$:

$$U_n(x) = \frac{1}{n}T_n'(x) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{n} \times n \times \left((1 + \frac{x}{\sqrt{x^2-1}})(x+\sqrt{x^2-1})^{n-1} + (1 - \frac{x}{\sqrt{x^2-1}})(x-\sqrt{x^2-1})^{n-1}\right).$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x^2-1}}\left((x+\sqrt{x^2-1})^n - (x-\sqrt{x^2-1})^n\right).$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in]1, +\infty[, \quad U_n(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2-1}}\left((x+\sqrt{x^2-1})^n - (x-\sqrt{x^2-1})^n\right).$$

1.6.6 Extrema de T_n et U_n sur $[-1, 1]$

a) Extrema de T_n

Pour tout réel θ et tout entier naturel n, $T_n(\cosh\theta) = \cosh(n\theta)$. Ceci montre que pour x réel élément de $]1, +\infty[$ et n entier naturel non nul, on a $T_n(x) > 1$. Par parité de T_n, on a donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, (|x| > 1 \Rightarrow |T_n(x)| > 1).$$

Mais puisque pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et tout naturel non nul $nT_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$, on a aussi

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, (|x| \leq 1 \Rightarrow |T_n(x)| \leq 1).$$

Soient alors x un réel de $[-1,1]$ et $\theta = \arccos x$.

$$|T_n(x)| = 1 \Leftrightarrow |\cos(n\theta)| = 1 \Leftrightarrow n\theta \in \pi\mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}/x \cos\tfrac{k\pi}{n}$$

$$\Leftrightarrow \exists k \in [0,n]/x \cos\tfrac{k\pi}{n}.$$

L'équation $|T_n(x)| = 1$ admet, dans $\mathbb{R}$, exactement $n+1$ solutions, toutes dans $[-1,1]$, à savoir

$$\text{les } n+1 \text{ réels } x_k = \cos\left(\tfrac{k\pi}{n}\right), \quad k \in [0,n].$$

On en déduit encore

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \max_{x\in[-1,1]} |T_n(x)| = 1.$$

b) Extrema de U_n

Tout d'abord, on note que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall \theta \in \mathbb{R}, \quad |\sin(n\theta)| \leq n|\sin\theta|.$$

Montrons le résultat par récurrence. Soit $\theta \in \mathbb{R}$.
- C'est clair pour $n = 1$.
- Soit $n \geq 1$. Si $|\sin(n\theta)| \leq n|\sin\theta|$ alors

$$|\sin((n+1)\theta)| = |\sin(n\theta)\cos\theta + \cos(n\theta)\sin\theta| \leq |\sin(n\theta)| \times |\cos\theta| + |\cos(n\theta)| \times |\sin\theta|$$

$$\leq |\sin(n\theta)| + |\sin\theta|$$

$$\leq n|\sin(\theta)| + |\sin(\theta)|$$

$$= (n+1)|\sin\theta|,$$

ce qui démontre par récurrence l'inégalité proposée.

Par suite, pour n entier naturel non nul et θ non dans $\pi\mathbb{Z}$,

$$|U_n(\cos\theta)| = \left|\frac{\sin(n\theta}{\sin\theta}\right| \leq n.$$

Ou encore, (l'inégalité restant valable pour $x = -1$ ou $x = 1$ par continuité) :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [-1,1], \quad |U_n(x)| \leq n.$$

Soit $n \geq 2$. En reprenant le raisonnement par récurrence ci-dessus, si on a $|\sin(n\theta)| = n|\sin\theta|$, alors toutes les inégalités écrites sont des égalités et on a nécessairement

$$|\sin(n\theta)| = |\sin((n-1)\theta)| \times |\cos\theta| + |\cos((n-1)\theta)| \times |\sin\theta|$$

$$= |\sin((n-1)\theta)| + |\sin\theta| = n|\sin\theta|.$$

Ceci impose $|\sin((n-1)\theta)| = 0$ car si $|\sin((n-1)\theta)| \neq 0$, alors $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$, puis $|\cos\theta| < 1$ et on n'a pas l'égalité. En résumé ,

$$\text{si} \quad \theta \notin \pi\mathbb{Z}, U_n(\cos\theta)| = \left|\frac{\sin(n\theta)}{\sin\theta}\right| < n.$$

Maintenant, quand θ tend vers 0 ou vers π, dans l'égalité $U_n(\cos\theta)| = \left|\dfrac{\sin(n\theta)}{\sin\theta}\right|$, on obtient $|U_n(1)| = |U_n(-1)| = n$.

Finalement

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \max_{x\in[-1,1]} |U_n(x)| = n.$$

Pour $n \geq 2$, l'équation $|U_n(x)| = n$ admet dans $[-1, 1]$ exactement deux solutions, à savoir -1 et 1.

Proposition

$\dfrac{1}{2^{n-1}}T_n$ est le polynôme unitaire de degré n réalisant la meilleure approximation uniforme de la fonction nulle sur $[-1, 1]$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $t_n = \dfrac{1}{2^{n-1}}T_n$ et P un polynôme unitaire de degré $n \geq 1$. Il s'agit de montrer que

$$\|t_n\|_\infty = \frac{1}{2^{n-1}} \leq \|P\|_\infty.$$

où $\|P\|_\infty = \max\limits_{x\in[-1,1]} |P(x)|$.

Supposons par l'absurde que

$$\|P\|_\infty < \frac{1}{2^{n-1}} = \|t_n\|_\infty.$$

Considérons les nombres

$$x_k = \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right), 0 \leq k \leq n.$$

Alors

$$t_n(x_0) = \frac{1}{2^{n-1}} > P(x_0)$$

puis $t_n(x_1) = -\dfrac{1}{2^{n-1}} < P(x_1)$ puis $t_n(x_2) = \dfrac{1}{2^{n-1}} > P(x_2)\ldots$

Ainsi, le polynôme $t_n - P$ change de signe dans chacun des n intervalles $]x_k, x_{k+1}[$, $0 \leq k \leq n-1$ et admet donc au moins n racines deux à deux distinctes. Mais ce polynôme est de degré inférieur ou égal à $n-1$ car P et t_n sont unitaires de degré n. Donc $t_n - P$ est nul cce qui contredit $\|P\|_\infty < \|t_n\|_\infty$.
Finalement,
pour tout polynôme P unitaire de degré $n \geq 1$,

$$\|P\|_\infty \geq \frac{1}{2^{n-1}} = \left\|\frac{1}{2^{n-1}}T_n\right\|.$$

Montrons de plus que t_n est l'unique polynôme unitaire P de degré n vérifiant $\|P\|_\infty = \dfrac{1}{2^{n-1}}$.
Soit donc P un polynôme unitaire de degré n tel que $\|P\|_\infty = \dfrac{1}{2^{n-1}}$ puis $Q = t_n - P$. Soit L_Q le polynôme d'interpolation de LAGRANGE de Q en les $n+1$ réels $x_k = \cos\left(\dfrac{k\pi}{n}\right), 0 \leq k \leq n$. On rappelle que

$$L_Q = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \prod_{j\neq k}(X - x_i) \quad \text{où} \quad \lambda_k = \frac{Q(x_k)}{\prod\limits_{j\neq k}(xk - x_j)}$$

Par hypothèse, $\forall x \in [-1, 1]$, $-\dfrac{1}{2^{n-1}} \leq P(x) \leq \dfrac{1}{2^{n-1}}$ et comme $t_n(x_k) = \dfrac{(-1)^k}{2^{n-1}}$, on en déduit que

$$\forall k \in [0, n], \quad (-1)^k Q(x_k) \geq 0.$$

D'autre part, $(-1)^k \prod\limits_{j\neq k}(x_k - x_j) \geq 0$ et donc

$$\forall k \in [0, n], \quad \lambda_k \geq 0.$$

Maintenant, Q et L_Q sont deux polynômes de degré au plus n qui coïncident en les $(n+1)$ réels deux à deux distincts $x_k, 0 \leq k \leq n$. On a donc $L_Q = Q$ et en particulier, $\deg(L_Q) = \deg(Q) \leq n-1$. Le coefficient de X^n dans L_Q est donc nul. Ceci fournit

$$\sum_{k=0}^{n} \lambda_k = 0.$$

Finalement, les λ_k sont des réels positifs de somme nulle et ils sont donc tous nuls. On en déduit que $Q = 0$ et donc $P = t_n$.

pour tout polynôme P, unitaire de degré $n \geq 1$,

$$\|P\|_\infty \geq \frac{1}{2^{n-1}} = \left\|\frac{1}{2^{n-1}} T_n\right\|.$$

avec égalité si et seulement si $P = \dfrac{1}{2^{n-1}} T_n$.

1.6.7 Série entière associée à T_n et U_n

Soit $z = re^{i\theta}$, $r \in \mathbb{R}_+$, $\theta \in \mathbb{R}$ un nombre complexe tel que $|r| < 1$.

Le développement $\dfrac{1}{1-z} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$ valable quand $|z| < 1$ fournit

$$\sum_{n=0}^{+\infty} r^n e^{in\theta} = \frac{1}{1 - re^{i\theta}} = \frac{1 - re^{-i\theta}}{(1 - re^{i\theta})(1 - re^{-i\theta})} = \frac{1 - r\cos\theta + ir\sin\theta}{1 - 2r\cos\theta + r^2}.$$

et par identification des parties réelle et imaginaires, on obtient :

$$\forall r \in]-1, 1[, \quad \forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} r^n (\cos n\theta) = \frac{1 - r\cos\theta}{1 - 2r\cos\theta + r^2}$$

et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} r^n \sin(n\theta) = \frac{r\sin\theta}{1 - 2r\cos\theta + r^2}.$$

ce qui s'écrit encore

$$\forall r \in]-1, 1[, \quad \forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} r^n T_n(\cos\theta) = \frac{1 - r\cos\theta}{1 - 2r\cos\theta + r^2},$$

et

$$\sin\theta \sum_{n=0}^{+\infty} r^n U_n(\sin\theta) = \frac{r\sin\theta}{1 - 2r\cos\theta + r^2},$$

ou enfin

$$\forall t \in]-1, 1[, \quad \forall x \in [-1, 1], \quad \sum_{n=0}^{+\infty} t^n T_n(x) = \frac{1 - t\cos\theta}{1 - 2t\cos\theta + t^2}$$

et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} t^n U_n(x) = \frac{t}{1 - 2t\cos\theta + t^2}.$$

(Pour t fixé dans $]-1, 1[$ et $x \in \{-1, 1\}$, le plus simple est de vérifier directement $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} t^n U_n(x) = \frac{t}{1 - 2tx + t^2}$). On obtient aussi

$$1 + 2\sum_{n=0}^{+\infty} t^n T_n(x) = 2\left(\frac{1 - tx}{1 - 2tx + t^2} - 1\right) + 1 = \frac{1 - t^2}{1 - 2tx + t^2}.$$

On peut procéder autrement. Un calcul formel fournit

$$\begin{aligned}
2xt\sum_{n=1}^{+\infty}T_n(x)t^n &= \sum_{n=1}^{+\infty}(T_{n-1}(x)+T_{n+1}(x))t^{n+1}\\
&= t^2\sum_{n=1}^{+\infty}T_{n-1}(x)t^{n-1}+\sum_{n=1}^{+\infty}T_{n+1}(x)t^{n+1}.\\
&= t^2\left(1+\sum_{n=1}^{+\infty}T_n(x)t^n\right)+\sum_{n=1}^{+\infty}T_n(x)t^n - xt,
\end{aligned}$$

Puis

$$(t^2-2xt+1)\sum_{n=1}^{+\infty}T_n(x)t^n = xt-t^2$$

et donc

$$(t^2-2xt+1)\left(1+2\sum_{n=1}^{+\infty}T_n(x)t^n\right)=1-t^2.$$

Réciproquement, à x réel fixé, la fraction rationnelle $\dfrac{1-t^2}{1-2tx+t^2}$ n'admet donc pas zéro pour pôle et est donc développable en série entière. Si on pose, pour x réel fixé,

$$\frac{1-t^2}{1-2tx+t^2}=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(x)t^n \quad \text{pour } t \text{ dans }]-R,R[,$$

l'égalité $(t^2-2xt+1)\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(x)t^n = 1-t^2$ valable pour $t\in]-R,R[$ fournit

$$\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(x)t^n - 2x\sum_{n=1}^{+\infty}a_{n-1}(x)t^n+\sum_{n=2}^{+\infty}a_{n-2}(x)t^n = 1-t^2.$$

Par suite,

$$a_0(x)=1,\ a_1(x)=2x=2T_1(x),\ a_2(x)=4x^2-2=2T_2(x)$$

et pour $n\geq 3$,

$$a_n(x)-2xa_{n-1}(x)+a_{n-2}(x)=0.$$

Par récurrence, il est alors clair que pour tout réel x, $a_0(x)=1$

et que $\forall n\geq 1$,

$$a_n(x)=2T_n(x).$$

Maintenant,

• Si $|x|\leq 1$, les pôles de la fraction rationnelle sont de module 1 et on sait que le rayon de convergence de la série est 1.

• Si $x>1$, les pôles sont $x-\sqrt{x^2-1}$ et $x+\sqrt{x^2-1}$ avec $0<x-\sqrt{x^2-1}<x+\sqrt{x^2-1}$ et dans ce cas, le rayon, qui est le minimum des modules des pôles, est $R=x-\sqrt{x^2-1}$.

Si $x<-1$, les pôles sont encore $x-\sqrt{x^2-1}$ et $x+\sqrt{x^2-1}$ avec $x-\sqrt{x^2-1}<x+\sqrt{x^2-1}<0$ et dans ce cas, le rayon est $R=-x-\sqrt{x^2-1}$.
En résumé, si $|x|>1$, la série a un rayon de convergence égal à $|x|-\sqrt{x^2-1}$.

Chapitre 2

Polynômes de Tchebychev orthogonaux et approximation

Dans ce chapitre on va traiter quelques propriétés fondamentales supplémentaires des polynômes orthogonaux de Tchebychev

2.1 Inégalités de Bernstein et Markov

Définition 2.1.1. par fois utilise $\{T_n^*(x)\}_n$ les polynômes de Tchebychev maniques

$$\begin{aligned} T_n^*(x) &= \frac{T_n(x)}{2^{n-1}} \\ &= x^n + \lambda_1 x^{n-1} + ...\lambda_n \end{aligned}$$

$\{T_n^*(x)\}_n$ possède les mêmes propriétés que $\{T_n(x)\}_n$

$$\int_{-1}^{1} T_n^*(x) x^m \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 0 \qquad m = 0, 1, 2, ...n-1$$

on à

$$\int_{-1}^{1} T_n^*(x) x^n \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 2^{n-1} = \|T_n^*\|^2$$

donc

$$\begin{cases} T_n^*(0) = \dfrac{T_n(0)}{2^{n-1}} \\ \\ T_n(\pm 1) = \dfrac{T_n(\pm 1)}{2^{n-1}} \end{cases}$$

Proposition 2.1.1: Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$,on a : $|\sin(n\theta)| \leq n \sin\theta$

- Si $n = 1$, pour tout $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$,
- Si $n \geq 2$ seulement lorsque $\theta = 0$

Preuve. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Si $n = 1$, pour tout $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2n}\right]$ on a :

$$|\sin(n\theta)| = n \sin\theta$$

Si $n \geq 2$, pour tout $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2n}\right]$ et f est dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{2n}\right]$

on pose

$$f(\theta) = n\sin(\theta) - |\sin(n\theta)| = n\sin(\theta) - \sin(n\theta),$$

$$f'(\theta) = n(\cos(\theta) - \cos(n\theta)).$$

Pour $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2n}\right]$,on a $0 < \theta < n\theta \leqslant \pi$ et donc

$$f'(\theta) > 0 \quad \text{(puis que la fonction cos est strictement décroissante sur=} \left[0, \frac{\pi}{2n}\right])$$

La fonction f est strictement décroissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2n}\right]$.

On en déduit que pour $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2n}\right]$,$f(\theta) > f(0) = 0$.

Donc,

$$\forall n \geqslant 2, \forall \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2n}\right], \ |\sin(n\theta)| \leqslant n \sin\theta \text{ avec égalité si et seulement si } \theta = 0$$

Puisque la fonction sin est concave sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2n}\right]$. Donc son graphe sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2n}\right]$ est au-dessus de sa corde joignant ses points d'abscisses 0 et $\dfrac{\pi}{2}$. On en déduit que :

$$\forall\theta \in \left[\frac{\pi}{2n}, \frac{\pi}{2}\right], \sin(\theta) \geqslant \frac{2}{\pi}\theta \tag{2.1}$$

Pour tout θ de$\left[\dfrac{\pi}{2n}, \dfrac{\pi}{2}\right]$, on a

$$n\sin\theta \geqslant n\frac{2\theta}{\pi} \geqslant \frac{2n\frac{\pi}{2n}}{\pi} = 1 \geqslant |\sin(n\theta)|$$

On en déduit que

$$\forall\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] |\sin(n\theta)| \leqslant n\sin\theta.$$

□

Conclusion

- Si $n = 1$, $\forall\theta \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $|\sin(n\theta)| = n\sin\theta$.
- Si $n \geqslant 2$, $\forall\theta \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $|\sin(n\theta)| = n\sin\theta \Leftrightarrow \theta = 0$

Proposition 2.1.1. Pour tout $n \geq 1$. et $x \in]-1, 1[$ on a :

$$\forall n \geqslant 1, \sup_{x\in[-1,1]} |T_n'(x)| = 2^{1-n}n^2$$

Preuve. Pour tout $n \geq 1$. et $x \in]-1, 1[$, on sait que :

$$|T_n'(x)| = \left|2^{1-n}\frac{n\sin(n\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}\right| \leqslant \frac{n}{\sqrt{1-x^2}}|n\sin\arccos x| = 2^{n-1}n^2.$$

Cette inégalité reste vraie par continuité de T_n' en 1 et -1. Donc $\forall x \in [-1, 1]$, $|T_n'(x)| \leqslant 2^{1-n}n^2$. De plus, $|T_n'(1)| = 2^{1-n}n^2$ et donc

$$\forall n \geqslant 1, \sup_{x\in[-1,1]} |T_n'(x)| = 2^{1-n}n^2.$$

Si $n = 1$, $\forall x \in [-1, 1]$, $T_1(x) = x$ et donc $\forall x \in [-1, 1]$, $|T_1'(x)| = 1 = 2^{1-1}1^2$. Donc, si $n = 1$, la borne supérieure est atteinte en tout réel x de $[-1, 1]$.

Si $n \geqslant 2$, on sait déjà que $\sup_{x\in[-1,1]} |T_n'(x)|$ est atteint pour $x = 1$ et $x = -1$.

Soit $x \in]-1, 1[$. Puisque T_n est paire ou impaire

$$\begin{aligned}|T_n'(x)| = |T_n'(|x|)| &= n2^{1-n}|\frac{\sin(n\arccos(|x|)}{\sqrt{1-x^2}}| \\ &< n2^{1-n}\frac{\sin(n\arccos(|x|)}{\sqrt{1-x^2}} \text{ (cararccos} |x| \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[\\ &= n^2 2^{1-n}.\end{aligned}$$

Finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la borne supérieure est atteinte. De plus, si $n = 1$ elle est atteinte en tout réel x de $[-1, 1]$ et si $n \geqslant 2$, elle est atteinte en $x = 1$ et $x = -1$.
□

Proposition 2.1.2. pour tout $n \geq 1$ et $x \in \mathbb{R}$ $x_{n,j}$, avec$1 \leqslant j \leqslant n$, on a :

$$\frac{T_n'(x)}{T_n(x)} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{x - x_{n,j}} \tag{2.2}$$

Preuve. Puisque T_n est de degré n et de coefficient dominant 2^{1-n},pour$x \in \mathbb{R}$ on a :

$$T_n(x) = 2^{1-n} \prod_{j=1}^{n=1} (x - x_{n,j})$$

donc pour $x \in \mathbb{R}$ $x_{n,j}, 1 \leqslant j \leqslant n$

$$T_n'(x) = 2^{1-n} \sum_{j=1}^{n} \prod_{k \neq j} (x - xn, k) = \sum_{j=1}^{n} \frac{T_n(x)}{x - x_{n,j}}$$

alors

$$\forall n \geqslant 1, \forall x \in \mathbb{R} x_{n,j}, 1 \leqslant j \leqslant n, \frac{T_n'(x)}{T_n(x)} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{x - x_{n,j}}.$$

□

2.1.1 Inégalité de Bernstein

Proposition 2.1.3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $P \in E_{n-1}$ tel que :

$$\sup_{x \in [-1,1]} \sqrt{1 - x^2} |P(x)| \leq 1. \quad |P(x)| \leq 1$$

Preuve.

a) Soit $x \in [-1, 1]$.

Si $x \in [x_{n,1}, x_{n,n}]$,d'après la question précédente,$\sqrt{1 - x^2} \geqslant \frac{1}{n}$
donc

$$|P(x)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \leqslant n$$

Supposons maintenant que $x \in [-1, x_{n,1}[\cup]x_{n,n}, 1]$. Alors x n'est pas racine de T_n :

$$\begin{aligned} |P(x)| &= \frac{2^{n-1}}{n} \left| \sum_{j=1}^{n} (-1)^{n-j} \sqrt{1 - x_{n,j}^2} P(x_{n,j}) \frac{T_n(x)}{x - x_{n,j}} \right| \\ &\leqslant \frac{2^{n-1}}{n} \sum_{j=1}^{n} \sqrt{1 - x_{n,j}^2} |P(x_{n,j})| \frac{|T_n(x)|}{|x - x_{n,j}|} \\ &\leqslant \frac{2^{n-1}}{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{|T_n(x)|}{|x - x_{n,j}|}. \end{aligned}$$

Maintenant, d'après 2.2) :

$$\frac{T_n'(x)}{T_n(x)} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{x - x_{n,j}}$$, puisque $x \in [-1, x_{n,1}[\cup]x_{n,n}, 1]$, on a :

$\forall j \in [1, n], \ x - x_{n,j} < 0,$ ou bien $\forall j \in [1, n] x - x_{n,j} > 0,$

$$\frac{|T_n'(x)|}{|T_n(x)|} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{|x - x_{n,j}|} .$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned}|P(x)| &\leqslant \frac{2^{n-1}}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{|T_n(x)|}{|x-x_{n,j}|} = \frac{2^{n-1}}{n}|T_n'(x)| \\ &\leqslant \frac{2^{n-1}}{n}\times 2^{1-n}n^2 \\ &= n\end{aligned}$$

alors $\forall x \in [-1,1], |P(x)| \leqslant n$, donc $\sup\limits_{x\in[-1,1]}|P(x)| \leqslant n$.

b) Si $P=0$, l'inégalité de l'énoncé est immédiate. Sinon, P ne s'annule pas en au moins un réel de $]-1,1[$ et donc le nombre

$$M = \sup_{x\in[-1,1]}\sqrt{1-x^2}|P(x)| \geq 0.$$

Le polynôme $\dfrac{P}{M}$ est alors un élément de E_{n-1} tel que

$$\sup_{x\in[-1,1]}\sqrt{1-x^2}\left|\frac{1}{M}P(x)\right| \leqslant 1.$$

La question précédente permet d'affirmer que

$$\sup_{x\in[-1,1]}\left|\frac{1}{M}P(x)\right| \leqslant n$$

On en déduit que

$$\sup_{x\in[-1,1]}|P(x)| \leqslant nM = n\sup_{x\in[-1,1]}\sqrt{1-x^2}|P(x)|.$$

Alors

$$\forall P\in E_{n-1},\ \sup_{x\in[-1,1]}|P(x)| \leqslant n\sup_{x\in[-1,1]}\sqrt{1-x^2}|P(x)|.$$

□

Proposition 2.1.4. Soit $P\in E_{n-1}$ et pour tout $\theta\in\mathbb{R}$, un polynôme de degré au plus $n-1$,on a

$$\sup_{\theta\in\mathbb{R}}|T'(\theta)| \leqslant n\sup_{\theta\in\mathbb{R}}|T(\theta)|.$$

Preuve. Soit $k\in\mathbb{N}^*$. Pour $\theta\in\mathbb{R}$, on a $F_k(\cos\theta)=\cos(k\theta)$

et donc

$$-\sin\theta F_k'(\cos\theta) = -k\sin(k\theta)$$

puis

$$\sin(k\theta) = \sin\theta\left(\frac{F_k'}{k}\right)(\cos\theta).$$

Puis que F_k est un polynôme de degré k, le polynôme $B_k=\dfrac{1}{k}F_k'$ est un polynôme de degré $k-1$ vérifiant

$$\forall\theta\in\mathbb{R}, \sin(k\theta) = \sin\theta B_k(\cos\theta).$$

Pour $\theta \in \mathbb{R}$:

$$T(\theta_0+\theta)-T(\theta_0-\theta)=\sum_{k=1}^{n}\left(a_k(\cos(k(\theta_0+\theta))-\cos(k(\theta_0-\theta)))+b_k(\sin(k(\theta_0+\theta))-\sin(k(\theta_0-\theta)))\right)$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\left(-2a_k\sin(k\theta_0)\sin(k\theta)+2b_k\cos(k\theta_0)\sin(k\theta)\right)$$
$$=2\sum_{k=1}^{n}\left(-a_k\sin(k\theta_0)+b_k\cos(k\theta_0)\right)B_k(\cos\theta)\sin\theta$$
$$=2\sin\theta\ P(\cos\theta).$$

où $P=\sum_{k=1}^{n}(-a_k\sin(k\theta_0)+b_k\cos(k\theta_0))B_k$ est un polynôme de degré au plus $n-1$.Le polynôme P dépend de T et de θ_0.

Soit $x \in [-1,1]$:

On pose $M=\sup_{\theta\in\mathbb{R}}|T(\theta)|$ .Puisque $P \in E_{n-1}$

$$|P(x)| \leqslant n\sup_{x\in[-1,1]}\sqrt{1-x^2}|P(x)|$$
$$=n\sup_{\theta\in\mathbb{R}}\left(\sqrt{1-\cos^2\theta}|P(\cos\theta)|\right)$$
$$=n\sup_{\theta\in\mathbb{R}}|\sin\theta P(\cos\theta)|$$
$$=\frac{n}{2}\sup_{\theta\in\mathbb{R}}|T(\theta_0+\theta)-T(\theta_0-\theta)| \leqslant \frac{n}{2}(M+M)=nM,$$

et donc

$$\sup_{x\in[-1,1]}|P(x)| \leqslant n\sup_{\theta\in\mathbb{R}}|T(\theta)|.$$

Salient $\theta_0 \in \mathbb{R}$ et $\theta \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{2\sin\theta P(\cos(\theta))}{\theta}=\frac{T(\theta_0+\theta)-T(\theta_0-\theta)}{\theta}=\frac{T(\theta_0+\theta)-T(\theta_0)}{\theta}-\frac{T(\theta_0-\theta)-T(\theta_0)}{\theta}$$

Quand θ tend vers 0, on obtient $2P(1)=2T'(\theta_0)$

et donc

$$|T'(\theta_0)|=|P(1)| \leqslant \sup_{x\in[-1,1]}|P(x)| \leqslant n\sup_{\theta\in\mathbb{R}}|T(\theta)|.$$

Ceci étant valable pour tout réel θ_0, on a montré que

$$\sup_{\theta\in\mathbb{R}}|T'(\theta)| \leqslant n\sup_{\theta\in\mathbb{R}}|T(\theta)|.$$

□

2.1.2 Inégalité de Markov

Théorème 2.1.1.
Pour tout polynôme $P \in E_n$,on a, $\sup_{x\in[-1,1]}|P'(x)| \leqslant n^2\sup_{x\in[-1,1]}|P(x)|$.

Preuve. Soit $P=\sum_{k=0}^{n}a_kx^k \in E_n$. Pour $\theta \in \mathbb{R}$ .On pose

$$T(\theta)=P(\cos\theta).$$

On sait que pour $k \in [0,n]$, $\cos^k \theta$ se linéarité en une combinaison linéaire des $\cos(j\theta), 0 \leqslant j \leqslant k$ et donc il

existe des réels $a_0, \dots, a_n$ tels que

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, T(\theta) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(k\theta).$$

On a

$$\begin{aligned}\sup_{x\in[-1,1]} |P'(x)| &\leqslant n \sup_{x\in[-1,1]} \sqrt{1-x^2}|P'(x)| \quad (\text{ car} P' \in E_{n-1})\\ &= n \sup_{\theta\in\mathbb{R}} |\sin\theta P'(\cos\theta)| = n \sup |T'(\theta)|\\ &\leqslant n^2 \sup_{\theta\in\mathbb{R}} |T(\theta)|\end{aligned}$$

□

2.2 Approximation polynômiale

Théorème 2.2.1. La série de fonctions de terme général $\alpha_n F_n$, $n \in \mathbb{N}$, converge simplement vers f sur $[-1,1]$ et chaque fonction $\alpha_n F_n$ est de classe C^∞ sur $[-1,1]$.

Preuve. On suppose que $F_n \in E_n$ et $n \in \mathbb{N}$ on a alors :

$$\sup_{x\in[-1,1]} |(\alpha_n F_n)'(x)| = |\alpha_n| \sup_{x\in[-1,1]} |F_n'(x)| \leqslant n^2|\alpha_n| \sup_{x\in[-1,1]} |F_n(x)| \leqslant n^2|\alpha_n|.$$

Plus généralement, puisque pour $k \leqslant n$, $F_n^{(k)}$ est dans E_{n-k}, pour $k \leqslant n$,on a

$$\sup_{x\in[-1,1]} |(\alpha_n F_n)^{(k)}(x)| \leqslant n^2(n-1)^2 \dots (n-k+1)^2|\alpha_n| \leqslant n^{2k}|\alpha_n|,$$

ce qui reste vrai pour $k > n$ car alors $F_n^{(k)} = 0$.

Ainsi,

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}, \sup_{x\in[-1,1]} |(\alpha_n F_n)^{(k)}(x)| \leq n^{2k}|\alpha_n|.$$

Comme la série numérique de terme général $n^{2k}|\alpha_n|$, $n \in \mathbb{N}$ converge , on en déduit que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la série de fonction de terme $(\alpha_n F_n)^{(k)}$, $n \in \mathbb{N}$, converge normalement sur $[-1,1]$.
En résumé :
- la série de fonctions de terme général $\alpha_n F_n$, $n \in \mathbb{N}$, converge simplement vers f sur $[-1,1]$.
- chaque fonction $\alpha_n F_n$, $n \in \mathbb{N}$, est de classe C^∞ sur $[-1,1]$.
- chaque série de fonctions $\alpha_n F_n^{(k)}$, $k \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$, converge normalement sur $[-1,1]$.

D'après une généralisation du théorème de dérivation terme à terme, la fonction f est de classe C^∞ sur $[-1,1]$, et les dérivées successives de f s'obtiennent par dérivation terme à terme.

□

Proposition 2.2.1.

La suite $(d(f,V_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est à décroissance rapide si $V_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k F_k(x)$alors est $f(x) = \sum_{n=0}^{n} \alpha_n F_n(x)$

Preuve.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour $x \in [-1,1]$,on a :

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \alpha_k F_k(x) \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \alpha_k F_k(x) \right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} |\alpha_k||F_k(x)| \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} |\alpha_k|.$$

alors

$$\sup_{x\in[-1,1]} \left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \alpha_k F_k(x) \right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} |\alpha_k|.$$

puisque $\sum_{k=0}^{n} \alpha_k F_k$ est dans V_n, on en déduit que :

$$d(f, V_n) \leqslant \sup_{x\in[-1,1]} \left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \alpha_k F_k(x) \right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} |\alpha_k|.$$

Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ d(f, V_n) \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} |\alpha_k| \quad (*).$$

Maintenant, il est clair que la suite (α_n) est à décroissance rapide si et seulement si la suite $(|\alpha_n|)$ et à $j = 0$, permet d'affirmer que la suite $\left(\sum_{k=n+1}^{\infty} |\alpha_k| \right)_{n\in\mathbb{N}}$ est à décroissance rapide.

La suite $(d(f, V_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est à décroissance rapide.

□

Proposition 2.2.2. La suite $(a_n(\tilde{f}))$ est à décroissance rapide .

Preuve.
La fonction $\tilde{f}$ est 2π-périodique, continue par morceaux et paire donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ b_n(\tilde{f}) = 0.$$

puisque f est de classe C^∞ sur $[-1, 1]$, $\tilde{f}$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.
On sait alors que

$$\forall k \in \mathbb{N},\ a_n(\tilde{f}) \underset{n\to+\infty}{=} 0 \left(\frac{1}{n^k} \right) \text{ou encore } \forall k \in \mathbb{N}, n^k a_n(\tilde{f}) n \underset{n\to+\infty}{=} 0.$$

Puisque $\tilde{f}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique, on sait que la série de Fourier de $\tilde{f}$ converge normalement vers $\tilde{f}$ sur $\mathbb{R}$.

□

Proposition 2.2.3. f est de classe C^∞ sur $[-1, 1]$,ou la suite $(d(f, V_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est à décroissance rapide

Preuve. Pour tout réel θ,

$$f(\cos\theta) = \tilde{f}(\theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(\tilde{f}) \cos(n\theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n F_n(\cos\theta),$$

où

$$\alpha_n = a_n(\tilde{f}) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\cos t)\, dt & \text{si } n = 0 \\ \\ \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\cos t) \cos(nt)\, dt & \text{si } n \geqslant 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow \forall x \in [-1, 1], f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n F_n(x)$. De plus, la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à décroissance rapide .
$\Rightarrow$, la suite $(d(f, V_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est à décroissance rapide. On a ainsi montré que si f est de classe C^∞ sur $[-1, 1]$, la suite $(d(f, V_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est à décroissance rapide.
□

Proposition 2.2.4. $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions polynomiales telle que $\forall n \in \mathbb{N}, \deg(p_n) \leqslant n$ et la suite $(\|f-p_n\|_\infty)$ est à décroissance rapide.

Preuve.
Soit $n \in \mathbb{N}$,par définition d'une borne inférieure , il existe un élément p_n de V_n tel que :

$$\|f-p_n\|_\infty \leqslant d(f,V_n)+\frac{1}{n^n}.$$

pour tout entier k, la suite :

$$\left(n^k\left(d(f,V_n)+\frac{1}{n^n}\right)\right) \text{ est bornée}$$

Par conséquent, on en déduit la suite $(n^k\|f-p_n\|_\infty)$ est bornée.

Donc la suite $(\|f-p_n\|_\infty)$ est à décroissance rapide.

□

Proposition 2.2.5. Pour toute fonction $f \in C([-1,1]), f$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[-1,1]$ si et seulement si la suite $d(f,V_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est à décroissance rapide.

Preuve.
Soient $k \in \mathbb{N}^*$ puis $P \in E_{k-1}$.

$$\begin{aligned}
a_k(\tilde{P}) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\tilde{P}(t)\cos(kt)dt = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi P(\cos t)F_k(\cos t)dt \\
&= \frac{2}{\pi}\int_1^{-1} P(x)F_k(x)\times -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{P(x)F_k(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx \\
&= \frac{1}{\pi}(P|F_k) = \frac{2^{k-1}}{\pi}(P|T_k)
\end{aligned}$$

$T_k \in E_{k-1}^\perp$ et donc $(P|T_k)=0$. Ainsi, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $a_k(\tilde{P})=0$.

Ensuite, par linéarité des coefficients de Fourier, pour $k \in \mathbb{N}^*$,

$$a_k(\tilde{f}) = a_k(\tilde{f}) - a_k(\tilde{P}) = a_k(\tilde{f}-\tilde{P}) = a_k(\widetilde{f-P}).$$

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $P \in E_{k-1}$,

$$\begin{aligned}
|a_k(\tilde{f})| &= |a_k(\widetilde{f-P})| \\
&= \frac{1}{\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi}(f-P)(\cos t)\cos(kt)dt\right| \\
&\leqslant \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|(f-P)(\cos t)|\,|\cos(kt)|\,dt \\
&\leqslant 2\|f-P\|_\infty.
\end{aligned}$$

Par suite :

$\frac{1}{2}|a_k(\tilde{f})|$ est un minorant de $\{\| f-P \|_\infty, P \in V_{k-1}\}$ et puisque $d(f,V_{k-1})$ est le plus grand de ces minorants,

On a donc

$$\frac{1}{2}|a_k(\tilde{f})| \leqslant d(f,V_{k-1}).$$

Ainsi
$$\forall k \in \mathbb{N}^*, |a_k(\tilde{f})| \leqslant 2d(f, V_{k-1}).$$
On en déduit que la suite $(a_k(\tilde{f}))_{k\in\mathbb{N}}$ est à décroissance rapide.

Soit g la fonction définie sur $[-1,1]$ par :
$$\forall x \in [-1,1], g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(\tilde{f})F_n(x).$$

Puisque la suite $(a_n(\tilde{f}))_{n\in\mathbb{N}}$ est à décroissance rapide, g est définie sur $[-1,1]$ et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[-1,1]$.

Pour tout réel θ,
$$\tilde{g}(\theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(\tilde{f})F_n(\cos\theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(\tilde{f})\cos(n\theta),$$
cette série convergeant normalement vers $\tilde{g}$ sur $\mathbb{R}$
(car par exemple $\forall\theta \in \mathbb{R}|a_n(\tilde{f})\cos(n\theta)| \leqslant |a_n(\tilde{f})|$ avec $a_n(\tilde{f}) \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^2}\right)$).

On sait alors que l'on obtient les coefficients de Fourier de $\tilde{g}$ par intégration terme à terme ce qui fournit
$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n(\tilde{g}) = a_n(\tilde{f}) \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, b_n(\tilde{g}) = b_n(\tilde{f}).$$
Comme $\tilde{f}$ et $\tilde{g}$ sont continues sur $\mathbb{R}$, on en déduit que $\tilde{f} = \tilde{g}$.

Mais alors
$$\forall x \in [-1,1], f(x) = g(x) \text{ et donc} f = g.$$
Puisque g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[-1,1]$, il en est de même de f.

$\square$

Chapitre 3

polyônmes orthogonaux combinaison linéaires des polynomes de Tchebychev de première et seconde espèce

L'objectif de ce mémoire est le chapitre 3 .Bien sûr nous construisons un nouveau système des polynômes orthogonaux combinaison linéaires des polynômes orthogonaux de Tchebychev de première et seconde espèces relativement à une mesure supportée sur un segment .Nous étudions les propriétés récurrences et propriétés différentielles et intégrales aussi les propriétés extrémales de ce nouveau système des polynômes orthogonaux de Tchebychev.

Dans [19], Grunbaum a considéré quelques exemples de chaines de Markov physiquement importantes qui présentent des familles bien connues de polynômes orthogonaux. L'un de ces les exemples sont constitués de la matrice

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & & & \\ q & 0 & p & & & \\ 0 & q & 0 & p & & \\ & & q & 0 & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & \end{pmatrix}$$

avec $0 \leq P \leq 1$ et $q = 1 - p$, il cherchait des polynômes $Q_j(x)$ tel que

$$Q_{-1}(x) = 0, \qquad Q_0(x) = 1$$

et si $Q(x)$ désigne le vecteur

$$Q(x) = \begin{pmatrix} Q_0(x) \\ Q_1(x) \\ Q_2(x) \\ \vdots \end{pmatrix}$$

il a demandé à avoir

$$PQ(x) = xQ(x) \tag{3.1}$$

l'auteur a affirmé que la matrice P peut être conjugué en une matrice symétrique et il a trouvé l'expression explicite de ces polynômes comme

$$Q_n(x) = \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{n}{2}} \left((2-2p)T_n\left(\frac{x}{2\sqrt{pq}}\right) + (2p-1)U_n\left(\frac{x}{2\sqrt{pq}}\right)\right) \tag{3.2}$$

où T_n et U_n sont ,respectivement les polynômes de Tchebychev de premier et de deuxième type.
Dans cet article et de manière similaire , nous introduisons les polynômes $R_n(x)$ définis par

$$R_n(x) = \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{n}{2}} \left((2-2p)V_n\left(\frac{x}{2\sqrt{pq}}\right) + (2p-1)W_n\left(\frac{x}{2\sqrt{pq}}\right)\right) \tag{3.3}$$

où V_n et W_n sont ,respectivement les polynômes de Tchebychev de troisième et quatrième types et le but de cette contribution est d'étudier $Q_n(x)$ et $R_n(x)$ .L'article sera structuré comme suit : dans la section 1, nous présentons une terminologie utile ainsi que certaines définitions nécessaires concernant les polynômes de Tchebychev de premier ,deuxième , troisième et quatrième types .
Dans la section 2,nous présentons quelques propriétés des fonctions $Q_n(x)$et $R_n(x)$.

3.1 La suite Q_n et sa suite co-récursive R_n

Dans [19], l'auteur a mentionné que la suite $\{Q_n\}_{n\geq 0}$ est orthogonale par rapport à la fonction de poids .

$$W_{pq}(x) = \frac{\sqrt{4pq - x^2}}{1 - x^2} \quad si - \sqrt{4pq} \leq x \leq \sqrt{4pq}$$

avec $0 \leq P \leq 1, 0 \leq Q \leq 1, q = 1-p$ et $Q_{-1}(x) = 0$, $Q_0(x) = 1$ si $p \geq \frac{1}{2}$ ce système de polynômes satisfait à

$$\left(\frac{p}{q}\right)^n \int_{-2\sqrt{pq}}^{2\sqrt{pq}} Q_n(x)Q_m(x)\frac{\sqrt{4pq - x^2}}{1 - x^2}dx = \delta_{mn}\|Q_n\|^2 \quad n \geq 1$$

et

$$\left(\frac{p}{q}\right)^n \int_{-2\sqrt{pq}}^{2\sqrt{pq}} Q_0(x)Q_m(x)\frac{\sqrt{4pq - x^2}}{1 - x^2}dx = \delta_{0n}\|Q_0\|^2 \quad m \geq 1$$

Avec

$$\|Q_0\|^2 = 2(1-p)\pi \ , \quad \text{et} \quad \|Q_n\|^2 = 2(1-p)\pi$$

L'expression explicite des polynômes Q_n est donnée par(3.2) et ,de manière similaire , il est pertinent de considérer les polynômes

$$R_n(x) = \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{n}{2}} \left((2 - 2p)V_n\left(\frac{x}{2\sqrt{pq}}\right) + (2p-1)W_n\left(\frac{x}{2\sqrt{pq}}\right)\right) \tag{3.4}$$

où V_n et W_n sont respectivement les polynômes de Tchebychev de troisième et de quatrième types , il est évident d'après (3,1) que la relation de récurrence à trois termes est donnée par

$$pQ_n(x) = xQ_{n-2}(x) - qQ_{n-2}(x) \tag{3.5}$$

avec des conditions initiales

$$Q-1(x) = 0, Q_0(x) = 1$$

De manière similaire, nous avons la proposition suivante pour les polynômes R_n

Proposition 3.1.1. Les polynômes orthogonaux $R_n(x)$ satisfont les relations de récurrence à trois termes

$$xR_{n-1}(x) = pR_n(x) + qR_{n-2}(x), \qquad n \geq 2 \tag{3.6}$$

avec des conditions initiales

$$R_{-1}(x) = 0, \quad R_0(x) = 1, \quad R_1(x) = \frac{1}{p}x + (4p-3)\sqrt{\frac{q}{p}}$$

Il s'agit de la matrice

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} (4p-1)\sqrt{pq} & p & 0 & & \\ q & 0 & p & & \\ 0 & q & 0 & p & \\ & & q & 0 & \ddots \\ & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

avec $0 \leq p \leq 1$ et , $q = 1 - p$ et avec les conditions initiales

$$R_{-1} = 0\ ,\quad R_0(x) = 1,$$

et is $R(x)$ désigne le vecteur

$$R(x) = \begin{pmatrix} R_0(x) \\ R_1(x) \\ R_2(x) \\ \vdots \end{pmatrix}$$

alors on a

$$P_R R(x) = xR(x) \tag{3.7}$$

Preuve. Pour $n \geq 1$

$$\begin{aligned} xR_n(x) &= \sqrt{pq}\left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{n}{2}}(2p-2)\left(V_{n+1}\left(\frac{x}{2\sqrt{pq}}\right) + V_{n-1}\left(\frac{x}{2\sqrt{pq}}\right)\right) \\ &+ \sqrt{pq}\left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{n}{2}}(2p-1)\left(W_{n+1}\left(\frac{x}{2\sqrt{pq}}\right) + W_{n-1}\left(\frac{x}{2\sqrt{pq}}\right)\right) \end{aligned}$$

pour $n \geq 1$,cette équation peut etre écrite sous la forme suivante

$$\begin{aligned} xR_n(x) &= \sqrt{\frac{p}{q}}\sqrt{pq}\left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{n+1}{2}}(2p-2)\left(V_{n+1}\left(\frac{x}{2\sqrt{pq}}\right) + W_{n+1}\left(\frac{x}{2\sqrt{pq}}\right)\right) \\ &+ \sqrt{\frac{q}{p}}\sqrt{pq}\left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{n-1}{2}}(2p-2)\left(V_{n-1}\left(\frac{x}{2\sqrt{pq}}\right) + W_{n-1}\left(\frac{x}{2\sqrt{pq}}\right)\right) \end{aligned}$$

pour $n \geq 1$, cela donne

$$xR_n(x) = \sqrt{\frac{p}{q}}\sqrt{pq}R_{n+1}(x) + \sqrt{\frac{q}{p}}\sqrt{pq}R_{n-1}(x) = pR_{n+1}(x) + qR_{n-1}(x),$$

avec

$$R_1(x) = \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{2}}\left((2p-2)V_1\left(\frac{x}{2\sqrt{pq}}\right) + (2p-2)W_1\left(\frac{x}{2\sqrt{pq}}\right)\right)$$

En conclusion , nous avons

$$xR_n(x) = pR_{n+1}(x) + qR_{n-1}(x), \qquad n \geq 1 \tag{3.8}$$

$$R_1(x) = \frac{1}{p} + \sqrt{\frac{q}{p}}(4p-3). \tag{3.9}$$

Dans ce qui suit , nous nous intéressons aux conditions aux frontières $-2\sqrt{pq}$ et $2\sqrt{pq}$pour les variables Q_n, R_n,Q'_n,et R'_n. □

Proposition 3.1.2. Nous avons les identifiants suivants :

$$Q_n(2\sqrt{pq}) = \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{n}{2}}((2p-1)n+1), \tag{3.10}$$

$$Q_n(-2\sqrt{pq}) = (-1)^n\left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{n}{2}}((2p-1)n+1)\,, \tag{3.11}$$

$$Q'_n(2\sqrt{pq}) = \frac{n}{2\sqrt{pq}}\left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{n}{2}}\frac{(2p-1)(n+1)(n+2) - 6(p-1)n}{3},$$

$$Q'_n(-2\sqrt{pq}) = -(-1)^n n\left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{n}{2}}\frac{(2p-1)(n+1)(n+2) - 6(p-1)n}{3}. \tag{3.12}$$

Preuve. avec $x = 2\sqrt{pq}$ dans (3.2),on obtient :

$$Q_n(2\sqrt{pq}) = \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{n}{2}} ((2-2p)T_n(1) + (2p-1)U_n(1)).$$

Nous croutons

$$Q_n(2\sqrt{pq}) = \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{n}{2}} (2-2p+(2p-1)(n+1)).$$

On peut écrire $Q_n(-2\sqrt{pq}) = (-1)^n Q_n(2\sqrt{pq})$. En dérivant les deux members de l'équation (3.2), on obtient

$$\begin{aligned} Q'_n(x2\sqrt{pq}) &= \frac{1}{2\sqrt{pq}} \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{n}{2}} ((2-2p)T'_n(x) + (2p-1)U'_n(x)) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{pq}} \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{n}{2}} (n(2-2p)U_{n-1}(x) + (2p-1)U'_n(x)). \end{aligned}$$

Afin de calculer $U'_n(1)$. On utilise le changement de variable $x = \cos\theta$, alors d'obtenir

$$\begin{aligned} U'_n(1) &= -\lim_{\theta\to 0} \frac{(n+1)\sin\theta\cos(n+1)\theta - \cos\theta\sin(n+1)\theta}{\sin^3\theta} \\ &= -\lim_{\theta\to 0} \frac{-(n+1)^2\sin\theta\sin(n+1)\theta + (n+1)\cos\theta\cos(n+1)\theta}{3\sin^2\theta\cos\theta} \\ &\quad -\lim_{\theta\to 0} \frac{-(n+1)\cos\theta\cos(n+1)\theta + \sin\theta\sin(n+1)\theta}{3\sin^2\theta\cos\theta} \\ &= -\lim_{\theta\to 0} \frac{(1-(n+1)^2)\sin(n+1)\theta}{3\sin\theta\cos\theta} = \frac{(n+1)((n+1)^2-1)}{3} \end{aligned}$$

Donc

$$U'_n(1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}. \tag{3.13}$$

En dérivant les deux membres de la formule structurelle (3.2),et en prenant $x = 2$,on obtient

$$Q'_n(2\sqrt{pq}) = \frac{1}{2\sqrt{pq}} \left(\frac{q}{p}\right)^{n} ((2-2p)nU_{n-1}(1) + (2p-1)U'_n(1)).$$

nutriment dit

$$Q'_n(2\sqrt{pq}) = \frac{1}{2\sqrt{pq}} \left(\frac{q}{p}\right)^{n} \left((2-2p)n^2 + (2p-1)\frac{n(n+1)(n+2)}{3}\right)$$

$$Q'_n(-2\sqrt{pq}) = (-1)^{n-1} Q'_n(2\sqrt{pq})$$

Ce qui se réduit à (3.13).

□

Proposition 3.1.3. Pour tout $n \geq 1$, on a

$$R_n(2\sqrt{pq}) = \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{n}{2}} (2(2p-1)n+1) \tag{3.14}$$

et

$$R_n(-2\sqrt{pq}) = \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{n}{2}} (4(p-1)n-1), \tag{3.15}$$

regalement

$$R'_n(2\sqrt{pq}) = \frac{n(n+1)}{6\sqrt{pq}} \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{n}{2}} ((2p-1)(2n+1) + 2p - 2) \tag{3.16}$$

et

$$R'_n(-2\sqrt{pq}) = (-1)^n \frac{n(n+1)}{6\sqrt{pq}} \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{n}{2}} ((2p-1)(2n+1) + 2p - 2). \tag{3.17}$$

Preuve. En remplaçant $x = 2\sqrt{pq}$ dans (3.3), on obtient

$$R_n(2\sqrt{pq}) = \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{n}{2}} ((2-2p)V_n(1) + (2p-1)W_n(1))$$

d'où

$$R_n(2\sqrt{pq}) = \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{n}{2}} (2(2p-1)n+1),$$

Ainsi, (3.14) est démontrée.

Pour démontrer (3.16),on dérive les deux membres de l'équation (3.6)

$$2\sqrt{pq}R'_n(2x\sqrt{pq}) = \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{n}{2}} ((2-2p)V'_n(x) + (2p-1)W'_n(x)),$$

donc

$$2\sqrt{pq}R'_n(2\sqrt{pq}) = \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{n}{2}} ((2-2p)V'_n(1) + (2p-1)W'_n(1)),$$

En utilisant les identités suivantes ,on obtient (3.16) et (3.17).

□

3.2 Noyau de Q_n et R_n

Le noyau Q d'ordre n est donné par [20],[21]

$$K_n(x,y) = \sum_{k=0}^{n} \frac{Q_k(x)Q_k(y)}{||Q_k||^2}, \tag{3.18}$$

La suite $(K_n(x, 2\sqrt{pq}))_{n=0}^{\infty}$ est orthogonale par rapport à la fonction poids

$$t_{p,q}(x) = (x - 2\sqrt{pq})\frac{\sqrt{4pq - x^2}}{1 - x^2},$$

pour $-1 < -2\sqrt{pq} \leq x \leq 2\sqrt{pq} < 1, i.e.$

$$\int_{-2\sqrt{pq}}^{2\sqrt{pq}} K_n(x, 2\sqrt{pq})K_m(x, 2\sqrt{pq})(x - 2\sqrt{pq})\frac{\sqrt{4pq - x^2}}{1 - x^2}dx = 0, \quad n \neq m.$$

En tenant compte de l'orthogonalité , la suite $(K_n(x, 2\sqrt{pq}))_{n=0}^{\infty}$ satisfait la formule de **Christoffel-Darboux** [20],[21]

$$K_n(x,y) = \frac{1}{\| Q_n \|^2} \frac{Q_{n+1}(x)Q_n(y) - Q_{n+1}(y)Q_n(x)}{x - y}, \quad x \neq y, \tag{3.19}$$

et pour $x = y$,on a

$$K_n(x,x) = \frac{1}{\| Q_n \|^2}(Q'_{n+1}(x)Q_n(x) - Q_{n+1}(x)Q'_n(x)). \tag{3.20}$$

K_n possède la propriété de noyau reproducteur [20],[21]

$$f(x) = \int_{-2\sqrt{pq}}^{2\sqrt{pq}} K_n(x,t)f(t)\frac{\sqrt{4pq - t^2}}{1 - t^2}dt, \tag{3.21}$$

pour toute fonction continue f sur l'intervalle $[-2\sqrt{pq}, 2\sqrt{pq}]$.

Pour $y = 2\sqrt{pq}$ le noyau Q défini par (3.18) s'écrit comme suit

$$K_n\left(x, 2\sqrt{pq}\right) = \sum_{k=0}^{n} \frac{Q_k(x)Q_k(2\sqrt{pq})}{\|Q_k\|^2}, \tag{3.22}$$

et pour $x \neq 2\sqrt{pq}$, la expression (3.19) s'écrit comme suit

$$K_n\left(x, 2\sqrt{pq}\right) = \frac{1}{\|Q_n\|^2} \frac{Q_{n+1}(x)Q_n(2\sqrt{pq}) - Q_{n+1}(2\sqrt{pq})Q_n(x)}{x - 2\sqrt{pq}}. \tag{3.23}$$

Le Théorème suivant montre l'importance du noyau Q.

Théorème 3.2.1. (1) Pour tout $n \geq 1$, on a

$$\begin{aligned} K_n(2\sqrt{pq}, 2\sqrt{pq}) &\\ = \frac{(n+1)\left((2p-1)n+1\right)}{4pq\sqrt{pq}\pi} &\left(\frac{q}{p}\right)^{2n+1} \frac{(2p-1)(n+2)(n+3) - 6(p-1)(n+1)}{3} \\ &- \frac{n\left((2p-1)(n+1)+1\right)}{4pq\sqrt{pq}\pi} \left(\frac{q}{p}\right)^{2n+1} \frac{(2p-1)(n+1)(n+2) - 6(p-1)n}{3}. \end{aligned} \tag{3.24}$$

(2) Tout polynôme $f_n \in L^2(w_{p,q}(x), [-2\sqrt{pq}, 2\sqrt{pq}])$ satisfait

$$\|f_n\|_2^2 = \min_{f_n(2\sqrt{pq})=1} \int_{-2\sqrt{pq}}^{2\sqrt{pq}} f_n^2 \frac{\sqrt{4pq - x^2}}{1 - x^2}\, dx = K_n^{-1}(2\sqrt{pq}, 2\sqrt{pq}), \tag{3.25}$$

et

$$f_n(x) = \frac{K_n(x, 2\sqrt{pq})}{K_n(2\sqrt{pq}, 2\sqrt{pq})}. \tag{3.26}$$

Preuve. (1) En utilisant les relations(3.6),(3.10),(3.11),(3.12)et (3.13),on obtient le résultat souhaité. (2)En appliquant le Théorème 1 [20],[21],on peut énoncer que

$$f_n(x) = \frac{K_n(x, 2\sqrt{pq})}{K_n(2\sqrt{pq}, 2\sqrt{pq})},$$

résout le problème extrémal (3.11)-(3.12)avec la condition initiale $f_n(2\sqrt{pq}) = 1$. De plus $f_n(x)$ satisfait

$$\int_{-2\sqrt{pq}}^{2\sqrt{pq}} f_n(x)^2 \frac{\sqrt{4pq - x^2}}{1 - x^2}\, dx = \frac{1}{K_n^2(2\sqrt{pq}, 2\sqrt{pq})} \int_{-2\sqrt{pq}}^{2\sqrt{pq}} K_n^2(x, 2\sqrt{pq}) \frac{\sqrt{4pq - x^2}}{1 - x^2}\, dx.$$

Pour $\|Q_n\|^2 = 2pq\pi$, $n \geq 1$ nous avons

$$K_n(2\sqrt{pq}, 2\sqrt{pq}) = \frac{1}{\|Q_n\|^2} \left(Q'_{n+1}(2\sqrt{pq})Q_n(2\sqrt{pq}) - Q'_n(2\sqrt{pq})Q_{n+1}(2\sqrt{pq})\right).$$

Alors les relations(3.10) et (3.12)donnent immédiatement

$$Q'_{n+1}(2\sqrt{pq})Q_n(2\sqrt{pq}) = \frac{(n+1)(((2p-1)n+1))}{2\sqrt{pq}} \times \left(\frac{q}{p}\right)^{2n+1} \frac{(2p-1)(n+2)(n+3)-6(p-1)(n+1)}{3} \tag{3.27}$$

et

$$Q'_n(2\sqrt{pq})Q_{n+1}(2\sqrt{pq}) = \frac{n((2p-1)(n+1)+1)}{2\sqrt{pq}} \times \left(\frac{q}{p}\right)^{2n+1} \frac{(2p-1)(n+1)(n+2)-6(p-1)n}{3}. \tag{3.28}$$

□

Proposition 3.2.1. Pour $x = 0$, l'expression (3.38)peut s'écrire sous la forme

$$K_{2n}(0, 2\sqrt{pq}) = \frac{(-1)^{n+1}}{4pq\pi\sqrt{pq}} \left(\frac{q}{p}\right)^{4n+1} ((2p-1)(2n+1)+1) \tag{3.29}$$

et

$$K_{2n-1}(0, 2\sqrt{pq}) = \frac{(-1)^{n+1}}{4pq\pi\sqrt{pq}} \left(\frac{q}{p}\right)^{4n-1} ((2p-1)(2n-1)+1). \tag{3.30}$$

Preuve. En effet,[19]

$$\| Q_n \|^2 = 2pq\pi, \quad n \geq 1$$

et

$$T_{2n}(0) = U_{2n}(0) = (-1)^n, \quad \text{et} \quad T_{2n+1}(0) = U_{2n+1}(0) = 0.$$

D'après (3.5), on obtient

$$Q_{2n}(0) = (-1)^n \left(\frac{q}{p}\right)^{2n}, \quad \text{et} \quad Q_{2n+1}(0) = 0, \quad n \geq 1.$$

Ensuite, d'après (3.23), on a

$$K_{2n}(0, 2\sqrt{pq}) = -\frac{1}{4pq\pi\sqrt{pq}} \left(Q_{2n+1}(0)Q_{2n}(2\sqrt{pq}) - Q_{2n+1}(2\sqrt{pq})Q_{2n}(0)\right)$$

et

$$K_{2n-1}(0, 2\sqrt{pq}) = -\frac{1}{4pq\pi\sqrt{pq}} \left(Q_{2n}(0)Q_{2n-1}(2\sqrt{pq}) - Q_{2n}(2\sqrt{pq})Q_{2n-1}(0)\right),$$

On peut facilement en déduire le résultat suivant :

$$K_{2n}(0, 2\sqrt{pq}) = \frac{(-1)^{n+1}}{4pq\pi\sqrt{pq}} \left(\frac{q}{p}\right)^{2n} Q_{2n+1}(2\sqrt{pq})$$

et

$$K_{2n-1}(0, 2\sqrt{pq}) = \frac{(-1)^{n+1}}{4pq\pi\sqrt{pq}} \left(\frac{q}{p}\right)^{2n} Q_{2n-1}(2\sqrt{pq}).$$

D'après (3.2), on voit que

$$K_{2n}(0, 2\sqrt{pq}) = \frac{(-1)^{n+1}}{4pq\pi\sqrt{pq}} \left(\frac{q}{p}\right)^{4n+1} ((2p-1)(2n+1)+1)$$

et

$$K_{2n-1}(0, 2\sqrt{pq}) = \frac{(-1)^{n+1}}{4pq\pi\sqrt{pq}} \left(\frac{q}{p}\right)^{4n-1} ((2p-1)(2n-1)+1),$$

□

Théorème 3.2.2. Soit f une fonction croissant sur $[-1, 1]$ telle que $f(-2\sqrt{pq}) = -1$ et $f(2\sqrt{pq}) = 1$ et φ une fonction poids positive ou nulle sur le même intervalle, telle que l'intégrale

$$\int_{-1}^{1} f(x)^n \varphi(x)\, dx \quad (n \geq 0) \tag{3.31}$$

existe , alors la suite de fonctions $x \mapsto Q_i(f(x))$, $0 \leq i \leq n$ qui minimise les intégrales

$$I_n = \int_{-1}^{1} Q_n(f(x))^2 \varphi(x)\, dx \tag{3.32}$$

forme un système orthogonal sur $[-1, 1]$ par rapport à φ où

$$\frac{\varphi(x)}{f'(x)} = \frac{\sqrt{4pq - f(x)^2}}{1 - f(x)^2}. \tag{3.33}$$

Soit

$$f(x) = 2\sqrt{pq} \tan\left(\frac{\pi}{4}x\right) \tag{3.34}$$

soit une fonction croissant sur $[-1, 1]$. La suite de fonction orthogonales sur $[-1, 1]$par rapport à la fonction de poids φ,donnée par $x \mapsto Q_i(2\sqrt{pq}\tan\left(\frac{\pi}{4}x\right))$, pour$0 \leq i \leq n$ minimise les intégrales (3.18) où

$$\varphi(x) = \pi pq \frac{1 + \tan^2\left(\frac{\pi}{4}x\right)}{1 - 4pq\tan^2\left(\frac{\pi}{4}x\right)} \sqrt{1 - \tan^2\left(\frac{\pi}{4}x\right)} \tag{3.35}$$

Preuve. Soit $(Q_n)_{n\geq 0}$ une famille orthogonale sur l'intervalle $[2\sqrt{pq}, 2\sqrt{pq}]$ par rapport à la fonction poids $t \mapsto \frac{\sqrt{4pq-t^2}}{1-t^2}$, i.e.

$$\int_{-2\sqrt{pq}}^{2\sqrt{pq}} Q_n(t) Q_m(t) \frac{\sqrt{4pq - t^2}}{1 - t^2} dt = 0, \quad n \neq m,\ n, m \geq 0.$$

En remplaçant $f(x) = t$ dans (3.32) on obtient

$$I_n = \int_{-2\sqrt{pq}}^{2\sqrt{pq}} Q_n(t)^2 \frac{\varphi\left(f^{-1}(t)\right)}{f'\left(f^{-1}(t)\right)}, dt, \quad n \geq 0. \tag{3.36}$$

Si

$$\frac{\varphi\left(f^{-1}(t)\right)}{f'\left(f^{-1}(t)\right)} = \frac{\sqrt{4pq - t^2}}{1 - t^2}, \tag{3.37}$$

En revenant maintenant à l'ancienne variable et conformément au Théorème 1, les fonctions

$$x \mapsto Q_i\left(f(x)\right), \quad 0 \leq i \leq n,$$

qui minimisent (3.32) forment un système orthogonal sur $[-1, 1]$ par rapport à φ. Ensuite la suite de fonctions $x \mapsto Q_n\left(2\sqrt{pq}\tan\left(\frac{\pi}{4}x\right)\right)_{n\geq 1}$ constitue un système orthogonal sur $[-1, 1]$ par rapport à

$$\varphi(x) = \pi pq \frac{1 + \tan^2\left(\frac{\pi}{4}x\right)}{1 - 4pq\tan^2\left(\frac{\pi}{4}x\right)} \sqrt{1 - \tan^2\left(\frac{\pi}{4}x\right)},$$

ce qui achève la démonstration du Théorème.

$\square$

Corollaire 3.1.1 Soit

$$L_n(x) = \int Q_{n-1}(x)\,dx \quad \text{et} \quad \varphi_n(x) = \int L_{n-1}(x)\,dx, \tag{3.38}$$

alors

$$L_n(x) = 2\sqrt{pq}\left(\frac{q}{p}\right)^{n-1}\left(\frac{p}{n}T_n\left(\frac{x}{2\sqrt{pq}}\right) - \frac{1-p}{n-2}T_{n-2}\left(\frac{x}{2\sqrt{pq}}\right)\right)+C \tag{3.39}$$

et

$$\varphi_n(x) = a_nT_n\left(\frac{x}{2\sqrt{pq}}\right)+b_nT_{n-2}\left(\frac{x}{2\sqrt{pq}}\right)+c_nT_{n-4}\left(\frac{x}{2\sqrt{pq}}\right), \tag{3.40}$$

où

$$a_n = 2pq\left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{n-2}{2}}\frac{p}{n(n-1)}, \tag{3.41}$$

$$b_n = -2pq\left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{n-2}{2}}\frac{n-2p-1}{(n-1)(n-2)(n-3)}, \tag{3.42}$$

$$c_n = 2pq\left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{n-2}{2}}\frac{1-p}{(n-3)(n-4)}. \tag{3.43}$$

Preuve. En effet

$$-\int \cos(n-1)\theta\sin\theta\,d\theta = -\frac{1}{2}\int(\sin n\theta - \sin(n-2)\theta)\,d\theta,$$

d'où, pour $x = \cos\theta$

$$\int T_{n-1}(x)\,dx = \frac{1}{2n}T_n(x) - \frac{1}{2(n-2)}T_{n-2}(x) + C, \tag{3.44}$$

pour $n \in \{0, 1\}$, nous traitons ces cas individuellement

$$\int T_0(x)\,dx = T_1(x) + C, \quad \text{et} \quad \int T_1(x)\,dx = \frac{1}{4}T_2(x) + C$$

De même,

$$\int U_{n-1}(x)\,dx = \frac{1}{n}T_n(x) + C \tag{3.45}$$

En combinant les formules (3.2), (3.38), (3.44) et (3.45), on obtient

$$L_n(x) = 2\sqrt{pq}\left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{n-1}{2}}\left(\frac{P}{n}T_n\left(\frac{x}{2\sqrt{pq}}\right) - \frac{1-p}{n-2}T_{n-2}\left(\frac{x}{2\sqrt{pq}}\right)\right) + C$$

Ainsi la formule (3.39) est confirmée. pour démontrer (3.40), nous avons tout d'abord besoin de (3.44) conjointement avec (3.39)

$$\varphi_n(x) = 2\sqrt{pq}\left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{n-2}{2}}\left(\frac{p}{n-1}\int T_{n-1}\left(\frac{x}{2\sqrt{pq}}\right)dx - \frac{1-p}{n-3}\int T_{n-3}\left(\frac{x}{2\sqrt{pq}}\right)dx\right)$$

à partir (3.44), on obtient

$$\begin{aligned}\varphi_n(x) &= 4pq\left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{n-2}{2}}\frac{p}{n-1}\left(\frac{1}{2n}T_n\left(\frac{x}{2\sqrt{pq}}\right) - \frac{1}{2(n-2)}T_{n-2}\left(\frac{x}{2\sqrt{pq}}\right)\right)\\ &\quad - 4pq\left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{n-2}{2}}\frac{1-p}{n-3}\left(\frac{1}{2(n-2)}T_{n-2}(x) - \frac{1}{2(n-4)}T_{n-4}(x)\right),\end{aligned}$$

Cela se réduit à (3.40).

□

Remarque 3.2.1. Si

$$G(t) = \sum_n Q_n(x)t^n,$$

alors

$$G(t) = \frac{p\sqrt{pq}}{p\sqrt{pq} - qxt + q\left(\frac{q}{p}\right)^2 t}.$$

Preuve. Pour tout, $n \geq 1$, la fonction $Q_n(x)$ vérifie la relation de récurrence à trois termes

$$Q_n(x) = \frac{q}{p\sqrt{pq}}xQ_{n-1}(x) - \left(\frac{q}{p}\right)^2 Q_{n-2}(x) \tag{3.46}$$

avec les condition initiales :

$$Q_{-1}(x) = 0, \quad Q_0(x) = 1, \quad Q_1(x) = \frac{q}{p\sqrt{pq}}x.$$

Si $G(t) = \sum_n Q_n(x)t^n$,alors en utilisant (3.46) on obtient

$$\begin{aligned}G(t) &= \sum_n Q_n(x)t^n = 1 + \frac{q}{p\sqrt{pq}}xt + \sum_{n\geq 2} Q_n(x)t^n\\ &= 1 + \frac{q}{p\sqrt{pq}}xt + \frac{q}{p\sqrt{pq}}xt\sum_{n\geq 2} Q_{n-1}(x)t^{n-1} - \frac{q}{p\sqrt{pq}}\left(\frac{q}{p}\right)^2 t^2\sum_{n\geq 2} Q_{n-2}(x)t^{n-2},\end{aligned}$$

Alors

$$G(t) = 1 + \frac{q}{p\sqrt{pq}}xt + \frac{q}{p\sqrt{pq}}xt(G(t)-1) - \frac{q}{p\sqrt{pq}}\left(\frac{q}{p}\right)^2 t^2 G(t),$$

Impliquer

$$G(t) = \frac{1}{1 - \frac{q}{p\sqrt{pq}}xt + \frac{q}{p\sqrt{pq}}\left(\frac{q}{p}\right)^2 t}.$$

□

3.3 Développement en série de Fourier de Qn

Une fonction analytique arbitraire $f(x)$ peut être développée en une série infinie de polynômes $Q_n(x)$, que nous noterons ici.

$$f(x) = C_0(f,Q)Q_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} C_n(f,Q)Q_n(x) \tag{3.47}$$

où

$$C_0(f,Q) = \frac{1}{2(1-p)\pi} \int_{-2\sqrt{pq}}^{2\sqrt{pq}} Q_0(x)f(x)\frac{\sqrt{4pq-x^2}}{1-x^2}dx \tag{3.48}$$

et pour $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$C_n(f,Q) = \frac{1}{2p(1-p)\pi} \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{n}{2}} \int_{-2\sqrt{pq}}^{2\sqrt{pq}} Q_n(x)f(x)\frac{\sqrt{4pq-x^2}}{1-x^2}dx \tag{3.49}$$

Proposition 3.3.1. Si

$$g(x) = \frac{1-x^2}{1-4pqx^2} f\left(2\sqrt{pq}x\right) \tag{3.50}$$

et

$$h(x) = \frac{1}{1-4pqx^2} f\left(2\sqrt{pq}x\right) \tag{3.51}$$

alors

$$C_0(f,Q) = \frac{2p}{\pi} C_0(g,T) \tag{3.52}$$

et

$$C_n(f,Q) = \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{3n}{2}} \left(2qC_n(g,T) + (2p-1)C_n(h,U)\right) \tag{3.53}$$

pour n=1, 2 ,3.....où

$$C_n(g,T) = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{1} g(x)T_n(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \tag{3.54}$$

et

$$C_n(h,U) = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{1} h(x)U_n(x)\sqrt{1-x^2}dx \tag{3.55}$$

Preuve. Nous avons

$$
\begin{aligned}
C_0(f,Q) &= \frac{1}{2(1-p)^{\pi}}\int_{-2\sqrt{pq}}^{2\sqrt{pq}} Q_0(x)f(x)\frac{\sqrt{4pq-x^2}}{1-x^2}dx \\
&= \frac{2p}{\pi}\int_{-1}^{1} f(2\sqrt{pq}x)\frac{\sqrt{1-x^2}}{1-4pqx^2}dx \\
&= \frac{2p}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{1-x^2}{1-4pqx^2} f(2\sqrt{pq}x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}
\end{aligned}
$$

et

$$
\begin{aligned}
C_n(f) = &\frac{1}{p\pi}\left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{3n}{2}}\int_{-2\sqrt{pq}}^{2\sqrt{pq}} f(x)T_n\left(\frac{x}{2\sqrt{pq}}\right)\frac{\sqrt{4pq-x^2}}{1-x^2}dx \\
&+\frac{2p-1}{2P(1-p)\pi}\left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{3n}{2}}\int_{-2\sqrt{pq}}^{2\sqrt{pq}} f(x)U_n\left(\frac{x}{2\sqrt{pq}}\right)\frac{\sqrt{4pq-x^2}}{1-x^2}dx
\end{aligned}
$$

d'où

$$
\begin{aligned}
C_n(f) = &\frac{4q}{\pi}\left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{3n}{2}}\int_{-1}^{1} f(2\sqrt{pq}x)T_n(x)\frac{\sqrt{1-x^2}}{1-4pqx^2}dx \\
&+\frac{2(2p-1)}{\pi}\left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{3n}{2}}\int_{-1}^{1} f(2\sqrt{pq}x)U_n(x)\frac{\sqrt{1-x^2}}{1-4pqx^2}dx
\end{aligned}
$$

Ainsi,les propriétés (3.52),(3.53),(3.54) et (3.55) sont démontrées. □

CONCLUSION

Dans ce mémoire, nous avons abordé un sujet important dans la théorie des polynômes orthogonaux, à savoir les polynômes orthogonaux de Tchebychev. Dans les deux premiers chapitres, nous avons traité les propriétés fondamentales des polynômes orthogonaux de Tchebychev telles que les propriétés de récurrence, les propriétés différentielles et les propriétés limites.

Quant au troisième chapitre, nous avons découvert une nouvelle famille de polynômes orthogonaux avec un poids connu, qui est une combinaison linéaire des polynômes orthogonaux de Tchebychev de première et de deuxième espèce, ce qui nous a permis d'étudier toutes les propriétés de récurrence, différentielles, intégrales, limites ainsi que les équations physiques relatives à ce nouveau type de polynômes de Tchebychev.

Bibliograhie

[1]G. Szego , Orthogonal Polynomials, 4th ed., American Mathematical Society Colloquium Publications, Vol.23, Amer. Math. Soc. Providence,RI, 1978.

[2] J. Shen, T. Tang, L.-L. Wang, Spectral methods : algorithms, analysis and applications, (Springer,2011).

[3] Jemal Emina Gishe, A finite family of q-orthogonal polynomials and resultants of Chebyshev polynomials. Graduate School Theses and Dissertations. University of South Florida

[4] J. Gishe ,M. E. H. Ismail, Resultants of Chebyshev Polynomials, Journal for Analysis and its Applications 27 (2008), no. 4, 499-508.

[5] F. Alberto Grunbaum, Random walks and orthogonal polynomials : some challenges, Probability, Geometry and Integrable Systems MSRI Publications,2007,Volume 55.

[6] G. V. Milovanović, A. S. Cvestković, M. M. Matejić, Remark on orthogonal polynomials induced by the modified Chebychev measure of the second kind. Facta Universitatis (Nis) Ser. Math. Inform, 21, 2006, pp. 13-21.

[7] Doha, E.H., Abd-Elhameed, W.M., Alsuyuti, M.M.: On using third and fourth kinds Chebyshev polynomials for solving the integrated forms of high odd-order linear boundary value problems. J. Egypt. Math. Soc. 23, 397–405 (2015)

[8] M. Foupouagnigni, On difference and differential equations for modifications of classical orthogonal polynomials. Habilitation Thesis, Department of Mathematics and Computer Science. University of Kassel, Kassel, January 2006.

[9] Mohammad M. Jamel, Mehdi Dehghan, On rational classical orthogonal polynomials and their applications for explicit computation of inverse Laplace transforms,Mathematical Problems in Engineering 2005:2 (2005), pp. 215–230.

[10] J. C. Mason, D. C. Handscomb, Chebyshev polynomials, (Chapman, Hall, London, 2003).

[11] J. P. Boyd, Chebyshev and Fourier spectral methods, (Dover, 2nd edn., Mineola, 2001).

[12] M. Abramowitz and I.A. Stegun (Eds.), Handbook of Mathematical Functions, 10th Edition, Dover, New York, 1972.

[13] K. H. Kwon, L. L. Little John, Table of Integrals, Series and Products. Academic Press (1980).

[14] I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik, On derivatives of orthogonal polynomials II, Bulletin of AMS, vol. 42 (1940), pp. 261-264.

[15] A.Rehouma, T.Hadj Ammar and A. Azeb Ahmed, Asymptotic of second order polar polynomials, Global Journal of Pure and Applied Mathematics.Volume 16, Number 5 (2020), pp. 675-685.

[16] A. Rehouma,Y. A. Laskri, R. Benzine, Asymptotic properties of polar polynomials,Applied Mathematical Sciences,(AMS) Vol. 8, 2014, no. 14, pp. 685–691.

[17] YA.Laskri , A.Rehouma , Polar Bergman polynomials over domains with corners , IJOPCM 2011; Vol. 4 No. 4: 74-87.

[18] A. Rehouma and M. J. Atia, Study of an example of Markov chains involving Chebyshev polynomials. Integral transforms and special functions. Received 22 January 2022. Accepted 1 July 2022. https ://doi.org/10.1080/10652469.2022.2098286.

[19] Alberto Grunbaum F. Random walks and orthogonal polynomials : some challenges. In : Pinsky M, Birnir B, editor. Probability, geometry and integrable systems. Vol. 55. MSRI Publications ; 2007. p. 241–260

[20] Smirnov VJ, Lebedev NA. The constructive theory of functions of a complex variable. Moscow : Nauka ; 1964 [in Russian] ; Cambridge (MA) : M.I.T. Press ; 1968 [Engl. transl.].

[21] Marcellan F, Petrolinho J. Orthogonal polynomials and quadratic transformations. Port Math. 1999;56:Fasc.1.