وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة الشهيد حمه لخضر – الوادي –
كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير
قسم العلوم المالية والمحاسبية

محاضرات في مقياس أساسيات بحوث العمليات

لطلبة السنة الثانية ليسانس علوم مالية ومحاسبية

إعداد:
د. تجاني محمد العيد
أستاذ محاضر صنف أ

الموسم الجامعي 2023 / 2024


بسم الله الرحمن الرحيم

أهدي هذا العمل إلى

كل طالب علم

تقديم

بسم الله الرحمان الرحيم والصلاة والسلام على أشرف المرسلين سيدنا محمد (صل الله عليه وسلم) وعلى آله وصحبه أجمعين، وبعد.......

على الرغم من تعدد المصادر والكتب التي تداولت في مجال بحوث العمليات، إلا أنها لازالت قليلة وهذا باعتبار بأن كل كاتب أو باحث له نظرة وأسلوب خاص به في الكتابة الشيء الذي يجعل التركيز على جانب دون الآخر.

ومن خلال تجربنا في مجال تدريس لهذا المقياس ومن خلال اطلاعنا على العديد من المراجع، فارتأينا أن أضع بين يدي الطالب هذه المطبوعة حول أساسيات بحوث العمليات حسب البرنامج الوزاري المخصص لسنة ثانية علوم مالية ومحاسبية ، والتي نهدف من خلالها إلى تبسيط وتوضح هذا المقياس الذي يعتبر من المقاييس الأساسية التي تستوجب على رجال المال والأعمال، حيث نقدم هذه المطبوعة بأسلوب يساعد الطالب القارئ على فهم واستيعاب العديد من المفاهيم والأساليب التي تساعد على اتخاذ القرارات الإدارية في المؤسسات ، والتي قد يصعب فهمها بالاعتماد على أساليب التحليل الرياضية والبيانية.

ولقد تضمنت هذه المطبوعة على العديد من المحاضرات والتي يمكن صياغتها على شكل مبسط وبسيط.

الدكتور : تجاني محمد العيد

مقدمة :

يهدف هذا المقياس إلى تعريف الطالب ببعض نماذج بحوث العمليات والتي تعد استعمالا لما تم التعرف عليه في مقياس الأساليب الكمية في الإدارة ، بمفهوم وأهمية الأساليب الكمية كأداة في دعم اتخاذ القرارات الإدارية وسيطرح على الطالب مفاهيم النماذج الرياضية وكيفية صياغتها والتعريف بالنماذج المحددة مثل نموذج البرمجة الخطية ونموذج النقل ونموذج التخصيص وشبكات الأعمال بهدف توظيف هذه النماذج في ترشيد القرارات الإدارية في الواقع العملي لمنظمات الأعمال .

الفهرس

الفصل الأول: مدخل إلى بحوث العمليات

الفصل الأول: مدخل إلى بحوث العمليات

أولا : النشأة والتاريخ:

يعود استخدام أساليب بحوث العمليات إلى الحرب العالمية الثانية عندما لجأ الأمريكيون والإنجليز إلى الأساليب الكمية في حل المشاكل التي واجهتهم حينئذ. وقد تم ذلك عن طريق تكوين فريق من العلماء المتخصصين في الرياضيات، والهندسة، والسلوكيات...الخ، بحيث يقوم الفريق بدراسة المشكلة واقتراح الحلول المناسبة مستخدمًا الأسلوب العلمي في ذل ك. ومن ضمن القرارات التي نوقشت واتخذت بهذه الطريقة تحديد الأهداف العسكرية، وتوقيت الضربات الجوية، وتحديد أفضل الوسائل وأكثرها أمنًا للإنزال العسكري، ونقل المؤن والأفراد. وقد حفز نجاح استخدام هذه الأساليب خلال الحرب في اتخاذ القرارات العسكرية، وتوسيع قاعدة الاستعمالات من خلال استعمال المبادئ الأساسية في مختلف نواحي الإدارة غير العسكرية. وقد ظهر أول كتاب في بحوث العمليات في العام 1946 م باسم "طرق بحوث العمليات: لموريس وكمبال، وكان أهم الاكتشافات في هذا الصدد لجورج دانترج عام 1947 م لطريقة السمبلكس لحل مشاكل البرمجة الخطية وتبع ذلك تطورات أدت إلى ظهور كتاب بحوث العمليات عام 1957 م.

ثانيا : ماهية بحوث العمليات:

تتعرض مادة بحوث العمليات للأساليب الكمية المستخدمة في اتخاذ القرارات. حيث تم في السنوات الأخيرة تطوير العديد من الأساليب الكمية بهدف المساعدة في اتخاذ القرار.

بأنه مصطلح Operations Research ويمكن تعريف مصطلح بحوث العمليات يطلق على عملية صنع القرار المبنية على المنهج العلمي مع الاعتماد بصفة رئيسية على أساليب التحليل الكمي في حل المشكلة الإدارية بهدف الوصول إلى في حدود الإمكانيات المتاحة وذلك بناء على بيانات Optimum البديل الأمثل في حدود الإمكانيات المتاحة وذلك بناء على بيانات تفصيلية ودراسة دقيقة للمخرجات وتقدير المخاطر لكل البدائل المتاحة، وبلغة أخرى هو علم التمثيل الرياضي لمشاكل عملية اتخاذ القرار وإيجاد طرق حل لهذه النماذج الرياضية.

أما تعريف جمعية بحوث العمليات البريطانية فهو: " استخدام الأساليب العلمية لحل المعضلات المعقدة في إدارة أنظمة كبيرة من القوى العاملة، المعدات، المواد الأولية والأموال في المصانع والمؤسسات الحكومية وفي القوات المسلحة".

أما التعريف الذي قدمته جمعية بحوث العمليات الأمريكية فهو "تهتم بحوث العمليات بالاختيار العلمي لأفضل تصميم وتشغيل لأنظمة الإنسان – الآلة – وفي ظروف تتطلب تخصيصًا للموارد المحدودة".

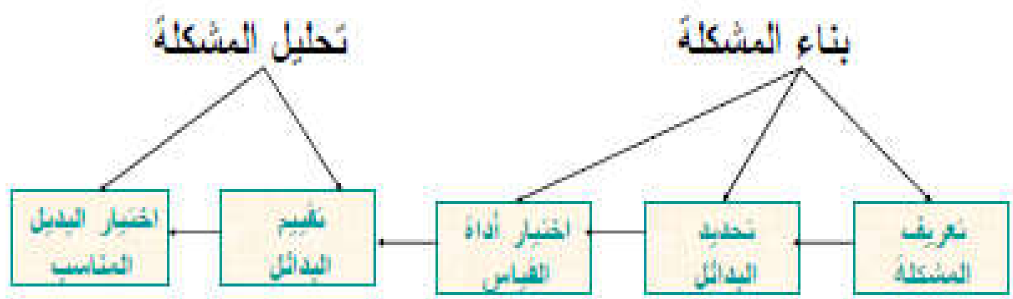
من التعريف الأول يتضح أن علم بحوث العمليات تعتمد على استخدام النماذج الرياضية كقالب تصاغ فيه المشكلة الإدارية، إلا أن نجاح تكوين النموذج وتطبيقه يعتمد على قدرة متخذ القرار الخلاقة، حيث يتوقف نجاح عملية جمع البيانات للنموذج والتحقق من صحة تمثيله للواقع وتطبيقه على القدرة على إيجاد خطوط اتصال جيدة بين هؤلاء الذين لديهم المعلومات وبين من سيقوم بالتطبيق وفريق بحوث العمليات.

والجدير بالذكر أن نوع المنظمة ليس له أي علاقة بمجال التطبيق، حيث إن أساليب بحوث العمليات تطبق في مختلف المجالات، مثل إدارة التجارة، والصناعة، والمستشفيات، والقطاع العام...الخ. وتعتمد بحوث العمليات على استخدام المنهج العلمي وذلك بهدف إيجاد الحل الأمثل لمشكلة الدراسة. ومن أجل الوصول للهدف لابد من تحديد مقياس كفاية يضع في اعتباره أهداف المنظمة ككل. حيث يستخدم المقياس لمقارنة البدائل المتاحة.

وتعتمد بحوث العمليات على استخدام الحاسب الآلي نتيجة تعقد النماذج الرياضية، وكثرة البيانات، وتعدد العمليات الحسابية المطلوبة أداؤها قبل الوصول إلى حل.

ثالثا : عمليات صنع القرار في المؤسسة:

تتضمن عملية صنع القرار الخطوات الآتية:

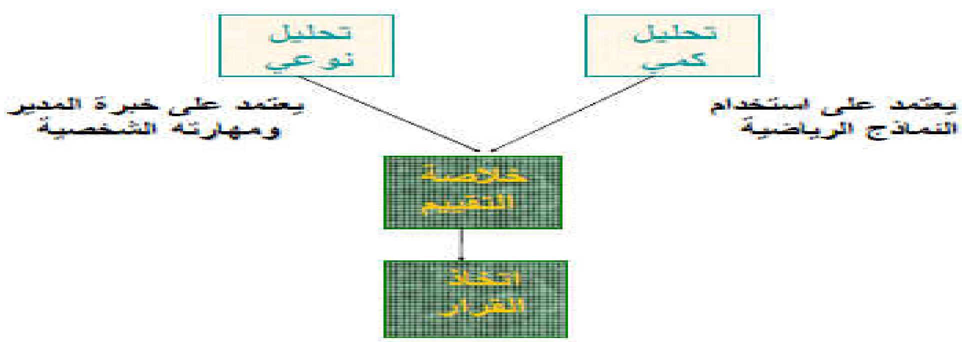


1. **تعريف المشكلة** : يتم تحديد المشكلة من خلال ظواهر ومؤشرات تشير إلى وجود المشكلة وتحتاج تحديد المشكلة إلى حصر كافة الظواهر ودراستها وتحليلها.
2. **تحديد البدائل**: يتم عقد اجتماع بين فريق العمل ويشمل أيضا الأطراف المعنية بالمشكلة ويتم إتاحة الفرصة للنقاش وتسجيل مقترحات كافة المشاركين بغض النظر عن المميزات والانتقادات، فهده المرحلة بمثابة عملية توليد لأكبر قدر من الحلول الممكنة للمشكلة.
3. **اختيار أداة القياس:** اختيار مقياس للمقارنة بين البدائل.
4. **تقييم البدائل**: نجد أن عملية التقييم قد تأخذ اتجاهين أساسين، تحليل نوعى أو تحليل كمي، ويقوم الاتجاه الأول على خبرة المدير، ويتضمن ذلك قدرته البديهي، فإذا كانت المشكلة سبق وأن حدثت، أو كانت

سهلة نسبيًا، فكثيرا ما يستخدم المدير فطنته وخبرته في معالجتها .ولكن إذا لم يكن لديه الخبرة اللازمة وكانت المشكلة صعبة ومعقدة، فلابد إذًا من الاتجاه الكمي في تحليل المشكلة ومن ثم اختيار البديل الأفضل.

5. **اختيار أحد البدائل**: تعد قائمة مرتبة بالبدائل من البديل الأفضل إلى البديل الأقل أفضلية وفقا لمجموعة المعايير التي اتفق عليها فريق العمل لاستخدامها في تقييم البدائل، لتوضع هذه القائمة أمام الإدارة العليا لتتخذ القرار المناسب بمعنى اختيار البديل المناسب لحل المشكلة والذي لا يكون بالضرورة هو البديل رقم واحد في القائمة المعدة من قبل فريق العمل.

وبفحص الخطوة الرابعة (تقييم البدائل)نجد أن عملية التقييم قد تأخذ اتجاهين ويقوم أساسيين: تحليل نوعي Qualitative أو تحليل كمي Quantitative، الاتجاه الأول على خبرة المدير، ويتضمن ذلك قدرته البديهية أو ما نعرفه بالعامي "بالحاسة السادسة"، فإذا كانت المشكلة سبق وأن حدثت، أو كانت سهلة نسبيًا، فكثيرًا ما يستخدم المدير فطنته وخبرته في معالجتها. ولكن إذا لم يكن لديه الخبرة اللازمة وكانت المشكلة صعبة ومعقدة، فلابد إذًا من الاتجاه الكمي في تحليل المشكلة ومن ثم اختيار البديل الأفضل. وباستخدام التحليل الكمي يكون تركيز المحلل على فهم الحقائق الكمية والبيانات المتعلقة بالمشكلة، ثم يكون نموذجًا رياضيًا من واقع فهمه وإلمامه بالمشكل ة. ويجب أن يمثل النموذج الهدف، والقيود، والعلاقات المتداخلة في المشكلة أفضل تمثيل. وباستخدام الأساليب الكمية يستطيع المحلل أن يحلل النموذج ويقترح الحل الأمثل للمشكل، والتي يمكن تلخيصها في الشكل التالي:



رابعا : أسباب الحاجة إلى الأساليب الكمية أو الرياضية في المؤسسة:

هناك حاجة للأساليب الكمية في المؤسسة حينما نلاحظ أي من العلامات الآتية على المنظمة، مما يجعل من المفيد الاستعانة بأخصائي بحوث العمليات أو رياضيات المؤسسة، ولعل أهمها:

- وجود مشكلة معقدة جدًا، حيث تتداخل عوامل عدة وتعجز النظم المتوفرة عن إيجاد حل مناسب.
- حينما يتطلب القرار تبرير كميًا.

- الحاجة إلى تقييم أو تقليل المخاطرة كما هو الحال عند البدء في مشروع جديد حيث لا توجد خبرة مسبقة عن كيفية اتخاذ قرار منطقي.
- تكرار المشكلة، وعدم قدرة المنشأة على الاستفادة من البيانات لحل المشكلة.
- لتحسين مستوى الأداء وتقليل المخاطرة وتحقيق الميزة التنافسية للمنظمة.

خامسا : مجالات استخدام النماذج الرياضية في المؤسسة:

أهم النماذج المستخدمة هي النماذج الرياضية Mathematical Models والمحاكاة الآلية Computer Simulation، ويتم بناء النماذج الرياضية في بحوث العمليات من خلال كتابة المشكلة الإدارية في شكل معادلات تضم في تكوينها مجموعة من المتغيرات التي يمكن التحكم فيها، ومجموعة أخرى من المتغيرات التي لا تستطيع المنظمة ا لتحكم فيه ا. فمثلا نجد أن القرار الإداري الخاص بتغيير أسعار منتجات الشركة لا يقف عند حد تغيير الأسعار بل لابد من دراسة تأثير هذا القرار على الإنتاج، والمبيعات، والطلب...الخ. وعلى هذا فإن النماذج الرياضية لا تقف عند حد استعراض هذه المتغيرات، ولكن أيضًا تحلي ل العلاقة والتفاعل بينها، وذلك من خلال سلسلة من المعادلات الرياضية، ويمكننا القول بأن النماذج الرياضية تساعد:

- في التعامل مع المشكلة ككل(أي بصفة شاملة).
- المحلل على رؤية المشكلة بوضوح وتحديد ما هي البيانات ذات العلاقة.
- في توضيح العلاقة بين السبب والأثر والت ي قد لا تكون واضحة بدون تجسيم رياضي.

وبالرغم من هذه المزايا إلا أن التمثيل الرياضي لا يخلو من العيوب، فالنموذج تمثيل بسيط لموقف واقعي، وكثيرًا ما نضطر لعمل فرضيات وتقديرات وتخمينات ونحن في مرحلة تمثيل المشكلة رياضيًا.

سادسا : خطوات تحليل المشكلة الرياضية في المؤسسة:

1. تحديد المشكلة

تعتبر خطوة تحديد المشكلة من أهم الخطوات، ويتوقف عليها نجاح أو فشل المنهج الكمي في اتخاذ القرار. حيث يتطلب الأمر الكثير من الخيال، والإبداع، والعمل الجماعي من أجل صياغة المشكلة ووضعها في إطار يمكن تناوله كميا وغالبا ما تكون المشكلة:

- وضع جديد لم يتخذ بشأنه قرار من قبل.
- مجال لم يحقق نجاحًا كما هو متوقع له.
- في حالة إعادة تقييم للسياسة الحالية لمعرفة إمكانية تحسينها.

2. تكوين (بناء) النموذج الرياضي

- في نموذج رياضي هي أهم ما يميز Problem Formulation صياغة المشكلة علم بحوث العمليات عن غيره من العلوم القائمة على استخدام الأساليب الكمية، ويتم تكوين النموذج الرياضي عن طريق ترجمة التعبيرات اللغوية إلى علاقة رياضية.
- المدخلات التي لا تستطيع المنظمة التحكم فيها، مثل سعر السلعة أو تكلفة الإنتاج، وكذلك المدخلات التي تستطيع المنظمة التحكم فيها، مثل عدد الوحدات المنتجة، أو كمية البضاعة، ونعرفها بالمجاهيل والتي يجب تحديدها لحل النموذج.
- المحددات Constraints وهذه تمثل القيود الفنية والاقتصادية وغيرها والتي تحد من قيمة الحلول الممكنة.
- دالة الهدف Objective Function وتحدد مقياس الكفاية للإدارة، ونمثله بدالة رياضية للمتغيرات المتحكم فيها. ونحصل على الحل الأمثل حينما تحقق قيمة المتغيرات المتحكم فيها أحسن قيمة للدالة في حدود القيود المفروضة.

3. جمع البيانات

وهي مرحلة تجميع البيانات عن المتغيرات غير المتحكم فيها.

4. حل النموذج

ويعني ذلك محاولة معرفة قيم المتغيرات المتحكم فيها والتي تعطي أفضل حل ممكن بدون تجاوز القيود المفروضة على المشكلة.

5. كتابة التقرير

يجب أن يكتب بلغة بسيطة، موضحًا فيه الحل وطريقة تنفيذه. هي أداة رياضية تساهم في مساعدة المديرين عل اتخاذ قرارات إدارية تتعلق باستخدام الموارد المتاحة به دف تحقيق أقصى عائد ممكن أو أقل تكلفة ممكن ة. ولكن لا يعتبر هذا الاستخدام الوحيد لها فلا يكاد يخلو مجال من مجالات استخدام بحوث العمليات إلا ونجد البرمجة الخطية تمثل جزءًا مباشرًا أو غير مباشر من أسلوب الحل.

الفصل الثاني:

البرمجة الخطية

الفصل الثاني: البرمجة الخطية

المقدمة

تعتبر البرمجة الخطية من إحدى الأساليب العلمية والحديثة التي تساعد الإدارات على اتخاذ القرارات السليمة والمناسبة في حل الكثير من المشاكل التي تواجهها على مستوى وظائف مؤسسات الأعمال، أي في التمويل والاستثمار والإنتاج والأفراد والتسويق وغيرها من المهام التي تضطلع بها المؤسسة. ولقد ساهم الكثير من الاقتصاديين والرياضيين في تطوير هذا الأسلوب الذي ظهر عام 1920 على يد الاقتصادي الشهير (ليو نتيف) لتحليل المدخلات والمخرجات، حيث تطورت بشكل سريع خلال الحرب العالمية الثانية لمواجهة المشكلات التي اعترضت سلاح القوة الجوية الأمريكية ومن هذه المشاكل هي الشراء ،النقل وتخصيص الأعمال وذلك لمواجهة مشكلة الاختيار بين عدد من الإمكانيات المتاحة، وفي حالات معينة لاختيار الحل الأمثل أو الأفضل من بين مجموعة كبيرة من الحلول الممكنة لمشكلة معينة، وقد حدث هذا التطور على يد عالمي الرياضيات G.B. Dantzig & Coopmans حين اكتشفا طريقة Simplex Method (الطريقة المبسطة) ومما زاد في تطورها هو تقدم أساليب الرياضيات الحديثة وظهور بحوث العمليات في الخمسينات من القرن الماضي ثم التطور السريع والمذهل للآلات الحاسبة واستخدامها في إدارة ومراقبة العمليات الصناعية من خلال انتشار وتوفر برامج جاهزة لمعالجة أي مشكلة مهما بلغ حجمها وعدد المتغيرات التي تحتويها في وقت قصير.

أولا: تعريف البرمجة الخطية

البرمجة الخطية أو البرمجة الرياضية: هي أسلوب تحليلي كمي تم استخدامه في العلوم الطبيعية والهندسية قبل استخدامه في العلوم الاجتماعية والإدارية، وهي من النماذج المؤكدة وليست من النماذج الاحتمالية، وهي أحد فروع وأنواع البرمجة الرياضية.

بمعنى أخر تعتبر إحدى الوسائل الرياضية الحديثة التي تستخدم كأداة لإيجاد أفضل استخدام للموارد المحدودة المتاحة للمؤسسة، وقد سمي هذا الأسلوب بالبرمجة نظرا لأنه يهتم بالبحث عن البرنامج الذي يحقق الهدف المطلوب بين مجموعة كبيرة من البرامج الممكنة، أما صفة الخطية Linearity فتعني أن جميع العلاقات بين مختلف عناصر النموذج الرياضي mathematical model للمسألة هي علاقة خطية أي أن قيمة المخرجات تتغير تبعا لتغير قيمة المدخلات وبنفس النسبة وفي نفس الاتجاه.

ثانيا: فروض البرمجة الخطية LP ASSUMPTIONS

تقوم البرمجة الخطية على عدة فروض أساسية وهي:

1. التأكد CERTAINTY

تقوم البرمجة الخطية على افتراض أن جميع المتغيرات والقيود قيمها معلومة ومعروفة ومحددة مسبقا في المشكلة المراد حلها، وهذا لا يتوافر أحيانا في الحياة العملية، فكثيرا ما تكون هناك حالة عدم التأكد، وأيضا نقص في المعلومات المتاحة عن المشكلة موضع الدراسة.

وللتخلص من هذه الإشكالية فقد استحدثت أو طورت دراسة تحليل الحساسية SENSITIVITY ANALYSIS **التي** تقوم على الإجابة على أسئلة مثل: ماذا يحدث لو وبالتالي نستطيع اختبار أكثر من فرضية لمواجهة نقص المعلومات أو حالة عدم التأكد.

2. الخطية LINEARITY

كما يدل اسمها (برمجة خطية)، تفترض البرمجة الخطية وجود علاقات خطية بين متغيرات المشكلة المراد حلها بها وتطبيقها عليها؛ أي أن الافتراض هنا هو أن متغيرات المشكلة هي من الدرجة الأولى؛ أي ذات أس واحد، لا يصح أن تكون مرفوعة إلى أكثر من واحد.

وبناء عليه فإن العلاقة بين دالة الهدف والقيود تكون مستقيمة أو خطية، وعلاقة الخطية هذه بين المتغيرات تتفرع عنها أو تتكامل معها بطريقة مباشرة مع الخصائص التالية لمتغيرات مشكلة البرمجة الخطية وهي: التناسبية، والإضافية، وقابلية القسمة. وبالتالي العلاقات الخطية بين المتغيرات يقلل من انتشارها وتطبيقها على جميع المشاكل، لأن المشاكل الواقعية قد تتضمن وجود علاقات غير خطية بين متغيراتها، لذلك تم تطوير أساليب البرمجة غير الخطية NONLINE PROGRAMMING كالبرمجة التربيعية.

3. التناسبية: PROPORTIONALITY

وهذه الخاصية متكاملة مع خاصية الخطية، وتعني أن الزيادة أو النقص في قيم متغيرات دالة الهدف تتناسب تناسبا طرديا مع الزيادة أو النقص في قيمة أي من المتغيرات المفردة.

4. الإضافية أو قابلية الجمع ADDITIVITY

وهي اعتماد النتيجة النهائية على التغير في مجموع قيم المتغيرات.

5. قابلية القسمة أو الكسرية DIVISIBILTY OR FRACTIONALITY

يقسم علماء الرياضيات والإحصاء القيم التي نتعامل معها في حياتنا ومشاهداتنا إلى قيم أو متغيرات متصلة CONINUOUS VARIABLES وهي التي تقبل الكسور ضمنها كدرجات الحرارة والمسافات والأطوال وغيرها، التي يمكن أن تأخذ قيما عشرية وعلى خلاف ذلك هناك قيم لا يكون فيها الكسر منطقيا، مثال على ذلك عدد الأفراد، أو عدد السفن، وتسمى هذه القيم أو المتغيرات بالمتغيرات المنفصلة DISCRATE VARIABLES. وبالتالي عند تطبيق البرمجة الخطية على هذه المتغيرات المنفصلة قد تعطي

حلولا تتضمن قيما فيها كسورا عشرية، والكسور من الوحدات تبدو غير منطقية في هذه الحالات، وتخلصا من إشكالية وجود كسر في قيمة المتغير المنفصل (الذي لا يقبل أن يكون فيه كسرا) يمكن معالجة الكسر بإحدى طريقتين، وذلك كما يلي:

الطريقة الأولى: تقريب الكسر للحد الأدنى، حيث أن الحد الأقصى قد يتخطى منطقة الإمكانيات المتاحة.

الطريقة الثانية: تطبيق أسلوب مستحدث أو مطور من البرمجة الخطية وهو البرمجة الكاملة INTEGER PROGRAMING التي تقوم على افتراض الأرقام الصحيحة، وعدم وجود الكسور العشرية.

ثالثا: الإطار العام للمشاكل التي تعالجها البرمجة الخطية

تستخدم البرمجة الخطية في كل المسائل الاقتصادية التي تهدف إلى البحث عن قيم المتغيرات الاقتصادية بهدف إيجاد أمثلية الاستخدام في وجود مجموعة من القيود المالية أو التقنية أو هما معا.

ومن المواضيع التي تستخدم فيها البرمجة الخطية هي مجالات العلوم الاقتصادية والمالية والتجارية وعلوم التسيير عامة كما يلي:

- **في حالة التعظيم :**
  - ✓ تعظيم الأرباح؛
  - ✓ تعظيم الإنتاج؛
  - ✓ تعظيم طاقات التخزين؛
  - ✓ تعظيم استخدام رؤوس الأموال؛
  - ✓ تعظيم استخدام اليد العاملة .

  وغير ذلك من المسائل الواقعية التي يكون هدفها التعظيم.

- **في حالة التدنئة :**
  - ✓ تدنئة التكاليف؛
  - ✓ تدنئة الخسائر؛
  - ✓ تدنئة عدد الموظفين؛
  - ✓ تدنئة الأجور الإجمالية .

كما تستخدم في الكثير من مجالات الإدارة وغير ذلك من المسائل الهادفة إلى عقلنة استخدام الموارد.

رابعا: خطوات صياغة النموذج الرياضي

هناك عدة خطوات يمكن إتباعها عند معالجة أي مشكلة في بناء نموذج رياضي باستخدام أسلوب البرمجة الخطية، والتي تتمثل فيما يلي:

1- تحديد متغيرات القرار DECISION VARIABLES

وهي المتغيرات التي تدخل ضمن دالة الهدف المراد تعظيمها أو تقليلها، وهي متغيرات من الدرجة الأولى، وهذه المتغيرات إما أن تكون موجبة أو صفرية، ونرمز لها بالرمز X_j، حيث J يعبر عن عدد المتغيرات الداخلة في دالة الهدف.

2- صياغة دالة الهدف OBJECTIVE FUNCTION

يجب تحديد هدف واحد بشكل قاطع الوضوح في صورة معيار قابل للقياس الكمي، ودالة الهدف في مشكلة البرمجة الخطية تعني الهدف الذي تسعى المؤسسة للوصول إليه، إما أن تكون تعظيما maximization مثل تعظيم الأرباح أو الإنتاج أو الإيرادات ...الخ، وإما تقليلا minimization مثل تدنئة التكاليف أو ساعات العمل ....الخ، وهذا ما يعرف في لغة الرياضيات بالمثلى optimization، ويعبر عن الهدف عادة في صورة متغير واحد أو أكثر، وتخضع هذه المتغيرات جميعا لعلاقة خطية، أي أنها جميعا مرفوعة لأس واحد صحيح، ويخضع تحقيق الهدف إلى تنفيذ أنشطة ووظائف متعددة تسمى موارد، متاح منها كميات محددة تشكل قيدا على تحقيق الهدف، ويمكن التعبير عنها رياضيا بالصيغة التالية :

$$\text{MaxZ or MinZ} = \sum_{j=1}^{n} C_j X_j$$

$$\text{MaxZ or MinZ} = C_1X_1 + C_2X_2 + \dots \dots \dots + C_nX_n$$

حيث أن:

MaxZ or MinZ : تعني أمثلية الهدف المراد الوصول إليه (Optimalité)، إما أن يكون التعظيم (Max) أو التخفيض (Min)؛

Cj : معاملات دالة الهدف، أي إما العائد الوحدوي في حالة التعظيم أو التكلفة الوحدوية في حالة التدنئة لكل منتج؛

xj : رموز للكميات (عدد الوحدات) المنتجة لكل منتج، و هي المجاهيل التي نبحث عنها؛

j : مؤشر لعدد متغيرات (مجاهيل) النموذج و المقدرة بـ (n).

3- صياغة القيود CONSTRAIN

تتمثل القيود في موارد محددة يتنافس على استغلالها واستخدامها مجالات مختلفة، ويأتي التعبير عنها في مشكلة البرمجة الخطية من خلال المتاح من الموارد، بمعنى أننا نعظم أو نقلل المتغيرات الداخلة ضمن دالة الهدف في ظل قيود تتمثل في موارد محدودة، ويعبر عن القيود في شكل مجموعة من المتراجحات والمعادلات خطية أو كلاهما، والتي تسعى المؤسسة من خلالها إلى إيجاد حل لدالة الهدف ضمن هذه الشروط، وتتألف القيود من شقين الشق الأيسر وهو عبارة عن مجموعة من القيم مضروبة بمجموعة من المتغيرات من الدرجة الأولى، أما الشق الأيمن فهو عن أرقان موجبة ثابتة تعبر عن الموارد المتاحة، ويمكن التعبير عنها رياضيا بالصيغة التالية :

$$\sum a_{ij} X_j (\leq, \geq, =) b_i$$

$$S.T: \begin{cases} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \cdots \dots \dots \dots a_{1m}X_m (\leq, \geq, =) b_1 \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \cdots \dots \dots \dots a_{2m}X_m (\leq, \geq, =) b_2 \\ \\ \\ a_{n1}X_1 + a_{n2}X_2 + \cdots \dots \dots \dots a_{nm}X_m (<, >, =) b_n \\ X_1, X_2, \dots \dots \dots, X_m \geq 0 \end{cases}$$

حيث أن:

a_{ij} : المعاملات الفنية، أي الكميات المستهلكة من الموارد (الطاقات الإنتاجية) للإنتاج الوحدوي من المنتجات؛

bi : الكميات المتاحة من الموارد؛

j : عدد الأعمدة ، وهي بعدد المتغيرات أي المجاهيل (n).

i : عدد الأسطر، وهي بعدد القيود (m)؛

ومن أهم أشكال القيود ما يلي:

أ. ندرة عناصر الإنتاج: وهذا يتمثل في محدودية الكمية المتاحة من عناصر الإنتاج كالموارد الأولية، والآلات، والعمل، ورأس المال.

ب. محدودية الطاقة للموارد المتاحة: بمعنى أن وجود مورد لا يعني بالضرورة قدرته على تلبية كامل الاحتياجات.

ت. النواحي الفنية والتقنية: بمعنى أن النواحي الفنية قد تفرض علينا قدرا معينا من استغلال بعض الموارد.

ث. استيعاب السوق: حيث أن طاقة السوق على استيعاب المنتوجات أي بيعها تكون محدودة في بعض الأحيان نتيجة للمنافسة وغيرها من العوامل، وبالتالي لا تستطيع المنشأة بيع منتجاتها بالكامل إذا ما استغلت كامل طاقتها الإنتاجية.

ج. جودة المنتجات والعناصر الداخلة في إنتاجها: حيث يتطلب ذلك زيادة في استغلال بعض الموارد دون الأخرى، وتظهر هذه المشكلة في المنتجات الغذائية؛ حيث أن المنتجات الداخلة في خلطة معينة تختلف في مكوناتها الغذائية، وبالتالي كلما قل العنصر المطلوب في المادة الخام كلما زادت الكمية المطلوبة منه.

وغيرها من أنواع القيود التي يمكن أن تواجهها منشأة الأعمال أثناء عملية الإنتاج كالقيود القانونية التي تفرضها الدولة.

4. شرط عدم السلبية NONNEGATIVETY

يعني أن جميع متغيرات القرار تكون موجبة أو معدومة لكونها تتعلق بكميات مادية واتي يستحيل أن تكون سالبة، حيث يتمشى هذا القيد مع منطقية دالة الهدف المراد تعظيمها أو تقليلها، والتي هي أصلا موجودة؛ حيث يستحيل التعامل معها في حالة العدم أو السلبية وفي حالة استخراج الحل بالطريقة البيانية، فإن الحل يقع في الربع الموجب أو الربع الأول في الدائرة المثلثية، ولكن عند عدم توفر هذا الشرط يمكن معالجته بأسلوب خاص، ويمكن التعبير عنها رياضيا بالصيغة التالية :

$$\begin{cases} X_j \geq 0 \\ X_1, X_2, \dots\dots X_n \geq 0 \end{cases}$$

أما إذا كان شرط اللاسلبية غير محقق فانه يمكننا معالجة بإحدى الطرق التالية :

- إذا كان : $(X_j \leq 0)$ فإنه يمكن تغييره بالمتغير (X_j') بالعلاقة التالية : $(X_j' = -X_j)$، حيث : $(X_j' \geq 0)$.
- إذا كان : $(X_j \in \mathbb{R})$ فإنه يمكن التعبير عنه بالمتغيرين (X_j', X_j'') بالعلاقة التالية : $(X_j = X_j' - X_j'')$، حيث : $(X_j', X_j'' \geq 0)$.

ويمكن تلخيص البرنامج الرياضي الخطي كما يلي:

$$\text{MaxZ or MinZ} = \sum_{J=1}^{n} C_J X_J$$

$$\text{S.T:} \begin{cases} a_{ij} X_j (\leq, \geq, =) b_i \\ X_j \geq 0 \end{cases}$$

أي :

$$\text{MaxZ or MinZ} = C_1X_1 + C_2X_2 + \dots\dots\dots + C_nX_n$$

$$
S.T: \begin{cases} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \cdots \dots \dots \dots a_{1n}X_n (\le, \ge, =) b_1 \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \cdots \dots \dots \dots a_{2n}X_n (\le, \ge, =) b_2 \\ \\ \\ a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \cdots \dots \dots \dots a_{mn}X_n (\le, \ge, =) b_m \\ X_1, X_2, \dots \dots \dots, X_n \ge 0 \end{cases}
$$

خامسا: أشكال البرنامج الخطي

ويمكننا أن نكتب البرنامج الرياضي الخطي بعدة أشكال أو صيغ كما يلي :

1. **الشكل المصفوفي :**

يمكن كتابة البرنامج بالشكل المصفوفي (على شكل مصفوفات) كما يلي :

$$
MaxZ \text{ or } MinZ = [C_1 \quad C_2 \quad C_3 \dots C_n] \times \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ \\ X_n \end{bmatrix}
$$

$$
S.T: \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \dots & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \dots & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \dots & \dots & a_{3n} \\ \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} \dots & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ \\ X_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ge \\ \le \\ = \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \\ b_n \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ \\ X_n \end{bmatrix} \ge \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \\ 0 \end{bmatrix}
$$

ويمكن تلخيصه بالشكل التالي :

$$
MaxZ \text{ or } MinZ = C' X
$$

$$
S.T: \begin{cases} AX (\le, \ge, =) B \\ X \ge 0 \end{cases}
$$

حيث :

C' : هو منقول مصفوفة المعاملات الخاصة بالدالة الاقتصادية (دالة الهدف).

X : هو شعاع المتغيرات.

A : مصفوفة معاملات القيود .

B : هو شعاع الثوابت.

2. الشكل القانوني :

يمكن كتابة البرنامج بالشكل القانوني عندما تكون صيغة القيود تحتوي على إشارتي ≤ أو ≥ فقط، وهذا عند كل حالة من الحالة التالية :

- **الشكل القانوني في حالة التعظيم (Max) :**

يمكن كتابة البرنامج بالشكل القانوني في حالة التعظيم عندما تكون صيغة القيود تحتوي على إشارة أقل أو تساوي، وبالتالي يكون الشكل العام للبرنامج كما يلي :

$$MaxZ = C_1X_1 + C_2X_2 + \ldots\ldots\ldots + C_nX_n$$

$$S.T: \begin{cases} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \cdots\ldots\ldots\ldots a_{1n}X_n \leq b_1 \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \cdots\ldots\ldots\ldots a_{2n}X_n < b_2 \\ \\ \\ a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \cdots\ldots\ldots\ldots a_{mn}X_n \leq b_m \\ X_1, X_2, \ldots\ldots\ldots, X_n > 0 \end{cases}$$

- **الشكل القانوني في حالة التدنئة (Min) :**

يمكن كتابة البرنامج بالشكل القانوني في حالة التدنئة عندما تكون صيغة القيود تحتوي على إشارة أكبر أو تساوي، وبالتالي يكون الشكل العام للبرنامج كما يلي :

$$MinZ = C_1X_1 + C_2X_2 + \ldots\ldots\ldots + C_nX_n$$

$$S.T: \begin{cases} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \cdots\ldots\ldots\ldots a_{1n}X_n \geq b_1 \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \cdots\ldots\ldots\ldots a_{2n}X_n \geq b_2 \\ \\ \\ a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \cdots\ldots\ldots\ldots a_{mn}X_n \geq b_m \\ X_1, X_2, \ldots\ldots\ldots, X_n \geq 0 \end{cases}$$

3. الشكل المعياري :

يمكن كتابة البرنامج بالشكل المعياري عندما تكون صيغة القيود تحتوي على إشارة مساواة (=) فقط فقط، وهذا عند كل حالة من الحالة التالية :

- **الشكل المعياري في حالة القيود أقل من أويساوي :**

عندما يكون البرنامج الخطي على شكل قيود تحتوي على إشارة أقل أو تساوي ونريد تحويله إلى برنامج بشكل معياري فإنه ويجب علينا إضافة المتغيرات الإضافية S_i (متغيرات وهمية) إلى الطرف الأيسر حتى

تتساوى الطرفين، والذي يكون معامله يساوي الصفر في دالة الهدف، وبالتالي يكون الشكل العام للبرنامج كما يلي :

$$MaxZ = C_1X_1 + C_2X_2 + \ldots\ldots\ldots + C_nX_n + 0S_1 + 0S_2 + \ldots\ldots\ldots + 0S_n$$

$$S.T: \begin{cases} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \cdots \ldots\ldots\ldots a_{1n}X_n + S_1 = b_1 \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \cdots \ldots\ldots\ldots a_{2n}X_n + S_2 = b_2 \\ \\ \\ a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \cdots \ldots\ldots\ldots a_{mn}X_n + S_n = b_m \\ X_1, X_2, \ldots\ldots\ldots, X_n, S_1, S_2, \ldots\ldots\ldots, S_n \geq 0 \end{cases}$$

❖ **الشكل المعياري في حالة القيود أكبر من أو يساوي :**

عندما يكون البرنامج الخطي على شكل قيود تحتوي على إشارة أكبر أو تساوي ونريد تحويله إلى برنامج بشكل معياري فإنه ويجب علينا طرح متغيرات تسمى متغيرات اصطناعية T مع إضافة المتغيرات الإضافية S_i (متغيرات وهمية) إلى الطرف الأيسر حتى تتساوى الطرفين، والذي تكون فيه معاملاتها M بالنسبة للمتغيرات الاصطناعية T حيث يعتبر M عدد كبير جدا، ونفس المعامل بالنسبة للمتغيرات الإضافية S_i يساوي الصفر في دالة الهدف، وبالتالي يكون الشكل العام للبرنامج كما يلي :

$$MinZ = C_1X_1 + C_2X_2 + \ldots + C_nX_n + 0S_1 + 0S_2 + \ldots + 0S_n + M_1T_1 + M_2T_2 + + \ldots + M_nT_n$$

$$S.T: \begin{cases} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \cdots \ldots\ldots\ldots a_{1n}X_n + S_1 - T_1 = b_1 \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \cdots \ldots\ldots\ldots a_{2n}X_n + S_2 - T_2 = b_2 \\ \\ \\ a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \cdots \ldots\ldots\ldots a_{mn}X_n + S_n - T_n - b_m \\ X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n, S_1, S_2, \ldots\ldots, S_n, T_1, T_2, \ldots\ldots, T_n \geq 0 \end{cases}$$

سادسا : تطبيقات محلولة حول البرمجة الخطية

المثال التطبيقي الأول:

تقوم شركة CAP بن عمر بإنتاج نوعين من معجون الطماطم وتستخدم نوعين من عناصر الإنتاج هما المواد الأولية والعمالة في إنتاجها، ولدى الشركة 120 ساعة عمل متاحة للعمل و500 كلغ من المواد الأولية، ولإنتاج النوع الأول ذو وزن 1كلغ تحتاج 15 دقيقة عمل ل 12 علبة و1 كلغ من المواد الأولية، ويحتاج النوع الثاني ذو وزن 0.5 كلغ الى 6 دقائق عمل ل 12 علبة و0.5 كلغ من المواد الأولية. ويعطي إنتاج الوحدة الواحدة من النوع الأول ربحا قدره 20 ون بينما النوع الثاني 12 ون. المطلوب :

1. هو ما هو المزيج الأمثل من المنتوجين الذي يعطي أعلى الأرباح؟

حل المثال التطبيقي الأول

حتى يسهل تكوين المعادلات الرياضية (نموذج برمجة خطية) توضع البيانات المشكلة في صورة مصفوفة من خلال الجدول الموضح كما يلي:

	X_1	X_2	الموارد المتاحة/ شهريا أقل من أو مساوية
قيد العمل	1.25=12÷15	0.5=12÷6	120
قيد المواد الأولية	1	0.5	500
الربح الوحدوي	20	12	

يمكن كتابة المثال السابق على هيئة نموذج برمجة خطية من خلال تتبع الخطوات التالية:

- تحديد متغيرات القرار:

- نسمي X_1 الكميات الواجب إنتاجها من النوع الأول (معجون الطماطم ذو وزن **1**كلغ).
- نسمي X_2 الكميات الواجب إنتاجها من النوع الثاني (معجون الطماطم ذو وزن **0.5**كلغ).

- صياغة دالة الهدف: إن ربح المؤسسة ناتج عن إنتاج و بيع كل من الكراسي و الطاولات و عليه:

- إنتاج معجون الطماطم ذووزن 1 كلغ:

إن إنتاج X_1 معجون الطماطم ذو وزن 1كلغ يحقق ربحا قدره $(20 \times X_1)$

- إنتاج معجون الطماطم ذووزن 0.5 كلغ:

إن إنتاج X_2 معجون الطماطم ذو وزن 1كلغ يحقق ربحا قدره $(12 \times X_2)$

و عليه و بما أن هذه المؤسسة تسعى إلى تعظيم أرباحها فإنه يمكن صياغة دالة الهدف على النحو التالي:

$$MaxZ = 20X_1 + 12X_2 \qquad (1)$$

- صياغة القيود:

- **قيد ساعات العمل :** تمثل ساعات العمل الكلية مجموع ساعات العمل المستخدمة في إنتاج معجون الطماطم ذو وزن 1كلغ هي $(1.25 \times X_1)$ و ساعات العمل المستخدمة في إنتاج معجون الطماطم ذو وزن 0.5كلغ هي $(0.50 \times X_2)$ والذي يجب أن لا تجاوز ساعات العمل المتاحة والمقدرة بـ 120 ساعة، ويمكن التعبير عن هذا القيد رياضيا بالصياغة التالية:

$$1.25X_1 + 0.50X_2 \leq 120 \qquad (2)$$

– **قيد المادة الأولية:** تمثل كمية الكلية مجموع الكمية المستخدمة في إنتاج معجون الطماطم ذو وزن 1كلغ هي $(1 \times X_1)$ والكمية المستخدمة في إنتاج معجون الطماطم ذو وزن 0.5كلغ هي $(0.50 \times X_2)$، والذي يجب أن لا يتجاوز الكمية المتاحة والمقدرة بـ 500 كلغ، ويمكن التعبير عن هذا القيد رياضيا بالصياغة التالية:

$$X_1 + 0.50X_2 \leq 500 \qquad (3)$$

- **قيد عدم سلبية المتغيرات:** حيث أن إنتاج كل من معجون الطماطم ذو وزن 1كلغ ومعجون الطماطم ذو وزن 0.5 كلغ لا يمكن أن يكون بكميات سالبة، فإما يكون موجبا أو معدوما، و هو ما يُعبر عنه بالصياغة التالية:

$$X_1 > 0, X_2 > 0 \qquad (4)$$

وعليه وبتجميع الصيغ الرياضية $((1),(2),(3),(4))$ المحصل عليها سابقا، نحصل على الشكل النهائي لنموذج البرمجة الخطية:

$$\begin{aligned} &\text{MaxZ} = 20X_1 + 12X_2 \\ &\text{S.T:} \begin{cases} 1.25X_1 + 0.50X_2 < 120 \\ X_1 + 0.50X_2 \leq 500 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

دالة الهدف
قيد العمل
قيد المواد
قيد اللاسلبية

المثال التطبيقي الثاني:

يقوم جزار بعمل قطع من اللحم تتكون من لحم بقري ولحم الغنم. يحتوي لحم البقر على 80% لحم و 20% دهون وتكلفة كلغ الواحد هو 25 ون، في حين أن لحم الغنم يحتوي على 68% لحم و 32% دهون وتكلفة كلغ الواحد هو 20 ون.

إذا كانت كل قطعة يستخدمها الجزار من اللحم المشكل من البقر والغنم هي واحد كلغ، ويجب أن تحافظ على نسبة الدهون فيها أن لا تقل عن 25 %.

المطلوب :

1. هو ما هو المزيج الأمثل من النوعين (لحم البقر ولحم الغنم) الذي يعطي أقل تكلفة؟
2. أوجد كل من الشكل المصفوفي والقانوني والمعياري لهذا البرنامج؟

حل المثال التطبيقي الثاني :

- **تحديد متغيرات القرار:**

– نسمي X_1 الكميات الواجب استخدامها من لحم البقر.

– نسمي X_2 الكميات الواجب استخدامها من لحم الغنم.

- **صياغة دالة الهدف:** إن التكلفة اللازمة لاستخدام كلغ من اللحم لنوعين البقر والغنم موضحة كما يلي :

- **استخدام كلغ من لحم البقر:**

إن استخدام X_1 كلغ من لحم البقر يستلزم تكلفة قدرها ($X_1 \times 25$)

- استخدام كلغ من لحم الغنم:

إن استخدام X_2 كلغ من لحم الغنم يستلزم تكلفة قدرها ($X_2 \times 20$)

وعليه و بما أن هذه المؤسسة تسعى إلى تدنئة تكاليفها فإنه يمكن صياغة دالة الهدف على النحو التالي:

$$\text{MinZ} = 25X_1 + 20X_2$$

- صياغة القيود:

- القيد الأول: يتمثل القيد الأول في وزن القطعة والتي يكون وزنها واحد كلغ مشكلة من النوعين، ويمكن التعبير عن هذا القيد رياضيا بالصياغة التالية:

$$X_1 + X_2 = 1$$

القيد الثاني: يتمثل القيد الثاني في نسبة البروتين في القطعة والمشكلة من النوعين لحم البقر ولحم الغنم والتي لا تقل عن25 %، والتي تعبر عن مجموع الكمية الموجودة من الدهون من لحم البقر وهي 0.20 X ومن الكمية الموجودة من الدهون من لحم الغنم 0.32Y، والتي يمكن التعبير عنها في القيد التالي رياضيا بالصيغة الآتية:

$$0.20X_1 + 0.32X_2 \geq 0.25$$

- قيد عدم سلبية المتغيرات: حيث أن الكميات المستخدمة من لحم البقر ولحم الغنم لا يمكن أن تكون بكميات سالبة، فإما أن تكون موجبة أو معدومة، وهو ما يُعبر عنه بالصياغة التالية:

$$X_1 \geq 0, X_2 \geq 0$$

وعليه وبتجميع الصيغ الرياضية المحصل عليها سابقا، نحصل على الشكل النهائي لنموذج البرمجة الخطية:

دالة الهدف

القيد الأول

القيد الثاني

قيد اللاسلبية

$$\text{MinZ} = 25X_1 + 20X_2$$

$$\text{S.T:} \begin{cases} X_1 + X_2 = 1 \\ 0.20X_1 + 0.32X_2 \geq 0.25 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

المثال التطبيقي الثالث:

يريد مستثمر أن يستثمر مبلغ من المال قدره 120000 في شركتين، فإذا كان سعر السهم في الشركة الأولى هو 300 ون للسهم والعائد السنوي له 36 ون، في حين كان سعر السهم في الشركة الثانية 400 ون للسهم والعائد السنوي له 50 ون، وفي نفس الوقت يقوم المستثمر بنوع من التوازن لتقليل المخاطر وذلك بأن يستثمر في كل شركة على ما لا يقل عن 30000 ون.

المطلوب :

1. فكيف يمكن أن يقوم المستثمر بتحقيق أكبر عائد ممكن ؟
2. أوجد كل من الشكل المصفوفي والقانوني والمعياري لهذا البرنامج؟

حل المثال التطبيقي الثالث:

1. إيجاد البرنامج الخطي الذي يحقق أكبر عائد ممكن للمستثمر:

- تحديد متغيرات القرار:

- نسمي X_1 عدد الأسهم الواجب استثمارها في الشركة الأولى.
- نسمي X_2 عدد الأسهم الواجب استثمارها في الشركة الثانية.

- صياغة دالة الهدف: إن هدف المستثمر هو تعظيم الربح الناتج عن استثمار عدد من الأسهم في الشركتين، و عليه يمكن صياغة دالة الهدف على النحو التالي:

$$MaxZ = 36X_1 + 50X_2$$

- صياغة القيود:

- القيد الأول: يتمثل القيد الأول في أن المبلغ الإجمالي للاستثمار 120000 هو عبارة عن مجموع المبالغ المستثمرة في الشركتين ($X_1 \times 300$) و ($X_2 \times 400$)، والذي يمكن التعبير عنه رياضيا بالصياغة التالية:

$$300X_1 + 400X_2 \leq 120000$$

القيد الثاني: يتمثل القيد الثاني في أن قيمة الاستثمار في الشركة الأولى ($X_1 \times 300$) يجب أن لا يقل عن 30000 ون، والتي يمكن التعبير عن هذا القيد رياضيا بالصيغة الآتية:

$$300X_1 \geq 30000$$

القيد الثالث: يتمثل القيد الثالث في أن قيمة الاستثمار في الشركة الثانية ($X_2 \times 400$) يجب أن لا يقل عن 30000 ون أيضا، والتي يمكن التعبير عن هذا القيد رياضيا بالصيغة الآتية:

$$400X_2 \geq 30000$$

- قيد عدم سلبية المتغيرات: حيث أن الكميات المستخدمة من لحم البقر ولحم الغنم لا يمكن أن تكون بكميات سالبة، فإما أن تكون موجبة أو معدومة، وهو ما يُعبر عنه بالصياغة التالية:

$$X_1 \geq 0, X_2 \geq 0$$

وعليه وبتجميع الصيغ الرياضية المحصل عليها سابقا، نحصل على الشكل النهائي لنموذج البرمجة الخطية:

دالة الهدف

القيد الأول

القيد الثاني

$$MaxZ = 36X_1 + 50X_2$$
$$S.T: \begin{cases} 300X_1 + 400X_2 \leq 120000 \\ 300X_1 \geq 30000 \\ 400X_2 \geq 30000 \end{cases}$$

القيد الثالث

قيد اللاسلبية

2. أوجد كل من الشكل المصفوفي والقانوني والمعياري لهذا البرنامج:

- **الشكل المصفوفي :**

$$MaxZ = [36 \quad 50] \times \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$$

$$S.T: \begin{bmatrix} 300 & 400 \\ 300 & 0 \\ 0 & 400 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \le \\ \ge \\ \ge \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 120000 \\ 30000 \\ 30000 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \ge \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- **الشكل القانوني:**

$$MaxZ = 36X_1 + 50X_2$$

$$S.T: \begin{cases} 300X_1 + 400X_2 \le 120000 \\ -300X_1 \le -30000 \\ -400X_2 \le -30000 \\ X_1, X_2 \ge 0 \end{cases}$$

- **الشكل المعياري:**

$$MaxZ = 36X_1 + 50X_2 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3 + MT_1 + MT_2$$

$$S.T: \begin{cases} 300X_1 + 400X_2 + S_1 = 120000 \\ 300X_1 + S_2 - T_1 = 30000 \\ 400X_2 + S_3 - T_2 = 30000 \\ X_1, X_2, S_1, S_2, S_3, T_1, T_2 \ge 0 \end{cases}$$

المثال التطبيقي الرابع:

ينتج مصنع الطوب الأحمر بإنتاج ثلاثة أحجام مختلفة أحدهما كبير الحجم والأخرى صغير الحجم والثالث طوب السقف، حيث يتطلب الحجم الكبير دقيقتين عمل تجميع و دقيقة عمل واحدة للاختبار، ويتطلب الحجم الصغير دقيقة عمل واحدة للتجميع ودقيقتين عمل للاختبار، بينما النوع الثالث دقيقتين عمل لكل قسم، وكان الحد الأقصى لساعات العمل اليومي في كل من قسمي التجميع والاختبار هو 14 ساعات و16 ساعات على التوالي، فإذا افترضنا أن المصنع يريد تعظيم ربحه وكان ربح الحجم الكبير هو 8 ون للوحدة وللصغير 6 ون للوحدة ولسقف 10 ون للوحدة.

المطلوب :

1. أوجد نموذج البرمجة الخطية الذي بتحقيق أكبر عائد ممكن؟
2. أوجد كل من الشكل المصفوفي والقانوني والمعياري لهذا البرنامج؟

حل المثال التطبيقي الرابع:

2. إيجاد البرنامج الخطي الذي يحقق أكبر عائد ممكن للمستثمر:

- تحديد متغيرات القرار:

- نسمي X_1 عدد الوحدات الواجب إنتاجها من الطوب الكبير.
- نسمي X_2 عدد الوحدات الواجب إنتاجها من الطوب الصغير.
- نسمي X_3 عدد الوحدات الواجب إنتاجها من الطوب السقفي.

- صياغة دالة الهدف: إن هدف المستثمر هو تعظيم الربح الناتج عن إنتاج وحدات من أنواع الطوب المختلفة، و عليه يمكن صياغة دالة الهدف على النحو التالي:

$$MaxZ = 8X_1 + 6X_2 + 10X_3$$

- صياغة القيود:

- القيد الأول: يتمثل القيد الأول في عدد الساعات التي يعملها قسم التجميع والمقدرة 14 ساعة (840 دقيقة موزعة على الأنواع الثلاثة للإنتاج على النحو التالي ($X_1 \times 2$) و ($X_2 \times 1$) و ($X_3 \times 2$) ، والذي يمكن التعبير عنه رياضيا بالصياغة التالية:

$$2X_1 + X_2 + 2X_3 \leq 840$$

القيد الثاني: يتمثل القيد الثاني في عدد الساعات التي يعملها قسم الاختبار والمقدرة 16 ساعة (960 دقيقة موزعة على الأنواع الثلاثة للإنتاج على النحو التالي ($X_1 \times 1$) و ($X_2 \times 2$) و ($X_3 \times 2$) ، والذي يمكن التعبير عنه رياضيا بالصياغة التالية:

$$X_1 + 2X_2 + 2X_3 \leq 960$$

- قيد عدم سلبية المتغيرات: حيث أن الكميات المنتجة من الأنواع الثلاثة لا يمكن أن تكون بكميات سالبة، فإما أن تكون موجبة أو معدومة، وهو ما يُعبر عنه بالصياغة التالية:

$$X_1 \geq 0, X_2 \geq 0. X_3 \geq 0$$

وعليه وبتجميع الصيغ الرياضية المحصل عليها سابقا، نحصل على الشكل النهائي لنموذج البرمجة الخطية:

$$MaxZ = 8X_1 + 6X_2 + 10X_3 \quad \text{دالة الهدف}$$

$$S.T: \begin{cases} 2X_1 + X_2 + 2X_3 \leq 840 & \text{القيد الأول} \\ X_1 + 2X_2 + 2X_3 \leq 960 & \text{القيد الثاني} \\ X_1, X_2, X_3 \geq 0 & \text{قيد اللاسلبية} \end{cases}$$

3. أوجد كل من الشكل المصفوفي والقانوني والمعياري لهذا البرنامج:

- **الشكل المصفوفي :**

$$MaxZ = [8 \quad 6 \quad 10] \times \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}$$

$$S.T: \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} [\leq] \begin{bmatrix} 840 \\ 960 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- **الشكل القانوني:**

$$MaxZ = 8X_1 + 6X_2 + 10X_3$$

$$S.T: \begin{cases} 2X_1 + X_2 + 2X_3 \leq 840 \\ X_1 + 2X_2 + 2X_3 \leq 960 \\ X_1, X_2, X_3 \geq 0 \end{cases}$$

- **الشكل المعياري:**

$$MaxZ = 8X_1 + 6X_2 + 10X_3 + 0S_1 + 0S_2$$

$$S.T: \begin{cases} 2X_1 + X_2 + 2X_3 + S_1 = 840 \\ X_1 + 2X_2 + 2X_3 + S_1 = 960 \\ X_1, X_2, X_3, S_1, S_2 \geq 0 \end{cases}$$

المثال التطبيقي الخامس:

تريد مصحة الرمال تقديم وجبتين صحيتين من الطعام للمريض، بحيث الوحدة الواحدة من الوجبة الأولى تعطى 4 سعر حراري وبها 4 وحدات فيتامين، بينما الوحدة الواحدة من الوجبة الثانية تعطى 6 سعر حراري وبها 3 وحدات فيتامين، إذا كان المطلوب للمريض 36 سعر حراري على الأقل و24 وحدة فيتامين، وكان سعر الوحدة من الوجبة الأولى هو 10 ون، وسعر الوحدة من الوجبة الثانية هو 12 ون.

المطلوب :

1. أوجد نموذج البرمجة الخطية الذي يحدد عدد الوجبات من النوعين التي تحقق أقل تكلفة للمصحة في ظل المتطلبات الأساسية من السعرات والفيتامين.؟
2. أوجد كل من الشكل المصفوفي والقانوني والمعياري لهذا البرنامج؟

حل المثال التطبيقي الخامس:

1. إيجاد البرنامج الخطي الذي يحدد عدد الوجبات من النوعين:

- تحديد متغيرات القرار:

- نسمي X_1 عدد الوجبات التي تقدمها المصحة للوجبة الأولى.

- نسمي X_2 عدد الوجبات التي تقدمها المصحة للوجبة الثانية.

- **صياغة دالة الهدف:** إن هدف المصحة هو تقليل التكلفة الوجبة التي يمكن أن تقدمها للمريض في ظل المتطلبات الأساسية من السعرات والفيتامين، وعليه يمكن صياغة دالة الهدف على النحو التالي:

$$MinZ = 10X_1 + 12X_2$$

- **صياغة القيود:**

- **القيد الأول:** يتمثل القيد الأول في عدد وحدات سعر حراري التي يجب أن تقدمها الوجبات للمريض والتي لا تقل عن (36 سعر حراري) موزعة على نوعين من الوجبات على النحو التالي ($X_1 \times 4$) و ($X_2 \times 6$)، والذي يمكن التعبير عنه رياضيا بالصياغة التالية:

$$4X_1 + 6X_2 \geq 36$$

القيد الثاني: يتمثل القيد الثاني في عدد وحدات الفيتامين التي يجب أن تقدمها الوجبات للمريض والتي تقدر (24 وحدة) موزعة على نوعين من الوجبات على النحو التالي ($X_1 \times 4$) و ($X_2 \times 3$)، والذي يمكن التعبير عنه رياضيا بالصياغة التالية:

$$4X_1 + 3X_2 = 24$$

- **قيد عدم سلبية المتغيرات:** حيث أن عدد الوجبات من نوعين لا يمكن أن يكون بكميات سالبة، فإما أن تكون موجبة أو معدومة، وهو ما يُعبر عنه بالصياغة التالية:

$$X_1 \geq 0, X_2 \geq 0$$

وعليه وبتجميع الصيغ الرياضية المحصل عليها سابقا، نحصل على الشكل النهائي لنموذج البرمجة الخطية:

دالة الهدف	$MinZ = 10X_1 + 12X_2$
القيد الأول	$4X_1 + 6X_2 \geq 36$
القيد الثاني	$4X_1 + 3X_2 = 24$
قيد اللاسلبية	$X_1, X_2, \geq 0$

$$S.T: \begin{cases} 4X_1 + 6X_2 \geq 36 \\ 4X_1 + 3X_2 = 24 \\ X_1, X_2, \geq 0 \end{cases}$$

2. إيجاد كل من الشكل المصفوفي والقانوني والمعياري لهذا البرنامج:

- **الشكل المصفوفي :**

$$MinZ = [10 \quad 12] \times \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$$

$$S.T: \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \geq \\ = \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 36 \\ 24 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- **الشكل القانوني:**

$$MinZ = 10X_1 + 12X_2$$

$$S.T: \begin{cases} 4X_1 + 6X_2 \geq 36 \\ 4X_1 + 3X_2 \geq 24 \\ -4X_1 - 3X_2 \geq -24 \\ X_1, X_2, \geq 0 \end{cases}$$

- **الشكل المعياري:**

$$MinZ = 10X_1 + 12X_2 + 0S_1 + MT_1 + MT_2$$

$$S.T: \begin{cases} 4X_1 + 6X_2 + S_1 - T_1 = 36 \\ 4X_1 + 3X_2 + T_2 = 24 \\ X_1, X_2, S_1, T_1, T_2 \geq 0 \end{cases}$$

المثال التطبيقي السادس:

شركة متخصصة في إنتاج لعب الأطفال تقوم بإنتاج نوعين من اللعب، حيث تباع اللعبة الأولى بسعر قدره 30 ون ويستخدم ما قيمته 12 ون مواد أولية، كما أن كل لعبة يتم تصنيعها تزيد من تكلفة الشركة المتغيرة بمقدار 15 ون، بينما تباع اللعبة الثانية بسعر قدره 25 ون، ويستخدم ما قيمته 10 ون مواد أولية، كما أن كل لعبة يتم تصنيعها تزيد من تكلفة الشركة المتغيرة بمقدار 13 ون، وتمر العملية الإنتاجية لتلك اللعبتين من خلال مرحلتين هما التقطيع والتشطيب كما يلي:

- اللعبة الأولى تطلب 1 ساعة في التقطيع و2 ساعة في التشطيب.
- اللعبة الثانية تطلب 1 ساعة في التقطيع و1 ساعة في التشطيب.

الوقت المتاح في قسم التقطيع 80 ساعة

- الوقت المتاح في قسم التشطيب 100 ساعة
- الطلب على النوع الثاني لانهائي ولكن الطلب بالنسبة للنوع الأول 40 لعبة على الأكثر.

المطلوب :

1. أوجد نموذج البرمجة الخطية الذي يحدد عدد الوحدات الواجب إنتاجها من النوعين التي تحقق أقصى ربح ممكن؟
2. أوجد كل من الشكل المصفوفي والقانوني والمعياري لهذا البرنامج؟

حل المثال التطبيقي السادس:

1. **إيجاد البرنامج الخطي الذي يحدد عدد الوجبات من النوعين:**

- تحديد متغيرات القرار:

- نسمي X_1 عدد الوحدات المنتج من المنتوج الأول.

- نسمي X_2 عدد الوحدات المنتج من المنتوج الثاني.

- **صياغة دالة الهدف:** إن هدف المنتج هو تعظيم الربح الناتج عن إنتاج وحدات من نوعين، وقبل التطرق إلى صياغة دالة الهدف يجب حساب الربح الوحدوي لكل نوع، والتي نوضحها في الجدول التالي:

	سعر البيع	تكلفة مواد أولية	تكلفة المتغيرة	الربح الوحدوي
المنتوج الأول	30	12	15	3
المنتوج الثاني	25	10	13	2

وعليه يمكن صياغة دالة الهدف على النحو التالي:

$$MaxZ = 3X_1 + 2X_2$$

- **صياغة القيود:**

	المنتوج الأول	المنتوج الثاني	الوقت المتاح
قسم التقطيع	1سا	1سا	80سا
قسم التشطيب	2سا	1سا	100سا

- **القيد الأول:** يتمثل القيد الأول في قسم التقطيع، والذي يمكن التعبير عنه رياضيا بالصياغة التالية:

$$X_1 + X_2 \leq 80$$

القيد الثاني: يتمثل القيد الثاني في قسم التشطيب، والذي يمكن التعبير عنه رياضيا بالصياغة التالية:

$$2X_1 + X_2 \leq 100$$

- **قيد عدم سلبية المتغيرات:** حيث أن عدد الوجبات من نوعين لا يمكن أن يكون بكميات سالبة، فإما أن تكون موجبة أو معدومة، وهو ما يُعبر عنه بالصياغة التالية:

$$X_1 \geq 0, X_2 \geq 0$$

وعليه وبتجميع الصيغ الرياضية المحصل عليها سابقا، نحصل على الشكل النهائي لنموذج البرمجة الخطية:

$$\begin{aligned} & MaxZ = 3X_1 + 2X_2 \\ S.T: & \begin{cases} X_1 + X_2 \leq 80 \\ 2X_1 + X_2 \leq 100 \\ X_1, X_2, \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

دالة الهدف
القيد الأول
القيد الثاني
قيد اللاسلبية

3. إيجاد كل من الشكل المصفوفي والقانوني والمعياري لهذا البرنامج:

- **الشكل المصفوفي :**

$$MaxZ = [3 \quad 2] \times \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$$

$$S.T: \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \geq \\ = \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 80 \\ 100 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- **الشكل القانوني:**

$$MaxZ = 3X_1 + 2X_2$$

$$S.T: \begin{cases} X_1 + X_2 \leq 80 \\ 2X_1 + X_2 \leq 100 \\ X_1, X_2, \geq 0 \end{cases}$$

- **الشكل المعياري:**

$$MaxZ = 3X_1 + 2X_2 + 0S_1 + 0S_2$$

$$S.T: \begin{cases} X_1 + X_2 + S_1 = 80 \\ 2X_1 + X_2 + S_2 = 100 \\ X_1, X_2, S_1, S_2 \geq 0 \end{cases}$$

سابعا : تطبيقات مقترحة حول البرمجة الخطية

التمرين الأول :

تقوم شركه بإنتاج نوعين من الأبواب الحديدية من خلال استخدامها لنوعين من المواد الخامة وهي الألومونيوم والحديد وكان مقدار ربح الوحدة الواحدة من النوع الأول 20ج ، والنوع الثاني 15ج.

	الألومونيوم	الحديد
النوع الأول	2	3
النوع الثاني	4	2

ما هو عدد الأبواب التي يجب على الشركة إنتاجها علماً بان إجمالي الألمونيوم المستخدم في الأسبوع لا يتعدى 100 كلغ ، كما أن إجمالي الحديد الصلب المستخدم في الأسبوع لا يتعدى 80 كلغ وذلك لتعظيم ربح الشركة.

المطلوب :

1. كون النموذج الرياضي للمشكلة
2. أوجد كل من الشكل المصفوفي والقانوني والمعياري لهذا البرنامج؟

التمرين الثاني:

تقوم مؤسسة بإنتاج نوعين اللعب البلاستيكية P_1 و P_2، وتستخدم المؤسسة لإنتاج هذين المنتجين مادتين هما: M_1، M_2 ، بالإضافة إلى ذلك يتم استخدامهم عبر آلتين، والجدول التالي يوضح استهلاك المواد و الوقت المستغرق على كل آلة لكل منتوج.

	M_1	M_2	آلة الأولى	آلة الثانية
المنتج P_1	1 كلغ	3 كلغ	2 سا	0 سا
المنتج P_2	1 كلغ	4 كلغ	1 سا	3 سا

المؤسسة لا تتوفر إلا على 300 كلغ من المادة M_1 أما المادة M_2 فإنها تستجيب لأي برنامج إنتاجي. فيما يخص الطاقة القصوى للآلتين فهي على التوالي 500 و 800 ساعة، وحسب الوثائق المبيعات لهذه المؤسسة فإن هذه الأخيرة يجب عليها على الأقل إنتاج 150 وحدة من P_1، أما عن الربح المترتب عن المنتجين فهو على التوالي: 250 و 200 دج.

المطلوب:

3. حدد الكميات الواجب إنتاجها من المنتجين بغرض تحقيق أعظم ربح؟
4. أوجد كل من الشكل المصفوفي والقانوني والمعياري لهذا البرنامج؟

التمرين الثالث:

مكتب للاستنساخ يود شراء 10 أجهزة استنساخ، و أمامه 3 أنواع من أجهزة الاستنساخ، وعليه ما لا يقل عن جهازين من كل نوعين. يمكن للنوع الأول استنساخ 300 ورقة في الساعة، و يمكن للنوع الثاني استنساخ 350 ورقة، أما النوع الثالث فيمكن له استنساخ 250 ورقة في الساعة. العمر المتوقع للنوع الأول هو 3 سنوات، و للنوع الثاني هو 2 سنوات أما النوع الثالث فعمره هو 4 سنوات، علما أن مجموع أعمار أجهزة الاستنساخ يجب أن لا يقل عن 30 سنة. كلفة شراء الأجهزة الثلاث هي على التوالي: 1.5، 2، 1 مليون دينار، مع العلم أن المكتب بإمكانه بيع الأجهزة بعد سنة من الاستخدام بسعر: 1، 1، 0.5 مليون دينار على التوالي، حيث أن خطة المكتب تقضي استنساخ ما لا يقل عن 3000 ورقة في الساعة الواحدة.

المطلوب:

1. كون النموذج الرياضي للمشكلة و الذي يسمح بتحديد عدد الأجهزة و الذي تقلل تكاليف الشراء ؟
2. أوجد كل من الشكل المصفوفي والقانوني والمعياري لهذا البرنامج؟

التمرين الرابع :

يقوم جزار بعمل شطائر اللحم بتكوين من لحم بقري ولحم ماعز. يحتوي لحم البقر على 80% لحم و 20% دهون ويكلف 24 جنيه لكل كيلو في حين أن لحم الماعز على 68% لحم و 32% دهون ويكلف 18 جنيه لكل كيلو. ما هي كمية اللحم من كل نوع يجب أن يستخدمها المحل في كل كيلو من شطائر اللحم إذا علمت أنه يجب تخفيض التكاليف والمحافظة علي نسبة الدهون بحيث لا تزيد عن 25%؟

المطلوب :

3. كون النموذج الرياضي للمشكلة؟
4. أوجد كل من الشكل المصفوفي والقانوني والمعياري لهذا البرنامج؟

الفهرس

الفصل الثالث: طرق حل مشكلة البرمجة الخطية

مقدمة

إن حل أي برنامج خطي يعني إيجاد القيمة الحقيقية التي تعطي التابع قيمة مثلى (قيمة أعظميه للتابع أو دنيا)، وهذا يتحقق من خلال عدة طرق يمكن إتباعها في حل أي برنامج خطي وهي الطريقة البيانية والتي يتم من خلالها تحديد القيم المثلى عن طريق الرسم البياني للبرنامج والتي تكون محددة على منطقة القيود، التي تسمى عادة منطقة الإمكانات، أما إذا أردنا أن نفتش عن النقطة (قيم مثلى للمتغيرات) من منطقة الإمكانات، أو يمكننا استخدام الطريقة المبسطة أو ما تعرف بطريقة سمبلكس والتي يمكننا توضيحها من خلال العناصر القادمة.

أولا : حل نموذج البرمجة الخطية باستخدام " طريقة الرسم البياني Graphical Method

تستخدم هذه الطريقة لمعالجة المشكلات المتعلقة بالاستخدام الأمثل للموارد المتاحة للمؤسسة وعندما يكون عدد المتغيرات اثنين فقط، أما عند تعقد المشكلات وتتعدد المتغيرات (أي عندما تصبح متغيرات القرار أكثر من متغيرين اثنين) فتصبح هذه الطريقة عاجزة عن المساهمة في إيجاد حلول لتلك المشكلات.

وتتلخص الطريقة في أننا نقوم برسم القيود على شكل خطوط ثم نجد منطقة التقاطعات أو المنطقة المشتركة والتي تحتوي على عدة بدائل، وعن طريق إيجاد قيمة دالة الهدف عند هذه البدائل يمكن اختيار البديل أو الحل الأمثل الذي يعظم أو يخفض قيمة دالة الهدف.

وعند إتباع أسلوب الرسم البياني يجب إتباع الخطوات التالية:

- رسم المحور الأفقي والعمودي (الجزء الموجب من كل منهما)؛
- تحويل القيود إلى متساويات ثم تحديد نقطتين لكل مستقيم (معادلة) نقطتي تقاطع مع المحورين؛
- رسم المستقيمات المعبرة عن المعادلات؛
- تحديد منطقة الإمكانيات المتاحة؛

– تعيين النقطة ضمن منطقة الإمكانيات المتاحة التي تعطي أفضل النتائج (أعلى عائد أو أقل تكلفة)، وعادة تكون نقطة تقاطع مستقيمات وتكون في حالة تعظيم الأرباح أبعد ما يكون عن نقطة الأصل وتكون في حالة تقليل التكاليف أقرب ما يكون من نقطة الأصل

1 حالة تعظيم دالة الهدف Maximization

مثال تطبيقي:

يقوم مصنع بإنتاج سلعتين وفقا لعمليتين إنتاجيتين عبر ورشتين A و B، حيث أن الحد الأقصى لساعات العمل لكلا الورشتين على التوالي50 و 80ساعة، كما أن إنتاج الوحدة الواحدة من السلعة الأولى يحتاج إلى 1 ساعات في الورشة A و1 ساعات في الورشة B، بينما إنتاج الوحدة الواحدة من السلعة الثانية تحتاج إلى 1ساعات في الورشة A و2 ساعات في الورشة B، علما بأن الربح الوحدوي من السلعة الأولى هو 120ون، والربح الوحدوي من السلعة الثانية هو 100 ون.

المطلوب:

1. أوجد نموذج البرمجة الخطية؟
2. أوجد قيمة الحل بيانيا؟

الحل:

1. إيجاد نموذج البرمجة الخطية:

حتى يسهل تكوين المعادلات الرياضية (نموذج برمجة خطية) توضع البيانات المشكلة في صورة مصفوفة من خلال الجدول الموضح كما يلي:

	X_1	X_2	الموارد المتاحة/ شهريا، أقل من أو مساوية
قيد العمل في الورشة A	1	1	50
قيد العمل في الورشة B	1	2	80
الربح الوحدوي	120	100	

يمكن كتابة المثال السابق على هيئة نموذج برمجة خطية من خلال تتبع الخطوات التالية:

أولا	تحديد متغيرات الدراسة	نسمي X_1 الكميات الواجب إنتاجها من النوع الأول. نسمي X_2 الكميات الواجب إنتاجها من النوع الثاني.	
ثانيا	تحديد الهدف	تعظيم الربح:	$MaxZ = 120X_1 + 100X_2$
ثالثا	القيود	قيد العمل في الورشة A	$X_1 + X_2 \leq 50$
		قيد العمل في الورشة B	$X_1 + 2X_2 \leq 80$
رابعا	شرط اللاسلبية	قيد اللاسلبية	$X_1 \geq 0, X_2 \geq 0$

ويكون بالشكل الآتي:

$$\text{MaxZ} = 120X_1 + 100X_2$$

$$S.T: \begin{cases} X_1 + X_2 \leq 50 \\ X_1 + 2X_2 \leq 80 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

2. إيجاد قيمة الحل باستخدام الطرية البيانية:

أ: تحويل المتباينات إلى معادلات ورسمها

قيد العمل في الورشة A	
$X_1 + X_2 = 50$	D_1
X_1	X_2
0	50
50	0

قيد العمل في الورشة B	
$X_1 + 2X_2 = 80$	D_2
X_1	X_2
0	40
80	0

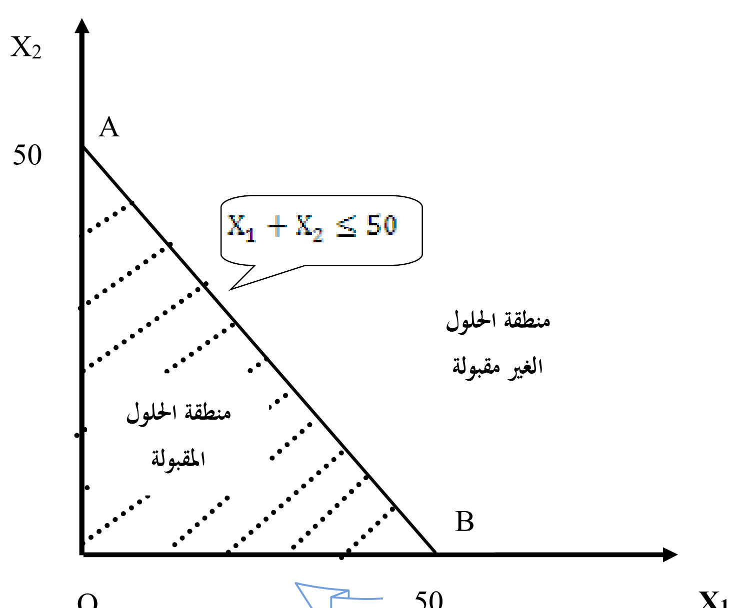
لو فرضنا أن المنتج ركز على إنتاج (X_2) وأهمل (X_1)، فإنه يستطيع إنتاج 50 وحدة في الورشة A المتوفرة لديه (بفرض أن القيد الأول يعبر عن ساعات عمل في الورشة A)، بينما إذا ركز الإنتاج على (X_1) مهملا (X_2) فإنه يستطيع إنتاج 50 وحدة في الورشة A.

على الآلة الأولى المتوفرة.

تحديد اتجاه المستقيم (D_1) الذي يحققه:

- نختبر المستقيم (D_1) مع نقطة الأصل أي نعوض ($X_1 = 0$)، ($X_2 = 0$)، إذن اتجاه المستقيم هو نحو نقطة الأصل، وهذا يعني ببساطة أن أي نقطة على المستقيم أو بينه وبين نقطة الأصل تحققه المتباينة $1(0) + 1(0)$ $<= 300$.

والمنطقة بين المستقيم ونقطة الأصل تسمى منطقة الإمكانيات المتاحة (الحلول الممكنة) وفق هذا القيد، بمعنى أن المنتج يستطيع إنتاج أي كمية ضمن المساحة المثلث المظلل (O,A, B) ووفق نقطة الأصل والقيد الأول.

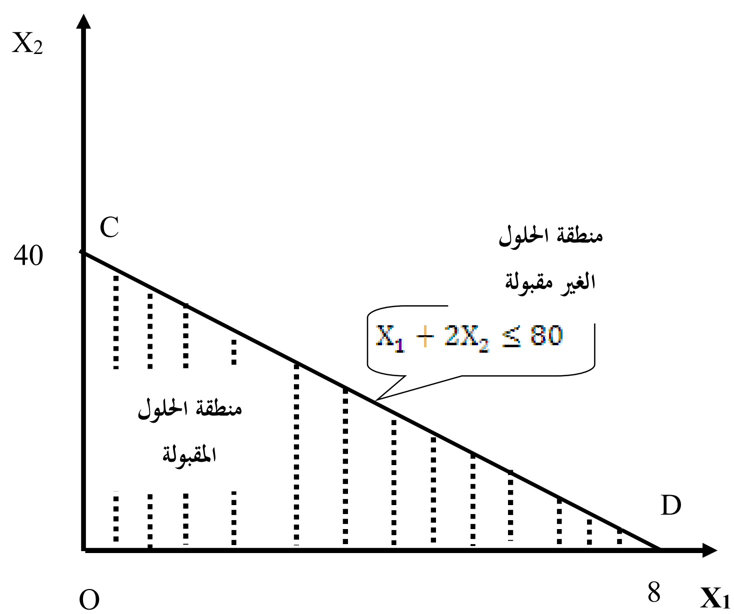


وبنفس الطريقة لو فرضنا أن المنتج ركز على إنتاج (X_2) وأهمل (X_1)، فإنه يستطيع إنتاج 80 وحدة في الورشة B المتوفرة لديه (بفرض أن القيد الثاني يعبر عن ساعات عمل الورشة B)، بينما إذا ركز الإنتاج على (X_1) مهملا (X_2) فإنه يستطيع إنتاج 40 وحدة في الورشة B.

تحديد اتجاه المستقيم (D_2) الذي يحققه:

نختبر المستقيم (D_2) مع نقطة الأصل أي نعوض ($X_1 = 0$)، ($X_2 = 0$)، إذن اتجاه المستقيم هو نحو نقطة الأصل، وهذا يعني ببساطة أن أي نقطة على المستقيم أو بينه وبين نقطة الأصل تحققه المتباينة $1(0) + 2(0)$ $<= 80$.

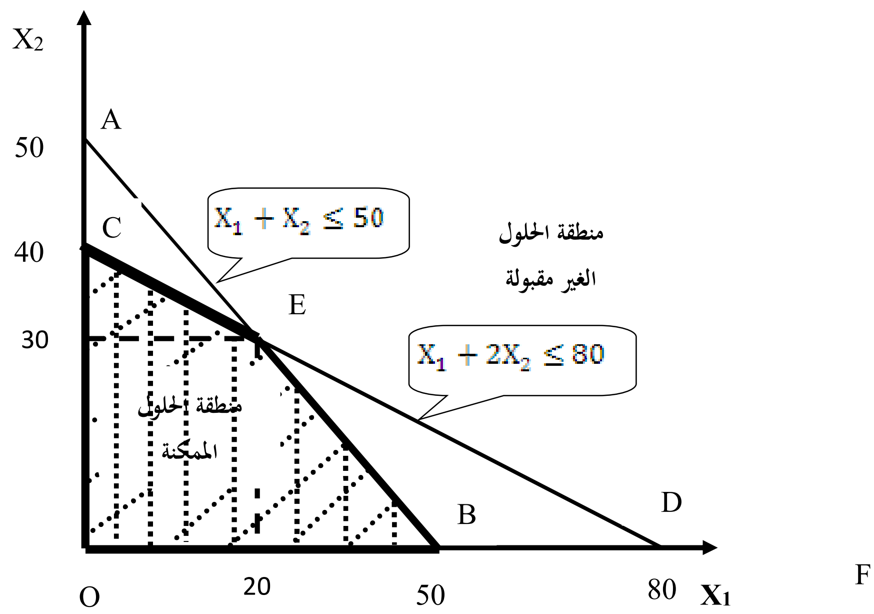
والمنطقة بين المستقيم(D_2) ونقطة الأصل تسمى منطقة الإمكانيات المتاحة (الحلول الممكنة) وفق هذا القيد بمعنى أن المنتج يستطيع إنتاج أي كمية ضمن المساحة المظللة(O,C,D) ووفق نقطة الأثل والقيد الثاني.



ب: تحديد منطقة الحلول والبدائل الممكنة من الرسم:

نقوم بداية بتحديد منطقة الإمكانيات المتاحة (الحلول الممكنة) والتي تحقق كلا المستقيمين، وهي في هذه الحالة المنطقة المظللة والمحددة بين النقاط (O,C,E,B) كما هي موضحة في الشكل أدناه، حيث يستطيع المنتج بإنتاج أي كمية داخل هذه المنطقة وفق القيدين السابقين.

ولكن الهدف من حل هذه المشكلة هو تحقيق أعلى عائد ممكن، وبإجراء التجارب وجد أن أعلى عائد يتحقق على رؤوس هذا المضلع، أي عند نقاط تقاطع المستقيمات، لذلك يتم اختبار دالة الهدف عند هذه النقاط، وهي (O,C,E,B).



ج: تحديد البديل الأمثل أي كميتي X_1 وX_2 اللتان تحققان أقصى ربح في ظل وجود القيود السابقة

- منطقة الإمكانيات المتاحة (الحلول الممكنة) هي المنطقة المحددة بالنقاط (O,C,E,B) والتي تحقق كل المستقيمات.
- خروج منطقة (A,C,E) من منطقة الإمكانيات المتاحة لأنها تحقق المستقيم الأول فقط، ولا تحقق المستقيم الثاني.
- خروج منطقة (E,D,B) من منطقة الإمكانيات المتاحة لأنها تحقق المستقيم الثاني فقط، ولا تحقق المستقيم الأول.

ولتحديد النقطة التي عندها يكون الربح أعلى ما يكون، لذلك نتبع إحدى الطريقتين التاليتين:

❖ **الطريقة الأولى:** تقييم نقاط تقاطع المستقيمات على أطراف منطقة الإمكانيات المتاحة، وهي كما يلي:

النتيجة	$Z = 100X_1 + 120X_2$	X_2	X_1	النقطة
0	$Z = 100(0) + 120(0)$	0	0	O
4800	$Z = 100(0) + 120(40)$	40	0	C
5600	$Z = 100(20) + 120(30)$	30	20	E
5000	$Z = 100(50) + 120(0)$	0	50	B

حيث أن النقطة(E) هي نقطة تقاطع المستقيمين (D_1) و (D_2) والتي يمكن إيجادها جبريا من خلال حل جملة المعادلة التالية:

$$\begin{cases} X_1 + X_2 = 50 \\ X_1 + 2X_2 = 80 \end{cases}$$

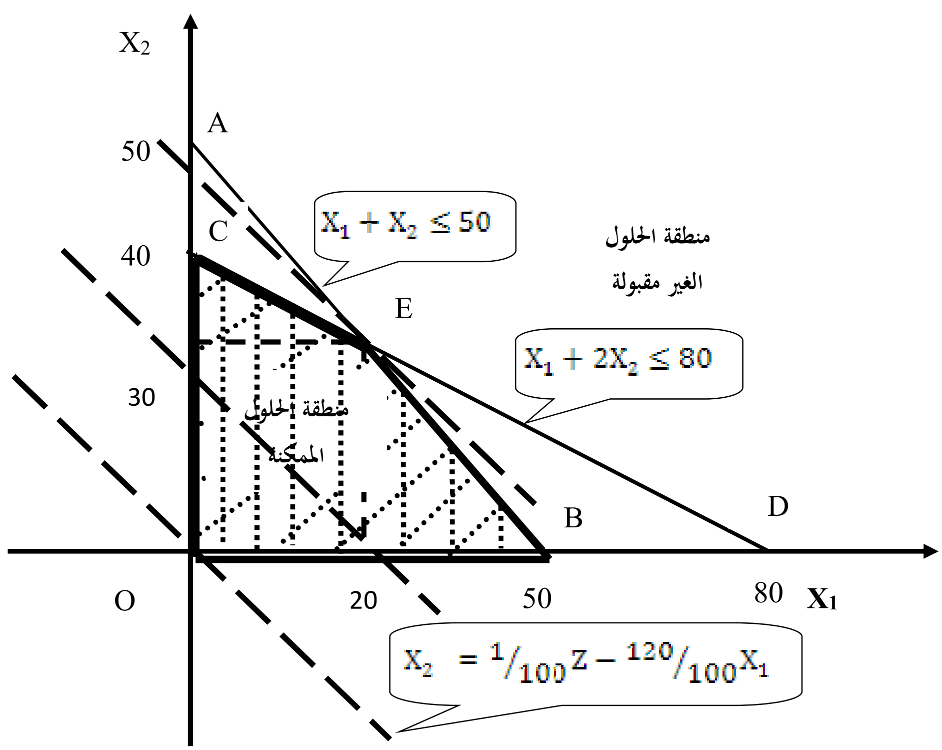
بالطرح أو بطريقة التعويض نجد : $(X_1 = 20)$ و $(X_2 = 30)$.

ومنه نجد بأن الحل الأمثل والذي يحقق أقصى ربح في ظل وجود القيود السابقة هو عند التقطهB ، حيث أن: $(X_1=20)$ و $(X_2=30)$ بربح قدره 5600 ون.

❖ **الطريقة الثانية**: رسم مستقيم دالة الهدف Iso-profit line

بعد أن رسمنا بيانيا المنطقة الحلول المكنة سنتوجه إلى إيجاد الحل الأمثل للمسألة، الحل الأمثل هو تلك النقطة التي تقع ضمن المنطقة الممكنة والتي تشير إلى الربح الأعلى. لكن هناك كثير من النقاط تقع ضمن المنطقة الممكنة (O,C,E,B)، فيمكننا معرفة تلك النقطة التي تعطينا أعلى ربح من خلال رسم معادلة مستقيم دالة الهدف وهذا مع جعل أن الربح مساويا للصفر $(Z = 0)$، وهذه المعادلة يبقى ميلها ثابت ما لم تتغير معاملات دالة الهدف C_j، ثم نقوم بعملية انسحاب لهذا المستقيم إلى غاية آخر نقطة مماس لهذا المستقيم (دالة الهدف) مع منطقة الحلول الممكنة، كما هي موضحة في الشكل التالي:

دالة الهدف	$Z = 120X_1 + 100X_2$		
	$X_2 = \frac{1}{100}Z - \frac{120}{100}X_1$		
	X_1	X_2	Z
F	0	0	0
G	10	-12	0



حيث نلاحظ من الشكل بان آخر نقطة مماس خط الهدف مع منطقة الحلول الممكنة عند النقطة E والتي يكون فيها ($X_1=20$) و ($X_2=30$) والتي تحقق أقصى ربح ممكن والمقدر بـ 5600 ون.

❖ أنواع الموارد

إضافة إلى معرفة الحل الأمثل، من المفيد أن نعرف أين استخدمت الموارد وما هي أنواع الموارد والحالات التي يمكن أن تكون عليها، ولذا في هذه الحالة يمكن أن نميز نوعين من الموارد وهي :

❖ **موارد نادرة أو مشبعة :** وهي الموارد التي تستغل بالكامل والتي تحقق حالة المساواة في القيود، وهي التي تقع عليها نقطة الحل الأمثل، والتي يمكن توضيحها رياضيا من خلال المعالة التالية :

الموارد المتاحة = الموارد المستخدمة.

❖ **الموارد الفائضة أو الغير مشبعة:** وهي الموارد التي لا تستغل بالكامل والتي لا تحقق حالة المساواة في القيود، وهي التي لا تقع عليها نقطة الحل الأمثل، والتي يمكن توضيحها رياضيا من خلال المعالة التالية :

الموارد غير المستخدمة (الفائضة) = الموارد المتاحة – الموارد المستخدمة

في الحل الأمثل لمثالنا السابق نجد أن ($X_1=20$) و ($X_2=30$) وبالتالي نجد:

القيود	المورد المتاح	المورد المستغل	الموارد غير الفائض
$X_1 + X_2$	50	$(20) + (30) = 50$	0=50-50	0
$X_1 + 2X_2$	80	$(20) + 2(30) = 80$	0=80-80	0

المقارنة بين طريقة مستقيمات الربح وطريقة نقاط الزوايا

طريقة مستقيمات الربح	طريقة نقاط الزوايا
نرسم القيود وأوجد المنطقة الممكنة	نرسم القيود وأوجد المنطقة الممكنة
نختار أحد خطوط الربح (أو التكلفة) وارسمه	نوجد نقاط الزوايا في المنطقة الممكنة
نحرك خط تابع الهدف باتجاه رفع الربح (أو خفض التكلفة) مع المحافظة على ميل المستقيم.	نحسب الربح (أو التكلفة) لكل نقطة من نقاط زوايا المنطقة الممكنة.
آخر نقطة يلمسها المستقيم من المنطقة الممكنة هي نقطة الحل الأمثل. نوجد قيم متغيرات (الكراسي والطاولات) القرار عند تلك النقطة الأخيرة لكي نحسب الربح (أو التكلفة).	نختار النقطة التي يأخذ فيها تابع الربح أفضل قيمة في الخطوة 3. تلك النقطة تمثل الحل الأمثل.

2 حالة تدنئة دالة الهدف Minimization

مثال تطبيقي:

تقوم شركة بإنتاج نوعين من الأغذية لبناء جسم صحي، حيث أن تكلفة النوع الأول هو 100 ون وتستخدم من خلال 1 وحدة من فيتامين A و1 وحدة من فيتامينC، بنما تكلفة النوع الثاني هو 120 ون وتستخدم من خلال 1 وحدة من فيتامين A و2 وحدة من فيتامين C، وأن الكميات المتاحة لعدد الوحدات هي على الأقل 50 وحدة من فيتامين A و 80 وحدة من فيتامينC.

المطلوب:

1. أوجد نموذج البرمجة الخطية؟
2. أوجد قيمة الحل بيانيا؟

الحل:

1. **إيجاد نموذج البرمجة الخطية:**

حتى يسهل تكوين المعادلات الرياضية (نموذج برمجة خطية) توضع البيانات المشكلة في صورة مصفوفة من خلال الجدول الموضح كما يلي:

	X_1	X_2	الموارد المتاحة/ شهريا، أكبر من أو مساوية
قيد الفيتامينات A	1	1	50
قيد فيتامينات C	1	2	80
تكلفة الوحدة	120	100	

يمكن كتابة المثال السابق على هيئة نموذج برمجة خطية من خلال تتبع الخطوات التالية:

أولا	تحديد متغيرات الدراسة	نسمي X_1 الكميات الواجب إنتاجها من النوع الأول. نسمي X_2 الكميات الواجب إنتاجها من النوع الثاني.	
ثانيا	تحديد الهدف	تدنئة التكاليف:	$MinZ = 100X_1 + 120X_2$
ثالثا	القيود	قيد الفيتامينات A	$X_1 + X_2 \geq 50$
		قيد فيتامينات C	$X_1 + 2X_2 \geq 80$
رابعا	شرط اللاسلبية	قيد اللاسلبية	$X_1 \geq 0, X_2 \geq 0$

ويكون بالشكل الآتي:

$$MinZ = 100X_1 + 120X_2$$

$$S.T: \begin{cases} X_1 + X_2 \geq 50 \\ X_1 + 2X_2 \geq 80 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

2. إيجاد قيمة الحل باستخدام الطرية البيانية:

أ: تحويل المتباينات إلى معادلات ورسمها

قيد الفيتامينات A	
$X_1 + X_2 = 50$	D_1
X_1	X_2
0	50
50	0

قيد فيتامينات C	
$X_1 + 2X_2 = 80$	D_2
X_1	X_2
0	40
80	0

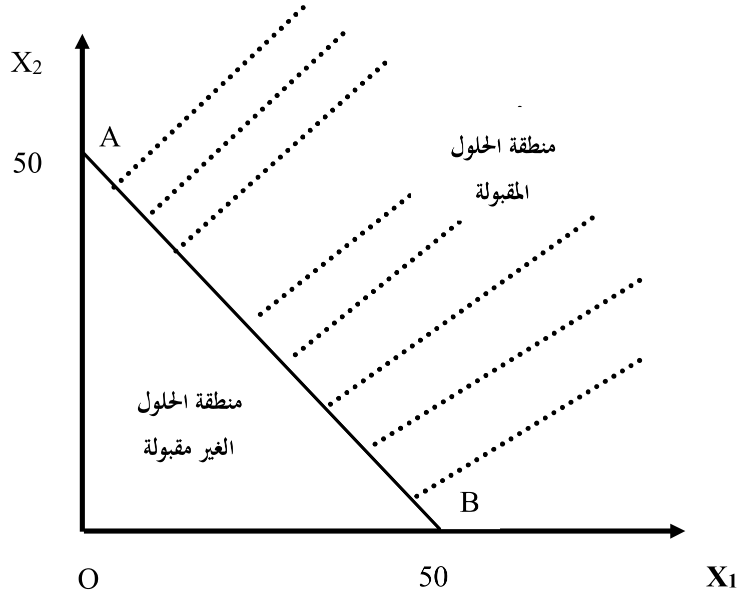
لو فرضنا أن المنتج ركز على إنتاج (X_2) وأهمل (X_1)، فإنه يستطيع إنتاج 50 وحدة في الورشة A المتوفرة لديه (بفرض أن القيد الأول يعبر عن عدد وحدات من الفيتامين A)، بينما إذا ركز الإنتاج على (X_1) مهملا (X_2) فإنه يستطيع إنتاج 50 وحدة في الورشة A.

على الآلة الأولى المتوفرة.

تحديد اتجاه المستقيم (D_1) الذي يحققه:

- نختبر المستقيم (D_1) مع نقطة الأصل أي نعوض ($X_1 = 0$)، ($X_2 = 0$)، إذن اتجاه المستقيم هو نحو نقطة الأصل، وهذا يعني ببساطة أن أي نقطة بين المستقيم و نقطة الأصل لا تحقق المتباينة <= $1(0) + 1(0) = 0$ .50

والمنطقة بين المستقيم ونقطة الأصل تسمى منطقة الإمكانيات الغير مقبولة للحل، وبالتالي نقول علة منطقة المتاحة (الحلول الممكنة) وفق هذا القيد تقع على المستقيم (D_1) أو أعلى منه، بمعنى أن المنتج يستطيع إنتاج أي كمية ضمن المساحة المظللة أعلى المستقيم (A, B) كما عي موضحة في الشكل.

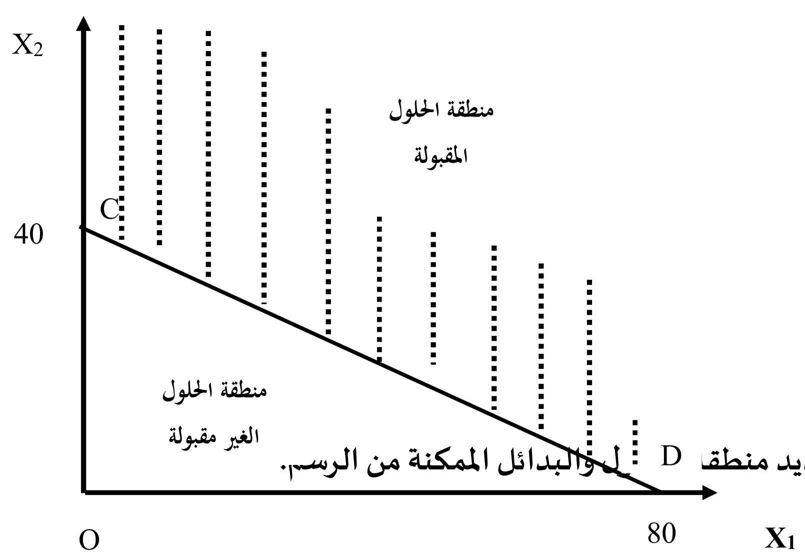


وبنفس الطريقة لو فرضنا أن المنتج ركز على إنتاج (X_2) وأهمل (X_1)، فإنه يستطيع إنتاج 80 وحدة في الورشة B المتوفرة لديه (بفرض أن القيد الثاني يعبر عن عدد وحدات من الفيتامين C)، بينما إذا ركز الإنتاج على (X_1) مهملا (X_2) فإنه يستطيع إنتاج 40 وحدة في الورشة B.

تحديد اتجاه المستقيم (D_2) الذي يحققه:

- نختبر المستقيم (D_2) مع نقطة الأصل أي نعوض ($X_1 = 0$)، ($X_2 = 0$)، إذن اتجاه المستقيم هو نحو نقطة الأصل، وهذا يعني ببساطة أن أي نقطة بين المستقيم و نقطة الأصل لا تحقق المتباينة $80 \Leftarrow 0 = 2(0) + 1(0)$.

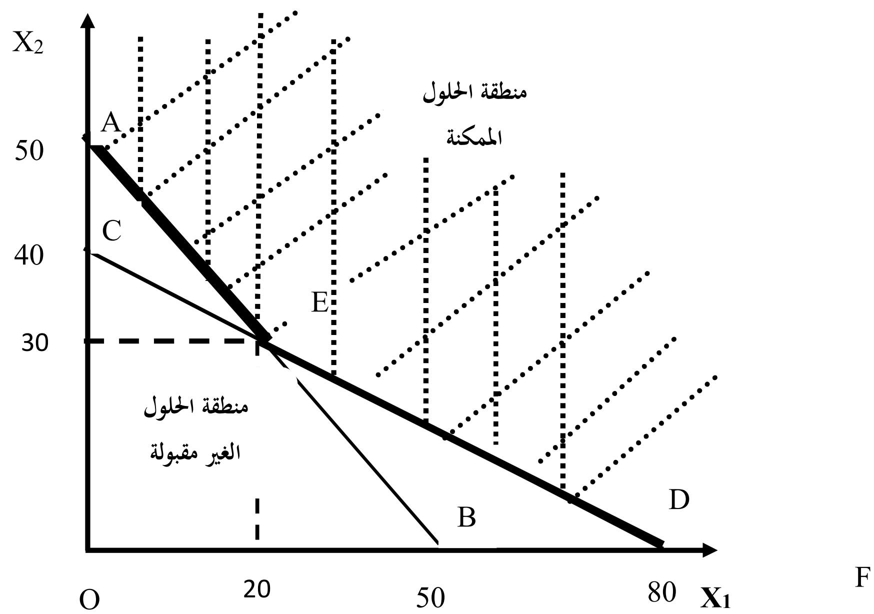
والمنطقة بين المستقيم ونقطة الأصل تسمى منطقة الإمكانيات الغير مقبولة للحل، وبالتالي نقول علة منطقة المتاحة (الحلول الممكنة) وفق هذا القيد تقع على المستقيم (D_2) أو أعلى منه، بمعنى أن المنتج يستطيع إنتاج أي كمية ضمن المساحة المظللة أعلى المستقيم (C,D)كما عي موضحة في الشكل.



ب: تحديد منطق... ل والبدائل الممكنة من الرسم.

نقوم بداية بتحديد منطقة الإمكانيات المتاحة (الحلول الممكنة) والتي تحقق كلا المستقيمين، وهي في هذه الحالة المنطقة المظللة والمحددة بين النقاط (O,C,E,B) كما هي موضحة في الشكل أدناه، حيث يستطيع المنتج بإنتاج أي كمية داخل هذه المنطقة وفق القيدين السابقين.

ولكن الهدف من حل هذه المشكلة هو تحقيق أعلى عائد ممكن، وبإجراء التجارب وجد أن أعلى عائد يتحقق على رؤوس هذا المضلع، أي عند نقاط تقاطع المستقيمات، لذلك يتم اختبار دالة الهدف عند هذه النقاط، وهي (O,C,E,B).



ج: تحديد البديل الأمثل أي كميتي X_1 وX_2 اللتان تحققان أقصى ربح في ظل وجود القيود السابقة

أ- منطقة الإمكانيات المتاحة (الحلول الممكنة) هي المنطقة المظللة والمحددة بالنقاط (A,E,D) والتي تحقق كل المستقيمات.

ب- خروج منطقة (E,D,B) من منطقة الإمكانيات المتاحة لأنها تحقق المستقيم الأول فقط، ولا تحقق المستقيم الثاني.

ج- خروج منطقة (A,C,E)من منطقة الإمكانيات المتاحة لأنها تحقق المستقيم الثاني فقط، ولا تحقق المستقيم الأول.

ولتحديد النقطة التي عندها يكون الربح أعلى ما يكون، لذلك نتبع إحدى الطريقتين التاليتين:

الطريقة الأولى: تقييم نقاط تقاطع المستقيمات على أطراف منطقة الإمكانيات المتاحة، وهي كما يلي:

النقطة	X_1	X_2	$Z = 100X_1 + 120X_2$	النتيجة
A	0	50	$Z = 100(0) + 120(50)$	6000
E	20	30	$Z = 100(20) + 120(30)$	5600
D	80	0	$Z = 100(80) + 120(0)$	8000

حيث أن النقطة(E) هي نقطة تقاطع المستقيمين (D_1) و (D_2) والتي يمكن إيجادها جبريا من خلال حل جملة المعادلة التالية:

$$\begin{cases} X_1 + X_2 = 50 \\ X_1 + 2X_2 = 80 \end{cases}$$

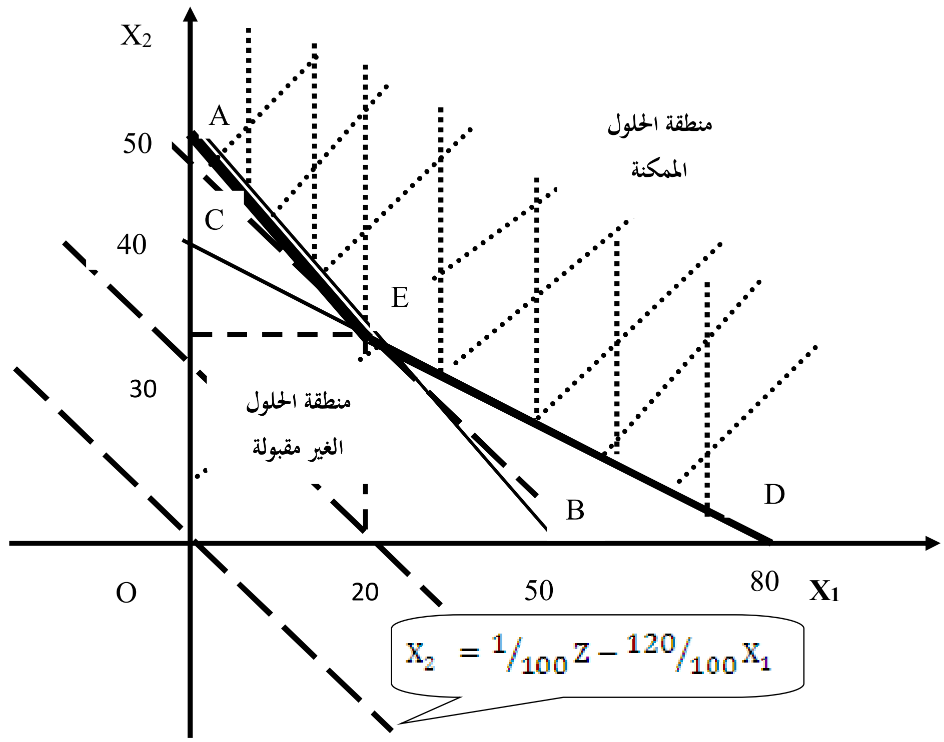
بالطرح أو بطريقة التعويض نجد : $(X_1 - 20)$ و $(X_2 - 30)$.

ومنه نجد بأن الحل الأمثل والذي يحقق أدنى تكلفة في ظل وجود القيود السابقة هو عند التقطه E ، حيث أن: (X_1=20) و (X_2=03) بتكلفة قدرها 5600 ون.

الطريقة الثانية: رسم مستقيم دالة الهدف Iso-profit line

بعد أن رسمنا بيانيا المنطقة الحلول الممكنة سنتوجه إلى إيجاد الحل الأمثل للمسألة. الحل الأمثل هو تلك النقطة التي تقع ضمن المنطقة الممكنة والتي تشير إلى أدنى تكلفة، لكن هناك كثير من النقاط تقع ضمن المنطقة الممكنة (A,E,D)، فيمكننا معرفة تلك النقطة التي تعطينا أدنى تكلفة من خلال رسم معادلة مستقيم دالة الهدف وهذا مع جعل أن الربح مساويا للصفر ($Z = 0$)، وهذه المعادلة يبقى ميلها ثابت ما لم تتغير معاملات دالة الهدف C_j، ثم نقوم بعملية انسحاب لهذا المستقيم إلى غاية أول نقطة مماس لهذا المستقيم (دالة الهدف) مع منطقة الحلول الممكنة، كما هي موضحة في الشكل التالي:

دالة الهدف	$Z = 120X_1 + 100X_2$		
	$X_2 = {}^{1}/_{100} Z - {}^{120}/_{100} X_1$		
	X_1	X_2	Z
F	0	0	0
G	10	-12	0



حيث نلاحظ من الشكل بان آخر نقطة مماس خط الهدف مع منطقة الحلول الممكنة عند النقطة E والتي يكون فيها ($X_1=20$) و ($X_2=30$) والتي تحقق أدنى تكلفة ممكنة والمقدرة بـ 5400 ون.

مثال تطبيقي الثاني:

يقوم شركة بإنتاج نوعين من الأغذية لبناء جسم صحي، حيث أن تكلفة النوع الأول هو 3 ون وتعطي 2 وحدة من فيتامين A و2 وحدة من فيتامينC و8 وحدة من فيتامين D، بنما تكلفة النوع الثاني هو 4 ون وتعطي 3 وحدة من فيتامين A و2 وحدة من فيتامينC و2 وحدة من فيتامين D، وأن الكميات المتاحة لعدد الوحدات هي 36 وحدة من فيتامين A، 28 وحدة من فيتامينC، 32 وحدة من فيتامين D.

المطلوب:

1. أوجد نموذج البرمجة الخطية؟
2. أوجد قيمة الحل بيانيا؟

الحل:

1. **إيجاد نموذج البرمجة الخطية:**

حتى يسهل تكوين المعادلات الرياضية (نموذج برمجة خطية) توضع البيانات المشكلة في صورة مصفوفة من خلال الجدول الموضح كما يلي:

	X_1	X_2	الموارد المتاحة/ شهريا، أكبر من أو مساوية
فيتامين A	2	3	36
فيتامين C	2	2	28
فيتامين D	8	2	32
تكلفة الوحدة	3	4	

يمكن كتابة المثال السابق على هيئة نموذج برمجة خطية من خلال تتبع الخطوات التالية:

أولا	تحديد متغيرات الدراسة	نسمي X_1 الكميات الواجب إنتاجها من النوع الأول. نسمي X_2 الكميات الواجب إنتاجها من النوع الثاني.	
ثانيا	تحديد الهدف	تخفيض التكاليف: $Min\ Z = 3X_1 + 4X_2$	
ثالثا	القيود	قيد الفيتامين A	$2X_1 + 3X_2 \geq 36$
		قيد الفيتامين C	$2X_1 + 2X_2 \geq 28$
		قيد الفيتامين D	$8X_1 + 2X_2 \geq 32$
رابعا	شرط اللاسلبية	قيد اللاسلبية	$X_1 \geq 0, X_2 \geq 0$

ويكون بالشكل الآتي:

دالة الهدف $Min\ Z = 3X_1 + 4X_2$

القيود   Subject to

$$8X_1 + 2X_2 \geq 32$$

$$8X_1 + 2X_2 \geq 32$$

$$8X_1 + 2X_2 \geq 32$$

$$X_1 \geq 0, X_2 \geq 0$$

2. إيجاد قيمة الحل باستخدام الطرية البيانية:

أ: تحويل المتباينات إلى معادلات ورسمها

قيد الفيتامين A			قيد الفيتامين C			قيد الفيتامين D	
$2X_1 + 3X_2 = 36$	D_1		$2X_1 + 2X_2 = 28$	D_2		$8X_1 + 2X_2 = 32$	D_3
X_1	X_2		X_1	X_2		X_1	X_2
0	12		0	14		0	16
18	0		14	0		4	0

لو فرضنا أن المنتج ركز على إنتاج (X_2) وأهمل (X_1)، فإنه يستطيع إنتاج 12 وحدة من قيد الفيتامين A المتوفرة لديه (بفرض أن القيد الأول يعبر عن كمية وحدة من فيتامين A)، بينما إذا ركز الإنتاج على (X_1) مهملا (X_2) فإنه يستطيع إنتاج 18 وحدة من قيد الفيتامين A.

تحديد اتجاه المستقيم الذي يحققه:

نختبر المستقيم (D_1) مع نقطة الأصل أي نعوض ($X_1 = 0$)، ($X_2 = 0$)، إذن اتجاه المستقيم هو نحو نقطة الأصل، وهذا يعني ببساطة أن أي نقطة على المستقيم أو بينه وبين نقطة الأصل لا تحققه المتباينة $2(0) + 3(0) \geq 36$.

والمنطقة بين المستقيم ونقطة الأصل تسمى منطقة الإمكانيات الغير متاحة (الحلول الغير الممكنة) وفق هذا القيد بمعنى أن المنتج يستطيع إنتاج أي كمية ضمن المساحة المثلث المظلل (A,E, B) ووفق نقطة الأصل والقيد الأول.

وبنفس الطريقة لو فرضنا أن المنتج ركز على إنتاج (X_2) وأهمل (X_1)، فإنه يستطيع إنتاج 14 وحدة من قيد الفيتامين C المتوفرة لديه (بفرض أن القيد الثاني يعبر عن كمية وحدة من فيتامين C)، بينما إذا ركز الإنتاج على (X_1) مهملا (X_2) فإنه يستطيع إنتاج 14 وحدة من قيد الفيتامين C .

تحديد اتجاه المستقيم الذي يحققه:

نختبر المستقيم (D_2) مع نقطة الأصل أي نعوض ($X_1 = 0$)، ($X_2 = 0$)، إذن اتجاه المستقيم هو نحو نقطة الأصل، وهذا يعني ببساطة أن أي نقطة على المستقيم أو بينه وبين نقطة الأصل تحققه المتباينة $(0)2 + 2(0) + 2(0) <= 320$.

والمنطقة بين المستقيم(D_2) ونقطة الأصل تسمى منطقة الإمكانيات الغير متاحة (الحلول الغير الممكنة) وفق هذا القيد بمعنى أن المنتج يستطيع إنتاج أي كمية ضمن المساحة المظللة(A,D,F) ووفق نقطة الأثل والقيد الثاني.

وبنفس الطريقة لو فرضنا أن المنتج ركز على إنتاج (X_2) وأهمل (X_1)، فإنه يستطيع إنتاج 4 وحدة من قيد الفيتامين D المتوفرة لديه (بفرض أن القيد الثاني يعبر عن كمية وحدة من فيتامين D)، بينما إذا ركز الإنتاج على (X_1) مهملا (X_2) فإنه يستطيع إنتاج 16 وحدة من قيد الفيتامين D .

تحديد اتجاه المستقيم الذي يحققه:

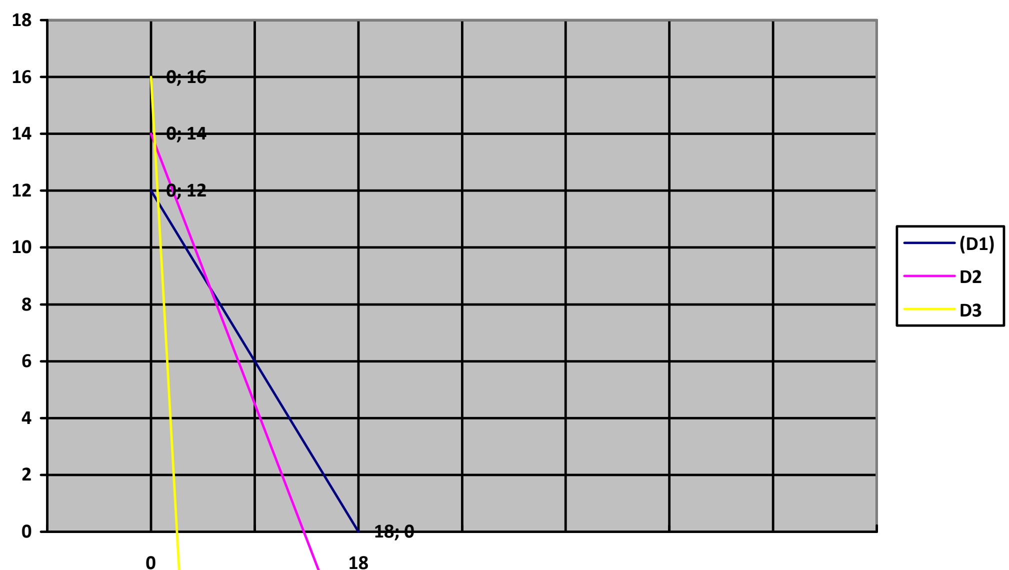
نختبر المستقيم (D_2) مع نقطة الأصل أي نعوض ($X_1 = 0$)، ($X_2 = 0$)، إذن اتجاه المستقيم هو نحو نقطة الأصل، وهذا يعني ببساطة أن أي نقطة على المستقيم أو بينه وبين نقطة الأصل تحققه المتباينة $(0)2 + 2(0) + 2(0) <= 320$.

والمنطقة بين المستقيم(D_2) ونقطة الأصل تسمى منطقة الإمكانيات الغير متاحة (الحلول الغير الممكنة) وفق هذا القيد بمعنى أن المنتج يستطيع إنتاج أي كمية ضمن المساحة المظللة(A,D,F) ووفق نقطة الأثل والقيد الثاني.

2. تحديد منطقة الحلول والبدائل الممكنة من الرسم:

نقوم بداية بتحديد منطقة الإمكانيات المتاحة (الحلول الممكنة) والتي تحقق كلا المستقيمين، وهي في هذه الحالة المنطقة (A,B,C,D) المظللة، حيث يستطيع المنتج بإنتاج أي كمية داخل هذه المنطقة وفق القيدين السابقين.

والهدف من حل هذه المشكلة هو تحقيق أعلى عائد ممكن، وبإجراء التجارب وجد أن أعلى عائد يتحقق عند نقاط تقاطع المستقيمات، لذلك يتم اختبار دالة الهدف عند هذه النقاط، وهي (A,B,C,D).



3. تحديد البديل الأمثل أي كميتي X_1 وX_2 اللتان تحققان أقصى ربح في ظل وجود القيود السابقة

أ- منطقة الإمكانيات المتاحة (الحلول الممكنة) هي (A,B,C,D) والتي تحقق كل المستقيمات الثلاثة.

ب- خروج منطقة (B,C,F) من منطقة الإمكانيات المتاحة لأنها تحقق المستقيم الثاني فقط، ولا تحقق المستقيم الأول.

ج- خروج منطقة (C,D,E) من منطقة الإمكانيات المتاحة لأنها تحقق المستقيم الأول فقط، ولا تحقق المستقيم الثاني.

ولتحديد النقطة التي عندها يكون الربح أعلى ما يكون، لذلك نتبع إحدى الطريقتين التاليتين:

الطريقة الأولى: تقييم نقاط تقاطع المستقيمات على أطراف منطقة الإمكانيات المتاحة، وهي كما يلي:

النقطة	X_1	X_2	$Z = 3X1 + 4X2$	النتيجة
A	0	16	$Z = 3(0) + 4(16)$	64
B	2	12	$Z = 3(2) + 4(12)$	54
C	6	8	$Z = 3(6) + 4(8)$	50
D	18	0	$Z = 3(18) + 4(0)$	54

ومنه نجد بأن الحل الأمثل والذي يحقق أقصى ربح في ظل وجود القيود السابقة هو عند التقطهC ،

حيث أن: $(X_1=6)$ و $(X_2=8)$ بتكلفة قدرها 50 ون.

ثانيا : الحالات الخاصة في حالة الطريقة البيانية

هناك أربع حالات خاصة في البرمجة الخطية عند حل البرنامج الرياضي باستخدام الطريقة البيانية وهي:

1 **الحالة الأولى: عدم وجود حل ممكن**

تصادف هذه الحالة في مسائل البرمجة الخطية عندما لا يكون هناك حل يتوافق مع كل القيود وهذا يعني عدم وجود منطقة حل ممكنة، وهذا يحدث عندما تكون هناك قيود متناقضة.

مثال: لتكن لدينا القيود التالية:

$$S.T: \begin{cases} 2X_1 + 2X_2 \leq 60 \\ 2X_1 + X_2 \leq 80 \\ X_1 \geq 70 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

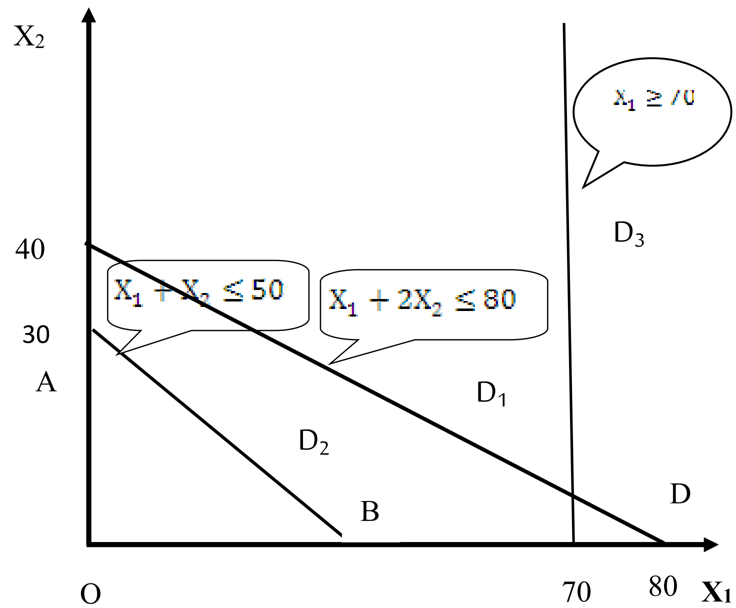
إيجاد قيمة الحل باستخدام الطرية البيانية:

تحويل المتباينات إلى معادلات ورسمها.

القيد الأول D_1	
$2X_1 + 2X_2 = 60$	D_1
X_1	X_2
0	30
30	0

القيد الثاني D_2	
$2X_1 + X_2 = 80$	D_2
X_1	X_2
0	80
40	0

القيد الثالث D_3	
$X_1 = 70$	D_3
X_1	
70	



يمثل الخط D_1 وما تحته القيد الأول بينما يمثل الخط D_2 وما تحته القيد الثاني. يوجد حل مشترك لهذين القيدين. يمثل الخط D_3 ومابعده باتجاه اليسار القيد الثالث. في هذا الشكل نجد منطقة حل ممكنة لأول قيدين ولكن لايوجد منطقة حل ممكنة للقيود الثلاثة.

2 الحالة الثانية: المنطقة غير المحدودة

قد نجد منطقة حل مشترك ممكنة في مسائل البرمجة الخطية، هذه المنطقة الممكنة تتوافق مع جميع القيود ولكنها قد تكون مفتوحة باتجاه ما نتيجة عدم وجود حل نهائي.

مثال: لتكن لدينا القيود التالية:

$$MaxZ = 3X_1 + 5X_2$$

$$S.T \begin{cases} X_1 \geq 5 \\ X_2 \leq 10 \\ X_1 + 2X_2 \geq 10 \\ X_1 . X_2 \geq 0 \end{cases}$$

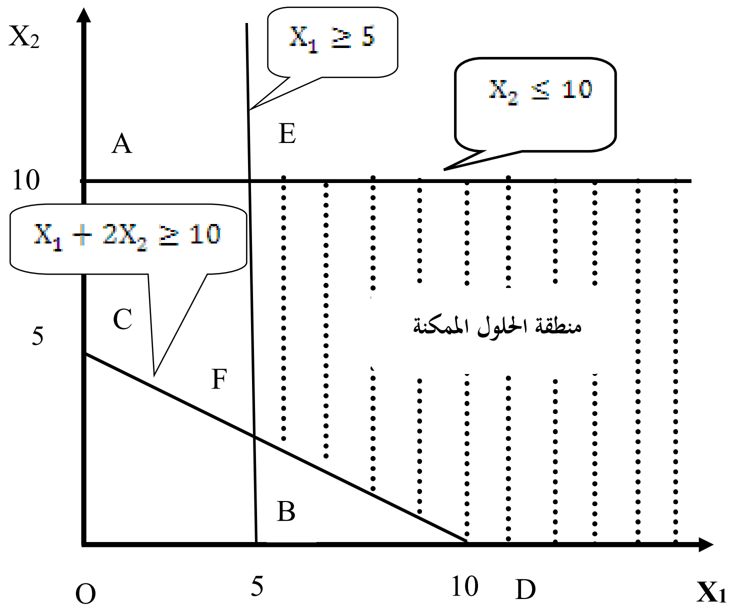
إيجاد قيمة الحل باستخدام الطرية البيانية:

تحويل المتباينات إلى معادلات ورسمها

القيد الأول	
$X_1 = 5$	D_1
X_1	X_2
5	0
5	0

القيد الثاني	
$X_2 = 10$	D_2
X_1	X_2
0	10
0	10

القيد الثالث	
$X1+2 X2 = 10$	D_3
X_1	X_2
10	0
0	5



.يمثل الخط D_1 وما بعده باتجاه اليسار القيد الأول ، يمثل الخط D_2وما تحته القيد الثاني، ويمثل الخط D_3وما فوقه القيد الثالث.

وهذا يشير إلى أنه قد صيغت المسألة بشكل غير متقن، إنه شيء جيد أن تنتج الشركة عدد لانهائي من الطاولات وأن يكون لديها ربح غير نهائي، ولكن لايوجد شركة لديها موارد غير محدودة.

3 **الحالة الثالثة: القيود غير المؤثرة**

وهي القيود التي لا تؤثر على منطقة الحل الممكنة في مسائل البرمجة الخطية.

مثال: لتكن لدينا البرنامج الرياضي التالي:

$$\mathrm{Max}Z = X_1 + 2X_2$$
$$S.T\begin{cases} X_1 + X_2 \leq 20 \\ 2X_1 + X_2 \leq 30 \\ X_1 \geq 25 \\ X_1 . X_2 \geq 0 \end{cases}$$

إيجاد قيمة الحل باستخدام الطرية البيانية:

تحويل المتباينات إلى معادلات ورسمها

القيد الأول	
$X_1+X_2 = 20$	D_1
X_1	X_2

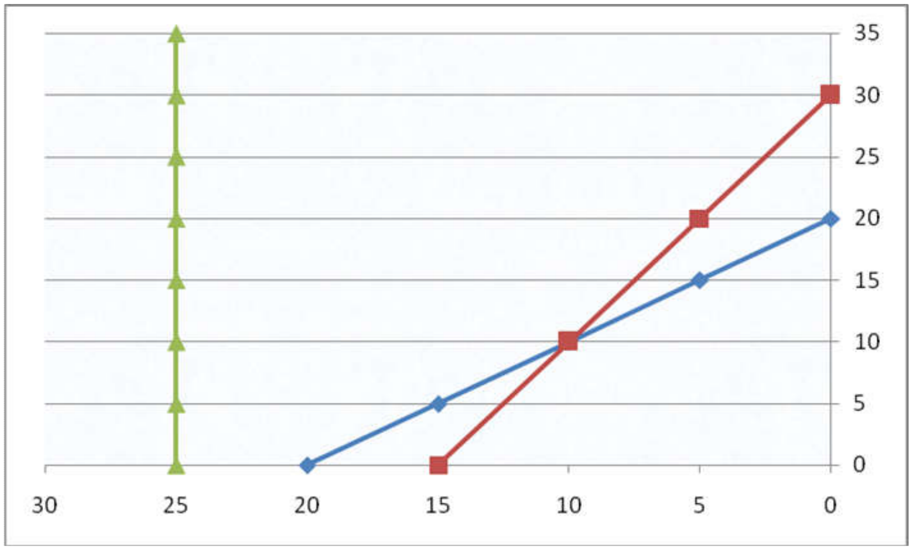
القيد الثاني	
$2X_1+X_2 = 30$	D_2
X_1	X_2

القيد الثالث	
$X1 = 25$	D_3
X_1	X_2

20	0
0	20

30	0
0	15

0	25
0	25



يمثل المحور الأفقي المتغير X_1 بينما يمثل المحور العمودي المتغير X_2. حيث يمثل الخط الأزرق وما تحت الخط الأزرق القيد ($X_1+X_2 \leq 20$)، يمثل الخط الأزرق وما تحت الخط الأزرق القيد ($2X_1+X_2 \leq 30$)،يمثل الخط الأخضر وما قبل الخط الأخضر باتجاه اليمين القيد ($X_1 \geq 25$).

4 **الحالة الرابعة: الحلول المثلى البديلة**

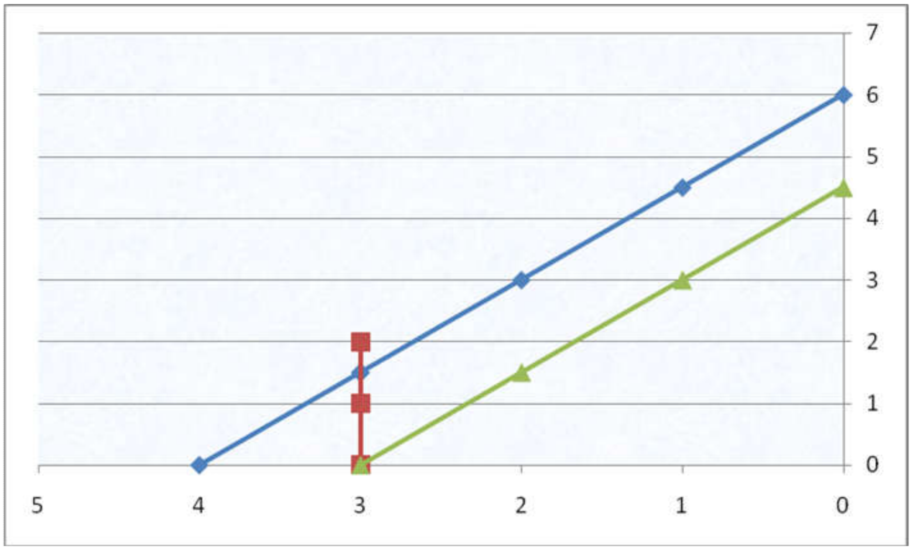
قد يكون لمسائل البرمجة الخطية أكثر من حل أمثل. يحدث هذا عندما يتوازى خط معادلة الهدف مع معادلة أحد قيود المسألة.

مثال:

$$Max\ Z= 3X_1+2X_2$$

وهذه العبارة مرتبطة بالقيود التالية:

$$X_1 \leq 3$$
$$6X_1+4X_2 \leq 10$$
$$X_1 \geq 0 , X_2 \geq 0$$



كما نرى في الشكل أعلاه أن خط الأرباح المتساوية والذي رسم على أساس أرباح قدرها 9 ريالات ومعادلته

($9 = 3X_1+2X_2$) يتوازى مع مستقيم معادلة القيد ($24 = 6X_1+4X_2$). ومع رفع مستقيم الأرباح الأخضر نحوالأعلى سينطبق على المستقيم الأزرق مستقيم القيد لأن للمستقيمن نفس الميل (أو نفس زاوية الميل) وبالنتيجة أي نقطة على المستقيم الأزرق بين النقطة (0، 6) و النقطة (3، 1.5) التي هي تقاطع المستقيم الأزرق مع الأحمر هي نقطة حل أمثل أي لدينا حلول مثلى كثيرة كل منها يعطينا تركيب مختلف لعدد الطاولات والكراسي. وهذا يعطي مرونة كبير للإدارة لاختيار المزيج الأفضل من الطاولات والكراسي.

ثالثا : حل نموذج البرمجة الخطية باستخدام " الطريقة المبسطة " السمبلكس Simplex Method

هي إجراء جبري يعتمد على جبر المصفوفات وهي أسلوب رياضي معقد مقارنة بالطريقة البيانية وكان G.B-Dauntzig من الأوائل الذين اهتموا بهذا الجانب وتطويره لحل المشاكل التي تواجه الإدارة، والنقطة الجوهرية في هذا الأسلوب هو قدرته لحل المشاكل بشكل دقيق من جانب وعلى التعامل مع أكثر من متغيرين من جانب آخر. وتنطوي دالة الهدف في هذا الأسلوب شأنه كبقية أساليب البرمجة الخطية إما على تعظيم الدالة (تعظيم الربح) أو تقليل الدالة (تخفيض التكاليف).

1 آلية العمل في طريقة السمبلكس في حالة تعظيم العوائد

❖ **إجراءات الحل بالطريقة المبسطة في حالة (تعظيم الربح)**

يتم إيجاد الحل لنماذج البرمجة الخطية (LP) بموجب طريقة Simplex وفقا إلى ثلاث مراحل أساسية ومتسلسلة، ويمكن وصفها على النحو الآتي:

- المرحلة الأولى وذلك بإيجاد الحل الأساسي الممكن (الحل الأولي) (Feasible solution).
- المرحلة الثانية وذلك بتحسين الحل الأولي للحصول على الحل الأفضل (Best solution).
- المرحلة الثالثة وذلك بتحسين الحل الأفضل للحصول على الحل الأمثل (Optimal solution).

وقد يتم ذلك بخطوة واحدة أو عدة خطوات وكما يلي:

❖ **خطوات الحل بالطريقة المبسطة في حالة تعظيم الربح والقيود فقط من نوع أصغر من أو يساوي.**

- تحويل نموذج البرمجة الخطية من الصيغة العامة أو القانونية (canonical form) إلى الصيغة القياسية (Standard form) وذلك:
- بإضافة متغير راكد (مهمل)(slack variable) إلى دالة الهدف (Z) ومن ثم تحويل دالة الهدف (Z) إلى معادلة صفرية عن طريق تحويل القيم إلى الجانب الأيسر وجعلها تساوي صفر.
- بإضافة متغير راكد إلى قيود المشكلة (**لا بد أن تكون من نوع أصغر من أو يساوي**) إلى الطرف الأقل من المعادلة وهو الطرف الأيسر.

❖ تحديد عدم السلبية أي أن كافة قيم المتغيرات في المشكلة تكون موجبة أو مساوية للصفر أي أن) $0\leq$ xj , si) حيث j عدد المتغيرات و i عدد القيود.

- تنظيم جدول الحل الأساسي الممكن (Feasible solution) أو الابتدائي بالاعتماد على جميع معاملات المتغيرات s_i , xj في قيود النموذج و دالة الهدف.
- تحديد المتغير الداخل (Entering variable) وعلى أساس أكبر قيمة بإشارة سالبة في صف دالة الهدف (Z).

❖ العمود الذي يوجد فيه المتغير الداخل يسمى بالعمود المحوري (Pivot column).

❖ تحديد المتغير الخارج (Leaving variable) عن طريق قسمة القيم الموجودة في الجهة اليمنى في عمود (Right hand side RHS) على ما يقابلها من قيم المعاملات في العمود المحوري (Pivot col.)، والمتغير الذي يقابل أقل قيمة موجبة (وتهمل القيم غير المعرفة والسالبة) من خوارج القسمة يعد هو المتغير الخارج، ليحل المتغير الداخل محله في الجدول لاحقا.

❖ الصف الذي يوجد فيه المتغير الخارج يسمى بالصف المحوري (Pivot row). أما العنصر الذي يقع تحت المتغير الداخل، وأمام المتغير الخارج فيسمى بالعنصر المحوري (Pivot element) أو نقطة الارتكاز وهو العنصر الناتج من نقاطع عمود المتغير الداخل مع صف المتغير الخارج.

❖ يمكن الحصول على المعادلة المحورية أو الممهدة (Pivot equation) من خلال قسمة القيم في صف المتغير الخارج على العنصر المحوري (Pivot element) وهي تمثل قيم المتغير الداخل الجديدة.

❖ **لغرض تحسين الحل الممكن أي بناء جدول آخر**

a) يتم وضع المعادلة المحورية أو الممهدة في الجدول الجديد للحل في الموقع نفسه حيث يخرج منه المتغير الخارج ليحل محله المتغير الداخل.

❖ يتم إيجاد معاملات دالة الهدف الجديدة (New z) وكالآتي:

معاملات (z) الجديدة = معاملات (z) القديمة   معامل المتغير الداخل في صف دالة الهدف   المعادلة المحورية

بمعنى ضرب العنصر المقابل لدالة الهدف في عمود المحور (تحت العنصر الداخل) في المعادلة المحورية وطرح النتيجة مع قيم دالة الهدف في الجدول القديم لتوضع في الجدول الجديد.

c) يتم إيجاد معاملات القيود الجديدة للمتغيرات si وكالآتي:

معاملات (si) الجديدة = معاملات (s_i) القديمة - معامل المتغير الداخل في صف s_i X المعادلة المحورية

بمعنى أخذ المعامل تحت المتغير الداخل للقيد بعكس إشارته وضربه بالمعادلة الممهدة ومن ثم جمعه مع القيم العائدة له في الجدول وتوضح في الجدول الجديد.

وهكذا مع بقية القيود الأخرى.

❖ يتم الوصول للحل الأمثل Optimal solution عندما تكون جميع معاملات دالة الهدف الجديدة في جدول الحل أكبر أو تساوي صفر. أما إذا كانت قيمة واحدة على الأقل في دالة الهدف سالبة فهذا يعني عدم التوصل إلى الحل الأمثل.

❖ يعاد إجراء الخطوات السابقة نفسها بدءا من تحديد العنصر الداخل والخارج والمعادلة المحورية حتى تصبح جميع معاملات دالة الهدف أكبر أو تساوي صفر.

شكل جدول الحل

Var. Non-Basic . var. Basic	Z	متغيرات غير أساسية					الثوابت R.H.S	
		X_1	X_2	S_1	S_2	S_3		
Z								
S_1								
S_2								
S_3								

مثال:

مشكله تعظيم Max: $Z=30X_1+18X_2$

S.t.

$X_1 + 2X_2 \leq 200$ (1)

$3X_1 + 2X_2 \leq 300$ (2)

$X_1 \leq 150$ (3)

شرط عدم السلبية $X_1, X_2 \geq 0$

الحل:

الخطوة (1) نحول قيود المشكلة من الصيغة العامة إلى الصيغة القياسية، ولان القيود جميعها من نوع أصغر من أو يساوي، لذا فان عملية التحويل تتطلب إضافة متغير راكد (مهمل slack) والذي سيرمز له بـ (Si) وكما يأتي:

$X_1 + 2X_2 + S_1 = 200$ (1)

$3X_1 + 2X_2 + S_2 = 300$ (2)

$X_1 + S_3 = 150$ (3)

شرط عدم السلبية $X_1, X_2, S_1, S_2, S_3 \geq 0$

الخطوة (2) تضاف المتغيرات الراكدة (المهملة) إلى معادلة دالة الهدف بمعاملات صفرية وكما يأتي:

$$\text{Max: } Z=30X_1+18X_2+0S_1+0S_2+0S_3$$

الخطوة (3) نحول دالة الهدف إلى دالة صفرية عن طريق نقل كافة المتغيرات من الطرف الأيمن إلى الطرف الأيسر من المعادلة، لتصبح كما يأتي:

$$Max: Z-30X_1-18X_2-0S_1-0S_2-0S_3=0$$

لخطوة (4) نقوم بإعداد جدول الحل الابتدائي والذي سيضم المتغيرات الأساسية وغير الأساسية في معادلة دالة الهدف.

- ملاحظات عن إعداد الجدول:

- المتغير الأساسي هو المتغير الذي يكون معامله صفر في معادلة دالة الهدف أي (S_1,S_2,S_3)
- إن وضع Z في عمود المتغيرات الأساسية لا يعني أنها متغير أساسي انها فقط تساعد في تحديد المتغير الداخل ولتحديد ما إذا كنا قد وصلنا للحل الأمثل.
- ان القيم الموجودة في جدول الحل الابتدائي تمثل معاملات المتغيرات في معادلة دالة الهدف والقيود.
- القيم التي تقابل المتغير S_1 هي معاملات المتغيرات في القيد (1). أما القيم التي تقابل المتغير S_2 هي معاملات المتغيرات في القيد (2). والقيم التي تقابل المتغير S_3 هي معاملات المتغيرات في القيد (3).

إعداد جدول الحل الابتدائي

	الثوابت R.H.S	متغيرات غير أساسية					Z	Basic Var
		S_3	S_2	S_1	X_2	X_1		
	0	0	0	0	-18	30-	1	Z
	200	0	0	1	2	1	0	S_1
	300	0	1	0	2	3	0	S_2
	150	1	0	0	0	1	0	S_3

الخطوة (5)

اختيار المتغير الداخل وهو المتغير الذي يمثل أكبر قيمة بإشارة سالبة في صف Z ومن الجدول أعلاه يكون X1 هو المتغير الداخل لان قيمته (30-) ويطلق على العمود الذي يضم المتغير الداخل (عمود المحور .(Pivot column

اختيار المتغير الخارج وهو المتغير الذي يمثل اقل قيمة موجبة من حاصل قسمة قيم R.H.S على قيم عمود المحور، وتهمل اية قيمة سالبة أو صفرية أو غير محددة (∞).ويطلق على الصف الذي يضم المتغير الخارج (صف المحور Pivot row). أما حاصل قسمة قيم R.H.S على قيم عمود المحور فهي كالآتي:

$$200/1=200$$
$$300/3=100$$
$$150/1=150$$

إذن المتغير S_2 هو المتغير الخارج لأنه يمثل اقل قيمة موجبة (100)

المتغير الداخل

العمود المحوري

Non- Basic var. / Basic Var.	Z	متغيرات غير أساسية X1	X2	S1	S2	S3	الثوابت R.H.S	النسبة
Z	1	-30	-18	0	0	0	0	
S1	0	1	2	1	0	0	200	200
S2	0	3	2	0	1	0	300	100
S3	0	1	0	0	0	1	150	150

أقل قيمة موجبة

الصف المحوري

المتغير الخارج

إيجاد القيم الجديدة لمعاملات المتغيرات

- إيجاد قيم المتغير الداخل X_1 وذلك عن طريق قسمة كل قيمة في صف المحور على العنصر المحوري.
- العنصر المحوري (Pivot variable) هو نقطة تقاطع عمود المحور مع صف المحور، وهو (3).
- إذن قيم المتغير الداخل X_1 هي:

$$X_1= (0/3,\ 3/3,\ 2/3,\ 0/3,1/3,\ 0/3,\ 300/3)$$
$$X_1= (0,\ 1,\ 2/3,\ 0\ ,1/3,\ 0,\ 100)$$

تكتب القيم الجديدة أعلاه في جدول الحل الجديد

إيجاد قيم بقية المتغيرات في الجدول

لإيجاد قيمة Z الجديدة، نضرب القيمة المقابلة لـ Z في عمود المحور وهي(30-)) × قيم المتغير الداخل الجديدة وكما يأتي:

$$-30 * (0,\ 1,\ 2/3,\ 0,\ 1/3,\ 0,\ 100)$$
$$= (0,\ -30,\ -20,\ 0,\ -10,\ 0,\ -3000)$$

ثم نطرح القيم أعلاه من قيم معاملات Z القديمة في جدول الحل الابتدائي وكما يأتي:

(1, -30, -18, 0, 0, 0, 0)

-

(0, -30, -20, 0, -10, 0, -3000)

(1, 0, 2, 0, 10, 0, 3000)

ثم ننقل القيم إلى جدول الحل الثاني.

إيجاد قيم معاملات المتغيرات الجديدة

لإيجاد قيمة S1 الجديدة نقوم بنفس الخطوات أعلاه أي ضرب العنصر المقابل للمتغير S1 في عمود المحور × قيم المتغير الداخل الجديدة وكما يأتي:

1 * (0, 1, 2/3, 0, 1/3, 0, 100)

1, 2/3, 0, 1/3, 0, 100),(0 =

ثم نطرح الناتج من قيم المتغير S1 القديمة:

(0, 1, 2, 1, 0, 0, 200)

-

(0, 1, 2/3, 0, 1/3, 0, 100)

(0, 0, 4/3, 1, -1/3, 0, 100)

ثم ننقل القيم إلى جدول الحل الثاني.

إيجاد قيم المتغيرات الجديدة

بنفس الطريقة نجد قيم S3

100), 0 , 1/3 , 0 , 2/3 , 1 ,(0 *1

100), 0 , 1/3 , 0 , 2/3 , 1 ,= (0

نطرح القيم أعلاه من قيم المتغير القديمة:

150), 1 , 0 , 0 , 0 , 1 ,(0

-

100), 0 , 1/3 , 0 , 2/3 , 1 ,(0

50), 1 , -1/3 , 0 , -2/3 , 0 ,(0

ثم نضيف القيم أعلاه إلى جدول الحل الثاني

جدول الحل الثاني

B.V.	Z	X1	X2	S1	S2	S3	R.H.S.
Z	1	0	2	0	10	0	3000
S1	0	0	4/3	1	-1/3	0	100
X1	0	1	2/3	0	1/3	0	100
S3	0	0	-2/3	0	-1/3	1	50

بعد استكمال الجدول يتم التأكد من إذا ما كان الجدول يمثل جدول الحل الأمثل وذلك من خلال ملاحظة القيم في صف Z، ولان دالة الهدف من نوع تعظيم، نصل للحل الأمثل عندما تكون جميع القيم في صف Z موجبة أو صفرية.

لذا الجدول الثاني يمثل جدول الحل الأمثل لان جميع القيم في صف Z موجبة أو صفرية.

هذا يعني أن الحل الأمثل هو في إنتاج 100 وحدة من النوع الأول ($X_1=100$) لنتمكن من تحقيق ربح مقداره 3000 ($Z=3000$).

مثال 1

$$\text{Max: } Z=5X_1+6X_2$$

S.t.

$2X1 + 3X2 \leq 30$ (1)

$5X1+ 4X2 \leq 60$ (2)

$X1 , X2 \geq 0$

المطلوب : أوجد الحل الأمثل باستخدام السمبلكس ؟

مثال 2

$$\text{Max : } Z=30X1 +40X2$$

S.t.

$X1 + 2X2 \leq 100$ (1)

$2X1+ X2 \leq 140$ (2)

$2x1+2x2 \leq 150$

$X1 , X2 \geq 0$

المطلوب : أوجد الحل الأمثل باستخدام السمبلكس ؟

2 آلية العمل في طريقة السمبلكس في حالة ضغط التكاليف Big-M Method

تستخدم هذه الطريقة في حالة التقليل عندما تكون القيود" أكبر من أو تساوي "وفي حالة التعظيم ذات القيود المختلطة.

تنطوي فكرة هذه الطريقة عند تحويل النموذج إلى الصيغة القياسية على:

1 طرح متغير راكد (S_i) وإضافة متغير اصطناعي (Artificial Variable) إلى القيود التي تحمل إشارة" أكبر من أو تساوي "وإضافة متغير اصطناعي للقيود التي تحمل إشارة (=)، وأما القيود التي تحمل إشارة" أصغر من أو تساوي "فيضاف لها فقط متغيرات راكدة (S_i).

– وكذلك إضافة المتغيرات الراكدة إلى معادلة دالة الهدف بمعاملات صفرية، و (+M) للمتغيرات الاصطناعية في حالة التقليل و(-M) في حالة التعظيم.

مثال تطبيقي :

حل مشكلة البرمجة الخطية التالية بطريقة Big-M

$Min.Z=2X_1+X_2$
S.T:
$X_1+3X_2\geq 30$------(1)
$4X_1+2X_2\geq 40$------(2)
$X_1, X_2\geq 0$

✓ **الخطوة (1):**

– نحول القيود من الصيغة العامة (Canonical Form) إلى الصيغة القياسية (Standard Form).

– لان جميع القيود من نوع اكبر من أو =، لذا فان عملية التحويل تتطلب طرح متغير راكد (Si) وإضافة متغير اصطناعي (Artificial Variable) ويرمز له (Ai)، وكما يأتي:

$X_1+3X_2-S_1+A_1=30$
$4X_1+2X_2-S_2+A_2=40$
$X_1, X_2, S_1, S_2, A_1, A_2 \geq 0$

✓ **الخطوة (2)**

- معالجة قيد دالة الهدف

– تتم إضافة المتغيرات الراكدة إلى معادلة دالة الهدف، بمعاملات صفرية و(+M) للمتغيرات الاصطناعية في حالة التقليل و(-M) في حالة التعظيم. وكما يأتي:

$$Min.\ Z=2X_1+X_2-0S_1-0S_2+MA_1+MA_2$$

✓ **الخطوة (3):**

يتم تحويل معادلة دالة الهدف إلى معادلة صفرية، وكما يأتي:

$$Z-2X_1-X_2+0S_1+0S_2-MA_1-MA_2=0$$

✓ **الخطوة (4)**

إضافة القيود التي تحتوي متغيرات إضافية إلى معادلة دالة الهدف

– لغرض إعداد جدول الحل الابتدائي يجب إظهار جميع المتغيرات الإضافية التي تمت إضافتها إلى معادلة دالة الهدف كمتغيرات أساسية، ولان معاملاتها ليست صفر ينبغي تحويل معاملاتها إلى (صفر) عن طريق إضافة القيود التي تحتوي متغيرات إضافية إلى معادلة دالة الهدف بعد ضربها × $+M$ لمشكلات التقليل و$-M$ لمشكلات التعظيم.

$$+M \times \{X_1+3X_2-S_1+A_1=30\} \rightarrow MX_1+3MX_2-MS_1+MA_1=30M$$
$$+M \times \{4X_1+2X_2-S_2+A_2=40\} \rightarrow 4MX_1+2MX_2-MS_2+MA_2=40M$$

إضافة القيود أعلاه إلى معادلة دالة الهدف

$$Z \quad -2X_1 \quad -X_2 \quad +0S_1+0S_2-MA_1-MA_2 \quad =0$$
$$MX_1+3MX_2 \quad -MS_1 \quad +MA_1 \quad =30M$$
$$4MX_1+2MX_2 \quad -MS_2 \quad +MA_2 \quad =40M$$
$$Z+(-2+5M)\,X_1+(-1+5M)\,X_2-MS_1-MS_2+0A_1+0A_2=70M$$

الخطوة (5) يتم إعداد جدول الحل الابتدائي، كما في العرض التالي:

B.V	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	A_1	A_2	R.H.S
Z	1	- 2+5M	-1+5M	-M	-M	0	0	70M
A_1	0	1	3	-1	0	1	0	30
A_2	0	4	2	0	-1	0	1	40

اختيار المتغير الداخل وهو المتغير الذي يمثل أكبر قيمة بإشارة موجبة في صف Z ومن الجدول أعلاه يكون X_2 هو المتغير الداخل لان قيمته ($-1+5M$) ويطلق على العمود الذي يضم المتغير الداخل (عمود المحور).

- إيجاد قيم المتغير الداخل X_2 وذلك عن طريق قسمة كل قيمة في صف المحور على العنصر المحوري.
- العنصر المحوري (Pivot variable) هو نقطة تقاطع عمود المحور مع صف المحور، وهو (3).
- إذن قيم المتغير الداخل X_2 هي:

$$X_2=(0/3,\ 1/3,3/3,\ -1/3,0/3,1/3,\ 0/3,\ 30/3)$$
$$X_2=(0\ ,1/3,\ 1,\ -1/3\ ,0,\ 1/3,\ 0,\ 10)$$

لإيجاد قيمة Z الجديدة، نطرح حاصل ضرب القيمة المقابلة لـ Z في عمود المحور وهي $(-1+5M)$ × قيم المتغير الداخل الجديدة (المعادلة المحورية) من قيم Z في جدول الحل الأولي وكما يأتي:

تكتب القيم الجديدة أعلاه في جدول الحل الجديد وكما يأتي:

NEW(Z)= (1, -2+5M, -1+5M, -M, -M, 0, 0, 70M) -
(-1+5M) x (0,1/3,1, -1/3,0,1/3,0,10)
= (1, -5/3+10/3M, 0, -1/3+2/3M, -M, 1/3-5/3M, 0, 10+20M)
NEW(A2) = (0, 4, 2, 0, -1, 0,1, 40) -2x (0,1/3, 1, -1/3, 0, 1/3 ,0, 10) = (0, 10/3, 0, 2/3, -1, -2/3, 1, 20)

نقوم بوضع النتائج في جدول الحل ثاني، كالآتي:

جدول الحل الثاني

B.V	Z	X1	X2	S1	S2	A1	A2	R.H.S
Z	**1**	**-5/3+10/3M**	**0**	**-1/3+2/3M**	**-M**	**1/3-5/3M**	**0**	**10+20M**
X2	0	1/3	1	-1/3	0	1/3	0	10
A2	0	10/3	0	2/3	-1	-2/3	1	20

- المتغير الداخل هو، (X_1) لكونه يقابل أكبر قيمة موجبة (-5/3+10/3M) في صف دالة الهدف Z
- المتغير الخارج هو (A_2) لكونه يقابل اقل قيمة موجبة في الصف المحوري
- العنصر المحوري هو 3/10
- عليه تكون المعادلة المحورية، على النحو التالي:

Pivot Equation X1=0, 1, 0, 1/5, -3/10, -1/5, 3/10, 6

- نقوم بإيجاد قيمة (z) و (X_2) الجديدتين، كالآتي:

New (Z)= (1, -5/3+10/3M, 0, -1/3+2/3M, -M, 1/3-5/3M,0,10+20M) -
(-5/3+10/3M) x (0, 1, 0, 1/5, -3/10, -1/5, 3/10, 6)
= (1,0, 0, 0, -1/2, -M, ½ -M, 20)
New(X_2) = (0, 1/3, 1, -1/3, 0, 1/3, 0, 10)-1/3x (0, 1, 0, 1/5, -3/10, -1/5, 3/10, 6)
= (0, 0, 1, -2/5, 1/10, 2/5, -1/10, 8)

جدول الحل النهائي

B.V	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	A_1	A_2	R.H.S
Z	1	0	0	0	-1/2	-M	1/2-M	20
X_2	0	0	1	- 2/5	1/10	2/5	-1/10	8
X_1	0	1	0	1/5	-3/10	-1/5	3/10	6

وبما أن جميع معاملات دالة الهدف (z) اقل أو تساوي الصفر، عليه فان الحل الأمثل للمشكلة، يكون:

$X_1= 6, X_2=8, max. Z =20$.

رابعا: الحالات الخاصة في حالة الطريقة السمبلكس:

1 تعددية الحلول المثلى Alternate Optimal Solutions

وتحدث عندما يكون بالإمكان تكوين أكثر من حل أساسي ويعطي نفس قيمة الحل الأمثل، ويمكن تحديدها عندما تكون قيمة أحد المتغيرات الغير أساسية في جدول الحل الأمثل في صف Z = صفر.

مثال:

$$Max.\ Z=8X_1+4X_2$$

S.T:

$$4X_1+2X_2\leq 8\text{-----}(1)$$

$$2X_1+2X_2\leq 6\text{-----}(2)$$

$$X_1, X_2\geq 0$$

الحل:

- تحويل القيود

$$4X_1+2X_2+S_1=8$$

$$2X_1+2X_2+S_2=6$$

$$X_1, X_2, S_1, S_2\geq 0$$

- إضافة المتغيرات إلى معادلة دالة الهدف

$$Max.\ Z=8X_1+4X_2+0S_1+0S_2$$

- تحويل معادلة دالة الهدف إلى معادلة صفرية

$$Z-8X_1-6X_2-0S_1-0S_2=0$$

إعداد جدول الحل الابتدائي

B.V	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	R.H.S.
Z	1	-8	-6	0	0	0
S_1	0	4	2	1	0	8
S_2	0	2	2	0	1	6

إيجاد الحلول

- تحديد المتغيرين الداخل والخارج
- المتغير الداخل هو(X1) لأنه يمثل أكبر قيمة بإشارة سالبة
- المتغير الخارج هو (S1) لأنه يمثل اقل قيمة موجبة في صف Z.
- إيجاد قيمة المتغير الداخل

$$\mathbf{X1= (0/4, 4/4, 2/4, 1/4, ، 0/4, ، 8/4)}$$
$$\mathbf{= (0, 1, ½, ¼, 0, 2)}$$

إعداد جدول الحل الثاني

B.V	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	R.H.S.
Z	1	0	0	2	0	16
X_1	0	1	1/2	1/4	0	2
S_2	0	0	1	-1/2	1	2

الحل الأمثل

- الجدول السابق يمثل جدول الحل الأمثل، لان جميع القيم في صف Zموجبة أو صفرية.
- **الحل الأمثل** $X_1=2$, $X_2=0$, $Z=16$
- لكن هذا الجدول يشير إلى حالة خاصة من حالات السمبلكس وهي تعددية الحلول المثلى. حيث يمكن تكوين حل أمثل آخر عن طريق إدخال X_2 كمتغير أساس (داخل) من جدول الحل الأساسي لان معامله صفر في صف Z في جدول الحل النهائي ونحصل على حل آخر هو:

$$X_1=1, X_2=2, Z=16$$

2 حالة الانحلال (دوران الحل) Degeneracy

تحدث عندما تكون قيمة واحد أو أكثر من متغيرات الحل الأساسي =صفر ويستدل عليها بطريقة السمبلكس عندما يتساوى ناتج قسمة (R.H.S.) على قيم عمود المحور لأكثر من متغير.

مثال:

Max. Z= 5X1+9X2
S.T:
X1+2X2≤4
X1+X2≤2
X1, X2 ≥ 0

الحل:

تحويل القيود من الصيغة العامة إلى الصيغة القياسية

X1+2X2+S1=4
X1+X2+S2=2
X1, X2, S1, S2≥0

تتمة الحل

- إضافة المتغيرات إلى معادلة دالة الهدف:

$$Max.\ Z = 5X_1+9X_2+0S_1+0S_2$$

- تحويل دالة الهدف إلى دالة صفرية:

$$Z-5X_1-9X_2-0S_1-0S_2=0$$

إعداد جدول الحل الابتدائي:

جدول الحل الابتدائي

B.V.	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	R.H.S
Z	1	-5	-9	0	0	0
S_1	0	1	2	1	0	4
S_2	0	1	1	0	1	2

إيجاد قيمة المتغير الداخل والخارج

- المتغير الداخل هو(X_2) لأنه يمثل أكبر قيمة بإشارة سالبة
- لاختيار المتغير الخارج نجد بان حاصل قسمة .R.H.S على قيم عمود المحور متساو لكل من المتغيرين الأساسيين S_1,S_2.
- الحالة أعلاه حالة خاصة من حالات السمبلكس وهي حالة الانحلال.

3 الحلول غير المحدودة Unboundedness

- تحدث عندما يكون حاصل قسمة .R.H.S على قيم عمود المحور سالبة أو صفرية أو غير محددة حيث يتعذر الوصول للحل الأمثل.

- **مثال:**

$$\text{Max. } Z= 4X_1+2X_2$$
S.T.:
$3X_1-3X_2\leq 60$---------(1)
$2X_1-2X_2\leq 20$---------(2)
$X_1, X_2\geq$

الحل:

- **تحويل القيود**

$3X_1-3X_2+S_1=60$
$2X_1-2X_2+S_2=20$
$X_1, X_2, S_1, S_2\geq 0$

- **إضافة المتغيرات إلى معادلة دالة الهدف:**

$Z=4X_1+2X_2+0S_1+0S_2$

- **تحويل المعادلة إلى معادلة صفرية**

$Z-4X_1-2X_2-0S_1-0S_2=0$

إعداد جدول الحل الابتدائي

B.V	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	R.H.S
Z	1	-4	-2	0	0	0
S_1	0	3	-3	1	0	60
S_2	0	2	-2	0	1	20

- اختيار المتغير الداخل والمتغير الخارج
- المتغير الداخل هو X_1 لأنه يمثل أكبر قيمة بإشارة سالبة
- المتغير الخارج هو S_2 لأنه يمثل اقل قيمة موجبة من حاصل قسمة .R.H.S على قيم عمود المحور.
- إيجاد قيمة المتغير الداخل X_1

$X_1=0/2$ 2/2 -2/2 0/2 ½ 20/2
0 1 -1 0 ½ 10

- اختيار المتغير الداخل والمتغير الخارج
- المتغير الداخل هو X_1 لأنه يمثل أكبر قيمة بإشارة سالبة
- المتغير الخارج هو S_2 لأنه يمثل اقل قيمة موجبة من حاصل قسمة .R.H.S على قيم عمود المحور.
- إيجاد قيمة المتغير الداخل X_1

X_1=0/2   2/2   -2/2   0/2   ½   20/2
0   1   -1   0   ½   10

إعداد جدول الحل الثاني

B.V	Z	X_1	X2	S1	S_2	R.H.S
Z	1	0	-6	0	2	40
S_1	0	0	0	1	-3/2	30
X_1	0	1	-1	0	1/2	10

الحل الأمثل

- لم نصل للحل الأمثل بعد لأنه لا تزال هناك قيم سالبة في صف Z.
- لذا نكمل الحل باختيار متغير داخل جديد وهو X2 لأنه يمثل أكبر قيمة بإشارة سالبة.
- أما المتغير الخارج فصعب تحديده لعدم وجود قيم موجبة من حاصل قسمة .R.H.Sعلى قيم عمود المحور.
- إذن هذه حالة خاصة من حالات السمبلكس وهي (حلول غير محدودة)

4 عدم وجود حلول ممكنة Infeasibility

- و يحدث عند بقاء احد المتغيرات الاصطناعية (A_i) في جدول الحل الامثل، فهذا يعني ان الحل لا يمكن تطبيقه .

مثال تطبيقي :

Min. Z=10X1+15X2
S.T.
X1+X2 ≤ 20 ----   (1)
X1+X2 ≥30 --------(2)
X1, X2≥0

الحل

- تحويل القيود

$X_2+X_2+S_1=20$
$X_1+4X_2-S_2+A_1=30$
$X_1, X_2, S_1, S_2, A_1 \geq 0$

- إضافة المتغيرات إلى معادلة دالة الهدف:

Z=10X1+15X2+0S1-0S2+MA1

- تحويل الدالة إلى دالة صفرية

$$Z-10X1-15X2-0S1+0S2-MA1=0$$

- إضافة القيود التي تحتوي متغير اصطناعي إلى معادلة دالة الهدف بعد ضربها× M

$$Z-10X1 -15X2 - 0S1+0S2 - MA1= 0$$
$$MX1 + MX2 - MS2+ MA1 =30M$$
$$Z+(M-10) X1+ (M-15) X2- 0S1 -MS2+0A1 =30M$$

- إعداد جدول الحل الابتدائي

جدول الحل الابتدائي

B.V	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	A_1	R.H.S.
Z	1	M-10	M -15	0	-M	0	M30
S_1	0	1	1	1	0	0	20
A_1	0	1	1	0	-1	1	30

المتغير الداخل هو X_1 كونه أكبر قيمة موجبة في صف Z، المتغير الخارج هو S_1.

$$X1= 0,1 , 1, 1, 0, 0, 20$$

جدول الحل الثاني

New (Z) =(1, M-10,M-15, 0, -M, 0, 30M) - (M-10)x(0, 1, 1, 1, 0, 0, 20)
= (1, 0, -5, -M+10, -M, 0, 10M+200)

B.V	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	A_1	R.H.S.
Z	1	0	-5	-M+10	-M	0	10M+200
X_1	0	1	1	1	0	0	20
A_1	0	1	1	0	-1	1	30

وبما إن جميع معاملات (Z) اقل أو تساوي صفر فهذا يعني أننا توصلنا إلى الحل الأمثل، ولما كان المتغير الاصطناعي A_1 موجود وهذا لا يجوز ولذا لا يمكن الحل.

خامسا : تطبيقات مقترحة حول البرمجة الخطية

التمرين الأول : تقوم شركه بإنتاج نوعين من الأبواب الحديدية من خلال استخدامها لنوعين من المواد الخامة وهي الألومونيوم والحديد وكان مقدار ربح الوحدة الواحدة من النوع الأول 20ج ، والنوع الثاني 15ج.

	الألومونيوم	الحديد
النوع الأول	2	3
النوع الثاني	4	2

علماً بأن إجمالي الألمونيوم المستخدم في الأسبوع لا يتعدى 100 كلغ ، كما أن إجمالي الحديد الصلب المستخدم في الأسبوع لا يتعدى 80 كلغ وذلك لتعظيم ربح الشركة.

المطلوب :

1. كون النموذج الرياضي للمشكلة
2. أوجد كل من الشكل المصفوفي والقانوني والمعياري لهذا البرنامج؟
3. أوجد قيمية الحل الأمثل باستخدام الطريقة البيانية؟
4. أوجد قيمية الحل الأمثل باستخدام الطريقة المبسطة (السمبلكس)؟

التمرين الثاني:

تقوم مؤسسة بإنتاج نوعين اللعب البلاستيكيةP_1 و P_2، وتستخدم المؤسسة لإنتاج هذين المنتجين مادتين هما: M_1، M_2 ، بالإضافة إلى ذلك يتم استخدامهم عبر آلتين، والجدول التالي يوضح استهلاك المواد و الوقت المستغرق على كل آلة لكل منتوج.

	M_1	M_2	آلة الأولى	آلة الثانية
المنتج P_1	1 كلغ	3 كلغ	2 سا	0 سا
المنتج P_2	1 كلغ	4 كلغ	1 سا	3 سا

المؤسسة لا تتوفر إلا على 300 كلغ من المادة M_1 أما المادة M_2 فإنها تستجيب لأي برنامج إنتاجي. فيما يخص الطاقة القصوى للآلتين فهي على التوالي 500 و 800 ساعة، وحسب الوثائق المبيعات لهذه المؤسسة فإن هذه الأخيرة يجب عليها على الأقل إنتاج 150 وحدة من P_1، أما عن الربح المترتب عن المنتجين فهو على التوالي: 250 و 200 دج.

المطلوب:

1. حدد الكميات الواجب إنتاجها من المنتجين بغرض تحقيق أعظم ربح؟
2. أوجد كل من الشكل المصفوفي والقانوني والمعياري لهذا البرنامج؟
3. أوجد قيمية الحل الأمثل باستخدام الطريقة البيانية؟
4. أوجد قيمية الحل الأمثل باستخدام الطريقة المبسطة (السمبلكس)؟

التمرين الثالث:

مكتب للاستنساخ يود شراء 10 أجهزة استنساخ، و أمامه 3 أنواع من أجهزة الاستنساخ، وعليه ما لا يقل عن جهازين من كل نوعين. يمكن للنوع الأول استنساخ 300 ورقة في الساعة، و يمكن للنوع الثاني استنساخ 350 ورقة، أما النوع الثالث فيمكن له استنساخ 250 ورقة في الساعة. العمر المتوقع للنوع الأول هو 3 سنوات، و للنوع الثاني هو 2 سنوات أما النوع الثالث فعمره هو 4 سنوات، علما أن مجموع أعمار أجهزة الاستنساخ يجب أن لا يقل عن 30 سنة. كلفة شراء الأجهزة الثلاث هي على التوالي: 1.5، 2، 1 مليون دينار، مع العلم أن المكتب بإمكانه بيع الأجهزة بعد سنة من الاستخدام بسعر: 1، 1، 0.5 مليون دينار على التوالي، حيث أن خطة المكتب تقضي استنساخ ما لا يقل عن 3000 ورقة في الساعة الواحدة.

المطلوب:

1. كون النموذج الرياضي للمشكلة و الذي يسمح بتحديد عدد الأجهزة و الذي تقلل تكاليف الشراء ؟
2. أوجد كل من الشكل المصفوفي والقانوني والمعياري لهذا البرنامج؟
3. أوجد قيمية الحل الأمثل باستخدام الطريقة المبسطة (السمبلكس)؟

التمرين الرابع :

يقوم جزار بعمل شطائر اللحم بتكوين من لحم بقري ولحم ماعز. يحتوي لحم البقر على 80% لحم و 20% دهون ويكلف 24 جنيه لكل كيلو في حين أن لحم الماعز على 68% لحم و 32% دهون ويكلف 18 جنيه لكل كيلو. ما هي كمية اللحم من كل نوع يجب أن يستخدمها المحل في كل كيلو من شطائر اللحم إذا علمت أنه يجب تخفيض التكاليف والمحافظة علي نسبة الدهون بحيث لا تزيد عن 25%؟

المطلوب :

1. كون النموذج الرياضي للمشكلة؟
2. أوجد كل من الشكل المصفوفي والقانوني والمعياري لهذا البرنامج؟
3. أوجد قيمية الحل الأمثل باستخدام الطريقة البيانية؟
4. أوجد قيمية الحل الأمثل باستخدام الطريقة المبسطة (السمبلكس)؟

التمرين الخامس : ليكن لدينا البرنامج الخطي التالي :

$$\text{Max } Z = x_1 + 2x_2$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 10$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 15$$

$$x_1 , x_2 \geq 0$$

المطلوب:

1. أوجد قيمية الحل الأمثل باستخدام الطريقة البيانية؟
2. أوجد قيمية الحل الأمثل باستخدام الطريقة المبسطة (السمبلكس)؟

التمرين السادس : ليكن لدينا البرنامج الخطي التالي :

$$\textbf{Max } Z = 30x_1 + 90x_2 + 10x_3$$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 180$$

$$6x_1 + 4x_2 + 4x_3 \leq 300$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

المطلوب:

1. أوجد قيمية الحل الأمثل باستخدام الطريقة المبسطة (السمبلكس)؟

التمرين السابع : ليكن لدينا البرنامج الخطي التالي :

$$\textbf{Min } Z = 5x_1 + 6x_2$$

$$x_1 + x_2 \geq 2$$

$$4x_1 + x_2 \geq 4$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

المطلوب:

1. أوجد قيمية الحل الأمثل باستخدام الطريقة البيانية؟
2. أوجد قيمية الحل الأمثل باستخدام الطريقة المبسطة (السمبلكس)؟

التمرين الثامن : ليكن لدينا البرنامج الخطي التالي :

$$\textbf{Min } Z = x_1 - 5x_2 + 6x_3$$

$$2x_1 + 3\,4_3 \geq 50$$

$$x_1 + 2x_2 \geq 30$$

$$x_3 \geq 10$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

المطلوب: أوجد قيمية الحل الأمثل باستخدام الطريقة المبسطة (السمبلكس)؟

الفصل الرابع :

النموذج المقابل

وتحليل الحساسية

الفصل الرابع : النموذج المقابل وتحليل الحساسية

مقدمة:

يعتبر النموذج الثنائي(المرافق) نقلة نوعية في تطور بحوث العمليات لما له من أهمية سواء على الصعيد النظري أو التطبيقي ،تقوم فكرته على أساس أن لكل مسألة (نموذج) برمجة خطية مسألة ثنائية ترتبط معها، بحيث أن حل أحدهما يمكن من معرفة حل المسألة الأخرى، بمعنى أن حل أحدهما يمكننا من الحصول على حلول لمسألتي برمجة خطية .

هذا ويساعد حل النموذج المرافق في الوصول إلى الحل الأمثل بشكل أسرع وذلك عندما يكون عدد قيود النموذج الأولي أكبر من عدد قيود النموذج المرافق إذ إن حجم العمليات الحسابية في البرمجة الخطية يتوقف على عدد القيود أكثر من اعتماده على عد المتغيرات.

إن لكل نموذج البرمجة الخطية هناك نموذج مقابل (ثنائي بديل) ويسمى بالنموذج المقابل (الثنائي والبديل) ويتضمن النموذج الثنائي نفس البيانات التي يحتويها النموذج الأصلي (الأولي)، حيث لاحظنا في البرمجة الخطية أن حل مشروع مشكلة ما بطريقة السمبلكس , وجد أن هنالك أسلوبا آخر يتم فيه التوصل إلى نفس النتائج ويطلق عليه أسلوب الحل الثنائي (المقابل ,الازدواج) وكل مسألة تحل بطريقة السمبلكس هناك إمكانية حلها بالأسلوب الثنائي وبالعكس .

إن الفائدة المنتظرة من الحل الثنائي هي سهولة إجراء العمليات مقارنة بطريقة السمبلكس فإذا كانت لدينا ثلاث متغيرات أساسية مع وجود عشرة قيود للمشكلة فأن عدد القيود في الأسلوب الثنائي سيكون ثلاثة وهذا سيؤدي إلى الإسراع في الحل وسنصل إلى نفس النتيجة فيما لو استخدمنا طريقة السمبلكس.

أولا : فائدة النموذج الثنائي (المقابل):

من فوائد التي نكتسبها من عملية التحويل من النموذج الأولي (الأصلي) إلى النموذج الثنائي (المقابل) ما يلي:

1- الحصول على نموذج يحتوي على عدد أقل من القيود وبذلك سوف يختصر العمل الحسابي لجداول السمبلكس والوصول إلى الحل الأمثل والحصول على نفس الحل المثالي سواء كان الحل للنموذج الأولي أو الحل للنموذج الثنائي.

2- للتخلص من الإشارة السالبة من الجانب الأيمن (إن وجدت) أي عندما تكون المصادر ذات كميات سالبة وهو أهم ما يمكن الحصول عليه في حالة التحويل إلى النموذج الثنائي.

لغرض التعرف على أبعاد المشكلة الأخرى (المشكلة الثنائية ,البديلة) فإذا كان النموذج الأولي وبصيغة ال Max أي المشكلة بالصيغة الربحية فبإمكاننا التعرف على النموذج الثنائي ويكون بصيغة ال Minوتمثيله للجانب الكلفوي (في نفس المشكلة) , ولنفس المشكلة المعبر عنها أولا بالصيغة الأولية.

ثانيا : أهمية النموذج المقابل :

1- حل مشكلة البرمجة الخطية ومن خلال المشكلة الثنائية (النموذج المقابل) قد يكون أسهل من حلها من خلال المشكلة الأولية (عندما يكون من الممكن اختصار عدد القيود في المشكلة الثنائية).

2- يعيد النموذج الثنائي(المقابل) اثر التغيرات في معاملات دالة الهدف وثوابت الطرف الأيمن ومعرفة المجال الذي تتحقق فيه نتائج الحل الأمثل.

3-يعطي النموذج الثنائي (المقابل) كثيرا من الحقائق الاقتصادية التي تساعد على تفهم أبعاد المشكلة وبخاصة فيما يتعلق بأسعار الظل.

ثالثا : خطوات تحويل النموذج الأولي إلى النموذج المقابل

1- نحدد متغير بديل غير سالب لكل قيد من قيود المشكلة الأولية؛

2- معاملات دالة الهدف في المشكلة الأولية تصبح ثوابت الطرف الأيمن لقيود المسالة الثنائية؛

3- ثوابت الطرف الأيمن في المشكلة الأولية تصبح معاملات دالة الهدف في المشكلة الثنائية؛

4- تعكس اتجاه القيود في المشكلة الثنائية إلى الاتجاه الأخر عندما كانت عليه القيود في المشكلة الأولية , فإذا كانت القيود مثلا من نوع اكبر أو يساوي في المشكلة الأولية فإنها تعكس في المسالة الثنائية إلى اقل أو يساوي والعكس صحيح ؛

5- يعكس اتجاه دالة الهدف فإذا كانت تعظيم Max دالة الهدف في احد النموذجين فيقلب إلى تصغير في النموذج الأخر أو بالعكس.

رابعا : العلاقة بين المشكلة الأولية والمشكلة الثنائية:

1 - الأولية تأخذ (Max) والثنائية تأخذ (Min) وبالعكس

2-حدود القيود في المشكلة الأولية تحول إلى معاملات دالة الهدف والعكس صحيح

3-المتغيرات في المشكلة الأولية Xi يقابلها في المشكلة الثنائية Yi

4-معاملات دالة الهدف تتحول إلى حدود القيود في المشكلة الثنائية

5 –حدود القيود≤ في المشكلة الأولية يقابلها ≥ في المشكلة الثنائية والعكس صحيح

6_معاملات القيود الأفقية تتحول إلى معاملات قيود عمودية

1- إذا كان للمشكلة الأولية حل امثل فالمشكلة الثنائية لها حل امثل أيضا ويساوي حل المشكلة الأولية

2- إذا كان للمشكلة الأولية حلا غير معروف فأن الحل في المشكلة الثنائية أيضا لا يوجد فيها حل

خامسا : صياغة النموذج الثنائي من الشكل النظامي " القانوني " للمسألة الأولية:

يعطى الشكل النظامي للنموذج الرياضي بالشكل التالي:

1 في حالة التعظيم max:

$$\begin{cases} \max \quad z = \sum_{j=1}^{n} C_j X_j \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j \leq b_i \\ Xj \geq 0 \\ i = 1,2, \ldots\ldots m \\ j = 1,2, \ldots\ldots n \end{cases}$$

2 في حالة التخفيض min:

$$\begin{cases} \min \quad z = \sum_{j=1}^{n} C_j X_j \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j \geq b_i \\ Xj \geq 0 \\ I = 1,2, \ldots\ldots m \qquad j=1,2\ldots\ldots n \end{cases}$$

يمكن صياغة النموذج المرافق "الثنائي" انطلاقاً من الشكل النظامي للنموذج الأصلي "الأولي" بشكل مباشر بإتباع الخطوات التالية:

(ملاحظة سيتم شرح هذه الخطوات من خلال المثال التالي وذلك بغية تكوين فهم أفضل لهذه الخطوات)

مثال :

نفترض أنه لدينا النموذج الخطي الرياضي التالي :

$$\begin{cases} Max \quad Z = 10 X_1 + 14 X_2 \\ 6 X_1 + 3 X_2 \leq 25 \\ 2 X_1 + X_2 \leq 20 \\ 4 X_1 + 2 X_2 \leq 30 \end{cases}$$

المطلوب : صياغة النموذج الخطي المر افق (الثنائي) لهذا النموذج .

نلاحظ هنا أن النموذج معطى بالصيغة النظامية لذا يمكننا اشتقاق النموذج المرافق مباشرة بإتباع الخطوات التالية :

1- تغيير نوع دالة الهدف من max إلى min وبالعكس ،في مثالنا تصبح دالة الهدف في النموذج المرافق من نوع min .

2- تغيير جهة المتراجحة، في مثالنا تصبح جهة المتراجحة في النموذج المرافق من الشكل (≥) .

3- كل قيد في النموذج الأصلي (الأولي) يقابله متغير في النموذج المرافق .

أي بمعنى آخر إن عدد قيود النموذج الأصلي(الأولي) يساوي عدد متغيرات النموذج المرافق .

- بالعودة إلى مثالنا السابق نجد أن عدد القيود (m=3) في النموذج الأصلي لذلك فأن عدد متغيرات النموذج المرافق سيكون ثلاث متغيرات :

(y_1 , y_2 , y_3) .

4- كل متغير في النموذج الأصلي يقابله قيد في النموذج المرافق أي بمعنى آخر عدد متغيرات النموذج الأصلي يساوي عدد قيود النموذج المرافق . ففي المثال المعطى عدد متغيرات النموذج الأصلي (n=2) وهما (X_1 , X_2) لذا فإن عدد القيود في النموذج المرافق سيكون قيدين .

5- أمثال أو معاملات متغيرات النموذج الأصلي في دالة الهدف تصبح عمود الثوابت في النموذج المرافق .

- في مثالنا معاملات متغيرات النموذج الأصلي في دالة الهدف هي (10,14) حيث أن :

$$Z= 10 X_1 + 14 X_2$$

وهذه المعاملات سوف تصبح عمود الثوابت في النموذج المرافق أي ستظهر على الشكل التالي :

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \geq 10$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \geq 14$$

6- قيم عمود الثوابت في النموذج الأصلي تصبح معاملات متغيرات النموذج المرافق في دالة الهدف

قيم عمود الثوابت في هذا المثال

25

20

30

تصبح هذه القيم معاملات متغيرات النموذج المرافق (y_i) في دالة الهدف أي : min w

$$= 25 y_1 + 20 y_2 + 30 y_3$$

7- تتحول معاملات المتغير الأصلي في قيود النموذج الأصلي إلى معاملات المتغيرات الثنائية في القيد المقابل له أي بمعنى أن شعاع العمود المؤلف من معاملات المتغير الأصلي (في قيود المسألة الأصلية) يصبح سطر القيد المقابل له .

فلو أخذنا المتغير X_1 من النموذج الأولي لوجدنا أن شعاع معاملاته في

قيود المسألة الأولية هو

$$\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

وهذا الشعاع (العمود) سوف يتحول الى شعاع (سطر) معاملات المتغيرات الثنائية (y i) في القيد الأول المقابل ل X_1 في النموذج المرافق

ونفس الشيء بالنسبة لـ X2 .

$$\begin{cases} 6\,y_1 + 2\,y_2 + 4\,y_3 \geq 10 \\ 3\,y_1 + 1\,y_2 + 2\,y_3 \geq 14 \end{cases}$$

إن تطبيق الخطوات السابقة سوف يقودنا إلى الحصول على النموذج المرافق بكل يسر وسهولة، وهنا الشكل النهائي للنموذج المرافق:

<u>النموذج المرافق</u>

$$\begin{cases} \min w = 25\,y_1 + 20\,y_2 + 30\,y_3 \\ 6\,y_1 + 2\,y_2 + 4\,y_3 \geq 10 \\ 3\,y_1 + y_2 + 2\,y_3 \geq 14 \\ Y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{cases}$$

<u>النموذج الأصلي</u>

$$\begin{cases} \max z = 10\,X_1 + 14\,X_2 \\ 6\,X_1 + 3\,X_2 + \leq 25 \\ 2\,X_1 + X_2 \leq 20 \\ 4\,X_1 + 2\,X_2 \leq 30 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

يمكن التعبير عن الخطوات السابقة رياضياً كما يلي:

<u>النموذج المرافق</u>

$$\begin{cases} \min \quad w = \sum_{j=1}^{m} b_i y_i \quad * \\ \sum_{j=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j \quad \text{بشرط أن} \\ y_i \geq 0 \end{cases}$$

<u>النموذج الأصلي</u>

$$\begin{cases} \max \quad z = \sum_{j=1}^{n} C_j X_j \quad * \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j \leq b_i \quad \text{بشرط أن} \\ X_j \geq 0 \\ I = 1,2, \ldots\ldots m \\ j = 1,2, \ldots\ldots n \end{cases}$$

$$\begin{cases} \max \quad w = \sum_{j=1}^{n} b_i y_i & * \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_i \leq c_j & \text{بشرط أن} \\ y_j \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \min \quad z = \sum_{j=1}^{n} C_j X_j & * \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j \geq b_i & \text{بشرط أن} \\ X_j \geq 0 \\ i = 1,2, \ldots\ldots m \\ j = 1,2, \ldots\ldots n \end{cases}$$

سادسا : صياغة النموذج الثنائي من الشكل النمطي "القياسي" للنموذج الأصلي:

يعتبر النموذج الخطي الرياضي في صيغته النمطية أكثر فائدة من الصيغة النظامية وذلك لأن حل أي نموذج رياضي خطي بطريقة السمبلكس تعتمد أساساً على تحويل النموذج إلى صيغته النمطية (القياسية) كما أن بعض العمليات الحسابية الخاصة بالنموذج الأولي- الثنائي تتطلب أن يكون النموذج الأولي في صيغته النمطية.

- يعطى النموذج النمطي لأي نموذج خطي رياضي:

بالشكل التالي:

$$\begin{cases} (\max \text{ أو } \min) \quad z = \sum_{j=1}^{n} C_j X_j \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j = b_i \\ X_j \geq 0 \end{cases}$$

حيث نلاحظ أن الصيغة النمطية تتطلب أن تكون جميع القيود على شكل معادلات وقيم عمود الثوابت موجبة مع مراعاة شرط عدم السلبية للمتغيرات.

(<u>**ملاحظة:**</u> إن عدد المتغيرات "n" يشمل على المتغيرات العاطلة والزائدة)

- إن عملية صياغة النموذج المرافق انطلاقاً من النمطي للنموذج الأصلي تتطلب اتباع نفس الخطوات "تقريباً" الواردة في الفقرة السابقة مع اختلاف جوهري وحيد وهو أن "جميع المتغيرات في النموذج المرافق لأي نموذج رياضي أولي هي غير محددة "مقيدة" الإشارة ما لم يظهر قيد يثبت عكس ذلك:

ويمكن التعبير رياضياً عن صياغة النموذج المرافق من الشكل النمطي كما يلي:

النموذج المرافق	النموذج الأصلي	
$\begin{cases} \min \quad w = \sum_{j=1}^{n} b_i y_i \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_i \geq c_j \\ Y_i: \text{غير مقيدة بالإشارة} \end{cases}$	$\begin{cases} z = \sum_{j=1}^{n} C_j X_j \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j = b_i \\ Xj \geq 0 \end{cases}$	في حالة max
$\begin{cases} \max \quad w = \sum_{j=1}^{n} b_i y_i \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_i \leq c_j \\ Yi: \text{غير مقيدة بالإشارة} \end{cases}$	$\begin{cases} z = \sum_{j=1}^{n} C_j X_j \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j = b_i \\ Xj \geq 0 \end{cases}$	في حالة min

مثال :

نفترض أنه لدينا النموذج الرياضي التالي :

$$\begin{cases} MAX \quad Z = 5X_1 + 10X_2 + 7X_3 \\ X_1 + 2X_2 + X_3 \leq 3 \\ 2X_1 + X_2 + X_3 = 2 \\ X_1, X_2, X_3 \geq 0 \end{cases}$$

والمطلوب: اشتقاق النموذج المرافق

الحل :

تتطلب عملية اشتقاق النموذج المرافق وضع النموذج المطروح في صيغته النمطية " القياسية " أي تحويل جميع قيوده إلى معادلات مع مراعاة أن تكون قيم عمود الثوابت موجبة.

$$\begin{cases} MAX\ Z = 5X_1 + 10X_2 + 7X_3 + 0X_4 \\ X_1 + 2X_2 + X_3 + X_4 = 3 \\ 2X_1 + X_2 + X_3 = 2 \\ X_1, X_2, X_3, X_4 \geq 0 \end{cases}$$

والآن نوجد النموذج المرافق :

$$\begin{cases} MIN\ w = 3Y_1 + 2Y_2 \\ Y_1 + 2Y_2 \geq 5 \\ 2Y_1 + Y_2 \geq 10 \\ Y_1 + Y_2 \geq 7 \\ Y_1 \geq 0 \\ (Y_2) \text{ غير مقيدة بالإشارة} \end{cases}$$

نلاحظ أن القيد الخامس في النموذج الثنائي قيد اشارة (Y_1)

في المجال الموجب أما (Y_2) فهي غير مقيدة بالإشارة

حالة خاصة :

_ إذا كان أحد المتغيرات في النموذج الأولي غير محدد " مقيد " الإشارة وليكن X مثلاً فإننا نكتبه على شكل فرق بين متغيرين غير سالبين $X=X`- x̋$

ثم نعوض هذه القيمة في كل من دالة الهدف وقيود النموذج الأولي ثم نوجد بعد ذلك النموذج المرافق

مثال :

نفترض النموذج الخطي الرياضي التالي :

$$\begin{cases} Z = 2X_1 + 3X_2 \\ X_1 + 2X_2 \leq 10 \\ -2X_1 + 3X_2 \leq 15 \\ : \ X_1 \quad \text{غير محدد الإشارة} \quad X_2 \geq 0 \end{cases}$$

بما أن X_1 غير محدد الإشارة فإننا نفترض أن ($X_1=X_1`-X_1``$) ثم نقوم بتعويض هذه القيمة في النموذج المعطى كما يلي:

$$\begin{cases} Z = 2X_1` - 2X_1`` + 3X_2 \\ X_1` - X_1`` + 2X_2 \leq 10 \\ -2X_1` + 2X_1`` + 3X_2 \leq 15 \\ X_1`, X_1`` ,X_2 \geq 0 \end{cases}$$

ملاحظات :

1- إذا كان القيد في النموذج الأولي متفقاً مع دالة الهدف فإن المتغير المقابل في النموذج المرافق يحقق شرط عدم السلبية.

2- إذا كان القيد في النموذج الأولي على شكل معادلة فإن المتغير المقابل لهذا القيد في النموذج المرافق غير محدد الإشارة.

3- إذا كان المتغير في النموذج الأولي يحقق شرط عدم السلبية فإن القيد المقابل في النموذج المرافق يتفق مع دالة الهدف.

4- إذا كان المتغير في النموذج الأولي غير محدد الإشارة فإن القيد المقابل في النموذج المرافق يكون على شكل معادلة.

أخيراً، تجدر الإشارة إلى أنه يمكن صياغة النموذج المرافق لأي نموذج أولي مباشرة بعد تحويله إلى الشكل النمطي ،لذلك سوف نعتمد في الفقرات القادمة على تحويل أي نموذج أولي إلى الشكل النمطي ثم صياغة النموذج المرافق منه.

سابعا : علاقات النموذج الأولي - الثنائي :

أولاً- الحل الأمثل :

تساعد عملية حل أحد النموذجين على إيجاد حل النموذج الآخر من خلال جدول الحل الأمثل مباشرة أي بتعبير آخر يمكن إيجاد حل النموذج المرافق انطلاقاً من جدول الحل الأمثل للنموذج الأولي "وبالعكس" دون حل النموذج المرافق .

وتجدر الإشارة إلى أنه يمكن إيجاد حل النموذج المرافق ليس عند الحل الأمثل فقط بل في أي مرحلة من مراحل تحسين "تطوير" حل النموذج الأولي "أو بالعكس " وذلك كما سنرى في فقرات قادمة في هذا المبحث .

مثال

نفترض أنه لدينا النموذج الأولي التالي :

$$\begin{cases} MAX\ Z = 12\ X_1 + 15\ X_2 \\ S.T: \\ 6\ X_1 + 6\ X_2 \leq 36 \\ 4\ X_1 + 2\ X_2 \leq 30 \\ 4\ X_1 + 8\ X_2 \leq 40 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

والمطلوب :

1- اشتقاق النموذج المرافق .

2- إيجاد حل النموذج الأصلي واشتقاق حل النموذج المرافق منه مباشرة.

3- إيجاد حل النموذج المرافق واشتقاق حل النموذج الأصلي.

الحل:

1 **- اشتقاق النموذج المر افق:**

نقوم بتحويل النموذج الأولي إلى الصيغة النمطية ثم نوجد النموذج المرافق:

$$\begin{cases} Max\ Z = 12X_1 + 15X_2 + 0X_3 + 0X_4 + 0X_5 \\ 6X_1 + 6X_2 + X_3 = 36 \\ 4X_1 + 2X_2 + X_4 = 30 \\ 4X_1 + 8X_2 + X_5 = 40 \\ X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 \geq \end{cases}$$

النموذج المرافق:

$$\begin{cases} \text{Min } W = 36Y_1 + 30Y_2 + 40Y_3 \\ 6Y_1 + 4Y_2 + 4Y_3 \geq 12 \\ 6Y_1 + 2Y_2 + 8Y_3 \geq 15 \\ Y_1 \geq 0 \\ Y_2 \geq 0 \\ Y_3 \geq 0 \end{cases}$$

2 - **حل النموذج الأصلي:**

بعد أن حولنا النموذج الأصلي إلى الشكل النمطي نقوم ببناء جدول الحل الأساسي أو الابتدائي (تحسين0)

		X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	
$Z_J - C_J$		-12	-15	0	0	0	**0**
X_3		6	6	1	0	0	**36**
X_4		4	2	0	1	0	**30**
X_5		4	8	0	0	1	**40**

نلاحظ من هذا الجدول أن الحل الأساسي على الشكل التالي:

$Z=0$, $X_3=36$, $X_4=30$, $X_5=40$, $X_1=X_2=0$

وهذا الحل غير أمثل لذلك سوف نقوم بتطوير (تحسين) الحل كما يلي:

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	**B**
$Z_J - C_J$	3	0	0	0	15/8	**75**
X_3	3	0	1	0	-3/4	**6**
X_4	3	0	0	1	-1/4	**20**
X_2	1/2	1	0	0	1/8	**5**

نلاحظ أن الحل غير أمثل أيضاء لذلك نقوم بتطوير الحل مرة أخرى كما يلي:

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	**B**
$Z_J - C_J$	0	0	3/2	0	3/4	**84**
X_1	1	0	1/3	0	-1/4	**2**
X_4	0	0	-1	1	1/2	**14**
X_2	0	1	-1/6	0	1/4	**4**

نلاحظ هنا أننا وصلنا إلى الحل الأمثل حيث أن:

$Z=84, X_1=2$, $X_2=4$, $X_3=X_5=0,$ $X_4=14$

بعد أن أوجدنا الحل الأمثل للنموذج الأولي سنقوم بإيجاد الحل الأمثل للنموذج المرافق انطلاقامن جدول الحل الأمثل للنموذج الأولي وذلك كما يلي:

متغيرات الحل الأساسي هي على الترتيب:

X5 X4 X3

- معاملات هذه المتغيرات في سطر دالة الهدف في جدول الحل الأمثل هي (على نفس الترتيب) :

3/4 0 3/2

بما أن X_3 جاءت في القيد الأول للنموذج الأولي فهي تقابل المتغير Y_1 في النموذج المرافق وبالتالي فإن

$Y_1=3/2$

وكذلك بالنسبة لـ X_4 , X_5 $Y_2=0$ و $Y_3=3/4$

- قيمة دالة الهدف في جدول الحل الأمثل للنموذج الأولي يساوي قيمة دالة الهدف في دالة الهدف للنموذج المرافق أي: $W = 84$ $Z = W$

إذايصبح الحل الأمثل للنموذج المرافق على الشكل التالي:

$$W=84 \quad , Y_1=3/2 \quad ,Y_2=0 \quad , \quad Y_3=3/4$$

هذا ويمكن أن نحصل على هذا الحل مباشرة من جدول الحل الأمثل بتطبيق المعادلات التالية:

(1) (تقرأ من اليسار لليمين)

الجانب الأيمن من نفس القيد	الجانب الأيسر من القيد الثنائي المقابل لذلك المتغير	معامل المتغير الأساسي في سطر z المثلى

(2) قيمة دالة الهدف للمسألة الأولية في الحل الأمثل= قيمة دالة الهدف للمسألة الثنائية في الحل الأمثل

الجدول التالي يوضح كيفية ذلك:

متغيرات الحل الأساسي (تحسين 0)	X_3	X_4	X_5
معاملاتها في Z المثلى	3/2	0	3/4
حاصل طرح الجانب الأيمن من الجانب الأيسر لكل قيد ثنائي مقابل لتلك المتغيرات	y_1-0	y_2-0	y_3-0
قيم المتغيرات الثنائية	$y_1= 3/2 -0$ $y_1=3/2$	$y_2= 0-0$ $y_2=0$	$y_3=3/4 -0$ $y_3=3/4$

أود أن أنوه هنا إلى أن المعادلة الأولى تمكننا من حساب قيم معاملات سطر وذلك بعد حساب قيم المتغيرات الثنائية عند أي تحسين وليس فقط عند الحل الأمثل .

3 - حل النموذج المرافق:

نقوم بتحويل المتراجحات إلى معادلات

$$\begin{cases} W=36y_1+30y_2+40y_3 \\ 12 \geq 6y_1+4y_2+4y_3 \\ 6y_1+2y_2+8y_3 \geq 15 \\ 0 \geq y_3, y_2, y_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} W = 36y_1 + 30y_2 + 40y_3 - 0y_4 - 0y_5 + MR_1 + MR_2 \\ 6Y_1 + 4Y_2 + 4Y_3 - Y_4 + R_1 = 12 \\ 6Y_1 + 2Y_2 + 8Y_3 - Y_5 + R_2 = 15 \end{cases}$$

والآن نقوم ببناء جدول السمبلكس الخاص بالحل كما يلي:

	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	R_1	R_2	B
W	-36+12M	-30+6M	-40 +12M	-M	-M	0	0	**27M**
R_1	6	4	4	-1	0	1	0	**12**
R_2	6	2	8	0	-1	0	1	**15**

جدول رقم (1)

ثم نقوم بتحسين الحل حتى نصل إلى جدول الحل الأمثل

	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	R_1	R_2	B
W	0	-14	0	-2	-6-3/2M	2-M	4-M	**84**
Y_1	1	1	0	-1/3	-1/6	1/3	-1/6	**3/2**
Y_3	0	-1/2	1	1/4	0	-1/4	1/4	**3/4**

جدول رقم (3) جدول الحل الأمثل

نلاحظ من جدول الحل الأمثل أن :

$W=84 \quad Y_1=3/2 \quad Y_2=0 \quad Y_3=3/2$

وهي نفس النتائج التي حصلنا عليها من جدول الحل الأمثل للنموذج الأولي .

أما بالنسبة لإيجاد الحل الأمثل للنموذج الأولي انطلاقاء من جدول الحل الأمثل للنموذج المرافق فإننا نقوم بتطبيق نفس المعادلات التي طبقناها عندما أوجدنا الحل الأمثل للنموذج المرافق انطلاقامن الحل الأمثل للنموذج الأولي مع الانتباه إلى أن النموذج المرافق هنا يصبح هو النموذج الأولي .

ملاحظات على الحل :

1- تبدأ دالة الهدف في النموذج الأولي وهي من نوع MAX بالقيمة $Z=0$ ثم تأخذ بالتحسن (بالازدياد) مع كل مرحلة من مراحل تحسين الحل حتى تأخذ قيمة مثلى (عظمى) عند الوصول إل الحل الأمثل $Z=84$

2- تبدأ دالة الهدف في النموذج المرافق وهي من نوع MIN بالقيمة $W=27M$ ثم تأخذ بالتحسن (بالانخفاض)مع كل مرحلة من مراحل تحسين الحل حتى تأخذ قيمة مثلى (دنيا) عند الوصول إلى الحل الأمثل حيث $W=84$

يقودنا هذا التحليل إلى النتيجتين التاليتين :

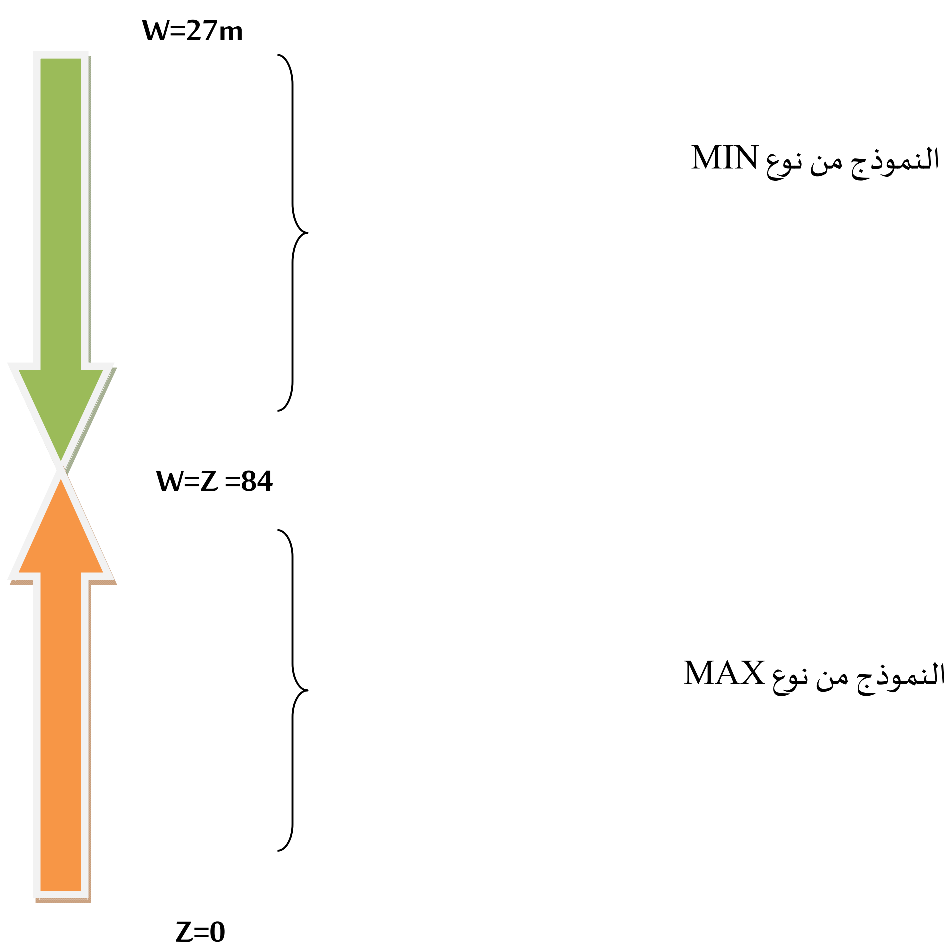
لأي نموذج رياضي ومرافقه :

1- عند أي تحسين ماعدا التحسين النهائي (الحل الأمثل) تكون:

قيمة دالة الهدف في المسألة التي من نوع Max > قيمة دالة الهدف في المسألة التي من نوع Min

2- عند التحسين النهائي(الحل الأمثل) تكون:

قيمة دالة الهدف في المسألة التي من نوع Max= قيمة دالة الهدف في المسألة من نوع Min ويمكن تمثيل ذلك من خلال الشكل التالي :



ثامنا : تحليل الحساسية :

يسعى متخذ القرار عادة إلى التوسع في مجال التحليل قصد الحصول على نتائج مختلفة، فينصب اهتمامه على معرفة الحدود التي يمكن فيها إجراء التغيير في قيمة العوامل المكونة للنموذج الرياضي دون تغيير هدفه.

فمن المعلوم أن الإدارات عموما ترغب دائما في إجراء بعض التغييرات على المعاملات المختلفة لأي مشكلة ما (نموذج البرمجة الخطية)، ويمكن معرفة أثر هذه التغييرات في المعاملات على الحل الأمثل عن طريق حل المسألة مرة أخرى، إلا أن هذا يتطلب إجراء حسابات كثيرة تتناسب طرديا مع عدد القيود والمتغيرات، وتحليل الحساسية هو الاسم المشتق من تحليل تغير الحل الأمثل وفقا لتغير المعاملات المختلفة، سواء كانت هذه المعاملات: مواد أولية، أيدي عاملة، تكاليف، أرباح ... الخ.

يقصد بتحليل الحساسية معرفة مدى تأثر الحل الأمثل بالتغيرات التي قد تطرأ على المعطيات التي تم إعداد البرنامج الخطي على أساسها. وهذه التغيرات يمكن أن تكون:

- على معاملات متغيرات دالة الهدف (C_j)؛
- على قيم الطرف الأيمن للقيود (الموارد المتاحة) (b_j)؛
- على استخدامات الموارد(a_{ij}).

1 حالة تغير المعاملات C_j لمتغيرات القرارx_i:

في هذه الحالة قد تكون متغيرة القرار، إما متغيرة خارج الأساس، أو متغيرة أساس، لذا نميز بين حالتين هنا:

الحالة الأولى : تغير المعامل C_j لمتغيرة القرار x_i خارج الأساس:

مثال:

ليكن نموذج البرمجة الخطية التالي:

$$\text{Max } Z = 100x_1+60x_2+80x_3$$

$$S.c.$$

$$\begin{cases} 6x_1+3x_2+6x_3 \leq 1200 \\ 4x_1+4x_2+6x_3 \leq 1000 \\ 4x_1+12x_2+8x_3 \leq 3800 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

والحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية أعلاه يقدمه الجدول التالي:

	C_j	100	60	80	0	0	0	B	R_i
		x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	rayon	
100	x_1	1	0	1/2	1/3	-1/4	0	150	
60	x_2	0	1	1	-1/3	1/2	0	100	
00	S_3	0	0	-6	8/3	-5	1	2000	
	Z_j	100	60	110	40/3	5	0	Z=21000	
	$C_j - Z_j$	0	0	-30	-40/3	-5	0		

قد يتغير معامل x_3 بمقدار (موجب أو سالب) يساوي ΔC_3 فيصبح C'_3 حيث أن: $C'_3= C_3+ \Delta C_3$ أي: $C'_3= 80+ \Delta C_3$، وبتعويض القيمة الجديدة في جدول الحل الأمثل نحصل على:

	C_j	100	60	80+ ΔC_3	0	0	0	B rayon	R_i
		x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3		
100	x_1	1	0	1/2	1/3	-1/4	0	150	
60	x_2	0	1	1	-1/3	1/2	0	100	
00	S_3	0	0	-6	8/3	-5	1	2000	
	Z_j	100	60	110	40/3	5	0	Z=21000	
	$C_j - Z_j$	0	0	-30+ ΔC_3	-40/3	-5	0		

عند تغير معامل x_3 فإن قيمة $C_j - Z_j$ تتغير فتصبح: $-30+ \Delta C_3$، و يبقى جدول الحل الأمثل إذا تحقق شرط الأمثلية لنموذج التعظيم $C'_3 - Z_3 \leq 0$:

$$C'_3 - Z_3 \leq 0 \quad \Rightarrow \quad -30+ \Delta C_3 \leq 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta C_3 \leq 30$$

أي أن الحل الأمثل الذي يقدمه الجدول يبقى أمثلا مادام مقدار التغير للمتغيرة x_3 أقل أو يساوي 30، أما إذا تعدى هذه القيمة فإن الحل لا يبقى أمثلا.

لدينا: $\Delta C_3 \leq 30$

بإضافة القيمة 80 للطرفين نحصل على:

$$\Delta C_3+80 \leq 30+80$$
$$\Delta C_3+80 \leq 110$$

نعلم أن: $C'_3= 80+ \Delta C_3$ ، و عليه تكون: $C'_3 \leq 110$

أي أن الحل المتوصل إليه يبقى أمثلا ما دام معامل المتغيرة x_3 أقل أو يساوي 110، أما إذا تعدى هذه القيمة فإنه لا يصبح حلا أمثلا.

- ❖ إذا كان مقدار التغير أقل من 30: تصبح في هذه الحالة قيمة $C'_3 - Z_3$ سالبة، ما يحقق معيار الأمثلية، وبالتالي يبقى الحل أمثلا.
- ❖ إذا كان مقدار التغير مساويا تماما لـ 30: تصبح في هذه الحالة قيمة $C'_3 - Z_3$ معدومة، ما يحقق معيار الأمثلية، وبالتالي يبقى الحل أمثلا.
- ❖ إذا كان مقدار التغير أكبر من 30: تصبح في هذه الحالة قيمة $C'_3 - Z_3$ موجبة، وهذا ما لا يحقق شرط الأمثلية، مما يستوجب إنشاء جدول آخر لتحسين الحل مرة أخرى.

الحالة الثانية : تغير المعامل C_j لمتغيرة القرار x_i كمتغيرة أساس:

بأخذ المثال السابق، وبافتراض أن معامل متغيرة الأساس x_1 قد تغير بمقدار (موجب أو سالب) يساوي ΔC_1 فيصبح C'_1 حيث أن: $C'_1= C_1+ \Delta C_1$ أي: $C'_1=100+ \Delta C_1$، وبتعويض القيمة الجديدة في جدول الحل الأمثل نحصل على:

	C_j	$100+\Delta C_1$	60	80	0	0	0	B	
		x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	rayon	R_i
$100+\Delta C_1$	x_1	1	0	1/2	1/3	-1/4	0	150	
60	x_2	0	1	1	-1/3	1/2	0	100	
00	S_3	0	0	-6	8/3	-5	1	2000	
	Z_j	$100+\Delta C_1$	60	$100+1/2\Delta C_1$	$40/3+1/3\Delta C_1$	$5-1/4\Delta C_1$	0	Z=21000	
	$C_j - Z_j$	0	0	$-30-1/2\Delta C_1$	$-40/3-1/3\Delta C_1$	$-5+1/4\Delta C_1$	0		

يبقى الجدول أعلاه جدول الحل الأمثل إذا تحقق شرط الأمثلية $C_j - Z_j \leq 0$ للمتغيرات خارج الأساس، أي:

$$-30-1/2\Delta C_1 \leq 0 \Rightarrow \quad \Delta C_1 \geq -60$$
$$-40/3-1/3\Delta C_1 \leq 0 \Rightarrow \quad \Delta C_1 \geq -40$$
$$-5+1/4\Delta C_1 \leq 0 \Rightarrow \quad \Delta C_1 \leq 20$$

مما سبق نستنتج أن: $(-40\leq \Delta C_1\leq 20)$ أي أن الحل يبقى أمثلا ما دامت قيمة تغير معامل متغيرة الأساس x_1 أقل أو تساوي 20، وأكبر أو تساوي (40-).

لدينا: $-40\leq \Delta C_1\leq 20$

بإضافة القيمة 100 للطرفين نحصل على:

$$100 - 40\leq 100+\Delta C_1\leq 20+100$$

$$60 \leq 100+\Delta C_1 \leq 120$$

نعلم أن: $C'_1 = 100+\Delta C_1$ ، و عليه تكون: $60 \leq C'_1 \leq 120$

أي أن الحل المتوصل إليه يبقى أمثلا ما دام معامل المتغيرة x_1 أقل أو يساوي 120، وأكبر أو يساوي 60، أما إذا تعدى هاتين القيمين فإنه لا يصبح حلا أمثلا.

2 حالة تغير الطرف الأيمن للقيود الوظيفية (المتاح) b_j:

إذا تغير الطرف الأيمن للقيود الوظيفية (المتاح) في جدول الحل الأمثل، فإن ذلك سيؤدي إلى تغير قيم متغيرات الأساس.

مثال: تغير المورد الأول b_1:

بأخذ نفس المثال السابق، وتبعا لقيم عمود المتغيرة S_1 فإنه يمكن تفسير تلك القيم كما يلي:

$\frac{1}{3}$: يمثل مقدار تغير (زيادة) قيمة متغيرة الأساس x_1 عند زيادة المتاح الأول b_1 بوحدة واحدة؛

$\frac{1}{3}$: يمثل مقدار تغير (انخفاض) قيمة متغيرة الأساس x_2 عند زيادة المتاح الأول b_1 بوحدة واحدة؛

$\frac{8}{3}$: يمثل مقدار تغير (زيادة) قيمة متغيرة الأساس S_3 عند زيادة المتاح الأول b_1 بوحدة واحدة.

عند تغير المورد الأول b_1 بمقدار Δb_1 فيصبح $b'_1 = b_1+\Delta b_1$، فإن القيم الجديدة لمتغيرات الأساس تصبح عبارة عن القيم القديمة لمتغيرات الأساس مضافاً إليها مقدار التغير في المتاح مضروبا في مقدار تغير قيمة متغيرة الأساس، فتكون على النحو التالي:

$$x_1 = 150 + \frac{1}{3}\Delta b_1$$

$$x_2 = 100 - \frac{1}{3}\Delta b_1$$

$$S_3 = 2000 + \frac{8}{3}\Delta b_1$$

يبقى الحل أمثلا، إذا كانت القيم الجديدة لمتغيرات الأساس تحقق قيود عدم سلبية المتغيرات، أي:

$$x_1 \geq 0 \;\Rightarrow\; 150 + \frac{1}{3}\Delta b_1 \geq 0 \;\Rightarrow\; \Delta b_1 \geq -450$$

$$x_2 \geq 0 \;\Rightarrow\; 100 - \frac{1}{3}\Delta b_1 \geq 0 \;\Rightarrow\; \Delta b_1 \leq 300$$

$$S_3 \geq 0 \;\Rightarrow\; 2000 + \frac{8}{3}\Delta b_1 \geq 0 \;\Rightarrow\; \Delta b_1 \geq -750$$

$$-450 \leq \Delta b_1 \leq 300$$

وهذا يعني أن الحل المتوصل إليه يبقى حلاً أمثلا ما دام مقدار التغير في المورد الأول أقل أو يساوي 300 و أكبر أو يساوي (450-).

لدينا: $50 \leq \Delta b_1 \leq 300$

بإضافة القيمة 1200 للطرفين نحصل على:

$$1200 - 450 \leq 1200+\Delta b_1 \leq 1200+300$$

$$750 \leq 1200+\Delta b_1 \leq 1500$$

نعلم أن: $b'_1= 1200+ \Delta b_1$ ، و عليه تكون: $750 \leq b'_1 \leq 1500$

أي أن الحل المتوصل إليه يبقى أمثلا ما دام مجال تغير المورد الأول b_1 أقل أو يساوي 1500، و أكبر أو يساوي 750، أما إذا تعدى هاتين القيمين فإنه لا يصبح حلا أمثلا. فمثلا:

- إذا كان مقدار التغير أقل من 300: في هذه الحالة تصبح القيم الجديدة $(150 + \frac{1}{3}\ \Delta b_1)$ أكبر تماما من الصفر، أي أنها تحقق شرط عدم سلبية المتغيرات، و تتغير تبعا لذلك قيمة دالة الهدف.
- إذا كان مقدار التغير مساويا لـ 300: في هذه الحالة تصبح القيمة الجديدة لإحدى متغيرات الأساس مساوية للصفر، أي أنها تحقق شرط عدم سلبية المتغيرات، و تتغير تبعا لذلك قيمة دالة الهدف.
- إذا كان مقدار التغير أكبر من 300: في هذه الحالة تصبح القيمة الجديدة لإحدى متغيرات الأساس أقل تماما من الصفر، أي أنها لا تحقق شرط عدم سلبية المتغيرات، و بالتالي فإن الحل المتوصل إليه سيكون مرفوضا، مما يستوجب تحسين الحل مرة أخرى عن طريق تطبيق الخوارزمية الثنائية للسمبلكس (تحديد المتغيرة الخارجة أي سطر الارتكاز و التي توافق أقل معامل سالب لـ b_i، و المتغيرة الداخلة أي عمود الارتكاز و التي توافق أقل معامل سالب في سطر الارتكاز، ثم عنصر الارتكاز و من ثَم تحسين الحل بطريقة السمبلكس العادية إلى أن نصل إلى شرط عدم سلبية المتغيرات و معيار الأمثلية سنوضحها في المثال الموالي).

بصفة عامة: للحصول على الحل الأمثل الجديد عند تغير الطرف الأيمن للقيود الوظيفة نقوم بتطبيق العلاقة التالية: $\boldsymbol{X'_i = B^{-1} \times b_i}$

حيث:

$\boldsymbol{x'_i}$: تمثل قيم الحل الجديد المراد الوصول إليه بعد تغير الموارد؛

$\boldsymbol{B^{-1}}$: معكوس المصفوفة B و تمثل معاملات متغيرات الفجوة في جدول الحل الأمثل؛

$\boldsymbol{b_i}$: تمثل قيم متغيرات الأساس في جدول الحل الأمثل.

بالرجوع إلى المثال السابق، و بافتراض ارتفاع المورد الأول إلى 1500 وحدة، و انخفاض المورد الثالث إلى 3700 وحدة، مع بقاء المورد الثاني ثابتا، فإنه يمكن إيجاد القيم الجديدة للحل في حالة تغير الموارد كما يلي:

$$X'_i=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\S_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{-1}{4} & 0\\ \frac{-1}{3} & \frac{1}{2} & 0\\ \frac{8}{3} & -5 & 1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1500\\1000\\3700\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}250\\0\\2700\end{pmatrix}$$

و بتعويض القيم الجديدة في دالة الهدف نحصل على القيمة الجديدة لـ Z=25000، أي قيمة الحل قد ارتفعت، و أصبحت تمثل الحل الأمثل الجديد.

ملاحظة:

- إذا ارتفعت قيمة مورد ما، حيث أن هذا المورد لم يتم استخدامه كليا في جدول الحل الأمثل، فإن متغيرات الأساس لن تتغير مهما كان مقدار الزيادة، و إنما يكون التغير (الزيادة) فقط على مستوى متغيرات الفجوة؛
- إذا انخفضت قيمة مورد ما، أن هذا المورد لم يتم استخدامه كليا في جدول الحل الأمثل، فإنه يجب أن لا يكون مقدار الانخفاض أقل مما تحتاجه المؤسسة لإنتاج قيم متغيرات القرار (متغيرات الأساس).

3 حالة إضافة قيد جديد :

في هذه الحالة سوف نفترض إضافة قيد آخر جديد و ليكن:

$$20x_1+30x_2+40x_3 \leq 5000 \Rightarrow 20x_1+30x_2+40x_3+S_4=5000$$

تتم إضافة القيد الجديد على مستوى جدول الحل الأمثل، فيصبح كما يلي:

	C_j	100	60	80	0	0	0	0	B	
		x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	S_4	rayon	R_i
100	x_1	1	0	1/2	1/3	-1/4	0	0	150	
60	x_2	0	1	1	-1/3	1/2	0	0	100	
00	S_3	0	0	-6	8/3	-5	1	0	2000	
00	S_4	20	30	40	0	0	0	1	5000	
	Z_j	100	60	110	40/3	5	0	0	Z=21000	
	$C_j - Z_j$	0	0	-30	-40/3	-5	0	0		

عند تعويض قيم الحل الأمثل المتوصل إليه في الجدول أعلاه نحصل على:

$$20\,(150)+30\,(100)+40\,(0)+S_4=5000 \Rightarrow S_4=-1000$$

نلاحظ أن قيمة متغيرة الفجوة الرابعة سالبة، ما يعني أن المورد الرابع غير كافي لإنتاج المنتجات الثلاث بالكميات (150، 100، 0) على التوالي، وبالتالي فإن قيمة الحل الأمثل سوف تتغير، و لاستنتاج الحل الآخر نقوم بما يلي:

- تُضرب قيم السطر الأول في القيمة (-20)، فنحصل على:

x_1	-20	0	-10	-20/3	5	0	0	-3000

- تُضرب قيم السطر الثاني في القيمة (30-)، فنحصل على:

x_2	0	-30	-30	10	15	0	0	-3000

- أما بالنسبة للقيم الجديدة لسطر متغيرة الأساس S_4 يتم الحصول عليها عن طريق جمع قيم الأسطر الجديدة لمتغيرتي القرار الأولى و الثانية (السطر الأول و الثاني)، مع القيم القديمة لـ S_4 فنحصل على:

x_1	-20	0	-10	-20/3	5	0	0	-3000
x_2	0	-30	-30	10	15	0	0	-3000
S_4	20	30	40	0	0	0	1	5000
S_4	0	0	0	10/3	-10	0	1	-1000

و بتعويض القيم الجديدة فقط لمتغيرة الأساسS_4 في جدول الحل الأمثل نحصل على:

	C_j	100	60	80	0	0	0	0	B	
		x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	S_4	rayon	R_i
100	x_1	1	0	1/2	1/3	-1/4	0	0	150	
60	x_2	0	1	1	-1/3	1/2	0	0	100	
00	S_3	0	0	-6	8/3	-5	1	0	2000	
00	S_4	0	0	0	10/3	-10	0	1	-1000	
	Z_j	100	60	110	40/3	5	0	0	Z=21000	
	$C_j - Z_j$	0	0	-30	-40/3	-5	0	0		

الحل المتوصل إليه في الجدول أعلاه غير مقبول، لذا وجب تحسينه عن طريق استخدام الخوارزمية الثنائية للسمبلكس بدءً بتحديد:

- المتغيرة الخارجة (سطر الارتكاز) والتي توافق أقل معامل سالب لـ b_i والتي تمثل في هذه الحالة S_4؛
- المتغيرة الداخلة والتي توافق أقل معامل سالب في سطر الارتكاز، والتي تمثل في هذه الحالة S_2؛
- عنصر الارتكاز (تقاطع سطر ة عمود الارتكاز)، قسمة سطر الارتكاز على عنصر الارتكاز نفسه، ثم تحويل عمود الارتكاز ما عدا عنصر الارتكاز إلى أصفار، وأخيرا إجراء باقي حسابات جدول السمبلكس بالشكل المعتاد.

والجدول أدناه يوضح ذلك:

	C_j	100	60	80	0	0	0	0	B	
		x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	S_4	rayon	R_i
100	x_1	1	0	1/2	5/12	0	0	-1/40	175	
60	x_2	0	1	1	-1/6	-1/2	0	1/20	50	
00	S_3	0	0	-6	1	0	1	-1/2	2500	
00	S_2	0	0	0	-1/3	1	0	-1/10	100	
	Z_j	100	60	110	40/3	5	0	0	Z=20500	
	$C_j - Z_j$	0	0	-30	-40/3	-5	0	0		

وعليه فإن الحل المتوصل إليه هو حل أمثل (لأنه يحقق شروط عدم سلبية المتغيرات، و معيار الأمثلية) والذي يمكن قراءته على النحو التالي:

$$x_1 = 175,\quad x_2 = 50,\quad x_3 = 0,\quad S_1 = 0,\quad S_2 = 100,\quad S_3 = 2500,\quad S_4 = 0$$

4 حالة إضافة متغيرة جديدة:

إن إضافة متغيرة جديد سيؤثر على أمثلية المسألة، حيث أنها ستضيف معاملات جديدة إلى دالة الهدف وقيود المسألة، وقد تكون متغيرة أساس لها دور في تحسين الحل (قيمة دالة الهدف)، أو متغيرة خارج الأساس ليس لها القدرة على تحسين قيمة الحل الأمثل.

ويبقى الحل أمثلا طالما كانت C_j للمتغيرة المضافة تحقق شرط الأمثلية (سالبة في نموذج التعظيم، وموجبة في نموذج التدنية)، حيث يمكن حسابها وفق العلاقة التالية:

$$C'_j = C_j - C_{j\,base} \times B^{-1} \times a_i$$

حيث:

C'_j: معامل المتغيرة الجديدة في جدول الحل الأمثل؛

C_j: معامل المتغيرة الجديدة في دالة الهدف؛

$C_{j\,base}$:معاملات متغيرات الأساس في دالة الهدف؛

B^{-1}: معكوس المصفوفة B وتمثل معاملات متغيرات الفجوة في جدول الحل الأمثل؛

a_i: معاملات المتغيرة الجديدة في القيود الوظيفية.

الحالة 1: بأخذ نفس المثال السابق، نفرض أن المؤسسة تود إنتاج منتج آخر x_4، يحقق ربحا قدره 55 وحدة، كما أن إنتاجه يتطلب 4,5 وحدات من المورد الأول، و وحدتين من المورد الثاني و 3 وحدات من المورد الثالث.

$$\text{Max } Z = 100\,x_1 + 60\,x_2 + 80\,x_3 + 55\,x_4$$

S. c

$$\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 4{,}5\,x_4 \leq 1200 \\ 4x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 2x_4 \leq 1000 \\ 4x_1 + 12x_2 + 8x_3 + 3\,x_4 \leq 3800 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

بتطبيق العلاقة أعلاه نحصل على:

$$C'_4 = 55 - (100 \quad 60 \quad 0) \times \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{-1}{4} & 0 \\ \frac{-1}{3} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{8}{3} & -5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4,5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$55 - 70 = -15 < 0$$

بما أن قيمة C_j سالبة (تحقق شرط الأمثلية لنموذج التعظيم) فذلك يعني أن إنتاج هذا المنتج غير اقتصادي، أي أن إنتاج كل وحدة واحدة منه ستؤدي إلى تخفيض الأرباح بمقدار 15 وحدة، ما يعني أنه عبارة عن متغيرة خارج الأساس، أي ليس لها أي تأثير على قيمة الحل الأمثل.

	C_j	100	60	80	55	0	0	0	B	
↓		x_1	x_2	x_3	x_4	S_1	S_2	S_3	rayon	R_i
100	x_1	1	0	1/2	1	1/3	-1/4	0	150	
60	x_2	0	1	1	-1/2	-1/3	1/2	0	100	
00	S_3	0	0	-6	-1	8/3	-5	1	2000	
	Z_j	100	60	110	70	40/3	5	0	Z=21000	
	$C_j - Z_j$	0	0	-30	-15	-40/3	-5	0		

الحالة 2: بأخذ نفس المثال السابق، نفرض أن المؤسسة تود إنتاج منتج آخر x_4، يحقق ربحا قدره 50 وحدة، كما أن إنتاجه يتطلب 3 وحدات من المورد الأول، وحدة واحدة من المورد الثاني و 4 وحدات من المورد الثالث.

$$\text{Max } Z = 100\,x_1 + 60\,x_2 + 80\,x_3 + 50\,x_4$$

S. c

$$\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 3\,x_4 \leq 1200 \\ 4x_1 + 4x_2 + 6x_3 + x_4 \leq 1000 \\ 4x_1 + 12x_2 + 8x_3 + 4\,x_4 \leq 3800 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

بتطبيق العلاقة أعلاه نحصل على:

$$C'_j = 50 - (100 \quad 60 \quad 0) \times \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{-1}{4} & 0 \\ \frac{-1}{3} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{8}{3} & -5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$50 - 45 = 5 > 0$$

	C_j	100	60	80	50	0	0	0	B	
		x_1	x_2	x_3	x_4	S_1	S_2	S_3	rayon	R_i
100	x_1	1	0	1/2	3/4	1/3	-1/4	0	150	200
60	x_2	0	1	1	-1/2	-1/3	1/2	0	100	/
00	S_3	0	0	-6	7	8/3	-5	1	2000	2000/7
	Z_j	100	60	110	45	40/3	5	0	Z=21000	
	$C_j - Z_j$	0	0	-30	5	-40/3	-5	0		

بما أن قيمة C_j موجبة (لا تحقق شرط الأمثلية لنموذج التعظيم) فذلك يعني أن إنتاج هذا المنتج اقتصادي، أي أن إنتاج كل وحدة واحدة منه ستؤدي إلى زيادة الأرباح بمقدار 5 وحدات، ما يعني أنه عبارة عن متغيرة أساس، الأمر الذي يستوجب تشكيل جدول سمبلكس آخر لتحسين الحل.

	C_j	100	60	80	50	0	0	0	B	
		x_1	x_2	x_3	x_4	S_1	S_2	S_3	rayon	R_i
50	x_4	4/3	0	2/3	1	4/9	-1/3	0	200	
60	x_2	2/3	1	4/3	0	-1/9	1/3	0	200	
00	S_3	-28/3	0	-32/3	0	-4/9	-8/3	1	600	
	Z_j	320/3	60	340/3	50	140/9	10/3	0	Z = 22000	
	$C_j - Z_j$	-20/3	0	-100/3	0	-140/9	-10/3	0		

خامسا : تطبيقات مقترحة حول النموذج المقابل وتحليل الحساسية

التمرين الأول : تقوم شركه بإنتاج نوعين من الأبواب الحديدية من خلال استخدامها لنوعين من المواد الخامة وهي الألومونيوم والحديد وكان مقدار ربح الوحدة الواحدة من النوع الأول 20ج ، والنوع الثاني 15ج.

	الألومونيوم	الحديد
النوع الأول	2	3
النوع الثاني	4	2

علماً بأن إجمالي الألمونيوم المستخدم في الأسبوع لا يتعدى 100 كلغ ، كما أن إجمالي الحديد الصلب المستخدم في الأسبوع لا يتعدى 80 كلغ وذلك لتعظيم ربح الشركة.

المطلوب :

1. كون النموذج الرياضي للمشكلة
2. أوجد قيمية الحل الأمثل باستخدام الطريقة المبسطة (السمبلكس)؟
3. شكِّل نموذج البرمجة الخطية الثنائي للنموذج الأولي؟
4. انطلاقا من جدول سمبلكس الحل الأمثل المتوصل إليه، قم بقراءة الحل الأمثل للنموذج الثنائي الموافق للنموذج الأصلي.

التمرين الثاني:

تقوم مؤسسة بإنتاج نوعين اللعب البلاستيكيةP_1 و P_2، وتستخدم المؤسسة لإنتاج هذين المنتجين مادتين هما: M_1، M_2 ، بالإضافة إلى ذلك يتم استخدامهم عبر آلتين، والجدول التالي يوضح استهلاك المواد و الوقت المستغرق على كل آلة لكل منتوج.

	M_1	M_2	آلة الأولى	آلة الثانية
المنتج P_1	1 كلغ	3 كلغ	2 سا	0 سا
المنتج P_2	1 كلغ	4 كلغ	1 سا	3 سا

المؤسسة لا تتوفر إلا على 300 كلغ من المادة M_1 أما المادة M_2 فإنها تستجيب لأي برنامج إنتاجي. فيما يخص الطاقة القصوى للآلتين فهي على التوالي 500 و 800 ساعة، وحسب الوثائق المبيعات لهذه المؤسسة فإن هذه الأخيرة يجب عليها على الأقل إنتاج 150 وحدة من P_1، أما عن الربح المترتب عن المنتجين فهو على التوالي: 250 و 200 دج.

المطلوب:

1. كون النموذج الرياضي للمشكلة
2. أوجد قيمية الحل الأمثل باستخدام الطريقة المبسطة (السمبلكس)؟
3. شكِّل نموذج البرمجة الخطية الثنائي للنموذج الأولي؟
4. انطلاقا من جدول سمبلكس الحل الأمثل المتوصل إليه، قم بقراءة الحل الأمثل للنموذج الثنائي الموافق للنموذج الأصلي.

التمرين الثالث:

مكتب للاستنساخ يود شراء 10 أجهزة استنساخ، وأمامه 3 أنواع من أجهزة الاستنساخ، وعليه ما لا يقل عن جهازين من كل نوعين. يمكن للنوع الأول استنساخ 300 ورقة في الساعة، ويمكن للنوع الثاني استنساخ 350 ورقة، أما النوع الثالث فيمكن له استنساخ 250 ورقة في الساعة. العمر المتوقع للنوع الأول هو 3 سنوات، وللنوع الثاني هو 2 سنوات أما النوع الثالث فعمره هو 4 سنوات، علما أن مجموع أعمار أجهزة الاستنساخ يجب أن لا يقل عن 30 سنة. كلفة شراء الأجهزة الثلاث هي على التوالي: 1.5، 2، 1 مليون دينار، مع العلم أن المكتب بإمكانه بيع الأجهزة بعد سنة من الاستخدام بسعر: 1، 1، 0.5 مليون دينار على التوالي، حيث أن خطة المكتب تقضي استنساخ ما لا يقل عن 3000 ورقة في الساعة الواحدة.

المطلوب:

1. كون النموذج الرياضي للمشكلة
2. أوجد قيمية الحل الأمثل باستخدام الطريقة المبسطة (السمبلكس)؟
3. شكِّل نموذج البرمجة الخطية الثنائي للنموذج الأولي؟
4. انطلاقا من جدول سمبلكس الحل الأمثل المتوصل إليه، قم بقراءة الحل الأمثل للنموذج الثنائي الموافق للنموذج الأصلي.

التمرين الرابع :

يقوم جزار بعمل شطائر اللحم بتكوين من لحم بقري ولحم ماعز. يحتوي لحم البقر على %80 لحم و %20 دهون ويكلف 24 جنيه لكل كيلو في حين أن لحم الماعز على %68 لحم و %32 دهون ويكلف 18 جنيه لكل كيلو. ما هي كمية اللحم من كل نوع يجب أن يستخدمها المحل في كل كيلو من شطائر اللحم إذا علمت أنه يجب تخفيض التكاليف والمحافظة على نسبة الدهون بحيث لا تزيد عن %25؟

المطلوب :

1. كون النموذج الرياضي للمشكلة
2. أوجد قيمية الحل الأمثل باستخدام الطريقة المبسطة (السمبلكس)؟
3. شكِّل نموذج البرمجة الخطية الثنائي للنموذج الأولي؟
4. انطلاقا من جدول سمبلكس الحل الأمثل المتوصل إليه، قم بقراءة الحل الأمثل للنموذج الثنائي الموافق للنموذج الأصلي.

التمرين الخامس : ليكن لدينا البرنامج الخطي التالي :

$$\text{Max } Z = x_1 + 2x_2$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 10$$
$$3x_1 + 2x_2 \leq 15$$
$$x_1 , x_2 \geq 0$$

المطلوب:

1. أوجد قيمية الحل الأمثل باستخدام الطريقة المبسطة (السمبلكس)؟
2. شكِّل نموذج البرمجة الخطية الثنائي للنموذج الأولي؟
3. انطلاقا من جدول سمبلكس الحل الأمثل المتوصل إليه، قم بقراءة الحل الأمثل للنموذج الثنائي الموافق للنموذج الأصلي.

التمرين السادس : ليكن لدينا البرنامج الخطي التالي :

$$\textbf{Max } Z = 30x_1 + 90x_2 + 10x_3$$
$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 180$$
$$6x_1 + 4x_2 + 4x_3 \leq 300$$
$$x_1 , x_2 , x_3 \geq 0$$

المطلوب:

1. أوجد قيمية الحل الأمثل باستخدام الطريقة المبسطة (السمبلكس)؟
2. شكِّل نموذج البرمجة الخطية الثنائي للنموذج الأولي؟
3. انطلاقا من جدول سمبلكس الحل الأمثل المتوصل إليه، قم بقراءة الحل الأمثل للنموذج الثنائي الموافق للنموذج الأصلي.
4. بافتراض أن الربح الوحدوي للمنتج الثاني قد تغير بمقدار Δ_{C1} ، حدد مجال تغيره لكي يبقى الحل أمثلا؟
5. بافتراض أن المورد الأول قد تغير بمقدار Δb_1 ، حدد مجال تغيره لكي يبقى الحل أمثلا؟
6. بافتراض إضافة قيد جديد $x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 180$ هل يبقى الحل أمثلا في هذه الحالة؟

التمرين السابع : ليكن لدينا البرنامج الخطي التالي :

$$\textbf{Min } Z = 5x_1 + 6x_2$$
$$x_1 + x_2 \geq 2$$
$$4x_1 + x_2 \geq 4$$

$x_1 , x_2 \geq 0$

المطلوب:

1. أوجد قيمية الحل الأمثل باستخدام الطريقة المبسطة (السمبلكس)؟
2. شكِّل نموذج البرمجة الخطية الثنائي للنموذج الأولي؟
3. انطلاقا من جدول سمبلكس الحل الأمثل المتوصل إليه، قم بقراءة الحل الأمثل للنموذج الثنائي الموافق للنموذج الأصلي.
4. بافتراض أن الربح الوحدوي للمنتج الثاني قد تغير بمقدار Δ_{C1} ، حدد مجال تغيره لكي يبقى الحل أمثلا؟
5. بافتراض أن المورد الأول قد تغير بمقدار Δb_1 ، حدد مجال تغيره لكي يبقى الحل أمثلا؟
6. بافتراض إضافة قيد جديد $2 x_1 + 2x_2 \geq 6$ هل يبقى الحل أمثلا في هذه الحالة؟

التمرين الثامن : ليكن لدينا البرنامج الخطي التالي :

$\textbf{Min } Z = x_1 - 5x_2 +6 x_3$

$2x_1 + 3\ 4_3 \geq 50$

$x_1 + 2x_2 \geq 30$

$x_3 \geq 10$

$x_1 , x_2 , x_3 \geq 0$

المطلوب:

1. أوجد قيمية الحل الأمثل باستخدام الطريقة المبسطة (السمبلكس)؟
2. شكِّل نموذج البرمجة الخطية الثنائي للنموذج الأولي؟
3. انطلاقا من جدول سمبلكس الحل الأمثل المتوصل إليه، قم بقراءة الحل الأمثل للنموذج الثنائي الموافق للنموذج الأصلي.
4. بافتراض أن الربح الوحدوي للمنتج الثاني قد تغير بمقدار Δ_{C1} ، حدد مجال تغيره لكي يبقى الحل أمثلا؟
5. بافتراض إضافة قيد جديد $2 x_1 + 2x_2 \geq 20$ هل يبقى الحل أمثلا في هذه الحالة؟

الفصل الخامس :

نموذج النقل

الفصل الخامس : نموذج النقل Transportation Models

مقدمة

تعتبر مشكلة النقل حالة خاصة من البرمجة الخطية والتي يمكن حلها بطريقة أكثر كفاية من طريقة السمبلكس بسبب طبيعة تكوينها . وهي تعالج بصفة عامة مشاكل نقل البضائع وتوزيعها . إلا هذا لا يمنع من استخدام نموذج مشكلة النقل بعد تعديله في حل مشاكل أخرى مماثلة من حيث التكوين ولا يشترط أن يكون لها علاقة بالمواصلات ونقل البضائع.

أولا : عناصر مشكلة النقل:

من المتطلبات الأساسية لتطبيق أسلوب مشكلة النقل في حل مشاكل إدارية تَوفر العناصر التالية:

1. مواقع توزيع (مصانع ، مستودعات) لكل طاقة محددة(كمية عرض)
2. مواقع طلب (مراكز تجارية وزبائن محددة مواقعهم) لكل منهم طلب محدد
3. هناك تكلفة نقل محددة مسبقاً لنقل البضاعة من الفئة (1) إلى الفئة (2)
4. لكي نستطيع حل المشكلة يجب أن تكون كمية العرض تساوي تماماً كمية الطلب (وهذا شبه مستحيل في الحياة العملية ، لذلك فإننا نتغلب عليه بحيلة رياضية .

وسنوضح بمثال تطبيقي كيفية كتابة المشكلة على شكل برنامج خطي بعد تمثيلها بشبكة عمل . ثم نعرض طريقة حلها مستخدمين أسلوب مشكلة النقل مع التعرض للحالات الاستثنائية لمشاكل النقل وكيفية معالجتها لتأخذ الشكل العام للمشكلة .

	A_1	A_2	A_3		A_m	S_i
B_1	$C_{11}= a_{11}$ x_{11}	$C_{12}= a_{12}$ x_{12}	$C_{13}= a_{13}$ x_{13}		$C_{1m}= a_1$ x_{1m}	S_1
B_2	$C_{21}= a_{21}$ x_{21}	$C_{22}= a_{22}$ x_{22}	$C_{23}= a_{23}$ x_{23}		$C_2= a_{2m}$ x_{2m}	S_2
B_n	$C_{31}= a_{n1}$ X_{n1}	$C_{32}= a_{n2}$ X_{n2}	$C_{33}= a_{n3}$ X_{n3}		$C_3= a_{nm}$ X_{nm}	S_n
D_J	D_1	D_2	D_3		D_m	170

مثال :

لدى مصنع للطوب الأحمر ثلاث مستودعات في أماكن مختلفة يعمل المصنع بطاقة أسبوعية مقدارها 170 طنا ويتلقى طلبات من أربعة مواقع مختلفة (حي مشرفة 75 طناً ، حي الحمراء 35طناً ، حي النزهة 40طناً ، حي الجامعة 20 طناً) وحيث أن تكاليف النقل تختلف حسب موقع المستودع ومكان الطلب (كما هي موضحة في الجدول أدناه) فإن مدير المستودع يرغب في معرفة أفضل طريقة لتوزيع الطلبات بحيث تكون تكاليف النقل أقل ما يمكن .

	مشرفة	الحمراء	النزهة	الجامعة	a_i
المستودع1	$C_{11}=9$ x_{11}	$C_{12}=7$ x_{12}	$C_{13}=6$ x_{13}	$C_{14}=5$ x_{14}	30
المستودع2	$C_{21}=2$ x_{21}	$C_{22}=8$ x_{22}	$C_{23}=9$ x_{23}	$C_{24}=12$ x_{24}	60
المستودع3	$C_{31}=4$ x_{31}	$C_{32}=3$ x_{32}	$C_{33}=10$ x_{33}	$C_{34}=8$ x_{34}	80
b_i	75	35	40	20	170

ثانيا : حل مسائل النقل

- إذا كان الطلب مساو للعرض فان عملية النقل تسمى عملية متوازنة وإذا زاد الطلب عن العرض (سأحتاج لصف جديد ويسمى عجزا) أو إذا زاد العرض عن الطلب عن العرض (سأحتاج لعمود جديد ويسمى مخزون) تسمى عملية غير متوازنة .
- يتم إيجاد الحل الأمثل على خطوتين الأولى إيجاد الحل الابتدائي والثانية إيجاد الحل الأمثل (غير مقررة)
- الحل الابتدائي يتم بثلاث طرق :

1 طريقة الركن الشمالي الغربي :

ويتم فيها البدء بتحقيق مطالب الركن الشمالي الغربي أولا ثم شطب الصف أو العمود الذي انتهت امدادته أو طلباته ثم بحث عن الركن الشمالي الغربي الجديد بعد الشطب وتستمر العملية حتى نهاية كل المطالب والإمدادات.

2 طريقة أقل التكاليف :

ويتم فيها البدء بتحقيق مطالب المتغير ذو اقل التكاليف ثم شطب الصف أو العمود الذي انتهت إمداداته أو طلباته ثم البحث عن المتغير ذو أقل التكاليف في المتغيرات المتبقية بعد الشطب وتستمر العملية حتى نهاية كل المطالب والإمدادات) وهذه الطريقة أقل في التكاليف من الطريقة السابقة

3 طريقة فوجل :

ويتم فيها تحديد الفرق بين أقل تكلفتين في كل صف وعمود ثم ابدأ بتحديد الصف أو العمود صاحب أكبر فرق وابدأ بتحقيق مطالب أقل تكلفة فيه ثم شطب الصف أو العمود الذي انتهت طلباته أو إمداداته ثم تكرا ما سبق حتى نهاية كل المطالب والإمدادات) وهذه الطريقة هي أقل الطرق تكلفة.

ملاحظات على إيجاد الحل الابتدائي في مسائل النقل

- قد تأتى المسألة في صورة معادلات بدلا من جدول. -قد تكون المسألة غير متوازنة فنضيف صف أو عمود.
- - عند وجود عجز أو فائض وأعطي قيمة تكلفة له نكمل المعادلة بقيمة التكلفة في كمية الفائض أو العجز بالإضافة إلى المعادلة الأساسية.
- قد يكون غير مسموح بالتخزين فنضع m بدلا من تكلفة التخزين = صفر أو أي قيمة معطاة.
- قد يكون غير مسموح بالعجز فنضع m بدلا من تكلفة استعاضة العجز = صفر أو أي قيمة معطاة.
- مسائل النقل مسائل تكلفة وقد تأتى في صورة أرباح ويكون حلها عن طريق وضع رقم أخر بجوار الرقم. المعطى وهو رقم التكلفة (يتم إيجاد هذا الرقم لكل متغير عن طريق طرح رقم ربحية كل متغير من أكبر قيمة ربحية للمتغيرات) ويتم الحل بطريقة فوجل أو أقل التكاليف.

ثالثا : تطبيقات محلولة

لدى مصنع للطوب الأحمر ثلاث مستودعات في أماكن مختلفة يعمل المصنع بطاقة أسبوعية مقدارها 280 طنا ($S_1=120, S_2=80,\ S_2=80,$) ويتلقى طلبات من ثلاث مواقع مختلفة ($D_1=150,$ طناً ، $D_2=70,$ 80طناً ، $D_3=60,$ طناً) وحيث أن تكاليف النقل تختلف حسب موقع المستودع ومكان الطلب (كما هي موضحة في الجدول أدناه) فإن مدير المستودع يرغب في معرفة أفضل طريقة لتوزيع الطلبات بحيث تكون تكاليف النقل أقل ما يمكن .

From / to	D_1	D_2	D_3	Supply
S_1	8	5	6	120
S_2	15	10	12	80
S_3	3	9	10	80
Demand	150	70	60	280

الحل

❖ **طريقة الركن الشمالي الغربي** : ويتم فيها البدء بتحقيق مطالب الركن الشمالي الغربي أولا ثم شطب الصف أو العمود الذي انتهت امدادته أو طلباته ثم بحث عن الركن الشمالي الغربي الجديد بعد الشطب وتستمر العملية حتى نهاية كل المطالب والإمدادات.

- **الخطوة الأولى**

From / to	D_1	D_2	D_3	Supply
S_1	8 120	5	6	120/0
S_2	15	10	12	80
S_3	3	9	10	80
Demand	150	70	60	280

- **الخطوة الثانية**

From / to	D_1	D_2	D_3	Supply
S_1	8 120	5	6	120/0
S_2	15 30	10	12	80
S_3	3	9	10	80
Demand	150 30 0	70	60	280

الخطوة الثالثة

From / to	D_1	D_2	D_3	Supply
S_1	8 120	5	6	120/0
S_2	15 30	10 50	12	80/50/0
S_3	3	9	10	80
Demand	150 30 0	70 20	60	280

الخطوة الرابعة

From / to	D_1	D_2	D_3	Supply
S_1	8 120	5	6	120/0
S_2	15 30	10 50	12	80/50/0
S_3	3	9 20	10 60	80/20/60/0
Demand	150 30 0	70 20 0	60 60 0	280

الخطوة الأخيرة : التعويض في معادلة تدنيه التكاليف بقيم كل متغير في تكلفته

تكاليف النقل = (120 * 8)+(15*30)+ (10*50)+ (9*20)+ (10*60) = 2690

❖ **طريقة أقل التكاليف :**

ويتم فيها البدء بتحقيق مطالب المتغير ذو أقل التكاليف ثم شطب الصف أو العمود الذي انتهت إمداداته أو طلباته ثم البحث عن المتغير ذو أقل التكاليف في المتغيرات المتبقية بعد الشطب وتستمر العملية حتى نهاية كل المطالب والإمدادات) وهذه الطريقة أقل في التكاليف من الطريقة السابقة.

الخطوة الأولى

From / to	D_1	D_2	D_3	Supply
S_1	8	5	6	120
S_2	15	10	12	80
S_3	3 80	9	10	80/0
Demand	150 70	70	60	280

الخطوة الثانية

From / to	D_1	D_2	D_3	Supply
S_1	8	5 70	6	120
S_2	15	10	12	80
S_3	3 80	9	10	80/0
Demand	150 70	70 0	60	280

الخطوة الثالثة

From / to	D_1	D_2	D_3	Supply
S_1	8	5 70	6 50	120/50/0
S_2	15	10	12	80
S_3	3 80	9	10	80/0
Demand	150 70	70 0	60 10	280

الخطوة الرابعة

From / to	D_1	D_2	D_3	Supply
S_1	8	5 70	6 50	120/50/0
S_2	15	10	12 10	80/70
S_3	3 80	9	10	80/0
Demand	150 70	70 0	60 10 0	280

الخطوة الأخيرة

From / to	D_1	D_2	D_3	Supply
S_1	8	5 70	6 50	120/50/0
S_2	15 70	10	12 10	80/70/0
S_3	3 80	9	10	80/0
Demand	150 70 0	70 0	60 10 0	280

قيمة التكاليف = (80*3) + (70*5)+(6*50)+(12*10)+(70*15) = 2060 (لاحظ أنها أقل تكلفة من الطريقة الأولى).

❖ **طريقة فوجل :**

ويتم فيها تحديد الفرق بين أقل تكلفتين في كل صف وعمود ثم ابدأ بتحديد الصف أو العمود صاحب أكبر فرق وابدأ بتحقيق مطالب أقل تكلفة فيه ثم شطب الصف أو العمود الذي انتهت طلباته أو إمداداته ثم تكرا ما سبق حتى نهاية كل المطالب والإمدادات) وهذه الطريقة هي أقل الطرق تكلفة.

الخطوة الأولى

From / to	D_1	D_2	D_3	Supply	
S_1	8	5	6	120	6-5=1
S_2	15	10	12	80	12-10=2
S_3	3 80	9	10	80/0	9-3=6
Demand	150 70	70	60	280	
	8-3=5	9-5=4	10-6=4		

الخطوة الثانية

From / to	D_1	D_2	D_3	Supply	
S_1	8 70	5	6	120/50	6-5=1
S_2	15	10	12	80	12-10=2
S_3	3 80	9	10	80/0	9-3=6
Demand	150 70 0	70	60	280	
	8-3=5 15-8=7	9-5=4 10-5=5	10-6=4 12-6=6		

الخطوة الثالثة

From / to	D1	D2	D3	Supply	
S_1	8 70	5	6 50	120/50/0	6-5=1
S_2	15	10	12	80	12-10=2
S_3	3 80	9	10	80/0	9-3=6
Demand	150 70 0	70	60 10	280	
	8-3=5 15-8=7	9-5=4 10-5=5	10-6=4 12-6=6		

الخطوة الرابعة

From / to	D1	D2	D3	Supply	
S_1	8 70	5	6 50	120/50/0	6-5=1
S_2	15	10 70	12	80/10	12-10=2
S_3	3 80	9	10	80/0	9-3=6
Demand	150 70 0	70 0	60 10	280	
	8-3=5 15-8=7	9-5=4 10-5=5	10-6=4 12-6=6		

الخطوة الأخيرة

From / to	D_1	D_2	D_3	Supply	
S_1	8 70	5	6 50	120/50/0	6-5=1
S_2	15	10 70	12 10	80/10	12-10=2
S_3	3 80	9	10	80/0	9-3=6
Demand	150 70 0	70 0	60 10 0	280	
	8-3=5 15-8=7	9-5=4 10-5=5	10-6=4 12-6=6		

التكاليف =(3*80)+(8*70) +(6*50)+(12*10)+(10*70)= 1290 (لاحظ ان التكاليف أقل من الطرق السابقة) .

خامسا : تطبيقات مقترحة حول نموذج النقل

التمرين الأول :

تمتلك إحدى الشركات ثلاث مصانع هي A_1 ، A_2، A_3 ، ولديها ثلاث مخازن B_1 ، B_2، B_3 ، وكانت المصانع تقوم بإنتاج نوع معين من السلع فإذا علمت أن الطاقة الإنتاجية للمصانع الثلاثة هي على الترتيب 400 ، 600، 200 وحدة أما الطاقة الاستيعابية للمخازن الثلاثة على الترتيب هي 200، 700، 300 وحدة علماً بأن المصفوفة التالية توضح تكلفة نقل الوحدة من كل مصنع إلى كل مخزن :-

B_3	B_2	B_1	المخزن / المصنع
40	150	120	A_1
50	80	100	A_2
100	20	50	A_3

والمطلوب

1. انطلاقا من معطيات مسألة النقل أعلاه شكِّل جدول النقل الموافق لهذه المسألة؟
2. قدم نموذج النقل الموافق لجدول النقل المتوصل إليه؟

3. أوجد حل الأساس المقبول باستخدام طريقة الزاوية الشمالية الغربية، و كذا قيمة دالة الهدف الموافقة له؟
4. أوجد حل الأساس المقبول باستخدام طريقة التكاليف الدنيا، و كذا قيمة دالة الهدف الموافقة له؟
5. أوجد حل الأساس المقبول باستخدام طريقة فوجل، و كذا قيمة دالة الهدف الموافقة له.

التمرين الثاني :

الجدول أدناه يقدم تكاليف النقل الوحدوية لنقل منتج معين من 03 مراكز إنتاج إلى 3 مراكز توزيع، بالإضافة إلى عرض كل مركز إنتاج و طلب كل مركز توزيع.

	D_1	D_2	D_3	A_i
O_1	12	13	04	500
O_2	06	04	10	700
O_3	10	09	12	800
b_i	500	1000	400	

المطلوب:

1. انطلاقا من معطيات مسألة النقل أعلاه شكِّل جدول النقل الموافق لهذه المسألة؟
2. قدم نموذج النقل الموافق لجدول النقل المتوصل إليه؟
3. أوجد حل الأساس المقبول باستخدام طريقة الزاوية الشمالية الغربية، و كذا قيمة دالة الهدف الموافقة له؟
4. أوجد حل الأساس المقبول باستخدام طريقة التكاليف الدنيا، و كذا قيمة دالة الهدف الموافقة له؟
5. أوجد حل الأساس المقبول باستخدام طريقة فوجل، و كذا قيمة دالة الهدف الموافقة له.

التمرين الثالث :

الجدول أدناه يقدم تكاليف النقل الوحدوية لنقل منتج معين من 03 مراكز إنتاج إلى 4 مراكز توزيع، بالإضافة إلى عرض كل مركز إنتاج و طلب كل مركز توزيع.

	D_1	D_2	D_3	D_4	A_i
O_1	20	17	15	10	140
O_2	16	14	18	13	60
O_3	12	15	11	19	100
b_i	80	40	60	80	

المطلوب :

1. انطلاقا من معطيات مسألة النقل أعلاه شكِّل جدول النقل الموافق لهذه المسألة؟
2. قدم نموذج النقل الموافق لجدول النقل المتوصل إليه؟
3. أوجد حل الأساس المقبول باستخدام طريقة الزاوية الشمالية الغربية، و كذا قيمة دالة الهدف الموافقة له؟
4. أوجد حل الأساس المقبول باستخدام طريقة التكاليف الدنيا، و كذا قيمة دالة الهدف الموافقة له؟
5. أوجد حل الأساس المقبول باستخدام طريقة فوجل، و كذا قيمة دالة الهدف الموافقة له.

الفصل السادس :

نموذج التخصيص

الفصل السادس : نموذج التخصيص

أولا : مفهوم مشكلة التخصيص

تعد نماذج التخصيص حالة خاصة من نماذج البرمجة الخطية ونماذج النقل والهدف منه اختيار أفضل تخصيص أو تعيين وسيلة ما لإنجاز مهمة معينة بحيث تؤدي إلى الوصول إلى الحد الأدنى من التكاليف أو تعظيم الإرباح (العوائد) .

من الأمثلة على مجالات تطبيق نماذج التخصيص في الواقع العملي :

- تخصيص العاملين للعمل على آلات معينة.
- تخصيص الموظفين لانجاز مهام وظيفية معينة .
- تخصيص عدد معين من المدراء على عدد معين من المناصب الإدارية.
- تخصيص عدد معين من الآلات لإنتاج سلع معينة.
- تخصيص وسائل نقل معينة لنقل السلع من مكان لأخر.

تستند نماذج التخصيص إلى أربعة شروط أساسية :

- وجود عدد متساو من العمليات و التسهيلات أي عدد الوسائل أو الأشخاص أو الماكينات يساوي عدد المهام.
- عدم إمكانية الشخص أو الوسيلة من القيام بأكثر من عمل أو مهمة واحدة في نفس الوقت .
- كلفة أداء كل عمل أو مهمة من قبل (العامل أو الماكينة) معروفة و محددة مسبقا.
- عدم السلبية إذ يفترض عدم وجود مبالغ لانجاز المهام و التي تمثل إرباحا أو تكاليف بالسالب.

ثانيا : الصيغة العامة لمشاكل التخصيص

لذا تختلف مشاكل التخصيص عن مشاكل النقل في إن :

- المصادر تمثل العمليات (الأعمال ، الأفراد) و تمثلها i حيث $i=1,2,3,\ldots,m$
- و مراكز الطلب تمثل التسهيلات أو المهمات أو الإمكانات المتاحة مثل المكائن و تمثلها J حيث $j=1,2,3,\ldots n$
- وأن m دائما تساوي n أي أن المصفوفة دائما مربعة
- و أن X_{ij} دائما إما 0 أو 1 حيث تمثل X_{ij} الماكينات، الأعمال أو الأفراد i المخصصة إلى j من التسهيلات أو المهمات أو الإمكانات المتاحة.

- على حين C_{ij} تمثل كلفة تخصيص الماكينات، الأعمال أو الأفراد i إلى التسهيلات أو المهمات أو الإمكانات المتاحة j.

ثالثا : طرق التخصيص

1 طريقة التوافيق المختلفة أو طريقة العد الكامل أو الحل اليدوي :

و تعد هذه طريقة من ابسط الطرق المستخدمة في عملية حل نماذج التخصيص عندما لا يتجاوز عدد المهام أو الوسائل (ثلاثة) لكل منهما.، إذ يتم بموجبها تحديد جميع البدائل لعملية التوزيع أي حساب جميع الاحتمالات الممكنة لعملية التخصيص ، ويتم ذلك وفقا لقاعدة !n أي مفكوك n أو n Factorial التالية:

$$n! = n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots(n-m)$$
$$2! = 2x1=2$$
$$3!=3x2x1=6$$
$$4!=4x3x2x1=24 \ldots\ldots\ldots\ldots$$ و هكذا

مثال

يوضح الجدول التالي تقديرات الوقت الذي حددها المدير و الخاصة بانجاز كل موظف لمهمة معينة.

المطلوب : تخصيص الموظفين لانجاز المهام بحيث يؤدي ذلك إلى تقليل الوقت اللازم للانجاز.

المهام الموظفون	الإنتاج	تسويق
A	6	5
B	8	10

الحل:

وفق قاعدة المفكوك هناك احتمالين للحل و هما :

- الاحتمال الأول هو انجاز A مهمة الإنتاج و انجاز B مهمة التسويق، حيث يصبح الوقت اللازم للانجاز هو : 16 =6+10.
- إما الاحتمال الثاني فهو انجاز B مهمة الإنتاج و انجاز A مهمة التسويق حيث يصبح الوقت اللازم للانجاز هو : 13 =8+5.

وعليه يكون التخصيص حسب الاحتمال الثاني هو الأفضل.

مثال :

مصنع يرغب بتعيين ثلاثة عمال (A ,B, C) لانجاز ثلاث مهام هي (1 ,2, 3) , وقد كانت تكاليف انجاز هذه المهام ، موضحة بالجدول التالي.

المطلوب : تحديد أفضل تخصيص بأقل تكاليف و بطريقة الحل اليدوي.

المهام العمال	1	2	3
A	15	14	8
B	4	9	7
C	7	2	9

الحل :

- وفق قاعد المفكوك $3!=3x2x1=6$ نلاحظ إن هناك ستة بدائل يمكن توضيحه بالجدول التالي:

المهام البدائل	1	2	3	مجموع تكاليف البدائل	التكاليف الكلية(TC)
1	A	B	C	15+9+9	33
2	A	C	B	15+2+7	24
3	B	A	C	4+14+9	27
4	C	A	B	7+12+7	26
5	B	C	A	4+2+8	14 Min
6	C	B	A	7+9+8	24

- يتضح من الجدول السابق أن البديل الرابع هو الأفضل لأنه يحقق اقل التكاليف (14) دينار، و عليه يكون أفضل تخصيص هو :
- العامل B للمهمة 1
- العامل C للمهمة 2
- العامل A للمهمة 3

وبتكلفة مقدارها ($Tc=4+2+8 = 14$) دينار

2 الطريقة الهنغارية The Hungarian Method

وهي طريقة مباشرة للتخصيص وتدعى خوارزمية جونسون

❖ **خطوات حل مشكلة التخصيص في حالة التقليل :**

- طرح أصغر قيمة (كلفة C_{ij}) في كل عمود من باقي قيم ذلك العمود للحصول على صفر واحد على الأقل في كل عمود.
- طرح اصغر قيمة(كلفة C_{ij}) في كل صف من باقي قيم ذلك الصف للحصول على صفر واحد على الأقل في كل صف.
- تغطية الأصفار الناتجة في (الصفوف و الأعمدة) بأقل عدد من المستقيمات
- إذا كان عدد المستقيمات يساوي عدد صفوف أو أعمدة الجدول ، فإننا في هذه الحالة قد توصلنا إلى الحل المطلوب . إما إذا كان عدد الصفوف أو الأعمدة لا يساوي عدد المستقيمات ، ففي هذه الحالة نقوم باختيار اصغر قيمة من القيم غير المغطاة و طرحها من جميع القيم غير المغطاة ، و إضافتها إلى قيم نقاط تقاطع المستقيمات ثم تغطية الأصفار الناتجة في (الصفوف و الأعمدة) بأقل عدد من المستقيمات .
- بعد ذلك يتم التخصيص من خلال اختيار (المدير أو العامل ،...الخ) الذي يقابل اقل عدد من الأصفار في الصف، و نقوم بشطب الصف الذي يوجد فيه الصفر و هكذا حتى ننتهي من عملية التخصيص في جميع الصفوف .
- حساب التكاليف الكلية على أساس قيم التكاليف في المصفوفة الأصلية.

ملاحظة :

عند تطبيق الطريقة الهنغارية في حالة التعظيم (الإرباح أو العوائد) يتم أولا طرح جميع قيم الجدول من اعلي قيمة فيه ، بعد ذلك يتم تطبيق خطوات الحل السابقة الذكر.

مثال :

مصنع يرغب بتعيين ثلاثة عمال (A ,B, C) لانجاز ثلاث مهام هي (3 ,2, 1) , وقد كانت تكاليف انجاز هذه المهام ، موضحة بالجدول التالي.

المطلوب :تحديد أفضل تخصيص بأقل تكاليف مستخدما الطريقة الهنغارية.

المهام العمال	1	2	3
A	15	14	8
B	4	9	7
C	7	2	9

الحل :

أ- طرح أصغر قيمة في كل عمود من جميع قيم ذلك العمود لتصبح :

المهام العمال	1	2	3
A	11	12	1
B	0	7	0
C	3	0	2

ب- طرح أصغر قيمة في كل صف من جميع قيم ذلك الصف، في الجدول الوارد في الفقرة1 و نغطي الأعمدة و الصفوف التي تحتوي على أصفار بأقل عدد ممكن من المستقيمات.كما يلي:

المهام العمال	1	2	3
A	10	11	0
B	0	7	0
C	3	0	2

و بما إن عدد المستقيمات يساوي عدد الصفوف ، فإننا توصلنا إلى الحل المطلوب ، و بإمكاننا إجراء عملية التخصيص و على النحو التالي:

- تخصيص العامل (A) لانجاز المهمة (3).
- تخصيص العامل (B) لانجاز المهمة (1).
- تخصيص العامل (C) لانجاز المهمة (2).

و إن التكاليف الكلية لقرار هذا التخصيص هي : TC min= 8+4+2=14

مثال02 :

مطلوب تخصيص أربعة عاملين للعمل على أربعة آلات، بحيث يكون مجموع ساعات العمل أقل ما يمكن بافتراض إن الأجور متساوية ،اعتمد البيانات الموجودة في الجدول الأتي:

	1	2	3	4
A	15	18	21	24
B	19	23	22	18
C	26	17	16	19
D	19	21	23	17

الحل :

1. طرح أقل رقم في كل عمود من باقي أرقام العمود و نحصل على الجدول التالي :

	1	2	3	4
A	0	1	5	7
B	4	6	6	1
C	11	0	0	2
D	4	4	7	0

2. ننظر إلى الجدول فيما إذا كان هناك صف أو عمود لا يحتوي على صفر . نجد إن جميع الأعمدة تحتوي على صفر و لكن الصف الثاني ليس فيه صفر لذلك نطرح أقل رقم في الصف الثاني من جميع قيم هذا الصف.

3. بعد التأكد إن كل صف و عمود يحتوي على صفر نقوم برسم المستقيمات بأقل عد ممكن.

وبما إن عدد المستقيمات (3) = عدد الصفوف أو الأعمدة (4) لذا لم نتوصل للحل الممكن .

	1	2	3	4
A	0	1	5	7
B	3	5	5	0
C	11	0	0	2
D	4	4	7	0

4. نطرح أصغر رقم من الأرقام غير المغطية بخطوط مستقيمة ونضيف هذا الرقم إلى الأرقام في خطوط التقاطع.

الأرقام غير المغطاة (7,4, 4,3,5,5) يطرح منها الرقم (3).

الأرقام الواقعة على تقاطع المستقيمات هي (7 , 2) يضاف إليها (3) ليصبح كما في الجدول

	1	2	3	4
A	0	1	5	10
B	0	2	2	0
C	11	0	0	5
D	1	1	4	0

5. بما إن عدد المستقيمات (3) لا يساوي عدد الصفوف والأعمدة (4) نكرر العملية حتى يتساوى عدد الصفوف أو الأعمدة مع عدد المستقيمات وذلك بطرح أصغر رقم من الأرقام غير المغطية بخطوط مستقيمة

ونضيف هذا الرقم إلى الأرقام في خطوط التقاطع. بمعنى أن الأرقام غير المغطاة (1,5,2,2,1,4) يطرح منها الرقم (1). أما الأرقام الواقعة على تقاطع المستقيمات وهي (11,5) فيضاف إليها (1). وبما إن عدد الخطوط يساوي عدد الصفوف أو الأعمدة نكون قد توصلنا إلى الحل المطلوب وأصبح بالإمكان إجراء عملية التخصيص والتي تبدأ في الصف الذي يكون فيه الصفر وحده ثم نتبع الأصفار الأخرى.

	1	2	3	4
A	0	0	4	10
B	0	1	1	0
C	12	0	0	6
D	1	0	3	0

أصبح بالإمكان إجراء عملية التخصيص والتي تبدأ في الصف الذي يكون فيه الصفر وحده ثم نتبع الأصفار الأخرى.

مجموع ساعات العمل هي : 21+16+18+15= 70 ساعة

الآلة	العامل
A	1
B	4
C	3
D	2

أو مجموع ساعات العمل 70=17+16+19+18=ساعة

الآلة	العامل
A	2
B	1
C	3
D	4

رابعا : الحالات الخاصة (الحالات غير المتزنة) لمشاكل التخصيص

يشترط في استخدام الطريق الهنغارية أن يكون عدد الصفوف m يساوي عدد الأعمدة n و في حالة عدم مساواة الصفوف مع الأعمدة أي $n = m$ فيتم معالجة المشكلة كالتالي:

- إذا كانت ($m<n$) يتم إضافة بعض الصفوف الوهمية بكلف أو إيرادات صفرية. فإذا كانت مصفوفة تكاليف نختار أصغر قيمة في كل صف بحيث نحصل على صفر واحد في الصف نفسه.
- إذا كانت ($m>n$) يتم إضافة بعض الأعمدة الوهمية بكلف أو إيرادات صفرية. فإذا كانت مصفوفة تكاليف فنختار أصغر قيمة في كل عمود بحيث نحصل على صفر واحد في العمود نفسه .

ثم نتم الحل بالطريقة الاعتيادية.

مثال: أوجد أفضل تخصيص للفنيين، بحيث تكون التكاليف المتحققة أقصى ما يمكن، مستخدما الطريقة الهنغارية.

المكائن /	A	B	C	D
1	90	40	60	80
2	70	60	80	50
3	80	70	50	50

الحل:

1- بما إن ($m<n$) يضاف صف (4) وهمي لتصبح المصفوفة مربعة كالتالي:

المكائن /	A	B	C	D
1	90	40	60	80
2	70	60	80	50
3	80	70	50	50
4	0	0	0	0

2- نختار أصغر قيمة في كل صف ونطرحها من بقية القيم في الصف لنحصل على :

المكائن /	A	B	C	D
1	50	0	20	40
2	20	10	30	0
3	30	20	0	0
4	0	0	0	0

3- نغطي الأعمدة والصفوف التي تضم أصفار بخطوط :

المكائن /	A	B	C	D
1	50	0	20	40
2	20	10	30	0
3	30	20	0	0
4	0	0	0	0

4- بما أن عدد الخطوط يساوي 4 وهو يساوي عدد الأعمدة والصفوف يكون التخصيص الأمثل كالتالي:

الفنيين	المشروع	التكاليف
1	B	40
2	D	50
3	C	50
4	A	0

مجموع التكاليف هو : $140 = 0+ 50+ 50 +40$

❖ **خطوات حل مشكلة التخصيص في حالة التعظيم :**

إذا كان الهدف من التخصيص تعظيم الأرباح أو كفاءة الأداء نقوم بالآتي :

يتم تحويل الحالة إلى حالة تقليل عن طريقة إيجاد الكلف النسبية. حيث يتم إيجاد الكلف النسبية من خلال طرح كل قيم المصفوفة من أكبر قيمة فيها ثم نتابع الحل بالطريقة الاعتيادية.

مثال4:

أوجد أفضل تخصيص للفنيين ، بحيث تكون الأرباح المتحققة أقصى ما يمكن ، مستخدما الطريقة الهنغارية.

المكائن /	A	B	C
1	1	4	7
2	8	3	1
3	5	6	2
4	4	1	7

الحل:

1- بما إن (m>n) يضاف ماكينة (D) واحدة وهمية لتصبح المصفوفة مربعة كالتالي:

المكائن /	A	B	C	D
1	1	4	7	0
2	8	3	1	0
3	5	6	2	0
4	4	1	7	0

2- نجد مصفوفة الكلف النسبية بطرح كل القيم من أكبر قيمة في المصفوفة و البالغة (8) ثم نحصل على الجدول التالي:

المكائن /	A	B	C	D
1	7	4	1	8
2	0	5	7	8
3	3	2	6	8
4	4	7	1	8

3- نختار أصغر قيمة في كل صف ثم نطرحها من كل القيم في ذلك الصف:

المكائن /	A	B	C	D
1	6	3	0	7
2	0	5	7	8
3	1	0	4	6
4	3	6	0	7

4- نطرح أقل رقم من العمود (D) من بقية الأرقام للحصول على أصفار في هذا العمود كالتالي:

المكائن /	A	B	C	D
1	6	3	0	1
2	0	5	7	2
3	1	0	4	0
4	3	6	0	1

5- بعد تغطية الأصفار نلاحظ أن عدد المستقيمات لا يساوي عدد الصفوف أو الأعمدة لذلك نقوم بتحديد أصغر رقم غير مغطى (1) وطرحه من الأرقام غير المغطاة (1,2,3,5,1,6) وإضافته إلى الأرقام الواقعة على نقاط التقاطع (1,4) و نحصل :

المكائن /	A	B	C	D
1	6	2	0	0
2	0	4	7	1
3	1	0	5	0
4	3	5	0	0

لما كان عدد المستقيمات = عدد الصفوف أصبح بالإمكان إجراء عملية التخصيص والتي تبدأ في الصف الذي يكون فيه الصفر وحده ثم نتبع الأصفار الأخرى.

الفني	الماكينة	الربح
1	C	7
2	A	8
3	B	6
4	D	0

مجموع العوائد =8+7+6+0=21

خامسا : تطبيقات مقترحة

التمرين الأول:

ماكينة

		I	II	III	IV	V
	A	15	10	25	25	10
	B	1	8	10	20	2
عامل	C	8	9	17	20	10
	D	14	10	25	27	15
	E	10	8	25	27	12

المطلوب : أحسب أحسن تخصيص للعمالة على مجموعة الماكينات والذي يحقق أقل تكلف طبقا للمعلومات المتوفرة في المصفوفة مستخدما كل من الطريقة الحل اليدوي والطريقة الهنغارية.

المراجع

قائمة المراجع

- أبو القاسم مسعود الشيخ، **بحوث العمليات**، المجموعة العربية للتدريب و النشر، القاهرة، مصر، الطبعة الثانية، 2013.
- اليمين فالتة، **بحوث العمليات**، إيتراك للنشر و التوزيع، الطبعة الأولى، القاهرة، مصر، 2006.
- جلال إبراهيم العبد، **استخدام الأساليب الكمية في اتخاذ القرارات الإدارية**، دار الجامعة الجديدة، الإسكندرية، مصر، 2004.
- حامد سعد نور الشمرتي، علي خليل الزبيدي، **مدخل إلى بحوث العمليات**، دار مجدلاوي للنشر و التوزيع، عمان، الأردن، الطبعة الأولى 2007.
- ريتشارد برونسون، **سلسلة ملخصات شوم نظريات ومسائل في بحوث العمليات**، ط4، الدار الدولية لاستثمارات الثقافية، مصر ، 2004.
- فتيحة بلجيلالي ،مطبوعة بعنوان: **رياضيات المؤسسة**، جامعة ابن خلدون، تيارت ، السنة الجامعية **2017 – 2018**
- صوار يوسف، طاوش قندوسي، **محاضرات في البرمجة الخطية – تمارين محلولة باستعمال برنامج Q.S.B**- كلية العلوم الاقتصادية التجارية و علوم التسيير، جامعة الدكتور الطاهر مولاي، سعيدة، ديوان المطبوعات الجامعية، وهران، الجزائر، دون سنة نشر.
- عبد الرزاق الموسوي، **المدخل لبحوث العمليات**، دار وائل للنشر، عمان، الأردن، الطبعة الثانية.
- محمد راتول، **بحوث العمليات**، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، الطبعة الثانية، 2006.
- محمد عبد العال النعيمي و آخرون، **بحوث العمليات**، دار وائل للنشر،عمان، الأردن، الطبعة الثانية، 2011.
- مكيد علي، **بحوث العمليات و تطبيقاتها الاقتصادية "نظرية الشبكات و مسائل النقل و التخصيص"**، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، 2016.
- مولاي بوعلام، **محاضرات وتطبيقات في بحوث العمليات**، جامعة ابن أكلي محند أولحاج، البويرة ، السنة الجامعية **2016 – 2017**.
- يحياوي إلهام، **محاضرات مقياس رياضيات المؤسسة**، كلية العلوم الاقتصادية، التجارية و علوم التسيير،جامعة الحاج لخضر، باتنة، دون سنة النشر.