

Remerciement

Louons dieu pour la générosité et la grâce innumérables et lui demander de nous faire qui a cherché la connaissance de la manière qui plaît à faire et de la remercier pour l'inspiration pour terminer ce travail modeste.

Remerciement au superviseur de enseignant " **TEDJANI HADJ AMMAR** " sur la supervision et la direction et ses efforts étaient la meilleur soutien

Remercie également le professeur " **Abdelaziz Azeb Ahmed** " unique de prêter un coup de main

Que ce soit de près au de loin et remercie nos familles collègues et amis et tous ceux qui possèdent la marque dans cette recherche.

Table des matières

Introduction	1
Notations et coventions	2
1 Formulation du problème et hypothèses	4
1.1 Formulation du problème et hypothèses	4
1.2 Hypothèses	5
1.3 Formilation variationnelle	7
2 Résultats d'existence et d'unicité	12
2.1 Résultats d'existence et d'unicité	12
3 ANNEXE	17
3.1 Rappels de mécanique des milieux continus	17
3.1.1 Contraintes et Déformations	17
3.1.2 Lios de comportement	18
3.1.3 Conditions aux Limites	20
3.2 Espaces fonctionnels	24
3.2.1 Espaces de Sobolev $H^1(\Omega)$	24
3.2.2 Espaces liés à l'opérateur déformation	25
3.2.3 Espaces liés à l'opérateur divergence	25

3.3	Analyse non linéaire dans les espaces de Hilbert.	26
3.3.1	Eléments d'analyse non-linéaire dans les espaces de Hilbert.	26
	Bibliographie	30

Introduction générale

On étudie, dans ce chapitre, un problème de contact avec frottement d'un corps déformable, sous l'action de forces volumiques et surfaciques, avec une base rigide.

De tels problèmes sont très fréquents en industrie et plus particulièrement dans les systèmes de transmissions et les moteurs. On suppose que les forces subies par le corps varient lentement dans le temps de façon à ce que les accélérations soient négligeables.

Ne pas considérer ainsi les termes inertiels dans les équations de mouvement conduit à l'étude de l'approximation statique du processus. La loi de comportement du matériau est considérée élastique non linéaire et le contact est avec frottement. On suppose possible le décollement du corps élastique par rapport à la base rigide. Les conditions aux limites de contact et de frottement sont modélisées respectivement par les conditions de signorini et la loi de frottement non locale de coulomb généralisée.

Le caractère non local provient du fait de la régularisation de la contrainte normale de contact.

Des résultats d'existence et d'unicité pour des problèmes de contact suivant une loi de frottement non locale. Dans ces travaux, la loi de comportement élastique considérée est linéaire. De plus, seule une formulation variationnelle en déplacement a été obtenue.

Dans ce qui suit, on considère le cas d'une loi de comportement élastique non linéaire et on remplace la loi de frottement étudiée par une loi plus générale. De plus, on obtient une seconde formulation variationnelle donnée en contrainte uniquement. Pour cette dernière formulation, on établit un nouveau théorème d'existence et d'unicité de la solution et on donne un résultat d'équivalence. On étudie aussi le comportement de la solution par rapport au coefficient de frottement.

Ce chapitre est structuré comme suit. On formule tout d'abord le modèle pour le processus (problème P) auquel on associe deux formulations variationnelles P_1 et P_2 .

Le problème P_1 est obtenu à partir du problème P en utilisant la formule de Green ainsi que la loi de comportement donnée. Puisque dans ce cas les contraintes sont éliminées, la seule inconnue du problème est le champ des déplacements noté u .

Le problème P_2 est obtenu aussi du problème en utilisant le fait que l'opérateur F est inversible.

Il est ainsi formulé uniquement à l'aide du champ des contraintes noté σ . Pour le problème P_1 , nous démontrons, lorsque le coefficient de frottement est assez petit, un résultat d'existence et d'unicité de la solution en utilisant un théorème d'existence et d'unicité sur les inéquations variationnelles avec des opérateurs fortement monotones et de Lipschitz ainsi que des propriétés de point fixe. Sous les mêmes hypothèses, nous prouvons un résultat d'existence et d'unicité de la solution pour le problème P_2 moyennant des arguments classiques d'inéquation variationnelles elliptiques ainsi que des propriétés de point fixe.

De plus, nous étudions le lien qui existe entre les problèmes variationnels P_1 et P_2 et nous montrons en particulier que si u est la solution du problème P_1 et σ la solution du problème P_2 , alors, en utilisant la notation $\varepsilon = \varepsilon(u)$ pour le champ de déformation

linéarisé, les champs σ et ε sont liés par la loi de comportement élastique non linéaire.

On précise que les résultats concernant ce chapitre ont fait l'objet d'un rapport interne et sont soumis pour publication.

Notations et conventions

\mathbb{N}	ensembles des entiers naturels.
\mathbb{R}	ensembles des nombres réels.
\mathbb{C}	constante réelle strictement positive.
∇_f	gradient de l'application f .
$\text{Div } f$	devergence de l'application f .
∂f	sous-différentiel de f .
S_N	l'espace des tenseurs symétriques du second order sur $\mathbb{R}^N = \mathbb{R}_S^{N \times N}$.
.	Produit scalaire sur \mathbb{R}^N ou S_N .
$ \cdot $	la norme euclidienne sur \mathbb{R}^N ou S_N .
$\ \cdot\ _x$	la norme sur l'espace X .
$\langle \cdot, \cdot \rangle_x$	le Produit scalaire sur l'espace X .
$x_n \rightarrow x$	la convergence fort de la suite (x_n) vers l'élément x dans H .
$x_n \rightharpoonup x$	la convergence faible de la suite (x_n) vers l'élément x dans H .
$\mathcal{L}(H)$	l'espace des applications linéaires et continues de H dans H . si H^1 et H^2 sont deux espaces de Hilbert réels, on note par
$\mathcal{L}(H^1, H^2)$	l'espace des application linéaire et continues de H^1 dans H^2 .
$\ \cdot\ _{\mathcal{L}(H^1, H^2)}$	la norme de $\mathcal{L}(H^1, H^2)$.
Ω	domaine occupé par le corps élastique.
$\bar{\Omega}$	l'adhérence de Ω .
Γ	la frontière de Ω supposée souvent régulière.
$\Gamma_i (i = \overline{1, 3})$	une partie de la frontière Γ .
ν	la normale unitaire sortante à Γ .
v_ν, v_τ	les composantes normale et tangentielle du champ Vectoriel v défin par $\bar{\Omega}$.
$L^\infty(\Omega)$	{ u mesurable sur Ω et il existe $C > 0$ telque $ u(x) \leq Cp.p.$ sur Ω }
p.p	presque partout.
$D'(\Omega)$	l'espace des disribution sur Ω .
$D = D^1 \times D^2$.	
$D = \mathcal{D}(\Omega)^N$.	
$H = L^2(\Omega)^N$.	
$H_1 = H_1(\Omega)^N$.	

$H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$	espace de Sobolev d'ordre $\frac{1}{2}$ sur Γ .
$\mathcal{H} = L^2(\Omega)_s^{N \times N}$	
$\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_1^1 \times \mathcal{H}_1^2$	
$H_1 = H_1^1 \times H_1^2$	
$\mathcal{H} = \mathcal{H}^1 \times \mathcal{H}^2$	
\mathcal{R}	l'ensemble des déplacements rigides .
$W^{m,p}(\Omega), H(\Omega)$	espace de Sobolev.
Φ	potentiel de dissipation.
G	module de cisaillemen
	Si de plus $[0, T]$ un intervalle de temp , $k \in \mathbb{N}$ et $1 \leq p \leq +\infty$, on note par
$C(0, T, H)$	l'espace des fonctions continues sur $[0, T]$ dans H .
$ \cdot _{0,H}$	la norme de $C(0, T, H)$
$C^1(0, T, H)$	l'espace des fonctions continues dérivables sur $[0, T]$ dans H .
$ \cdot _{1,H}$	la norme de $C^1(0, T, H)$.

Chapitre 1

Formulation du problème et hypothèses

1.1 Formulation du problème et hypothèses

Dans ce paragraphe, on considère le problème élastique suivant:

Problème P: Trouve les champs des déplacements $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$ et les champs des contraintes $\sigma : \Omega \rightarrow S_N$

$$\operatorname{Div} \sigma + f = 0 \quad \text{dans } \Omega \quad (1.1.1)$$

$$\sigma = \mathcal{F}(\varepsilon) \quad \text{dans } \Omega \quad (1.1.2)$$

$$u = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1 \quad (1.1.3)$$

$$\sigma_\eta = g \quad \text{sur } \Gamma_2 \quad (1.1.4)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) : u_\eta \leq 0, \sigma_\eta \leq 0, \text{ et } \sigma_\eta u_\eta = 0 \\ (b) : |\sigma_\tau| \leq (|\sigma_\eta|) \\ (c) : |\sigma_\tau| < \mu (|\sigma_\eta|) \implies u_\tau = 0 \quad \text{sur } \Gamma_3 \\ (d) : |\sigma_\tau| = \mu (|\sigma_\eta|) \implies \text{il existe } \lambda > 0 \text{ tel que } u_\tau = -\lambda \sigma_\tau \quad \text{sur } \Gamma_3 \end{array} \right. \quad (1.1.5)$$

Où σ_η désigne la contrainte normale, (ou pression de contact) $u_\eta = u^1 \eta^1 + u^1 \eta^1$ désigne l'arrête pour le saut relativement au champ du déplacement à trvers Γ_3 et $\sigma_\tau = \sigma \eta - \sigma_\eta \eta$ représente la composante tangentielle de contrainte. L'équation (1.1.1) représente la loi de comporment élastique , où \mathcal{F} est un opérateur linéaire ou de colomb , l'équation (1.1.2) représente l'équation d' équilibre où f désigne la densité des forces volumiques agissant sur le corps déformable occupant le domaine Ω , les relation (1.1.3) et (1.1.4) sont de conditions aux limites classiques des déplacements tractions. Les conditions aux limites (1.1.5) représentent les conditions de contact de signonrini avec frottement de coulomb sur Γ_3 .

1.2 Hypothèses

Pour étudier le problème P, on aura besoin des hypothèses suivantes:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{F} : \Omega \times S_N \rightarrow S_N \text{ et un opérateur tel que:} \\ \text{(a) : } \exists m > 0 : |\mathcal{F}(\varepsilon_1) - \mathcal{F}(\varepsilon_2)| \leq m |\varepsilon_1 - \varepsilon_2| : \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \Omega \times S_N \\ \text{(b) : } \exists L > 0 : (\mathcal{F}(\varepsilon_1) - \mathcal{F}(\varepsilon_2)) \cdot (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \geq L |\varepsilon_1 - \varepsilon_2|^2 : \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \Omega \times S \\ \text{(c) : } x \rightarrow \mathcal{F}(x, \varepsilon) \text{ est mesurable sur } \Omega \text{ pour tout } \varepsilon \in S_N \\ \text{(d) : } x \rightarrow \mathcal{F}(x, 0_N) \in \mathcal{H} \end{array} \right. \quad (1.2.1)$$

$$f \in H \quad (1.2.2)$$

$$g \in L^2(\Gamma_2)^N \quad (1.2.3)$$

Remarque 1.2.1 L'hypothèse (1.2.1) nous permet de considérer l'opérateur noté encore par \mathcal{F} défini par

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{F} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H} \\ \mathcal{F}(\varepsilon(\varkappa)) = \mathcal{F}(\varepsilon(\varkappa)) ; \quad \forall \varepsilon \in \mathcal{H} \quad p.p \varkappa \in \Omega \end{array} \right.$$

En effet , si $\varepsilon \in \mathcal{H}$ en utilisant (1.2.1.b.c), il résulte que $\varkappa \rightarrow \mathcal{F}(\varkappa, \varepsilon(\varkappa))$ est une fonction mesurable de Ω à valeur dans S_N et d'après (1.2.1.d), il résulte que $\varkappa \rightarrow \mathcal{F}(\varkappa, \varepsilon(\varkappa)) \in \mathcal{H}$.

On remarque également que ,d'après la relation ((1.2.1) .b) l'opérateur \mathcal{F} est un opérateur fortement monotone et de Lipschitz, car il satisfait aux intégralites :

$$|\mathcal{F}(\varepsilon_1) - \mathcal{F}(\varepsilon_2)|_{\mathcal{H}} \leq m |\varepsilon_1 - \varepsilon_2|_{\mathcal{H}} \quad : \quad \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathcal{H} \quad (1.2.4)$$

$$\langle \mathcal{F}(\varepsilon_1) - \mathcal{F}(\varepsilon_2), \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \rangle_{\mathcal{H}} \geq L |\varepsilon_1 - \varepsilon_2|_{\mathcal{H}}^2 \quad : \quad \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathcal{H} \quad (1.2.5)$$

Remarque 1.2.2 *Etant donnée que l'opérateur $\mathcal{F} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ est fortement monotone et de Lipschitz , l'opérateur \mathcal{F} est donc inversible et $(\mathcal{F})^{-1} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ est également fortement monotone et de Lipschitz.*

Remarque 1.2.3 *Les hypothèses (1.2.2) , (1.2.3) sont de régularité sur les données f, g tandis que le coefficient de frottement μ est tel que*

$$\mu \in L^\infty(\Gamma_3), \quad \mu(\varkappa) \geq 0 \text{ p.p. sur } \Gamma_3 \quad (1.2.6)$$

Pour l'étude du problème P , on considère le sous espace fermé V de H défini par :

$$V(\Omega) = \{\nu \in H : \nu = 0 \text{ sur } \Gamma_1\} \quad (1.2.7)$$

Sur V , on définit le produit scalaire suivant:

$$\langle \nu, \omega \rangle_\nu = \langle \varepsilon(\nu), \varepsilon(\omega) \rangle_{\mathcal{H}} \quad \forall \nu, \omega \in v \quad (1.2.8)$$

Lemme 1.2.1 *Si mes $\Gamma_1 > 0$ est un moyennant l'inégalité de Korn défini par:*

$$\|\varepsilon(\nu)\|_H \geq C \|\nu\|_{H_1}, \forall u \in \nu$$

muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_\nu$.

Lemme 1.2.2 *moyennant l'inégalité de Korn, on peut aisement vérifier que la norme sur notée $\| \cdot \|_\nu$ et la norme $\| \cdot \|_{H_1}$ sont équivalentes. On déduit alors que v muni du produit scalaire défini par (1.2.8) est un espace de Hilbert réel.*

Notons par l'élément Φ de v donné par

$$\langle \Phi, \nu \rangle_\nu = \langle f, \nu \rangle_H + \langle g, \nu \rangle_{L^2(\Gamma_2)^N} \quad \forall \nu \in V, \quad (1.2.9)$$

et soit $j : \mathcal{H}_1 \times V \rightarrow \mathbb{R}$ la fonctionnelle donnée par

$$j(\sigma, \nu) = \int_{\Gamma_3} \mu(|\sigma_\eta|) |\nu_\tau| da. \quad (1.2.10)$$

puisque σ_η est un élément de $L^2(\Gamma)$, moyennant (1.2.1) et (1.2.6) il s'ensuit que l'intégrale (1.2.10) est bien défini. En utilisant (1.2.1) et la continuité de \mathbb{R} on obtient

$$|j(\sigma, \nu)| \leq C \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \|\sigma\|_{\mathcal{H}_1} \|\nu\|_\nu \quad \forall \sigma \in \mathcal{H}_1, \nu \in V. \quad (1.2.11)$$

Finalement, on note par U_{ad} l'ensemble des "déplacements admissibles" défini par

$$U_{ad} = \{\nu \in H_1 \mid \nu = 0 \text{ sur } \Gamma_1, \nu_\eta \leq 0 \text{ sur } \Gamma_3\} \quad (1.2.12)$$

et pour tout $g \in \mathcal{H}_1$, soit $\sum_{ad}(g)$ l'ensemble des "contraintes admissibles" donné par

$$\sum_{ad}(g) = \{\tau \in \mathcal{H} \mid \langle \tau, \varepsilon(\nu) \rangle_{\mathcal{H}} + j(g, \nu) \geq \langle \Phi, \nu \rangle_\nu \quad \forall \nu \in U_{ad}\}. \quad (1.2.13)$$

1.3 Formulation variationnelle

Dans le paragraphe, on s'intéresse à la formulation variationnelle du problème considéré qui consiste dans une première formulation, notée P_1 , à trouver les champs des déplacements u tandis que dans la seconde formulation, notée P_2 , on cherche les champs des contraintes σ ces résultats sont dus au lemme suivant: La condition de contact avec frottement (1.1.5) est équivalente à :

$$\begin{cases} u_\eta \leq 0, \quad \sigma_\eta \leq 0, \quad \sigma_\eta u_\eta = 0 \\ |\sigma_\tau| \leq \mu(|\sigma_\eta|), \quad \text{sur } \Gamma_3 \\ u_\tau \cdot \sigma_\tau + \mu|u_\tau|(|\sigma_\tau|) = 0 \end{cases} \quad (1.3.1)$$

Preuve. (1.1.5) \Rightarrow (1.3.1) (évident). Montrons maintenant que (1.3.1) \Rightarrow (1.1.5).
Supposons donc que $u_\tau \cdot \sigma_\tau + \mu |u_\tau| (|\sigma_v|) = 0$ sur Γ_3 . Si $|\sigma_\tau| = \mu |\sigma_v|$ alors

$$u_\tau \cdot \sigma_\tau = -|u_\tau| |\sigma_\tau| \quad \text{sur } \Gamma_3.$$

On déduit alors qu'il existe $\lambda \succ 0$, tel que $u_\tau = -\lambda \sigma_\tau$.

$|\sigma_\tau| \prec \mu |\sigma_v|$ sur Γ_3 alors $0 = u_\tau \cdot \sigma_\tau + \mu |u_\tau| (|\sigma_v|) \geq -|u_\tau| |\sigma_\tau| + \mu |u_\tau| (|\sigma_v|) \geq |u_\tau| (\mu (|\sigma_v|) - |\sigma_\tau|)$
et Puisque $\mu (|\sigma_v|) - |\sigma_\tau| \succ 0$, on déduit alors que $u_\tau = 0$ sur Γ_3 . ■

La forme (1.3.1) est plus adaptée pour établir les formulations variationnelles du problème P. Pour ceci on a besoin du résultat suivant :

Lemme 1.3.1 *Si le couple de fonctions (u, ν) est une solution régulière (C^1) du problème P alors*

$$u \in U_{ad} \quad , \quad \sigma \in \sum_{ad} (\sigma) \quad (1.3.2)$$

$$\langle \sigma, \varepsilon(v) - \varepsilon(u) \rangle_{\mathcal{H}} + j(\sigma, v) + j(\sigma, u) \geq \langle \Phi, \nu - u \rangle_\nu \quad \forall v \in U_{ad} \quad (1.3.3)$$

$$\langle \tau - \sigma, \varepsilon(u) \rangle_{\mathcal{H}} \geq 0, \quad \forall \tau \in \sum_{ad} (\sigma) . \quad (1.3.4)$$

Preuve. [12] Soient $\nu \in U_{ad}$ en utilisant (1.1.1) on obtient

$\langle \sigma, \varepsilon(v) - \varepsilon(u) \rangle_{\mathcal{H}} = \langle f, \nu - u \rangle_H + \int_{\Gamma} \sigma_\eta (v - u) da$ et, moyennant (1.1.3), (1.1.4), (1.2.9), on obtient

$$\langle \sigma, \varepsilon(v) - \varepsilon(u) \rangle_{\mathcal{H}} = \langle \Phi, \nu - u \rangle_\nu + \int_{\Gamma_3} \sigma_\eta (v - u) da \quad (1.3.5)$$

En sachant que $\sigma_\eta v = \sigma_\eta v + \sigma_\tau \nu_\tau$, il résulte

$$\langle \sigma, \varepsilon(v) - \varepsilon(u) \rangle_{\mathcal{H}} = \langle \Phi, \nu - u \rangle_H + \int_{\Gamma_3} [\sigma_\eta (v_\eta - u_\eta) + \sigma_\tau (v_\tau - u_\tau)] da$$

En ajoutant $\int_{\Gamma_3} \mu (|\sigma_\eta|) (|v_\tau| - |u_\tau|) da$ dans chaque membre de l'égalité précédente et en utilisant des transformations élémentaires on obtient

$$\langle \sigma, \varepsilon(v) - \varepsilon(u) \rangle_{\mathcal{H}} + \int_{\Gamma_3} \mu (|\sigma_\eta|) (|v_\tau| - |u_\tau|) da - \langle \Phi, \nu - u \rangle_H = \quad (1.3.6)$$

$$\int_{\Gamma_3} [\sigma_\eta (v_\eta - u_\eta) + (\nu_\tau \sigma_\tau + \mu (|v_\tau|) (|\sigma_\eta|)) - (u_\tau \sigma_\tau + \mu (|u_\tau|) (|\sigma_\eta|))] da \quad (1.3.7)$$

Soit v appartenant à U_{ad} ; alors de (1.1.5) et de (1.2.12) on obtient que

$$\sigma_\eta (v_\eta - u_\eta) \geq 0, \quad (1.3.8)$$

$$\sigma_\tau v_\tau \geq -|\sigma_\tau| |v_\eta| \geq -\mu |v_\tau| (\sigma_\eta). \quad (1.3.9)$$

Cette dernière inégalité nous permet d'écrire

$$\sigma_\tau v_\tau + \mu |v_\tau| (\sigma_\eta) \geq 0. \quad (1.3.10)$$

L'inégalité (1.3.3) est maintenant la conséquence de (??), (1.3.8) et du lemme 1.1.3. De plus (1.1.3) et (1.1.5) implique $u \in U_{ad}$.

En posant maintenant $\nu = 2u \in U_{ad}$ puis $\nu = 0 \in U_{ad}$ dans (1.3.3) on obtient:

$$\langle \sigma, \varepsilon(u) \rangle_{\mathcal{H}} + j(u, u) = \langle \Phi, u \rangle_\nu, \quad (1.3.11)$$

et, en utilisant (1.3.11), (1.3.3) et (1.2.13), il résulte $\sigma \in \sum_{ad}(\sigma)$.

Soit maintenant $\tau \in \sum_{ad}(\sigma)$. Alors l'intégrale de (1.3.4) est à présent une conséquence de (1.3.11) et (1.2.13). ■

Le lemme (1.1.3) et la remarque (1.1.2) nous permettent, de donner deux formulations variationnelles pour le problème P:

Problème P₁: Trouve le champ des déplacements $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$ tel que

$$\begin{cases} u \in U_{ad}, & \langle \mathcal{F}(\varepsilon(u)), \varepsilon(v) - \varepsilon(u) \rangle_{\mathcal{H}} + \\ j(\mathcal{F}\varepsilon(u), v) - j(\mathcal{F}\varepsilon(u), u) \geq \langle \Phi, v - u \rangle_\nu \quad \forall v \in U_{ad}. \end{cases} \quad (1.3.12)$$

Problème P₂: Trouve le champ de contraintes $\sigma : \Omega \rightarrow S_N$ tel que

$$\sigma \in \sum_{ad}(\sigma) \quad , \quad \langle \tau - \sigma, (\mathcal{F})^{-1}(\sigma) \rangle_{\mathcal{H}} \geq 0 \quad \forall \tau \in \sum_{ad}(\sigma). \quad (1.3.13)$$

Remarque 1.3.1 Le lemme (1.1.2), nous permet de conclure facilement si (u, σ) est une solution régulière du problème P alors u est une solution du problème P₁ et σ est une solution du problème P₂

Dans la suite on s'intéresse à étudier le lien entre le problème variationnels qu'on a introduit et le problème P. on commence par

Théorème 1.3.1 [12] Pour $\sigma = \mathcal{F}(\varepsilon(u))$ et u est une solution du probleme P_1 alors (u, σ) est une solution du problème P.

Preuve. En prenant $v = u \pm \varphi \in U_{ad}$ pour tout $\varphi \in D(\Omega)^N$ dans l'inégalité (1.3.12) on obtient :

$$Div\sigma + f = 0 \quad \text{dans } \Omega$$

En utilisant alors (1.3.12), (1.2.10) et (??), on obtient:

$$\langle \sigma_\eta, (v - u) \rangle_{H'_\Gamma \times H_\Gamma} + \int_{\Gamma_3} \mu (|\sigma_\eta|) (|v_\tau| - |u_\tau|) da \geq \langle g, (v - u) \rangle_{L^2(\Gamma_2)^N} \quad \forall v \in U_{ad} \quad (1.3.14)$$

En prenant $v = u \pm \omega \in U_{ad}$ pour tout $\omega \in H_1$ telque $\omega = 0$ sur $\Gamma_1 \cup \Gamma_3$ dans (1.3.14), on pose ω on tire :

$$\sigma_\eta = g \quad \text{sur } \Gamma_2 \quad (1.3.15)$$

En prenant cette fois-ci $v = u + \omega \in U_{ad}$ pour tout $\omega \in H_1$ telque $\omega = 0$ sur $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ et $\omega_\tau = 0, \omega_\eta \leq 0$ sur Γ_3 dans (1.3.14), il résulte , en utilisant (1.3.15)

$$\sigma_\eta \leq 0 \quad \text{sur } \Gamma_3 \quad (1.3.16)$$

En prenant $v \in U_{ad}$ telque : $v_\tau = u_\tau$ et $v_\eta = 2u_\eta$ puis $v = 0 \in U_{ad}$ dans (1.3.14), et compte tenu de (1.3.15), (1.3.16) ainsi que du fait que $u \in U_{ad}$, on déduit que

$$\sigma_\eta u_\eta = 0 \quad \text{sur } \Gamma_3. \quad (1.3.17)$$

Si on pose maintenant $\sigma_\eta = u_\eta$ sur Γ_3 et on utilise (1.3.14) – (1.3.17), on obtient

$$\int_{\Gamma_3} (v_\tau \cdot \sigma_\tau + \mu |v_\tau| (|\sigma_\eta|)) da - \int_{\Gamma_3} (v_\tau \cdot \sigma_\tau + \mu |u_\tau| (|\sigma_\eta|)) da \geq 0. \quad (1.3.18)$$

En posant cette fois-ci $v_\tau = 2u_\tau$ puis $v_\tau = 0$ dans (1.3.18), on déduit que:

$$\int_{\Gamma_3} (u_\tau \cdot \sigma_\tau + \mu |u_\tau| (|\sigma_\eta|)) da = 0 \quad (1.3.19)$$

L'hypothèse (1.3.18) s'écrit alors

$$\int_{\Gamma_3} (v_\tau \cdot \sigma_\tau + \mu |v_\tau| (|\sigma_\eta|)) da \geq 0 \quad (1.3.20)$$

d'où, en choisissant dans (1.3.20) $v_\tau = -\sigma_\eta$, on tire

$$\int_{\Gamma_3} (-|\sigma_\tau|^2 + \mu |\sigma_\tau| (|\sigma_\eta|)) da \geq 0 \quad (1.3.21)$$

ce qui exprime que $-|\sigma_\tau|^2 + \mu |\sigma_\tau| (|\sigma_\eta|) \geq 0$ sur Γ_3 , c'est à dire $|\sigma_\tau| + \mu (|\sigma_\eta|)$. On a alors $-u_\tau \cdot \sigma_\tau \leq |u_\tau| |\sigma_\tau| \leq \mu |u_\tau| (|\sigma_\eta|)$ d'où

$$u_\tau \cdot \sigma_\tau + \mu |u_\tau| (|\sigma_\eta|) \geq 0 \quad \text{sur } \Gamma_3,$$

Ceci joint à (1.3.19) permet de déduire:

$$u_\tau \cdot \sigma_\tau + \mu |u_\tau| (|\sigma_\eta|) = 0 \quad \text{sur } \Gamma_3,$$

En utilisant le lemme (1.3.1) on obtient finalement les conditions aux limites pour le frottement

$$\begin{cases} |\sigma_\tau| \leq (|\sigma_\eta|) \\ |\sigma_\tau| < \mu (|\sigma_\eta|) \implies u_\tau = 0 \quad \text{sur } \Gamma_3. \\ |\sigma_\tau| = \mu (|\sigma_\eta|) \implies \text{il existe } \lambda > 0 \text{ tel que } u_\tau = -\lambda \sigma_\tau \quad \text{sur } \Gamma_3. \end{cases} \quad (1.3.22)$$

Ceci montre que toute solution régulière du problème P_1 est aussi solution du problème P . ■

Remarque 1.3.2 De la même manière, si σ représente une solution régulière de P_2 et $u \in \nu$ est défini par $\sigma = \mathcal{F}(\varepsilon(u))$, alors en utilisant les mêmes arguments que ceux utilisés dans la remarque (1.3.18), il vient que (u, σ) est solution du problème P . On peut donc considérer le problème P_1 et P_2 comme les formulations variationnelles du problème P .

Chapitre 2

Résultats d'existence et d'unicité

2.1 Résultats d'existence et d'unicité

Dans ce qui suit, on donne des résultats d'existence et d'unicité pour les problèmes variationnels p_1 et p_2 . Le premier résultat de ce paragraphe est le suivant:

Théorème 2.1.1 [10]: *Sous les hypothèses (1.2.1) – (1.2.6), il existe une constante $\mu_0 > 0$ dépendant de Ω, Γ, F et p tel que si $|\mu|_{L^\infty(\Gamma_3)} < \mu_0$ alors le problème variationnel p_1 possède une solution unique $u \in V$.*

Le problème variationnel p_1 n'est pas un problème de "type usuel". En effet, la fonctionnelle

$$j(\sigma, v) = \int_{\Gamma_3} \mu (|\sigma\eta|) |v_\tau| da$$

définie sur $H \times V$ dépend par l'intermédiaire du terme $(|\sigma\eta|)$ l'éventuelle solution de (1.3.12). On ne peut donc pas appliquer les théorèmes classiques d'existence et d'unicité pour les inéquations variationnelles elliptiques. Ainsi pour démontrer ce théorème on suppose dans une première étape que la régularisée de la contrainte de contact est donnée. Ceci nous permet d'introduire le problème intermédiaire de contact unilatéral avec loi non locale de frottement p_1^g où $g \in H_1$ est donné. La suite de la démonstration est basée essentiellement sur méthode de point Fixe similaire à celle utilisée dans [10]. Le point Fondamental de la démonstration est l'existence d'un point Fixe pour l'application définie de

H_1 dans H_1 par $g \rightarrow F(\varepsilon|u_g)$ ou u_g est la solution du problème intermédiaire suivant:

Problème intermédiaire p_1^g : Trouve le champ des déplacements $u_g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$ tel que

$$\begin{cases} u \in U_{ad}, \langle \mathcal{F}(\varepsilon(u_g)), \varepsilon(v) - \varepsilon(u_g) \rangle_H + \\ j(g, v) - j(g, u_g) \geq \langle \Phi, v - u_g \rangle, \forall v \in U_{ad}. \end{cases} \quad (2.1.1)$$

Remarque 2.1.1 Si on applique à (2.1.1) des techniques analogues à celles utilisées dans le paragraphe précédent, on trouve que les equations et conditions limites vérifiées par u_g différent simplement sur Γ_3 , où on peut les écrire de manière formelle :

$$\begin{cases} u_{g\eta} \leq 0, \sigma_{g\eta} \leq 0, \sigma_{g\eta} u_{g\eta} = 0, & |\sigma_{g\tau}| \leq g \\ |\sigma_{g\tau}| = g \implies \exists \lambda > 0, \text{ tel que } u_{g\tau} = -\lambda \sigma_{g\tau} \text{ sur } \Gamma_3. \\ |\sigma_{g\tau}| < g \implies u_{g\tau} = 0 \end{cases} \quad (2.1.2)$$

Ainsi le problème intermédiaire p_1^g est une formulation variationnelle du problème mécanique (1.1.2) – (1.1.4), (2.1.2) Enonçons maintenant le lemme suivant.

Lemme 2.1.1 Pour tout $g \in H_1$ le problème p_1^g possède une unique solution u_g .

De plus $\mathcal{F}(\varepsilon(u_g)) \in H_1$.

Preuve. Pour tout $w \in \nu$ Fixe, $v \rightarrow \langle \mathcal{F}(\varepsilon(w)), \varepsilon(v) \rangle_{\mathcal{H}}$ représente Fonctionnelle linéaire et continue sur ν , par conséquent en appliquant le théorème de représentation de Riez-Fréchet, on définit l'opérateur $A : \nu \rightarrow \nu$ tel que $\langle Aw, v \rangle_{\nu} = \langle \mathcal{F}(\varepsilon(w)), \varepsilon(v) \rangle_{\mathcal{H}} \forall w, v \in \nu$.

Moyennant (1.2.1) et l'inégalité de Korn, on déduit que l'opérateur A est Fortement monotone et de Lipschitz sur ν . De plus, utilisant (1.2.12) il résulte que U_{ad} est un ensemble Fermé, convexe et non Vide. Maintenant, de (1.2.10) et (1.2.11) on déduit $j(g, \cdot)$ est une Semi-norme continue sur ν . Grâce au théorème on obtient l'existence et l'unicité de la solution du lemme (2.1.1). De plus, on utilisant la remarque (1.1.2), on a $\mathcal{F}(\varepsilon(u_g)) \in \mathcal{H}$.

En posant $v = u_g \pm \varphi$ avec $\varphi \in D(\Omega)^N$ dans (2.1.1) il s'ensuit

$$\langle \mathcal{F}(\varepsilon(u_g)), \varepsilon(\varphi) \rangle_{\mathcal{H}} = \langle \Phi, \varphi \rangle_{\mathcal{H}} \forall \varphi \in D(\Omega)^N$$

et de (1.2.9) on déduit que

$$\text{Div}(\mathcal{F}_\varepsilon(ug)) + f = 0 \quad \text{dans } \Omega \quad (2.1.3)$$

La régularité de $\mathcal{F}(\varepsilon(u_g)) \in H$ est conséquence de (2.1.3) et 1.2.2. ■

Le lemme (1.2.3) nous permet de considérer l'opérateur $\Lambda : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_1$ défini par :

$$\Lambda_{1g} = F(\varepsilon(u_g)) \quad \forall g \in \mathcal{H}_1 \quad (2.1.4)$$

On a :

Lemme 2.1.2 *Il existe une constante $\mu_0 > 0$ dépendant de Ω, Γ, F et p tel que si $|\mu|_{L^\infty(\Gamma_3)} < \mu_0$ alors l'opérateur Γ_1 possède un point fixe unique $g^* \in \mathcal{H}_1$.*

Preuve. Soient $g_1, g_2 \in \mathcal{H}_1$ et soit u_i la Solution du problème $p_1^{g_i}, i = 1, 2$ en utilisation (2.1.1) et quelques transformations algébriques on obtient

$$\begin{cases} \langle \mathcal{F}(\varepsilon(u_1)) - \mathcal{F}(\varepsilon(u_2)), \varepsilon(u_1) - \varepsilon(u_2) \rangle_{\mathcal{H}} \leq \\ j(g_1, u_2) - j(g_2, u_1) + j(g_2, u_1) - j(g_2, u_2) \end{cases} \quad (2.1.5)$$

De plus, moyennant (1.2.1) et l'inégalité de Korn, on déduit que

$$\langle F(\varepsilon(u_1)) - F(\varepsilon(u_2)), \varepsilon(u_1) - \varepsilon(u_2) \rangle_{\mathcal{H}} \geq C(u_1 - u_2)_\nu^2 \quad (2.1.6)$$

On note aussi que $j(g_1, u_2) - j(g_1, u_1) + j(g_2, u_1) - j(g_2, u_2) = \int_{\Gamma_3} \mu [|g_{1\nu}| - |g_{2\nu}|] [|u_{1\tau}| - |u_{2\tau}|] da$

De ce qui précède et en utilisant (1.2.3) il vient

$$j(g_1, u_2) - j(g_1, u_1) + j(g_2, u_1) - j(g_2, u_2) \leq C |\mu|_{L^\infty(\Gamma_3)} |g_1 - g_2|_{\mathcal{H}_1} |u_1 - u_2|_\nu. \quad (2.1.7)$$

En utilisant maintenant (2.1.5) – (2.1.7) on aboutit à

$$|u_1 - u_2|_\nu \leq C |\mu|_{L^\infty(\Gamma_3)} |g_1 - g_2|_{\mathcal{H}_1}. \quad (2.1.8)$$

Le lemme (2.1.1) et la conséquence de (2.1.4), (1.2.1), (2.1.8) et du théorème du point fixe de Banch ■

Preuve. du théorème. Soit $|\mu|_{L^\infty(\Gamma_3)} < \mu_0$ et soit g^* le point fixe de l'opérateur Λ_1 .

On note par u^* la solution du problème variationnel $P_1^{g^*}$ pour $g = g^*$.

En utilisant (2.1.1) et (2.1.4) on obtient que u^* est une solution de (1.3.12). L'unicité du point fixe de l'opérateur Λ_1 donné par (2.1.4) .

On énonce maintenant un second résultat d'existence et d'unicité concernant le problème Variationnel P_2 . ■

Théorème 2.1.2 [10] *Supposons que les hypothèses (1.2.1) – (1.2.6) sont satisfaites et soit $\mu_0 \succ 0$ la constante définie dans le théorème (2.1.1) . Alor si $|\mu|_{L^\infty(\Gamma_3)} \prec \mu_0$, le problème P_2 possède une solution unique .*

La démonstration du théorème (2.1.1) sera établie en plusieurs étapes . On suppose dans la suite que les hypothèses du théorème (2.1.1) sont vérifiées.

Dans la première étape Soit $g \in \mathcal{H}_1$ et considérons le problème variationnel suivant .

Problème intermédiaire P_2^g : Trouver $\sigma_g : \Omega \rightarrow S_N$ tel que

$$\sigma_g \in \sum (g) \quad , \quad \langle F^{-1}(\sigma_g), \tau - \sigma_g \rangle_{\mathcal{H}} \geq 0 \quad \forall \tau \in \sum (g) . \quad (2.1.9)$$

On a le résultat suivant:

Lemme 2.1.3 *Le problème P_2^g possède une unique solution σ_g . De plus , $\sigma_g \in \mathcal{H}_1$.*

Preuve. On remarque , d'après (1.2.8), que $\varepsilon(f) \in \sum (g)$. De plus , en utilisant (1.2.13), il résulte que $\sum (g)$ est un sous ensemble convexe , fermé , non vide de \mathcal{H} . L'existence et l'unicité de la solution du lemme (2.1.1) résulte de la remarque (1.1.2) . De plus , en posant $v = \pm \varphi$ où $\varphi \in D(\Omega)^N$ dans (1.2.13) et sachant que $\sigma_g \in \sum (g)$ on déduit alors

$$Div \sigma_g + f = 0 \quad \text{p.p dans } \Omega \quad (2.1.10)$$

La régularité $\sigma_g \in \mathcal{H}_1$ est maintenant une conséquence de (2.1.10) et (1.2.2) . ■

Le lemme (2.1.1) nous permet de considérer l'opérateur $\Lambda_2 : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_1$ défini par:

$$\Lambda_2 g = \sigma_g \quad \forall g \in \mathcal{H}_1 . \quad (2.1.11)$$

On a le résultat suivant:

Lemme 2.1.4 *Soient Λ_1 et Λ_2 les opérateurs définis par (2.1.4) et (2.1.11) respectivement . Alors on a.*

$$\Lambda_1 g = \Lambda_2 g \quad \forall g \in \mathcal{H}_1 \quad (2.1.12)$$

Preuve. Soit $g \in \mathcal{H}_1$ et soit

$$\tilde{\sigma}_g = \Lambda_1 g \quad (2.1.13)$$

En utilisant (2.1.1), (2.1.13) et (2.1.4) on obtient

$$\langle \tilde{\sigma}_g, \varepsilon(v) - \varepsilon(u_g) \rangle_{\mathcal{H}} + j(g, v) - j(g, u_g) \geq \langle \Phi, v - u_g \rangle_{\nu} \quad \forall v \in U_{ad}. \quad (2.1.14)$$

En posant $v = 2u_g$ puis $v = 0$ dans l'inéquation précédente on déduit

$$\langle \tilde{\sigma}_g, \varepsilon(u_g) \rangle_{\mathcal{H}} + j(g, u_g) = \langle \Phi, u_g \rangle_{\nu}. \quad (2.1.15)$$

En utilisant maintenant (2.1.14) et (2.1.15) on déduit

$$\langle \tilde{\sigma}_g, \varepsilon(v) \rangle_{\mathcal{H}} + j(g, v) \geq \langle \Phi, v \rangle_{\nu} \quad \forall v \in U_{ad}$$

ce qui implique

$$\tilde{\sigma}_g \in \sum(g) \quad (2.1.16)$$

Soit maintenant $\tau \in \sum(g)$. Moyennant (2.1.15) et (1.1.1) on obtient

$$\langle \tau - \tilde{\sigma}_g, \varepsilon(u_g) \rangle_{\mathcal{H}} \geq 0.$$

De (2.1.4) et (2.1.13) il s'ensuit que

$$\langle \tau - \tilde{\sigma}_g, F^{-1}(\tilde{\sigma}_g) \rangle_{\mathcal{H}} \geq 0$$

Ainsi, on montré que

$$\langle F^{-1}(\tilde{\sigma}_g), \tau - \tilde{\sigma}_g \rangle_{\mathcal{H}} \geq 0 \quad \forall \tau \in \sum(g). \quad (2.1.17)$$

Moyennant (2.1.16), (2.1.17) et la partie unicité du lemme (2.1.1) on déduit

$$\tilde{\sigma}_g = \sigma_g \quad (2.1.18)$$

Le lemme (2.2.1) est une conséquence de (2.1.13), (2.1.18) et (2.1.11) ■

Preuve. du théoreme 2.1.1

Soit $|\mu|_{L^\infty(\Gamma_3)} \prec \mu_0$ et soit g^* le point fixe de l'opérateur Λ_1 donné par (2.1.11) Le lemme(2.2.2) on obtient que g^* et l'unique point fixe de l'opérateur Λ_2 donné par (1.2.6). Soit maintenant $\sigma^* = \sigma_g^*$. On a $g^* = \sigma^*$ et moyennant (2.1.9) on obtient que σ^* est la solution de (1.3.13). La partie unicité du théoreme (2.1.1) est déduite l'unicité du point fixe de l'opérateur Λ_2 donné par (2.1.11) (voir les lemme (2.2.2) et (2.1.1)). ■

Chapitre 3

ANNEXE

3.1 Rappels de mécanique des milieux continus

Il s'agit dans cette section de présenter quelques rappels de mécanique des milieux continus.

3.1.1 Contraintes et Déformations

On considère un corps déformable occupant un domaine Ω de \mathbb{R}^N ($N=1,2,3$), de frontière $\partial\Omega = \Gamma$ supposée assez régulière. Nous étudions, dans un intervalle de temps $[0, T]$, l'évolution du corps matériel due à l'application de forces de volumes

$$\rho \ddot{u} = \text{Div } \sigma + f \quad \text{dans } \Omega \times (0, T) \quad (3.1.1)$$

ou les inconnues du problème sont

- le champ des déplacements $u : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^N$
- le champ des contraintes $\sigma : \Omega \times [0, T] \rightarrow S_N$

Dans (3.1.1) $S_N = \mathbb{R}^{N \times N}$ est l'espace des tenseurs symétrique du second ordre sur \mathbb{R}^N . " \ddot{u} " (respectivement " \dot{u} ") représente la dérivée seconde (respectivement première) du champ des déplacements par rapport au temps (respectivement première) et $\text{Div } \sigma$ est la divergence du champ des contraintes. Les fonctions densité de mass $\rho : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$ et la densité des forces volumiques

$f : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^N$ sont des données du problème.

Les processus d'évolution modélisés par l'équation (3.1.1) s'appellent *processus dynamiques*.

Dans certaines situations, l'équation (3.1.1) peut encore se simplifier. Par exemple dans le cas où $\dot{u} = 0$, il s'agit d'un problème d'équilibre (processus statiques), ou bien dans le cas où le champ des vitesses \dot{u} varie très lentement par rapport au temps, c'est-à-dire que le terme $\rho\ddot{u}$ peut être négligé (processus quasistatiques).

Dans ces deux cas l'équation (3.1.1) devient:

$$\text{Div}\sigma + f = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega \times (0, T) \quad (3.1.2)$$

Dans la suite, on va considérer des solides élasto-viscoplastiques dans le cadre des petites transformations. Dans ce cas, on a besoin du champ des déformations linéarisé $\varepsilon : \Omega \times [0, T] \rightarrow S_N$ défini par :

$$\varepsilon = (\varepsilon_{ij}) \quad , \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\partial_j u_i + \partial_i u_j) \quad \text{dans} \quad \Omega \times (0, T) \quad (3.1.3)$$

où ∂_k représente l'opérateur de dérivation partielle par rapport à la variable x_k . On précise en outre qu'on adopte la convention de l'indice muet. Souvent, pour marquer la dépendance du champ des déformations ε par rapport au champ des déplacements u , on va le noter $\varepsilon(u)$. Remarquons aussi que dans l'étude des processus statiques le temps n'intervient pas et sont satisfaites en Ω au lieu $\Omega \times (0, T)$.

Les équations précédentes sont insuffisantes à elles seules pour décrire les mouvements des milieux continus. En effet, il reste à décrire ce qui est propre au matériau lui-même. C'est l'objet des lois de comportement que nous décrivons dans la section suivante.

3.1.2 Lois de comportement

Les lois de comportement caractérisent le comportement de chaque type de milieu continu. Bien qu'elles doivent respecter certaines propriétés d'invariance, leur origine est souvent expérimentale et c'est toute une série d'essais qu'il faut imaginer et réaliser pour établir une loi de comportement. Nous présentons ci-dessous les lois de comportement élasto-viscoplastique traitées dans cette thèse.

Dans la suite, nous envisageons d'étudier trois catégories particulières de matériaux.

a) **Matériaux élastique**

La loi comportement est de la forme

$$\sigma = \mathcal{F}(\varepsilon) \quad (3.1.4)$$

ou \mathcal{F} est une application linéaire. Cette loi peut modeler quelques propriétés mises en évidence par les expériences de chargement monotone : linéarité de la courbe $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ (suivant que \mathcal{F} soit monotone ou non). Par contre, ni le fluage, ni la relaxation ne peuvent être décrits par la loi(3.1.4). En effet, si par exemple à l'instant $t = 0$ on a $\varepsilon(0) = \varepsilon_0$ et on maintient la déformation constante $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \forall t \succ 0$ il résulte $\sigma(t) = \mathcal{F}(\varepsilon_0) \forall t \succ 0$. Par conséquent le modèle(3.1.4) ne peut pas décrire le phénomène de relaxation mis en évidence par les essais expérimentaux. De même, pour l'équation (3.1.4) les courbes charge-décharge $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ coïncident. Ce modèle ne peut donc pas décrire les déformations résiduelles ce qui justifie l'introduction d'autres lois constitutives capables de modéliser ces phénomènes.

b) **Matériaux viscoplastique**

La loi de comportement est de la forme

$$\dot{\sigma} = \varepsilon \dot{\varepsilon} + G(\sigma, \varepsilon) \quad (3.1.5)$$

où ε est un tenseur d'ordre quatre et G est une fonction constitutive. Les lois de comportement (3.1.5) s'appellent lois *viscoplastique semilinéaires*. On peut aussi envisager d'autres lois plus compliquées, par exemple des lois de la forme (3.1.5) où $\varepsilon = \varepsilon(\sigma, \varepsilon)$ (*loi viscoplastique quasulinéaires*). Des détails et exemples concernant les lois de comportement de la forme (3.1.5).

On suppose toujours que ε est un tenseur inversible. Les tenseurs $\dot{\sigma}$ et $\dot{\varepsilon}$ jouent donc des rôles symétriques dans l'équation(3.1.5). Plus précisément (3.1.5) est équivalente à l'équation;

$$\dot{\varepsilon} = \tilde{\varepsilon} \dot{\sigma} + \tilde{G}(\sigma, \varepsilon) \quad (3.1.6)$$

où $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon^{-1}$ et $\tilde{G} = -\varepsilon^{-1}G$.

Dans le cas où la fonction G est de la forme :

$$G(\sigma, \varepsilon) = -k(\sigma - \mathcal{F}(\varepsilon)) \quad (3.1.7)$$

où $k \succ 0$ est une constante dite constante de viscosité et \mathcal{F} une fonction constitutive, la loi de comportement (3.1.5) est dite *viscoélastique*.

Regardons quelques exemples de lois viscoplastiques ou viscoélastiques, dans le cas unidimensionnel. La loi de comportement (3.1.5.) devient alors :

$$\dot{\sigma} = E \dot{\varepsilon} + G(\sigma, \varepsilon) \quad (3.1.8)$$

où $E \succ 0$ est le module de Young, $\sigma, \varepsilon : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ et

$G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. En prenant une contrainte constante $\sigma(t) = \sigma_0$ pour tout $t \in [0, T]$, (3.1.8) implique $\dot{\varepsilon}(t) = -\frac{1}{E}G(\sigma_0, \varepsilon(t))$. En supposant alors que $\varepsilon(0) = \varepsilon_0$ et $G(\sigma_0, \varepsilon_0) \prec 0$, on obtient que la déformation ε croît dans un voisinage de $t = 0$. Ceci implique qu'à l'état $(\sigma_0, \varepsilon_0)$ l'équation (3.1.8) admet la propriété de *fluge*. En prenant maintenant un état $(\sigma_0, \varepsilon_0)$ tel que $G(\sigma_0, \varepsilon_0) \prec 0$ et une déformation constante $\varepsilon(t) = \varepsilon_0$ pour tout $t \in [0, T]$, (3.1.8) implique $\dot{\sigma}(t) = G(\sigma(t), \varepsilon_0)$. On obtient alors que la contrainte σ décroît dans un voisinage de $t = 0$. Ceci implique qu'à l'état $(\sigma_0, \varepsilon_0)$, l'équation (3.1.8) admet la propriété de *relaxation*.

3.1.3 Conditions aux Limites

Supposons maintenant que la frontière du domaine est constituée de trois parties disjointes deux à deux :

$\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$, $\Gamma_i \cap \Gamma_j = \emptyset$ pour $i \neq j$. Soit ν le vecteur unitaire extérieur à Γ . Pour simplifier, nous nous plaçons dans le cas statique et par conséquent le temps n'interviendra pas par la suite.

On considère les conditions aux limites suivantes :

$$u = \xi \quad \text{sur} \quad \Gamma_1 \quad (3.1.9)$$

$$\sigma \nu = g \quad \text{sur} \quad \Gamma_2. \quad (3.1.10)$$

La condition (3.1.9) est appelée *condition aux limites* de déplacement. Sa signification consiste en ce que le champ des déplacements est imposé sur la partie Γ_1 de la frontière Γ , la

fonction ξ étant une donnée du problème (par exemple, si $\xi = 0$ le solide est encastré par la partie Γ_1 de sa frontière dans une structure fixe).

La condition (3.1.10) est appelée *condition aux limites* de traction. Elle signifie que le vecteur des contraintes de Cauchy $\sigma\nu$ est imposé sur la partie Γ_2 de la frontière, g représentant la densité des forces appliquées de surface et constituant une donnée du problème.

Si $\Gamma_1 = \emptyset$ le problème aux limites est problème de traction pure et si $\Gamma_2 = \emptyset$ le problème aux limites est un problème de déplacement pur. Si les parties Γ_1 et Γ_2 sont toutes les deux de mesure Lebesgue $N-1$ dimensionnelle strictement positive le problème considéré est un *problème mixte de déplacement – traction*.

On suppose maintenant que le corps est en contact avec une base rigide S par la partie Γ_3 de la frontière.

On note par v_ν et v_τ la composante normale et respectivement tangentielle de tout champ vectorielle $v = v_\nu\nu + v_\tau$ où $v_\nu = v \cdot \nu$. De même, soit σ_ν et σ_τ la composante normale et respectivement tangentielle du tenseur des contraintes de Cauchy $\sigma\nu$. Il vient : $\sigma_\nu = (\sigma\nu)_\nu$, $\sigma_\tau = (\sigma\nu)_\tau$ sur Γ_3 . Nous considérons les conditions aux limites suivantes :

a) **Conditions de contact sans frottement**

On dit que le contact entre le corps et la base rigide S est sans frottement, si les mouvements tangentiels sont libres, ce qui se traduit par

$$\sigma_\tau = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_3. \quad (3.1.11)$$

Puisque S représente une base rigide, elle ne subira donc pas de déformations. Le corps ne pourra donc pas y pénétrer. Cette propriété se traduit mathématiquement par l'inégalité

$$u_\nu = u \cdot \nu \leq 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_3. \quad (3.1.12)$$

Aux points de Γ_3 tels que $u_\nu < 0$, le corps déformable quitte la base rigide. Les contraintes normales y sont alors nulles. Par conséquent, on a

$$u_\nu < 0 \implies \sigma_\nu = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_3. \quad (3.1.13)$$

Aux points de Γ_3 tels que $u_\nu = 0$, on suppose que la base rigide S exerce une réaction inconnue suivant la direction de la normale et orientée vers Ω . On a :

$$u_\nu = 0 \implies \sigma_\nu \leq 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_3. \quad (3.1.14)$$

pour résumer, les conditions de contact. (3.1.9) – (3.1.12) s'écrivent d'une manière combinée de la façon suivante :

$$u_\nu \leq 0, \quad \sigma_\nu \leq 0, \quad \sigma_\tau = 0, \quad \sigma_\nu u_\nu = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_3. \quad (3.1.15)$$

Les conditions aux limites de contact de la forme (3.1.15) sont aussi appelés *conditions de contact de Signorini*. Dans le quasistatique ces conditions sont vérifiées sur $\Gamma_3 \times (0, T)$ où $T > 0$ est l'intervalle de temps.

Les conditions de contact de Signorini (3.1.15) modélisent le contact d'un corps déformable avec une base rigide. On peut envisager donc des conditions de contact d'un corps déformable avec une base déformable. On va en citer un exemple qui se présentent comme des conditions aux limites régularisées des conditions de Signorini (3.1.15). Plus précisément, sur les parties Γ_1 et Γ_2 , on impose les conditions aux limites de déplacement-traction alors que sur la partie Γ_3 , on suppose :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_\nu = 0 \quad \text{si} \quad u_\nu < 0 \\ -h < \sigma_\nu < 0 \quad \text{si} \quad u_\nu = 0 \\ \sigma_\nu = -h \quad \text{si} \quad u_\nu > 0 \end{array} \right. , \quad \sigma_\tau = 0 \quad (3.1.16)$$

où $h > 0$ est un paramètre destiné à tendre vers l'infini. On remarque que les conditions aux limites (3.1.16) tendent formellement vers les conditions aux limites de Signorini (3.1.15) quand le paramètre h tend vers l'infini.

b) Conditions de contact avec frottement

Nous présentons dans ce qui suit quelques exemples de lois de frottement. Nous nous bornons au cas statiques utilisé notamment en modélisations des processus de chargement monotone (vois aussi [2], [5]).

Exemple 3.1.1 Loi de TRESCA.

On suppose que le contact entre le corps et la fondation est bilatéral (le contact est maintenu pendant le mouvement). Cette propriété se traduit mathématiquement par

$$u_\nu = 0 \quad \text{sur } \Gamma_3.$$

La loi de Tresca présente un seuil de glissement fixe p : lorsque solide et la fondation sont en contact, la fondation exerce sur le solide un effort tangentiel qui ne dépasse pas un certain seuil :

$$|\sigma_\tau| \leq p \quad \text{sur } \Gamma_3.$$

Tant que la contrainte tangentielle n'a pas atteint le seuil, le milieu continu ne peut pas se déplacer par rapport à l'obstacle et il y a blocage, ce qui se traduit par :

$$|\sigma_\tau| < p \implies u_\tau = 0 \quad \text{sur } \Gamma_3.$$

Lorsque ce seuil est atteint le, solide peut se déplacer tangentiellement par rapport à la fondation et il y a alors glissement. La contrainte tangentielle tend à s'opposer au déplacement. Par conséquent, on a :

$$|\sigma_\tau| = p \implies \text{il existe } \lambda \geq 0 \text{ tel que } \sigma_\tau = -\lambda u_\tau \quad \text{sur } \Gamma_3.$$

Les conditions aux limites de type frottement de Tresca s'écrivent alors comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_\nu = 0 \\ |\sigma_\tau| \leq p \\ |\sigma_\tau| < p \implies u_\tau = 0 \\ |\sigma_\tau| = p \implies \text{il existe } \lambda \geq 0 \text{ tel que : } \sigma_\tau = -\lambda u_\tau \end{array} \right. \quad (3.1.17)$$

où p est le seuil de glissement.

Exemple 3.1.2 *loi de COULOMB.*

C'est une des lois le plus répandues et elle est plus réaliste que la précédente. Elle se caractérise par l'intervention de la contrainte normale dans le seuil de glissement et peut s'annoncer comme suit :

$$\begin{cases} |\sigma_\tau| \leq \mu |\sigma_\nu| \\ |\sigma_\tau| < \mu |\sigma_\nu| \implies u_\tau = 0 \\ |\sigma_\tau| = \mu |\sigma_\nu| \implies \text{il existe } \lambda \geq 0 \text{ tel que } \sigma_\tau = -\lambda u_\tau \end{cases} \quad (3.1.18)$$

où μ est le coefficient de frottement.(3.1.18) on rajoute des conditions aux limites de contact bilatéral ($u_\nu = 0$) ou unilatéral($u_\nu \leq 0$, $\sigma_\nu \leq 0$, $\sigma_\tau = 0$, $\sigma_\nu u_\nu = 0$ sur Γ_3).

La loi de Coulomb est souvent utilisée pour les corps rigides ou élastiques. On remarque également qu'il s'agit d'une loi à seuil, tant que le seuil n'est pas atteint, il n'y a pas de glissement. Ce seuil est variable et dépend de la contrainte normale ce qui représente une difficulté majeure pour l'étude mathématique de cette loi de frottement, (voir par exemple[2], [5]).

3.2 Espaces fonctionnels

On introduit dans cette section des espaces du type Sobolev utilisés en mécanique et associés aux opérateur divergence et déformation.On présent de plus leurs principales propriétés, notamment les théorèmes detrace.On rappelle aussi queques espaces définis sur un intervalle réel et à valeurs dans un espace de Hilbert. On adopte ici la convention de l'indice meuet et on précise aussi que toutes les notation ainsi que les espaces fonctionnels utilisés dans cette thèse sont introduits dans cette section. En outre,dans la rédaction de cette section nous avonssuivi

3.2.1 Espaces de Sobolev $H^1(\Omega)$

défini par:

$$H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) \mid \partial_i u \in L^2(\Omega), i = \overline{1, N}\}.$$

L'espace $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert réel pour le produit scalaire

$$\langle u, v \rangle_{H^1(\Omega)} = \langle u, v \rangle_{L^2(\Omega)} + \langle \partial_i u, \partial_i v \rangle_{L^2(\Omega)} \quad \forall u, v \in H^1(\Omega)$$

On notera la norme associée par $|\cdot|_{H^1(\Omega)}$.On note de plus par $H_0^1(\Omega)$ l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$.L'espace $H_0^1(\Omega)$ est un espace fermé de $H^1(\Omega)$.

3.2.2 Espaces liés à l'opérateur déformation

pour l'opérateur déformation , il est naturel d'introduire l'espace

$$H_1 = \{u \in H \mid \varepsilon(u) \in \mathcal{H}\}$$

On considère sur H_1 le produit scalaire

$$\langle u, v \rangle_{H_1} = \langle u, v \rangle_H + \langle \varepsilon(u), \varepsilon(v) \rangle_{\mathcal{H}} \quad \forall u, v \in H_1$$

et On note la norme associée par $|\cdot|_{H_1}$. On obtient ainsi que l'injection $H_1 \subset H$ et l'opérateur déformation

$\varepsilon : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ sont des opérateurs continus. De même, compte tenu de l'identification de H et \mathcal{H} à des sous -espaces de \mathcal{D}' et \mathcal{D}

$$\langle \varepsilon(u), \phi \rangle_{\mathcal{D}' \times \mathcal{D}} + \langle u, Div \phi \rangle_H = 0 \quad \forall u \in H, \phi \in \mathcal{D} \quad (3.2.1)$$

$$\langle \varepsilon(u), \phi \rangle_{\mathcal{H}} + \langle u, Div \phi \rangle_H = 0 \quad \forall u \in H_1, \phi \in \mathcal{D}. \quad (3.2.2)$$

3.2.3 Espaces liés à l'opérateur divergence

comme dans le cas de l'opérateur déformation, il est naturel d'introduire l'espace \mathcal{H}_1 lié à l'opérateur divergence et défini par

$$\mathcal{H}_1 = \{\sigma \in \mathcal{H} \mid Div \sigma \in H\}$$

sur lequel on considère le produit scalaire

$$\langle \sigma, \tau \rangle_{\mathcal{H}_1} = \langle \sigma, \tau \rangle_{\mathcal{H}} + \langle Div \sigma, Div \tau \rangle_H \quad \forall \sigma, \tau \in \mathcal{H}_1.$$

On note la norme associée par $|\cdot|_{\mathcal{H}_1}$. On obtient ainsi que l'injection $\mathcal{H}_1 \subset \mathcal{H}$ et l'opérateur divergence $Div \sigma : \mathcal{H}_1 \longrightarrow H$ sont des opérateurs continus. De plus, compte tenu de l'identification de H et \mathcal{H} à des sous -espaces de \mathcal{D}' et \mathcal{D} .

$$\langle Div \sigma, \varphi \rangle_{\mathcal{D}' \times \mathcal{D}} + \langle \sigma, \varepsilon(\varphi) \rangle_{\mathcal{H}} \quad \forall \sigma \in \mathcal{H} \quad \varphi \in D. \quad (3.2.3)$$

$$\langle Div \sigma, \varphi \rangle_H + \langle \sigma, \varepsilon(\varphi) \rangle_{\mathcal{H}} = 0 \quad \forall \sigma \in \mathcal{H}_1, \quad \varphi \in D. \quad (3.2.4)$$

3.3 Analyse non linéaire dans les espaces de Hilbert.

Nous rappelons dans cette partie quelques éléments d'analyse non linéaire dans les espaces de Hilbert, et sur les opérateurs fortement monotones, et particulièrement des résultats d'existence et d'unicité concernant les inéquations variationnelles elliptiques, et à la présentation du théorème de Cauchy-Lipchitz.

3.3.1 Éléments d'analyse non-linéaire dans les espaces de Hilbert.

Dans cette section on présente des résultats d'existence et d'unicité concernant les équations variationnelles elliptiques, les équations d'évolution et les équations différentielles ordinaires dans les espaces de Hilbert.

Rappels sur les espaces de Hilbert.

Soit H un espace vectoriel réel et $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$ un *produit scalaire* sur H c'est à dire $\langle \cdot, \cdot \rangle_H : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ est une application bilinéaire symétrique et définie positive. On note par $|\cdot|_H$ l'application de $H \rightarrow \mathbb{R}_+$ définie par

$$|u|_H = \langle u, u \rangle_H^{\frac{1}{2}} \quad (3.3.1)$$

et on rappelle que $|\cdot|_H$ est une *norme* sur H qui vérifie *l'inégalité de Cauchy-Schwartz*

$$\langle u, v \rangle_H \leq |u|_H |v|_H \quad \forall u, v \in H \quad (3.3.2)$$

On dit que H est un espace de Hilbert si H est complet pour la norme définie par (3.3.1).

Dans la suite, H désigne un espace de Hilbert réel muni de son produit scalaire ainsi que de la norme associée notés respectivement par $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$ et $|\cdot|_H$. On note aussi par H' l'espace

dual de H c'est à dire l'espace des fonctionnelles linéaires et continues sur H muni de la norme

$$|\eta|_{H'} = \sup_{\substack{v \in H \\ v \neq 0_H}} \frac{\langle \eta, v \rangle_{H' \times H}}{|v|_H}$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H' \times H}$ représente la dualité entre H' et H .

Théorème (Théorème de représentation de Reisz-Fréchet) :

Etant donné $\eta \in H'$, il existe $f \in H$ unique tel que

$$\langle \eta, v \rangle_{H' \times H} = \langle f, v \rangle_H \quad \forall v \in H \quad (3.3.3)$$

On a de plus

$$|\eta|_{H'} = |f|_H \quad (3.3.4)$$

Ce théorème montre que toute forme linéaire continue sur H peut se représenter de manière unique à l'aide du produit scalaire. L'application $\eta \rightarrow f$ est un isomorphisme isométrique qui permet d'identifier H et son dual H' .

Théorème de Banach. (point fixe) : Soit X un espace de Banach, K est un ensemble fermé et non vide de X . On suppose que $\Lambda : K \rightarrow K$

1) Λ est une contraction, i.e $\exists \alpha \in (0, 1)$.

$$\|\Lambda u - \Lambda v\| \leq \alpha \|u - v\| \quad \forall u, v \in K.$$

Donc il existe une solution unique $u \in K$ de l'équation $\Lambda u = u$, i.e

1) Λ a un point fixe unique dans K .

2) Λ^m est une contraction pour m un entier positif, donc Λ admet un point fixe unique dans K .

Soit maintenant $a : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire sur $H \times H$, la forme a est dite

1) *Continue* s'il existe un réel $M > 0$ tel que

$$|a(u, v)| \leq M |u|_H |v|_H \quad \forall u, v \in H$$

2) *Coercive* s'il existe un réel $m > 0$ tel que

$$a(u, u) \geq m |u|_H^2 \quad \forall u \in H.$$

Remarque : Soient $A : H \rightarrow H$ un opérateur et $a : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ la forme définie par

$$a(u, v) = \langle Au, v \rangle_H \quad \forall u, v \in H$$

On a alors les propriétés suivantes:

- i) a est bilinéaire si et seulement si A est linéaire.
- ii) a est continu si et seulement si A est continu.
- iii) a est coercive si et seulement si A est défini positif.

Théorème (lemme de Lax-Milgram) Soit $a : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire, continue et coercive. Alors pour tout $f \in H$, il existe un unique $u \in H$ tel que

$$a(u, v) = \langle f, v \rangle_H \quad \forall v \in H.$$

Proposition : Si l'espace X désigne un espace de Hilbert réel et K un sous-ensemble de l'espace X , en considérant φ_K de K définie par

$$\varphi_K = \begin{cases} 0 & \text{si } u \in K \\ +\infty & \text{si } u \notin K \end{cases}$$

nous savons que l'ensemble K est fermé, non vide et convexe si et seulement si sa fonction indicatrice φ_K est une fonction propre, convexe, semi-continue inférieurement. Il est important d'introduire la notion de la sous-différentiabilité qui intervient fréquemment en mécanique de contact.

Définition : Soit K un sous-ensemble non vide et convexe de l'espace X , considérant la fonction indicatrice φ_K de K . Nous avons de suite que si $u \notin K$ alors $\partial\varphi(u) = \emptyset$. supposons alors que $u \in K$. Il vient que si $u' \in \partial\varphi_K(u)$ alors $\langle u', v - u \rangle \leq 0 \quad \forall v \in X$.

Nous pouvons ainsi caractériser le sous-différentiel $\partial\varphi_K$ d'une fonction indicatrice φ_K d'un ensemble convexe non vide

$$\partial\varphi_K(u) = \left\{ u' \in X' / \langle u', v - u \rangle_X \leq 0 \quad \forall v \in X. \right\} \quad (3.3.5)$$

Tout sous-gradient $u' \in \partial\varphi_K(u)$ est appelé support de la fonction en u .

Opérateurs fortement monotones.

Dans cette section nous commençons par un bref rappel sur les opérateurs fortement monotones et de Lipschitz. Pour cela, on considère un espace de Hilbert H muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$ et de la norme associée $\|\cdot\|_H$ et $A : H \rightarrow H$ un opérateur non-linéaire.

L'opérateur A est dit :

a) *fortement monotone* s'il existe $m > 0$ tel que

$$\langle Au - Av, u - v \rangle_H \geq m \|u - v\|_H^2 \quad \forall u, v \in H;$$

b) *de Lipschitz* s'il existe $M > 0$ tel que

$$\|Au - Av\|_H \leq M \|u - v\|_H \quad \forall u, v \in H;$$

Nous avons le résultat suivant:

Théorème : Soit $A : H \rightarrow H$ un opérateur fortement monotone et de Lipschitz. Alors pour tout $f \in H$ il existe un élément unique $Au = f$.

Le résultat précédent est un cas particulier du théorème de Minty-Browder. Il nous prouve tout opérateur $A : H \rightarrow H$ fortement monotone et de Lipschitz est inversible.

Théorème : Soit $A : H \rightarrow H$ un opérateur fortement monotone et de Lipschitz. Alors son inverse $A^{-1} : H \rightarrow H$ est également fortement monotone et de Lipschitz.

Bibliographie

- [1] **A.AMASSAD** , M. SHILLOR et M.SOFONEA, A quasistatic contact problem for an elastic perfectly plastic body Tresca's friction , Nonlinear Analysis, 35,95-109,1999(+A.Amassad and Shillor) .
- [2] **G.DUVAUT**, et **J.-L. LIONS**, Les Inéquations en Mécanique et en Physique, Dunod, Paris (1972).
- [3] **H.BREZIS** ,Analyse Fonctionnelle -Théorie et Applications ,Masson ,paris (1987).
- [4] **H.BREZIS**,Opérateurs Maximaux Monotones et Semi -groupes de Contractions dans les Espaces de Hilbert ,North -Holland, Amsterdam(1973).
- [5] **K.YOSIDA**, Functional Analysis, Springer-Verlag, Berlin(1971) .
- [6] **M.Cocu**, Existence of solutions of signorini problems with friction, Int. Journ. Engng. Sci. 22 (1984), 567-581
- [7] **N.BRAHIM**, B. Benyattou. Elasto-dynamic problem with friction depending on The speed of the slip . Anal.univ.oradea .fasc.Math .Tom XV (2008), p.P.11-22 .
- [8] **P.CIARLET** , Elasticité Tridimensionnelle, Masson, Paris (1986) .
- [9] **R.S.ADAMS**, Sobolev Spaces, Academic Press, New York (1975).

- [10] **SALAH DRABLA** ,Régularité de quelques aux limites gouvernés par l'opérateur de Lamé dans un domaine polygonal et polyédral, Thèse de Doctorat D'Etat,.Université de Farhat ABBAS, Stif, Avril(2002) .
- [11] **S.DRABLA,M.SOFONA** , Analysis of Signorini problem with friction .Préprint.
- [12] **TEDJANE HADJ AMARE** pour l'obtention du diplôme de memoire de magister en mathématique option Analyse Numérique et EDP soutenu le 19\09\2006.