



N° d'ordre :

N° de série :

**République Algérienne Démocratique et Populaire**

**Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la  
Recherche Scientifique**

**UNIVERSITÉ ECHAHID HAMMA LAKHDAR  
EL OUED**

**FACULTÉ DES SCIENCES ET DE TECHNOLOGIE**

**Mémoire de fin d'étude**

**LICENCE ACADEMIQUE**

Domaine: Mathématiques et Informatique

Filière: Mathématiques

Spécialité: Modélisation mathématiques & simulation  
numérique

**Thème**

**Polynômes de Tchebychev**

**Modèles et solutions**

Présenté par:

BILOUL Louiza

KHEZZANE Nabila

SOUID Kenza

Sous la supervision de :

Dr. Abdelhamid RHOUMA

Année universitaire 2014 – 2015

# *Remerciements*

*Je tiens à exprimer toute ma gratitude et ma profonde reconnaissance à mon encadreur.  
Docteur REHOUMA Abdelhamid qui m'a proposé le sujet de ce mémàire. Merci pour ses  
précieux conseils et ses encouragements.*

Mes remerciements vout également à toutes les familles, proches et, les amis, camarades,  
pour le grand honneur qu'ils me font le partie des membres de le jury de ce mémoire.

Merci pour leurs remarques et toutes leurs idées.

Je remercie également toutes les personnes qui m'ont aidé à réaliser ce travail.

# Table des matières

<i>Remerciements</i>	i
<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>Notations et coventions</b>	<b>2</b>
<b>1 Polynômes orthogonaux sur segment et avec une fonction de poids</b>	<b>3</b>
1.1 Espaces de Hilbert . . . . .	3
1.2 Polynômes orthogonaux . . . . .	4
1.2.1 Quelques exemples classiques de polynômes orthogonaux . . . . .	5
1.3 Polynômes de Tchebychev . . . . .	6
1.4 Meilleur approximation . . . . .	8
1.4.1 Meilleure approximation de la fonction nulle . . . . .	9
1.5 Relation de récurrence . . . . .	10
<b>2 Polynômes orthogonaux de Tchebychev</b>	<b>11</b>
<b>I Polynômes de Tchebychev</b>	<b>12</b>
2.1 Les types des polynômes de Tchebychev . . . . .	14
2.1.1 Polynôme de Tchebychev de 1 <sup>er</sup> espèce :( $T_n$ ) . . . . .	14
2.1.2 Polynôme de Tchebychev de 2 <sup>ème</sup> espèce:( $U_n$ ) . . . . .	15
2.1.3 Relation entre $T_n$ et $U_n$ . . . . .	16
2.2 Signes alternés du polynôme de Tchebychev . . . . .	16

2.3	Formule de christoffel - Darboux	17
 <b>II Propriétés des polynômes de Tchebychev</b>		<b>18</b>
2.4	Quelques propriétés des polynômes de Tchebychev	19
2.4.1	Fonction génératrice	20
2.4.2	Equation différentielle	20
2.4.3	Racines des polynômes de Tchebychev	20
2.4.4	Extrémums de $T_n$	21
2.4.5	Propriété de minimisation	21
2.4.6	Coefficient de $x^n$	21
2.4.7	Polynômes de Tchebychev réduits	22
2.5	Relation récurrence	23
2.6	Meilleure approximation de polynômes de degré $n$	24
2.6.1	Meilleure approximation d'un polynôme de degré $n$ dans $P_{n-1}$ .	24
2.6.2	Meilleure approximation de polynômes de degré $n$ dans $P_{n-2}$	25
 <b>3 Quelques Applications de polynômes de Tchebychev</b>		<b>26</b>
3.1	Equation différentielle lineaire	26
3.2	Polynômes de Tchebychev et problèmes de Sturm-Liouville	27
3.3	Coefficients, dérivées et primitives	28
 <b>Bibliographie</b>		<b>33</b>

## Introduction générale

Mathématiques de la science pure, mais avec une touche de temps et d'études intensives, les scientifiques ont pu découvrir les équations difficiles solutions approximatives, qui sont une approximation de fonctions aux polynômes. Les conclusions de son Tchebychev et voilà ce étudiez dans cette mémoire.

La théorie des polynômes orthogonaux constitue un lieu de rencontre privilégié pour diverses disciplines des mathématiques. Les polynômes orthogonaux par rapport à une fonction poids  $\omega(x)$  continue et sur un segment  $[a, b]$ .

Les polynômes orthogonaux de Tchebychev forment une classe assez particulière de polynômes orthogonaux sur un segment. Les polynômes orthogonaux de Tchebychev unitaires ( moniques ) soient solutions de certains problèmes extrémaux posés dans  $L^2([-1, 1], \omega(x))$ .

Un des problèmes fondamentaux de la théorie des polynômes orthogonaux est celui qui étudie l'approximation par les polynômes orthogonaux. Nous donnerons des exemples sur les approximations.

Les polynômes orthogonaux de Tchebychev intervient de façon significative dans la résolution de problèmes mathématiques suivants:

1. Analyse de la distribution des zéros des polynômes orthogonaux.
2. Etude de la convergence des approximants de Padé.
3. Théorie spectrale.

Ce travail est composé de 3 chapitres:

- Le premier chapitre parle engénéral sur de polynômes orthogonaux et divers types.

Comme consacré à polynômes orthogonaux de Tchebychev.

- Le deuxième chapitre est consacré à parler sur les polynômes orthogonaux de Tchebychev, où nous connaissons et nous dire leurs propriétés.
- Le troisième chapitre présente les applications des polynômes de Tchebychev.

## **Notations et conventions**

$\delta_{nm}$  fonction liée de  $x$ .

$\lambda_k$  cte.

$\mu_k$  cte.

$\omega(x)$  fonction de poids.

$\langle \cdot, \cdot \rangle_\omega$  le produit scalaire de  $\omega$ .

$\|\cdot\|_\omega$  la norme de  $\omega$ .

# Chapitre 1

## Polynômes orthogonaux sur segment et avec une fonction de poids

Dans ce chapitre, il étudie une forme génératrice forment une famille de polynômes orthogonaux sur un espace de Hilbert, et comme nous attribuons notre conversation sur les polynômes orthogonaux de Tchebychev. Ils jouissent d'un certain nombre de propriétés intéressantes. Et est une relation récurrence et meilleure d'approximation.

### 1.1 Espaces de Hilbert

**Définition 1.1.1** Soit  $X$  un espace linéaire sur le corps  $k$ . un produit scalaire sur  $X$  est une application  $\varphi: X \times X \rightarrow k$  telle que pour tout  $x, x_1, x_2, y \in X$ , et  $\lambda \in k$ , on a:

1.  $\varphi(x, x) \geq 0$  et  $\varphi(x, x) = 0$  si seulement si  $x = 0$
2.  $\varphi(x, y) = \overline{\varphi(y, x)}$
3.  $\varphi(x + x_2, y) = \varphi(x_1, y) + \varphi(x_2, y)$
4.  $\varphi(\lambda x, y) = \lambda \varphi(x, y)$ .

Dans la suite on sera noter par [5]

$$\varphi(x, y) = \langle x, y \rangle$$

**Définition 1.1.2** un espace de Hilbert est un espace complet par rapport à la norme induite par un produit scalaire. En d'autres mots Un espace de Banach dont la norme est induite par un produit scalaire.

**Définition 1.1.3** Deux éléments  $x$  et  $y$  d'un espace de Hilbert  $E$  sont dits orthogonaux si  $\langle x, y \rangle = 0$ , on écrit alors  $x \perp y$ . On dit que deux parties  $F$  et  $G$  de  $E$  sont orthogonales si tout élément de  $F$  orthogonal à tout élément de  $G$ , on écrit alors  $F \perp G$ . L'orthogonal d'une partie  $F$  de  $E$ , noté  $F^\perp$ , est l'ensemble des éléments de  $E$  orthogonaux à  $F$ . [5]

**Théorème 1.1.1** (Pythagore) Si  $x_1, x_2, \dots, x_n$  sont des éléments de  $E$ , deux à deux orthogonaux, alors.

$$\|x_1 + x_2 + \dots + x_n\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 + \dots + \|x_n\|^2$$

**Démonstration.** Si  $x_1$  et  $x_2$  sont orthogonaux,

$$\|x_1 + x_2\|^2 = \langle x_1 + x_2, x_1 + x_2 \rangle = \|x_1\|^2 + 2 \operatorname{Re}(\langle x_1, x_2 \rangle) + \|x_2\|^2.$$

Comme  $\langle x_1, x_2 \rangle = 0$ , on en déduit le théorème lorsque  $n = 2$ , Le cas général s'en déduit par induction. [5] ■

## 1.2 Polynômes orthogonaux

Soit  $]a, b[ \in \mathbb{R}$  borné ou non. Soit un poids  $\omega : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}^+$  continue. On suppose  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $\int_a^b |x|^2 \omega(x) dx$  est convergente. Soit  $E = C^0(]a, b[)$  muni du produit scalaire

$$\langle f, g \rangle_\omega = \int_a^b f(x) g(x) \omega(x) dx$$

et  $\|\cdot\|_\omega$  la norme associée. [7]

**Définition 1.2.1** On appelle polynôme unitaire un polynôme dont le coefficient du plus haut degré est 1. [7]

$$P_n(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0.$$

**Théorème 1.2.1** Il existe une suite de polynômes unitaires  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $\deg(P_n) = n$ , orthogonaux 2 à 2 pour le produit scalaire de  $E$  associé au poids  $\omega$ . Cette suite est unique.

**Démonstration.** Par récurrence selon le procédé d'orthogonalisation de Schmidt. On a  $P_0(x) = 1$  car  $P_0$  est unitaire. Supposons  $P_0, P_1, \dots, P_{n-1}$  déjà construits, alors  $\langle P_0, P_1, \dots, P_{n-1} \rangle$  forme une base de  $\mathbf{P}_{n-1}$  Soit  $P_n \in \mathbf{P}_{n-1}$  unitaire, alors

$$P_n(x) = x^n + \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i P_i(x)$$

On a  $\langle P_n, P_k \rangle_\omega = 0$ , pour tout  $k = 0, \dots, n$  donc

$$\langle x^n, P_k \rangle_\omega + \lambda_k \|P_k\|_\omega = 0$$

et donc

$$\lambda_k = -\frac{\langle x^n, P_k \rangle_\omega}{\|P_k\|_\omega}.$$

On a alors déterminé  $P_n$  de façon unique car le choix des  $\lambda_k$  est unique. [7] ■

### **Théorème 1.2.2**

*Formule de récurrence pour construire les polynômes orthogonaux. Les polynômes  $P_n$  vérifient la relation de récurrence. [7]*

$$P_n(x) = (x - \lambda_n) P_{n-1}(x) - \mu_n P_{n-2}(x).$$

avec

$$\begin{aligned} \lambda_k &= \frac{\langle x P_{n-1}, P_{n-1} \rangle_\omega}{\|P_{n-1}\|_\omega} \\ \mu_n &= \frac{\|P_{n-1}\|_\omega^2}{\|P_{n-2}\|_\omega^2}. \end{aligned}$$

## **1.2.1 Quelques exemples classiques de polynômes orthogonaux**

### **Polynômes de Legendre**

Prenons  $]a, b[ = ]-1, 1[$  et  $\omega(x) = 1$ . La famille  $\{x^n; n \geq 0\}$  est totale dans l'espace de Hilbert  $L^2(]-1, 1[, dx)$ . [5]

$$P_n(x) = \frac{n!}{(2n)!} \frac{d^n}{dx^n} ((x^2 - 1)^n). \quad (1.1.1)$$

ou [7]

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n. \quad (1.1.2)$$

### Polynômes d'Hermit

Prenons  $I = \mathbb{R}$ ,  $\omega(x) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$  et soit  $L^2(\mathbb{R}, \omega(x) dx)$  l'espace des fonctions de carré sommables pour la mesure de densité  $\omega$  par rapport à la mesure de Lebesgue. Le produit scalaire et la norme seront notés respectivement  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  et  $\|\cdot\|_2$ . Pour  $f$  et  $g$  dans  $L^2(\mathbb{R}, \omega(x) dx)$ .

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \overline{g(x)} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \quad (1.1.3)$$

La densité  $\omega$  a été choisie de façon que. [5]

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \omega(x) dx = 1.$$

### Polynômes de Laguerre

Considérons l'espace  $L^2([0, +\infty[, e^{-x} dx)$  des fonctions de carré sommable pour la mesure de densité  $\omega(x) = e^{-x}$  par rapport à la mesure de Lebesgue sur l'intervalle  $[0, +\infty[$ . Le produit scalaire et la norme sur  $L^2([0, +\infty[, e^{-x} dx)$  sont donnés par: [5]

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{+\infty} f(x) \overline{g(x)} e^{-x} dx. \quad (1.1.4)$$

$$\|f\|_2 = \left( \int_0^{+\infty} |f(x)|^2 e^{-x} dx \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (1.1.5)$$

## 1.3 Polynômes de Tchebychev

L'application  $\theta \rightarrow \cos \theta$  est une bijection continue de  $[0, \pi]$  sur  $[-1, 1]$  et donc à chaque fonction  $F$  continue sur  $[0, \pi]$  on associe de façon univoque la fonction  $f$  continue sur  $[-1, 1]$  par la relation:

$$F(\theta) = f(x) \text{ avec } x = \cos \theta.$$

De plus

$$\int_0^\pi |F(\theta)|^2 d\theta = \int_{-1}^1 |f(x)|^2 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

On en déduit, que l'application qui à une fonction  $F$  de  $[0, \pi]$  fait correspondre la fonction  $f$  de  $C([-1, 1])$ , se prolonge en une bijection isométrique de l'espace de Hilbert  $L^2([0, \pi], d\theta)$  sur l'espace de Hilbert  $L^2([-1, 1], \omega(x) dx)$  des fonctions de carré sommables sur  $[-1, 1]$  pour la mesure de densité  $\omega(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  par rapport à la mesure de Lebesgue, c'est-à-dire vérifiant.

$$\|f\|_{\omega}^2 = \int_{-1}^1 |f(x)|^2 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} < \infty$$

Le produit scalaire associé sera noté  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\omega}$ .

$$\langle f, g \rangle_{\omega} = \int_{-1}^1 \frac{f(x) \overline{g(x)}}{\sqrt{1-x^2}} dx. \quad (1.2.1)$$

pour  $f, g \in L^2([-1, 1], \omega(x) dx)$ .

La famille  $\{1, x, \dots, x^n, \dots\}$  est totale dans l'espace  $L^2([-1, 1], \omega(x) dx)$  et procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt permet d'en fabriquer une base hilbertienne. Cependant, l'isomorphisme mis en évidence plus haut permet de retrouver rapidement cette base hilbertienne, en effet les fonctions définies par  $\phi_n(\theta) = \cos n\theta$  forment une base orthogonale de  $L^2([0, \pi], d\theta)$  et on a

$$\int_0^{\pi} \phi_n(\theta) \overline{\phi_m(\theta)} d\theta = \begin{cases} \left(\frac{\pi}{2}\right) \delta_{nm} & \text{si } n, m \neq 0 \\ \pi \delta_{0n} & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.2.2)$$

Il en résulte que les fonctions  $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$  forment une base orthogonale de  $L^2([-1, 1], \omega(x) dx)$  et on a: [5]

$$\begin{aligned} \langle T_n, T_m \rangle_{\omega} &= \frac{\pi}{2} \delta_{nm} & \text{si } n, m \neq 0. \\ \langle T_n, T_0 \rangle_{\omega} &= \pi \delta_{0n} & n \geq 0. \end{aligned}$$

**Définition 1.3.1** La suite de polynômes  $\{T_0, T_1, \dots, T_n, \dots\}$  constitue un système orthogonal sur  $[-1, 1]$  par rapport à la fonction poids  $(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ . En effet, à partir de la relation  $\cos n\theta \cos m\theta = \frac{\cos(n+m)\theta + \cos(n-m)\theta}{2}$ , il est facile de voir que: [1]

$$\int_0^{\pi} T_n(\cos \theta) T_m(\cos \theta) d\theta = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } n = m \neq 0 \\ \pi & \text{si } n = m = 0 \end{cases}$$

soit encore

$$\int_{-1}^1 \frac{T_n(x) T_m(x)}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}} dx = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } n = m \neq 0 \\ \pi & \text{si } n = m = 0 \end{cases} \quad (1.2.3)$$

**Théorème 1.3.1** La suite des polynômes de Tchebychev ( $T_n$ ) est une base orthogonale de l'espace  $L^2([-1, 1], \omega(x) dx)$  et pour tout  $f$  dans cet espace, on a: [5]

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left\| f - \frac{1}{\pi} \langle f, T_0 \rangle_0 T_0 + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^n \langle f, T_k \rangle_\omega T_k \right\|_\omega = 0.$$

et

$$\|f\|_\omega^2 = \frac{1}{\pi} |\langle f_0, T_0 \rangle|^2 + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} |\langle f, T_n \rangle|^2.$$

## 1.4 Meilleur approximation

### Définition 1.4.1 ( Approximation )

On dit que le polynôme  $P$  de degré  $\leq n$  représente une approximation d'une fonction continue  $f$  sur l'intervalle  $[a, b]$  si la valeur  $\max_{x \in [a, b]} |f(x) - P(x)|$  est minimale. [3]

**Définition 1.4.2** Soit  $V$  un espace vectoriel muni d'un produit scalaire noté  $(\cdot, \cdot)$  et  $\|\cdot\|$  la norme associée soit  $V_n$  un sous-espace de  $V$  de dimension finie, on note  $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  une base de  $V_n$ . On dit que  $P_n \in V_n$  réalise la meilleure approximation de  $f \in V$  au sens suivant: [3]

$$\|P_n - f\| = \min_{V_n \in V} \|V_n - f\|. \quad (1.3.1)$$

### Théorème 1.4.1 (théorème de Tchebychev)

La condition nécessaire et suffisante pour que la fonction  $\hat{P} \in P_n$  être une meilleure approximation de la fonction  $f$  est

$$\left| f(x_i) - \hat{P}(x_i) \right| = \max_{x \in [a, b]} |f(x) - \hat{P}(x)|.$$

pour  $n+1$  points  $x_0, x_1, \dots, x_n$  de  $[a, b]$ . [3]

### 1.4.1 Meilleure approximation de la fonction nulle

**Théorème 1.4.2** Les polynômes de Tchebychev  $T_n^*(x) = \frac{T_n(x)}{2^{n-1}}$ . (Le coefficient de  $x^n$  est égale à 2) de degré inférieur ou égale à  $n$  représente la meilleure approximation de fonction nulle sur l'intervalle  $[0, 1]$ .

*Preuve.* On a:

$$\begin{aligned} \|T_n^*(x) - 0\| &= \min_{R_n \in P_{n-1}} \|R_n - 0\|. \\ \|T_n^*(x)\| &= \min_{R_n \in P_{n-1}} \|R_n\|. \\ &= \left\| \frac{T_n(x)}{2^{n-1}} \right\| = \frac{1}{2^{n-1}} \|T_n\| = \frac{1}{2^{n-1}}. \end{aligned}$$

(car  $\|T_n\| = \max_{x \in [0,1]} |T_n(x)| = 1$ .)

Par l'absurde supposons que  $T_n(x)$  n'est pas la meilleure approximation de la fonction nulle sur  $[0, 1]$ . Alors, on peut trouver un polynôme  $R_n \in P_{n-1}$  tel que:

$$\|R_n\| \leq \|T_n^*\|.$$

Donc  $\|T_n^*\| \neq \min_{R_n \in P_{n-1}} \|R_n\|$ .

Posons

$$Q = T_n^* - R_n$$

$Q$  est un polynôme de degré  $\leq n - 1$  (car le coefficient de  $x^n$  dans  $T_n^*$  et  $R_n$  est égale à 1) on considère les points  $x_0, x_1, \dots, x_n$  où  $T_n$  prend les valeurs  $-1, 1, \dots$  c'est-à-dire  $T_n^*$  prend les valeurs  $-\frac{1}{2^{n-1}}, \frac{1}{2^{n-1}}, \dots$

Donc

$$\begin{aligned} Q(x) &= T_n^*(x) - R_n(x). \\ Q(x_0) &= -\frac{1}{2^{n-1}} - R_n(x) \\ Q(x_1) &= \frac{1}{2^{n-1}} - R_n(x) \end{aligned}$$

et ainsi ...

mais  $\|R_n\| \leq \|T_n^*\|$  alors  $Q(x_1) < 0, Q(x_2) > 0 \dots$

Alors le polynôme  $Q$  admet  $n$  racines c'est une contradiction car  $Q$  est de degré  $n - 1$ . [8]

■

## 1.5 Relation de récurrence

A partir des formules trigonométriques de base, il est facile de voir que :

$$\cos(n+1)\theta + \cos(n-1)\theta = 2\cos\theta\cos n\theta.$$

On pose  $\theta = \arccos x$ , pour  $0 \leq \theta \leq \pi$ , alors il vient immédiatement.

$$T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = 2xT_n(x). \quad (1.4.1)$$

Sachant que  $T_0(x) = 1$  et  $T_1(x) = x$ , la suite  $T_n$  est alors complètement définie. [1]

**Proposition 1.5.1** *Si  $n \geq 1$ , le coefficient de  $x^n$  de  $T_n(x)$  vaut  $2^{n-1}$ . En effet, d'après ??, le coefficient de  $x^{n+1}$  de  $T_{n+1}(x)$  est le double du coefficient de  $x^n$  de  $T_n(x)$ , puisque  $T_{n-1}$  n'est que de degré  $n-1$  et n'a pas de coefficient de  $x^{n+1}$ . Le coefficient de  $x^n$  de  $T_n(x)$  est donc constant fois  $2^n$ , déterminé par le cas  $n=1$ ,  $T_1(x) = x$ . la constante vaut  $\frac{1}{2}$ . On peut enfin préciser maintenant la norme d'erreur de la meilleure approximation de  $x^n$  dans  $P_{n-1}$ . [3]*

## Chapitre 2

# Polynômes orthogonaux de Tchebychev

Ce chapitre, est définir les polynômes de Tchebychev avec les séries de Tchebychev. Et définir des propriétés des polynômes de Tchebychev (La relation récurrence et propriété Meilleure approximation) sont rappelées.

# Partie I

## Polynômes de Tchebychev

---

**Définition 2.0.1** On appelle polynôme de Tchebychev de degré  $n$ , le polynôme  $T_n$ , défini, pour tout  $x \in ]-1, 1[$ , par: [1]

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x). \quad (2.1.1)$$

**Définition 2.0.2** Le polynôme de Tchebychev  $T_n(x)$  avec  $n \in \mathbb{Z}$  est défini par la relation: [2]

$$T_n(x) = \cos(n\theta) \quad \text{où} \quad x = \cos \theta. \quad (2.1.2)$$

Soit  $Z$  un nombre complexe ( $Z \in \mathbb{C}$ ) tel que  $|Z| = 1$ . Alors on peut écrire:

$$Z = \cos \theta + i \sin \theta = \exp(i\theta).$$

$$Z^n = \exp(in\theta) = \cos n\theta + i \sin n\theta. \quad (1)$$

On a:

$$\begin{aligned} (a + b)^n &= \sum_{k=1}^n C_n^k a^k b^{n-k}. \\ (\cos \theta + i \sin \theta)^n &= \sum_{k=0}^n C_n^k (\cos \theta)^{n-k} (i \sin \theta)^k. \\ &= \cos^n \theta + i C_n^1 \cos^{n-1} \theta \sin \theta - C_n^2 \cos^{n-2} \theta \sin^2 \theta + \dots \end{aligned} \quad (2)$$

la partie réel de (1) = la partie réel de (2).

$$\begin{aligned} \cos n\theta &= (\cos \theta)^n - C_n^2 (\cos \theta)^{n-2} \sin^2 \theta + C_n^4 \cos^{n-4} \theta \sin^4 \theta - \dots \\ &= (\cos \theta)^n - C_n^2 \cos^{n-2} \theta (1 - \cos^2 \theta) + C_n^4 \cos^{n-4} \theta \left( (1 - \cos^2 \theta)^2 \right) - \dots \end{aligned}$$

cette expression représente un polynôme de degré  $\leq n$  du variable  $x = \cos \theta$ ;  $\theta = \arccos x$ .

Donc  $\cos(n \arccos x)$  est un polynôme de degré  $\leq n$  appelle polynôme Tchebychev. [8]

**Exemple 2.0.1** (Calcul de  $T_n$ )

On a  $T_0(x) = 1$ .

$T_1(x) = \cos(1 \arccos x) = \cos(\arccos x) = x$ .

Pour calcul  $T_2, T_3$  on utilise trigonométrie suivante

$$\cos((n+m)\theta) + \cos((n-m)\theta) = 2 \cos n\theta \cos m\theta.$$

$$\forall \theta \in \mathbb{R}; \forall n, m \in \mathbb{N}; T_n(x) = \cos n\theta.$$

$$T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = 2xT_n(x) \iff T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x).$$

pour  $m = 1$ ;

$$n \in \mathbb{N}; \cos(n+1)\theta + \cos(n-1)\theta = 2\cos(n\theta)\cos\theta$$

on a  $x = \cos\theta$  :

$$\cos(n+1)\theta + \cos(n-1)\theta = 2\cos n\theta * x.$$

$$T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = 2xT_n(x), \forall n \in \mathbb{N}; \forall x \in [-1, 1].$$

cette relation de récurrence permet de calculer  $T_2, T_3, \dots$

## 2.1 Les types des polynômes de Tchebychev

### 2.1.1 Polynôme de Tchebychev de 1<sup>er</sup> espèce : $(T_n)$

Soit  $n$  un entier. Il existe un et seul polynôme noté  $T_n$  tel que:

$$\forall \theta \in \mathbb{R}; T_n(\cos\theta) = \cos n\theta.$$

#### Unicité

$T_n$  est déterminé sur  $[-1, 1]$  qui est d'infini et donc uniquement déterminé.

#### Existence

Soient  $n$  un entier naturel est  $\theta$  un réel,

$$\begin{aligned} \cos n\theta &= \operatorname{Re}(\exp(in\theta)) = \operatorname{Re}(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \operatorname{Re}\left(\sum_{k=0}^n C_n^k (\cos\theta)^{n-k} (i\sin\theta)^k\right) \\ &= \sum_{p=0}^{E(\frac{n}{2})} (-1)^p C_n^{2p} (\cos\theta)^{n-2p} (\sin\theta)^{2p} \\ &= \sum_{p=0}^{E(\frac{n}{2})} (-1)^p C_n^{2p} (\cos\theta)^{n-2p} (1 - \cos^2\theta)^p \end{aligned}$$

et le polynôme

$$\sum_{p=0}^{E(\frac{n}{2})} (-1)^p C_n^{2p} X^{n-2p} (1 - X^2)^p$$

### 2.1.2 Polynôme de Tchebychev de 2<sup>ème</sup> espèce: $(U_n)$

Soit  $n$  un entier naturel non nul. Il existe un et un seul polynôme noté  $U_n$  tel que:

$$\forall \theta \in \mathbb{R}; \sin \theta U_n (\cos \theta) = \sin n\theta.$$

#### Unicité

$U_n$  est déterminé sur  $] -1, 1[$  qui est infini et donc uniquement déterminé.

#### Existence

Soient  $n$  un entier naturel et  $\theta$  un réel,

$$\begin{aligned} \sin n\theta &= \text{Im} (\exp (in\theta)) = \text{Im} ((\cos \theta + i \sin \theta)^n) \\ &= \text{Im} \left( \sum_{k=0}^n C_n^k (\cos \theta)^{n-k} (i \sin \theta)^k \right) \\ &= \sum_{p=0}^{E\left(\frac{n-1}{2}\right)} (-1)^p C_n^{2p+1} (\cos \theta)^{n-(2p+1)} (\sin \theta)^{2p+1} \\ &= \sin \theta \sum_{p=0}^{E\left(\frac{n-1}{2}\right)} (-1)^p C_n^{2p+1} (\cos \theta)^{n-2p-1} (1 - \cos^2 \theta) \end{aligned}$$

et le polynôme

$$\begin{aligned} &\sum_{p=0}^{E\left(\frac{n-1}{2}\right)} (-1)^p C_n^{2p+1} X^{n-2p-1} (1 - X^2)^p \quad \text{convient} \\ \forall n \in \mathbb{N}^*; U_n &= \sum_{p=0}^{E\left(\frac{n-1}{2}\right)} (-1)^p C_n^{2p+1} X^{n-2p-1} (1 - X^2)^p. \end{aligned}$$

#### Les polynômes de Tchebychev de deuxième espèce

Sont définis par la relation de récurrence.

$$U_{n+1}(x) = 2xU_n(x) - U_{n-1}(x).$$

et la condition initiales  $U_0(x) = 1; U_1(x) = 2x$ .

Ils sont liés aux polynômes de première espèce par les relations

$$\begin{aligned} U_n(x) &= \frac{1}{1-x^2} (xT_{n+1} - T_{n+2}) \\ U_n(1) &= n + 1. \end{aligned}$$

leur norme vérifie la relation

$$\|U_n\|_2^2 = \int_{-1}^1 U_n^2(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}.$$

**Exemple 2.1.1** (calcul  $U_n$ )

$$U_0(x) = 1$$

$$U_1(x) = 2x$$

$$U_2(x) = 4x^2 - 1$$

$$U_3(x) = 8x^3 - 4x$$

$$U_4(x) = 16x^4 - 12x^2 + 1$$

$$U_5(x) = 32x^5 - 32x^3 + 6x$$

### 2.1.3 Relation entre $T_n$ et $U_n$

Soit  $n$  un entier naturel non nul, pour tout réel, on a:  $T_n(\cos \theta) = \cos n\theta$ . En dérivant cette relation pour tout réel on obtient

$$-\sin \theta T_n'(\cos \theta) = -n \sin n\theta.$$

on encore

$$\forall \theta \in \mathbb{R}; \sin \theta \left( \frac{1}{n} T_n \right)' \cos \theta = \sin n\theta.$$

par unicité de  $U_n$  on a donc [6]

$$\forall n \in \mathbb{N}^*; U_n = \frac{1}{n} T_n'$$

## 2.2 Signes alternés du polynôme de Tchebychev

$T_n$  est une fonction pair ou impair selon la partie de  $n$ :

$$\forall n \in \mathbb{N}; T_n(x) = \cos(n \arccos x) = \cos n\theta.$$

$$-1 \leq \cos n\theta \leq 1$$

$$-1 \leq T_n(x) \leq 1$$

Donc le polynôme de Tchebychev est de degré  $\leq n$  défini sur  $[-1, 1]$ .

$$\begin{aligned} T_n & : \quad x \rightarrow T_n(x) \\ [-1, 1] & \rightarrow [-1, 1] \end{aligned}$$

$$x = \cos \theta \quad T_n(x) = \cos n\theta$$

$$T_n(x) = 0 \implies \cos n\theta = 0 \iff n\theta = \frac{(2k+1)\pi}{2} \iff \theta = \frac{(2k+1)\pi}{2n}.$$

Donc le polynôme de Tchebychev s'annule aux points

$$x_k = \cos \theta_k \quad ; k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } \theta_k = \frac{(2k+1)\pi}{2n}.$$

(si  $n = 0 \implies T_0(x) = 1$ .)

$T_n$  prend, les valeurs alternatives  $-1, 1, -1, \dots$  si  $n\theta = k\pi \implies \theta = \frac{k\pi}{n}$ . [8]

## 2.3 Formule de christoffel - Darboux

$$\frac{T_{n+1}(x)T_n(y) - T_n(x)T_{n+1}(y)}{x-y} = 2 \sum_{k=0}^n T_k(x)T_k(y).$$

en effet, 1 vrai si  $n = 0$ ;  $2n - 1 \rightarrow n$ ,

on applique la relation de récurrence pour se ramener à l'ancien numérateur

$$\begin{aligned} T_{n+1}(x)T_n(y) - T_n(x)T_{n+1}(y) &= [2xT_n(x) - T_{n-1}(x)]T_n(y) - T_n(x)[2yT_n(y) - T_{n-1}(y)] \\ &= 2(x-y)T_n(x)T_n(y) + T_n(x)T_{n-1}(x)T_n(y) \end{aligned}$$

et on divise par  $x - y$ . [3]

## **Partie II**

# **Propriétés des polynômes de Tchebychev**

## 2.4 Quelques propriétés des polynômes de Tchebychev

1) - Parité pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a:

$$T_n(1) = 1; T_n(-x) = (-1)^n T_n(x) \text{ et } T_n(-1) = (-1)^n; T_{2n+1}(0) = 0.$$

2) - Pour tout  $x \in [-1, 1]$ , on a:

$$|T_n(x)| \leq 1.$$

3) - Pour  $n$  pair est  $T_n$  est pair et pour  $n$  impair  $T_n$  est impair

4) - Pour  $x = \cos \theta \in ]-1, 1[$  et  $n \neq 0$  :

$$T'_n(x) = \frac{n \sin n\theta}{\sin \theta}.$$

et en particulier :

$$\begin{aligned} T'_n(1) &= n^2 \\ T'_n(-1) &= (-1)^n n^2 \\ T'_{2n}(0) &= 0 \\ T'_{2n+1}(0) &= (-1)^n (2n+1) \end{aligned}$$

sons-entendu dérivée adroite en -1 et à gauche en 1.

5)- Dans l'intervalle  $[-1, 1]$ ,  $T_n$  a ses extrema aux  $n+1$  points.

$$\tilde{x}_k = \cos\left(\frac{k}{n}\pi\right) \text{ avec } T_n(\tilde{x}_k) = (-1)^k; k = 0, \dots, n.$$

$T_n$  vart alter nativement 1 et -1 aux extrema  $\tilde{x}_k$  (données en ordre décroissant).

**Preuve.** 1) -  $T_n(1) = \cos(n \arccos 1) = \cos(n0) = \cos 0 = 1$ , puis  $T_n(-1)$  par parité ou imparité. Puis  $T_{2n+1}$  est impair donc  $T_{2n+1}(0) = 0$  puis pour  $x = 0$  on a  $\theta = \frac{\pi}{2}$  d'où  $T_{2n}(0) = \cos\left(2n\frac{\pi}{2}\right) = \cos(n\pi) = (-1)^n$ .

3) - Avec  $x = \cos \theta = -\cos(\theta + \pi)$  on a  $T_n(-x) = T_n(\cos(\theta + \pi)) = \cos(n(\theta + \pi)) = (-1)^n \cos(n\theta) = (-1)^n T_n(x)$ .

4) - Puis posont  $x(\theta) = \cos \theta$  on a  $T_n(x(\theta)) = \cos(n\theta)$  qui donne par dérivation de fonction composée  $T'_n(x(\theta)) x'\theta = -n \sin n\theta$  d'ou (1.37) pour  $x \in ]-1, 1[$  puis pour  $x = 1$  on

a  $\theta = 0$ , avec  $\sin \alpha \sim \alpha$  au voisinage de  $\alpha = 0$  donc  $\frac{\sin n\theta}{\sin \theta} \sim \frac{n\theta}{\theta} = n$  au voisinage de  $\theta = 0$  et pour  $x = -1$  on se sert de la parité ou imparité de  $T_n$ . Comme  $T_{2n}$  est pair on a  $T'_{2n}(0) = 0$  et pour  $x = 0$  on a  $\theta = \frac{\pi}{2}$  donc  $T'_{2n+1}(0) = (2n+1) \sin\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right) = (2n+1) \sin\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = (-1)^n (2n+1)$ .

5) - Puis  $T_n \in [-1, 1]$  et  $|T_n(\pm 1)| = 1$  donnent en  $-1$  et  $+1$   $T_n$  est extrémale puis  $T'_n(x) = 0$  pour  $x \in ]-1, 1[$  ssi cf  $-(1.37) \sin(n\theta) = 0$  quand  $x = \cos \theta$  et  $\theta \in ]0, \pi[$  ie, ssi  $\theta = k\frac{\pi}{n}$  pour  $k = 1, \dots, n-1$ .

Puis  $T_n(\tilde{x}_k) = \cos\left(n\left(\frac{k}{n}\pi\right)\right) = \cos(k\pi) = (-1)^k$ . [4] ■

### 2.4.1 Fonction génératrice

On cherche une fonction de deux variables  $(x, z)$  telle que:

$$G(x, z) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(x) z^n.$$

En posant  $x = \cos \theta$ , on a: [5]

$$\begin{aligned} G(x, z) &= \frac{1}{2} \sum_0^{\infty} (e^{im\theta} + e^{-im\theta}) z^m; |z| < 1. \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{1 - e^{i\theta} z} + \frac{1}{1 - e^{-i\theta} z} \right] \\ G(x, z) &= \frac{1 - xz}{1 - 2xz + z^2}. \end{aligned}$$

### 2.4.2 Equation différentielle

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , le polynôme de Tchebychev  $T_n$  vérifie l'équation différentielle du second ordre suivante

$$(1 - x^2) T_n''(x) - x T_n'(x) + n^2 T_n(x) = 0.$$

Pour le voir, il suffit de poser  $x = \cos \theta$  et d'utiliser le fait que la fonction cosinus vérifie  $\cos''(n\theta) + n^2 \cos(n\theta) = 0$ . [5]

### 2.4.3 Racines des polynômes de Tchebychev

Ils sont déterminés par  $T_n(x) = 0$ . Ceci équivaut à

$$\cos(n \arccos x) = 0$$

soit encore

$$\arccos x = \frac{(2k-1)\pi}{2n}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Les racines de  $T_n$  sont donc données par

$$x_k = \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right), \quad k = 1, 2, 3, \dots, n.$$

Ces racines sont symétriques par rapport à l'origine dans  $[-1, 1]$ . [1]

#### 2.4.4 Extrémums de $T_n$

A partir de la définition de  $T_n$ , il est facile de voir que les extrémums des polynômes  $T_n$  sont données par

$$\cos(n \arccos x) = \pm 1 \iff \arccos x = k \frac{\pi}{n}.$$

Les extrémums ont donc pour abscisses [1]

$$t_k = \cos\left(k \frac{\pi}{n}\right), \quad k = 0, 1, 2, \dots, n.$$

#### 2.4.5 Propriété de minimisation

Les polynômes de Tchebychev jouent un rôle important en théorie de l'approximation. Cela tient à ce que, comme l'a montré Tchebychev, ce sont là les polynômes s'écartant le moins de zéro sur le segment  $[-1, 1]$ . Autrement dit, si l'on désigne par  $P_n$  l'ensemble des polynômes de degré  $n$  unitaires (c'est-à-dire dont le terme de plus haut degré est  $x^n$ ). On a: [5]

$$\forall q \in P_n; \sup_{|x| \leq 1} |q(x)| \geq \sup_{|x| \leq 1} \frac{1}{2^{n-1}} |T_n(x)| = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

#### 2.4.6 Coefficient de $x^n$

Il est facile de voir, à partir de la relation

$$T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x)$$

que

$$T_2(x) = 2x^2 - 1.$$

$$T_3(x) = 2x^3 - 3x.$$

Ainsi, on peut noter que le coefficient de tête (coefficient du terme de plus haut degré) de  $T_n$  est  $2^{n-1}$ . [1]

### 2.4.7 Polynômes de Tchebychev réduits

On définit les polynômes de Tchebychev réduits  $\tilde{T}_n$ , à partir des polynômes  $T_n$ , par la relation

$$\begin{aligned}\tilde{T}_n(x) &= \frac{1}{2^{n-1}} T_n(x) \\ &= x^n + \dots\end{aligned}$$

par construction, les polynômes de Tchebychev réduits sont moniques (leur coefficient de tête est égal à 1). Ils sont engendrés par la relation de récurrence

$$\tilde{T}_{n+1}(x) = x\tilde{T}_n(x) - \frac{1}{4}\tilde{T}_{n-1}(x).$$

qui se déduit facilement de (1.4.1). [1]

**Remarque 2.4.1** Si on souhaite se placer sur un intervalle  $t \in [a, b]$  on fait le changement de variable  $x = \frac{2t-b-a}{b-a} \in [-1, 1]$  pour se retrouver dans  $[-1, 1]$ .

Les points de Tchebychev sur un intervalle  $[a, b]$  quelconque sont définis par un simple changement de variables :

$$x_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cos\left(\frac{(2(n-i)+1)\pi}{2n+2}\right) ; 0 \leq i \leq n.$$

L'interpolation de Tchebychev de  $f$  prise aux points de Tchebychev l'erreur commise dans une interpolation de Tchebychev vérifie

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x) = 2 \left(\frac{b-a}{4}\right)^{n+1} \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}.$$

**Démonstration.** Pour convertir l'intervalle  $[a, b]$  à  $[-1, 1]$ . Nous utilisons l'application linéaire:

$$\begin{aligned}[a, b] &\rightarrow [-1, 1] \\ x &\rightarrow t = \alpha x + \beta.\end{aligned}$$

telle que :

$$x = a \implies t = -1.$$

$$x = b \implies t = 1.$$

$$\implies -1 = \alpha a + \beta. \quad (1)$$

$$\implies 1 = \alpha b + \beta. \quad (2)$$

$$(1) \text{ et } (2) \implies 2 = \alpha(b - a) \implies \alpha = \frac{2}{b-a}.$$

En compensation (1) :

$$\begin{aligned} -1 &= \frac{2a}{b-a} + \beta. \\ \implies \beta &= -1 - \frac{2a}{b-a}. \end{aligned}$$

$$\implies \frac{2}{b-a} \left( x - \frac{b+a}{2} \right).$$

$$T_n^*(x) = T_n(t) = T_n \left( \frac{2}{b-a} \left( x - \frac{b+a}{2} \right) \right).$$

## 2.5 Relation récurrence

La relation suivante est des plus importantes, on a:

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) ; n = 1, 2, \dots \quad (2.2.1)$$

En effet,

$$T_{n+1}(x) = \cos(n+1)\theta = \cos\theta \cos n\theta - \sin\theta \sin n\theta.$$

$$T_{n-1}(x) = \cos(n-1)\theta = \cos\theta \cos n\theta + \sin\theta \sin n\theta.$$

$$T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = 2\cos\theta \cos n\theta = 2xT_n(x).$$

Où on a bien sur utilise la représentation(??)

La récurrence(??) livre, aussi la façon la plus simple de se persuader que  $T_n$  est bien un polynôme de degré  $n$ : à partir des conditions initiales (en  $n$ )  $T_0(x) = 1$  et  $T_1(x) = x$ , on voit bien que  $T_{n+1}$  est un polynôme dont le degré vaut une unité de plus que le degré de  $T_n$ . [3]

### Exemple 2.5.1

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1 \\ T_1(x) &= x \\ T_2(x) &= 2x^2 - 1 \\ T_3(x) &= 4x^3 - 3x \\ T_4(x) &= 8x^4 - 8x^2 + 1 \\ T_5(x) &= 16x^5 - 20x^3 + 5x \end{aligned}$$

## 2.6 Meilleure approximation de polynômes de degré $n$

**Définition 2.6.1** Pour  $n \geq 0$ , le polynôme de Tchebychev de degré  $n$  est

$$T_n(x) = \frac{\hat{e}_n(x)}{E_n} = \frac{x^n - \hat{p}_{n-1}(x)}{E_n},$$

où  $\hat{p}_{n-1}$  est la meilleure au sens de Tchebychev de  $x^n$  sur  $[-1, 1]$ , et  $E_n = \|\hat{e}_n\|_\infty$  est la norme de l'erreur de meilleure approximation; pour  $n = 0$ , on défini  $T_0(x) \equiv 1$ . [3]

### 2.6.1 Meilleure approximation d'un polynôme de degré $n$ dans

$P_{n-1}$ .

La fonction continue la plus simple qui ne soit pas dans  $V = P_{n-1}$  est un polynôme  $f(x) = \alpha x^n + \dots$  de degré  $n$ .

La fonction d'erreur  $\hat{e} = f - \hat{p}$  est encore un polynôme de degré  $n$  ayant en commun avec  $f$  son coefficient de  $x^n$ . Les deux problèmes suivants sont équivalents:

**1.** Construire la meilleure approximation  $\hat{p}$  de  $f(x) = \alpha x^n + \alpha' x^{n-1} + \dots$  dans  $P_{n-1}$  sur  $[a, b]$ ,

**2.** Construite  $\beta', \beta'', \dots$  tels que

$$\hat{e}(x) = ax^n + \beta'x^{n-1} + \beta''x^{n-2} + \dots \quad (2.3.1)$$

soit de norme  $\|\cdot\|_\infty$  minimale sur  $[a, b]$ .

En effet, si on résout **1**, il suffit de prendre  $\hat{e} = f - \hat{p}$ ; si on résout **2**,  $\hat{p} = f - \hat{e}$ . La formulation **2** montre qu'il suffit de s'occuper de  $\alpha$ ,  $a$  et  $b$ . De plus, si on résout **1** ou **2** avec  $\alpha = 1$ , il suffira de multiplier la réponse  $\hat{p}$  ou  $\hat{e}$  par  $\alpha$ . On peut donc se limiter au problème:

**3.** Construire la meilleure approximation de  $x^n$  dans  $P_{n-1}$  sur  $[a, b]$ .

Enfin, on ramène à l'intervalle canonique  $[-1, 1]$  par le changement de variable:

$$t \text{ parcourt } [-1, 1] \iff x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t \text{ parcourt } [a, b]. \quad (2.3.2)$$

On peut donc se limiter à

**4.** Construire la meilleure approximation de  $x^n$  dans  $P_{n-1}$  sur  $[-1, 1]$ .

### 2.6.2 Meilleure approximation de polynômes de degré $n$ dans $P_{n-2}$

Ne s'obtient (généralement) pas en passant de  $n$  à  $n-1$ , puis à  $n-2$ !. Le polynôme de la forme  $x^n + \beta x^{n-1} + \dots$ , avec  $\beta$  imposé, de moindre norme est de la forme constante  $T_n(\gamma x + \delta)$  si  $|\beta| \leq n \tan^2 \frac{\pi}{2n}$ , sinon, c'est beaucoup plus compliqué. [3]

# Chapitre 3

## Quelques Applications de polynômes de Tchebychev

Les polynômes de Tchebychev forment l'une des familles de polynômes les plus populaires, notamment pour ses applications en approximation. Et résoudre les problèmes difficiles et les équations différentielles et d'autres applications autre. C'est ce que ce la clarifier dans ce chapitre.

### 3.1 Equation différentielle lineaire

$y = T_n(x)$  est une solution de

$$(1 - x^2) y'' - xy' + n^2 y = 0. \quad (3.1.1)$$

En effet, on peut dériver  $(1 - x^2) y'^2 = n^2 (1 - y^2)$  :

$$-2xy'^2 + 2(1 - x^2) y' y'' = -2n^2 y y'$$

et diviser par  $y'$  (aux zéros de  $y$ , (3.1.1) est établie par continuité de  $y, y'$  et  $y''$ ). On peut aussi partir de  $T_n(x) = \cos(n\theta)$

$$y = \cos n\theta \implies \frac{d^2 y}{d\theta^2} = -n^2 y, \quad (3.1.2)$$

et utiliser  $x = \cos \theta : d/d\theta = d/d \arccos x = -\sqrt{1 - x^2} d/dx$ .

$$\frac{d^2 y}{d\theta^2} = \frac{d}{d\theta} \left( \frac{d}{d\theta} y \right) = \sqrt{1 - x^2} \left( \sqrt{1 - x^2} y' \right)',$$

d'où une forme intéressante (formellement auto-adjointe)

$$\sqrt{1-x^2} \left( \sqrt{1-x^2} y' \right)' = -n^2 y. \quad (3.1.3)$$

équivalente à (3.1.1) [3]

**Proposition 3.1.1** *La solution générale de la récurrence (2.2.1) aussi bien que de l'équation différentielle (3.1.1) est*

$$AT_n(x) + B\sqrt{1-x^2}U_{n-1}(x) = A \cos n\theta + B \sin n\theta. \quad (3.1.4)$$

où  $U_{n-1}(x)$  est le polynôme de Tchebychev de deuxième espèce de degré  $n-1$ , défini par

$$U_{n-1}(x) = \frac{\sin n\theta}{\sin \theta}, \quad (x = \cos \theta). \quad (3.1.5)$$

Lorsque (3.1.5) désigne la solution générale de la récurrence (2.2.1),  $A$  et  $B$  peuvent dépendre de  $x$ , mais pas de  $n$ ; si (3.1.5) désigne la solution générale de l'équation différentielle (3.1.1)  $A$  et  $B$  peuvent dépendre de  $n$ , mais pas de  $x$ .

## 3.2 Polynômes de Tchebychev et problèmes de Sturm-Liouville

L'équation (3.1.3) est bien de la forme de Sturm-Liouville

$$(p(x)y'(x))' + q(x)y(x) = \lambda\omega(x)y(x), \quad a < x < b, \quad (3.2.1)$$

avec  $p(x) > 0$  et  $\omega(x) > 0$  sur  $(a, b)$ . Un problème de Sturm-liouville régulier consiste à trouver des solutions non nulles (fonctions propres) de (3.2.1) vérifiant des conditions aux limites homogènes, si  $p(a)$  et  $p(b) \neq 0$ . Ici,  $p(x) = \sqrt{1-x^2}$ , on a un problème singulier

$$p(a) = p(b) = 0.$$

Les fonctions propres sont alors simplement définies par des conditions de régularité aux limites: valeurs et dérivées finies quand  $x \rightarrow a$  et  $b$ .

Ici, avec  $p(x) = \sqrt{1-x^2}$ ,  $q(x) = 0$  et  $\omega(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$ , la solution générale de (3.2.1) est une combinaison de  $\cos \mu\theta$  et  $\sin \mu\theta$ , où  $\lambda = -\mu^2$  (comme d'habitude, faire  $x = \cos \theta$  pour

obtenir  $d^2y/d\theta^2 = -\mu^2y$ ). Les dérivées en  $x$  sont les dérivées en  $\theta$  divisées par  $-\sin\theta = -\sqrt{1-x^2}$  et restent donc finies en  $\pm 1$  si les dérivées en  $\theta$  sont nulles en  $\theta = 0$  et  $\pi$ . Ceci impose  $\sin\mu\pi = 0 \implies \mu \in \mathbb{Z}$ , donc  $\lambda = -n^2$ ,  $n = 0, 1, \dots$  et la fonction propre correspondante  $= \cos n\theta = T_n(x)$ .

Pour traiter convenablement les problèmes de Sturm-Liouville, il faut les définir sur des espaces de Hilbert (espaces de Sobolev).

Dérivées d'ordre quelconque: en dérivant (3.1.1)  $p$  fois, on obtient

$$\frac{d}{dx} \left( (1-x^2)^{\frac{p+1}{2}} \frac{d^{p+1}T_n(x)}{dx^{p+1}} \right) + (n^2 - p^2) (1-x^2)^{\frac{p-1}{2}} \frac{d^pT_n(x)}{dx^p} = 0, \quad (3.2.2)$$

### 3.3 Coefficients, dérivées et primitives

1.  $T_n(x) = \sum_{\substack{j \geq 0 \\ 2j \leq n}} \frac{(-1)^j n(n-j-1)! 2^{n-1-2j}}{j!(n-2j)!} x^{n-2j}$ . En effet, nous savons déjà que le coefficient de  $x^n$  est  $2^{n-1}$ , et que les coefficients non nuls sont ceux de même parité que  $n$ . Ensuite par (3.2.2) avec  $p = n - 2j$ , le coefficient de  $x^{n-2j}$  est  $1/(n-2j)!$  fois

$$\begin{aligned} \frac{d^{n-2j}T_n(0)}{dx^{n-2j}} &= \frac{-1}{n^2 - (n-2j)^2} \frac{d^{n-2j+2}T_n(0)}{dx^{n-2j+2}} \\ &= \frac{-1}{4(n-j)} \frac{d^{n-2j+2}T_n(0)}{dx^{n-2j+2}} \\ &= \frac{(-1)^j}{4^j j(j-1) \dots 1(n-j)(n-j+1) \dots (n-1)} 2^{n-1} n!. \end{aligned}$$

Le rapport des valeurs absolues des coefficients de  $x^{n-2j}$  et de  $x^{n-2j+2}$  est  $\frac{(n-2j+2)(n-2j+1)}{4j(n-j)} \approx \frac{1}{4\alpha(\alpha+1)}$  où  $\alpha = j/(n-2j)$ . Ce rapport est donc  $\succ 1$  tant que  $\alpha \prec (\sqrt{2}-1)/2$ . A ce moment, c'est-à-dire quand  $j \sim n(2-\sqrt{2})/4$ , on est en présence du plus grand coefficient, qui est de l'ordre de  $(\sqrt{2}+1)^n$ .

2. Plus intéressante est l'expression des puissance de  $x$  dans la base des polynômes de Tchebychev, base que l'on va s'habituer à utiliser dans la suite

$$x^n = \frac{1}{2^{n-1}} \left( \sum_{k=0}^{k=\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{k} \frac{T_{n-2k}(x)}{1 + \delta_{n-2k,0}} \right),$$

( $\lfloor \rfloor$  : est la partie entière par défaut),

où  $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$  est le nombre de combinaisons de  $n$  objets pris  $k$  à  $k$  (coefficient binomial).

En effet,

$$x = \cos \theta = (e^{i\theta} + e^{-i\theta}) / 2; x^n = 2^{-n} \sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} e^{i(n-2k)\theta}.$$

3.

$$T'_n = nU_{n-1} = 2n \left( T_{n-1} + T_{n-3} + \dots + T_1 \text{ ou } \frac{T_0}{2} \right). \quad (3.3.1)$$

$$\begin{aligned} T'_n(x) &= \frac{dT_n(x)}{dx} = \frac{d \cos n\theta}{d \cos \theta} \\ &= n \frac{\sin n\theta}{\sin \theta} = nU_{n-1}(x) \\ &= n \frac{e^{in\theta} - e^{-in\theta}}{e^{i\theta} - e^{-i\theta}} \\ &= n(e^{i(n-1)\theta} + e^{i(n-3)\theta} + \dots + e^{-i(n-3)\theta} + e^{-i(n-1)\theta}) \\ &= 2n(T_{n-1}(x) + T_{n-3}(x) + \dots) \end{aligned}$$

où on termine sur  $e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2T_1(x)$  si  $n$  est impair.

Remarquons que l'on a aussi montré  $U_n(x) - U_{n-2}(x) = 2T_n(x)$ .

4.

$$\int T_n(x) dx = \frac{T_{n+1}(x)}{2(n+1)} - \frac{T_{n-1}(x)}{2(n-1)} \text{ (si } n \neq 1) + C. \quad (3.3.2)$$

$$\begin{aligned} \int T_n(x) dx &= - \int \cos n\theta \sin n\theta d\theta \\ &= -\frac{1}{2} \int [\sin(n+1)\theta - \sin(n-1)\theta] d\theta \\ &= \frac{\cos(n+1)\theta}{2(n+1)} - \frac{\cos(n-1)\theta}{2(n-1)} \text{ (si } n \neq 1) + C \end{aligned}$$

$$\int \frac{T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{T_{n+1}(x) - T_{n-1}(x)}{2n\sqrt{1-x^2}} + C \quad (3.3.3)$$

$$\begin{aligned}
 \int \frac{T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx &= - \int \cos n\theta d\theta = \frac{\sin n\theta}{n} + C \\
 &= - \frac{\sin n\theta \sin \theta}{n \sin \theta} + C \\
 &= \frac{\cos(n+1)\theta - \cos(n-1)\theta}{2n \sin \theta} + C \quad (n > 0)
 \end{aligned}$$

**6. Primitive de  $T_n(x) \log(x-c)$ .**

La primitive est de la forme  $A_n(x) \log(x-c) - B_n(x)$ , où  $A_n$  est une primitive de  $T_n$  et  $B_n$  est un polynôme. Choisissons pour  $A_n$  la primitive de  $T_n$  qui s'annule en  $x=c$ , soit, par (3.3.2),

$$A_n(x) = \frac{T_{n+1}(x) - T_{n+1}(c)}{2(n+1)} - \frac{T_{n-1}(x) - T_{n-1}(c)}{2(n-1)}. B_n(x) \text{ est alors une primitive de } A_n(x) / (x-c).$$

$$\frac{A_n(x)}{x-c} = \frac{U_n(c)}{2(n+1)} + \sum_{k=1}^n \frac{U_{n-k}(c)}{n+1} T_k(x) - \frac{U_{n-2}(c)}{2(n-1)} - \sum_{k=1}^{n-2} \frac{U_{n-2-k}(c)}{n-1} T_k(x).$$

Donc [3]

$$B_n(x) = x \frac{U_n(c)}{2(n+1)} + \sum_{k=1}^n \frac{U_{n-k}(c)}{n+1} A_k(x) - x \frac{U_{n-2}(c)}{2(n-1)} - \sum_{k=1}^{n-2} \frac{U_{n-2-k}(c)}{n-1} A_k(x).$$

---

## Conclusion générale

Dans ce travail nous avons apporté une contribution dans la théorie des polynômes orthogonaux sur le segment et relativement à une fonction poids continue sur ce segment. Il s'agit des polynômes orthogonaux de type de Tchebychev. La théorie constructive des polynômes orthogonaux nous oblige de traiter leur propriété des relations de récurrences. La propriété des relations de récurrences des polynômes orthogonaux de Tchebychev joue un rôle important. Il est très possible que les propriétés des solutions des problèmes d'approximation et leur relations avec des relations les polynômes orthogonaux de Tchebychev obtenues trouveront leurs applications dans plusieurs domaines des physiques- mathématiques. Ajoutons la fonction génératrice engendrée par les polynômes orthogonaux de Tchebychev et autres identités .

# Bibliographie

- [1] ABDELHAQ. El jai; ELEMENTS D'ANALYSE NUMERIQUE; Collection Etudes Presses Universitaire de Perpignan, 2003.
- [2] ALEXANDRE. Benoit; Algorithmique semi-numérique rapide des séries de Tchebychev; THESE pour obtenir le grade de Docteur de l'Ecole polytechnique Spécialité: Informatique préparée à INRIA: 18-07-2012.
- [3] ALPHONSE. Magnus; Analyse numérique: approximation, interpolation, intégration; INMA2171, 2010-2011.
- [4] Cours d' Analyse Numérique; pour le 2<sup>ème</sup> Mathématique, Universitaire d' El-Oued. 2012-2013.n Universitaire Tunis, 2001.
- [5] HOUCINE. Chebli; Analyse Hilbertienne; Centre de Publication Universitaire Tunis, 2001.
- [6] JEAN-LOIUS. Rouget, 2007. [http: //www.maths-france.fr](http://www.maths-france.fr).
- [7] MAZEN. Saad; ANALYSE NUMERIQUE; Ecole Centrale de Nantes Dépt. Info/Math Année universitaire 2011-2012. El 1.
- [8] SAID. Mohammed Said; ANALYSE NUMERIQUE; Cours d'analyse numérique; pour le 3<sup>ème</sup> Mathématique, Universitaire de Ouargla. 2001-2002.

## ملخص:

الهدف من هذا العمل هو معرفة كثيرات الحدود المتعامدة وأنواعها الكثيرة. ونخصص في هذا الموضوع: كثير الحدود تشيبيشيف وتعريفه وخصائصه المميزة, وكيفية العمل به على العديد من الدوال. هذا ما درسناه في هذه المذكرة نلخصه في النقاط التالية:

- أهمية خاصة أحسن تقريب واستخدامها في الدوال.
- كيفية استخدام العلاقة التراجعية لحساب كثير حدود تشيبيشيف.
- توظيف المعادلات التفاضلية والمشاكل الرياضية والمعاملات... في كثير حدود تشيبيشيف.

## Résumé:

Le but de cet œuvre est de savoir les nombreux sortes. Nous prenons en considération dans ce sujet: nombreux limites Tchebychev. Sa définition. Ses spécialité et son application sur beaucoup de fonction. Nous résumons ce qu'on a vu dans les points suivants:

- Importance de la meilleure proximité et son utilisation dans les fonctions.
- Comment utiliser la rénovation de la relation pour calculer le nombreux limites Tchebychev.
- Mettre les preferenciel équation en œuvre et les problèmes de maths et les relations dans le nombreux limites Tchebychev

## Abstract:

The aim of this work is to know the numerous vertical limits our thier severs sorts . We specialise in this subjects: the numerous limits Tchebychev aur its definition specialties aur its use in manq functions. What we studied in this thesis we resume it as follows:

- Impotence of the best proximity aur its use in functions.
- Objectivity of using the recall relation to calculate the numerous limits Tchebychev.
- To use the preferencial equation the maths problems. Aur relations in numerous Tchebychev.