N° d'ordre :
N° de série :

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Superieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ HAMMA LAKHDAR D'EL OUED

FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES

Mémoire de fin d'étude

MASTER ACADEMIQUE

Domaine: Mathématiques et Informatique
Filière: Mathématiques
Spécialité: Mathématiques fondamentales

Thème

Quelques Propriétés sur L'opérateur Hyponormal

Présenté par: Hadjer Lachraf
Sara Douna

Soutenu devant le jury composé de :

Mansour Abdelouahab	MCA	Président	Univ. d'El Oued
Hariz Bekkar Lourabi	MAA	Examinateur	Univ. d'El Oued
Guesba Massaoud	MAA	Encadreur	Univ. d'El Oued

Année universitaire 2016 – 2017

Remerciement

En premier lieu, Nous remercions le bon ***ALLAH*** *qui nous a donné le courage et la patience jusqu'au bout de nos études.*

Ainsi, il nous fait plaisir que nous, au commencement de ce travail, présentons nos grand remerciements à nos encadreur, Professeur " ***Guesba Messaoud*** *", pour la qualité de son encadrement, son suivi attentif, sa précieuse assistance, sa disponibilité et ses hautes qualités morales et scientifiques et d'avoir fait le nécessaire pour faciliter autant que possible, pour le temps et la patience qu'il nous a accordé tout au long de ce travail.*

Enfin, il est important pour nous de remercier nôtres familles, nôtres parents, nôtres frères et nôtres sœurs , pour leurs soutiens moraux et ces encouragements pendant toutes ces années.

*Et nous tenons à remercier chaleureusement nos amis et nos collègues "****Université Hamma Lakhdr****", pour nous avoir aidé et encouragé au cours de notre thèse dans les bons et moins bons moments.*

Symboles et notations

$\mathcal{L}(H)$	Espace de Banach des opérateurs linéaires bornés sur H.
T	l'opérateur linéaire.
$\langle .,. \rangle$	Produit scalaire.
$\oplus$	la somme directe
$\otimes$	le produit tensoriel.
$\|.\|$	La norme.
$\|A\|$	Module de A.
$\ker A$	Noyau de l'opérateur A.
$\mathrm{Im}(A)$	Image de A.
I	l'opérateur identité.
T^*	l'opérateur adjoint de l'opérateur T.
T^{-1}	l'inverse d'un opérateur T.
$\sigma(T)$	le spectre de T.
$\rho(T)$	l'ensemble résolvante de T.
$\sigma_p(T)$	spectre ponctuel.
$\sigma_c(T)$	le spectre continu.
$\sigma_r(T)$	le spectre résiduel.
$\sigma_{ap}(T)$	le spectre approximatif.
$\sigma_T(x)$	le spectre local.
$\rho_T(x)$	résolvante locale.
$R_T(\lambda)$	l'application résolvante de T.
$r(T)$	rayon spectral de T.
μ	mesure de Lebsegue.

$span\{A,B\} = \{\alpha A + \gamma B : \alpha, \gamma \in \mathbb{C}\}$

Table des matières

INTRODUCTION

Dans la théorie moderne des opérateurs linéaires, deux tendances différentes peuvent être perçues. L'un orienté vers un cadre abstrait basé sur les principes généraux de l'analyse fonctionnelle. La seconde traitant des classes spéciales d'opérateurs et s'appuyant généralement sur l'analyse classique, la physique mathématique ou d'autres champs externes. Heureusement, la théorie des opérateurs hyponormaux a grandi au cours des trois dernières décennies en tant que sous-produit des deux tendances. En fait, la théorie des opérateurs hyponnormaux est équivalente à l'étude de la relation de commutation $i[X, Y] \geq 0$ où X et Y sont des opérateurs borné auto-adjoints sur un espace de Hilbert complexe.

D'un autre point de vue, l'opérateur $T = X + iY$ associé à une paire d'opérateurs auto-adjoints (X, Y) satisfait $[T^*, T] \geq 0$. Un tel opérateur s'appelait hyponormal. Dans les années soixante, plusieurs auteurs parmi lesquels nous citons S. Berberian, J. Stampfli, T. Ando and P.R. Halmos ont découvert que les opérateurs hyponormaux héritent des propriétés spectrales (défini par l'identité du commutateur $[T^*, T] = 0$). La théorie spectrale abstraite des opérateurs hyponormaux a été developée dans les années soixante-dix par J. Stampfli, K. Clancey, S. Clary, R. Howe, C.R. Putnam, M. Radjabalipou.

Notre travail se compose de trois chapitres :

Dans le premier chapitre, nous rappelons quelques définitions et propriétés fondamentales des opérateurs linéaires borné de l'espace de Hilbert, et nous citons quelques classes des opérateurs (opérateur normal, positif, auto-adjoint,....).

Dans le second chapitre, on introduit la définition d'opérateur hyponormal et quelques exemples générales et on présente ses propriétés principales et nous étudions la somme direct et le produit tonsoriel de deux opérateurs hyponormaux.

Le dernier chapitre est consacré à la théorie spectrale des opérateurs hyponormaux

Chapitre 1

RAPPELS ET NOTIONS FONDAMENTALES

1.1 Notions sur les opérateurs linéaires bornés

Définition 1.1.1 ***(opérateur linéaire)***

Soient X et Y deux espaces normés, un opérateur A défini sur X dans Y et dit linéaire s'il vérifie les conditions suivantes :

pour tout $u, v \in X$, et $\alpha, \beta \in \mathbb{k}(\mathbb{k} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$

i) $Au \in Y$.

ii)$A(\alpha u + \beta v) = \alpha Au + \beta Av$.

Définition 1.1.2 ***(opérateur borné)***

Un opérateur linéaire A défini sur X dans Y est dit borné s'il existe une constante positive C, telle que :

$$\|Au\|_Y \leq C \|u\|_X , \forall u \in X. \tag{1.1.1}$$

Proposition 1.1.1 .

Le plus petit de nombres C vérifiant cette inégalité s'appelle norme de l'opérateur A et se note $\|A\|$, on a

$$\|A\| = \sup_{\|u\| \leq 1} \|Au\| = \sup_{u \neq 0} \frac{\|Au\|}{\|u\|}. \tag{1.1.2}$$

Définition 1.1.3 ***(la somme directe)***

Soient $T_1, T_2 \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$, *On peut définir la somme direct de* T_1 *et* T_2 *dénoté par* $T_1 \oplus T_2$ *dans l'espace* H

$$(T_1 \oplus T_2)(x \oplus y) = T_1x \oplus T_2y, \qquad x, y \in \mathrm{H}$$

Définition 1.1.4 ***(commutateur d'un opérateur)***

Soit $T \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$, *on dit que* $\{T\}'$ *est l' ensemble des commutateurs de* T *(commutant de* T*) si* $\{T\}'$ *donné par* $\{T\}' = \{S \in \mathcal{L}(\mathrm{H}) : TS = ST\}$.

Proprietés

1. $T \in \{S\}' \Leftrightarrow S \in \{T\}'$.
2. $\{T\}'' = \{\{T\}'\}'$;

   $\{T\}'' = \{R \in \mathcal{L}(\mathrm{H}) : R \in \{S\}', S \in \{T\}'\}$.
3. $\{T\}''$ *est une sous algèbre commutative dans* $\mathcal{L}(\mathrm{H})$.
4. *Tout polynôme en* T *est appartenant à* $\{T\}''$.

Définition 1.1.5 ***(opérateur inverse)***

On dit que $A \in \mathcal{L}(E, F)$ *est inversible s'il existe* $B \in \mathcal{L}(F, E)$ *tel que*

$$AB = \ BA = I_E = I_F.$$

l'opérateur B *(lorsquil existe) est unique. On l'appelle l'inverse de* A *et noté par* A^{-1}.

Définition 1.1.6 ***(opérateur adjoint)***

Soient H *et* K *deux espaces de Hilbert et* $T \in \mathcal{L}(\mathrm{H,K})$. *L'opérateur* $T^* \in \mathcal{L}(\mathrm{K',H'})$ *tel que pour tous* $x \in \mathrm{H}, y \in \mathrm{K}$ *on ait :*

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle . \tag{1.1.3}$$

est appelé adjoint de T.

Exemple 1.1.1 .

On considère l'opérateur shift $S : l^2(\mathbb{C}) \to l^2(\mathbb{C})$ *défini par :*

$$S(x_1, x_2, ...) = (0, x_1, x_2, ...).$$

Soit (x_n)*et* (y_n) *dans* $l^2(\mathbb{C})$*, alors*

$$\begin{aligned}
\langle Sx_n, y_n\rangle &= \langle x_n, S^* y_n\rangle \\
&= \langle (0, x_1, x_2, ...), (y_1, y_2, ...)\rangle \\
&= x_1\overline{y_2} + x_2\overline{y_3} + ... \\
&= \langle (x_1, x_2, ...), (y_2, y_3, ...)\rangle
\end{aligned}$$

Alors S^* *est défini par*

$$S^*(x_1, x_2, ...) = (x_2, x_3, ...).$$

Théorème 1.1.1 ***(propriétés de l'adjoint)***

1. $(\alpha T + \beta S)^* = \overline{\alpha}T^* + \overline{\beta}S^*$, *pour* $\alpha, \beta \in \mathbb{k}$.
2. $(TS)^* = S^*T^*$.
3. *Si* T *est inversible ,* T^* *est l'aussi et on a* $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.
4. $(T^*)^* = T$.
5. $\|T^*\| = \|T\|$.
6. $\|T^*T\| = \|T\|^2$.

Définition 1.1.7 .

On appelle module de A *et on note par* $|A|$ *l'opérateur*

$$|A| = (A^*A)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.1.4}$$

Définition 1.1.8 .

Soient $T \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$*, et* U *une isométrie partielle, alors* $T = U|T|$ *est la décomposition polaire de* T*, La transformation d'Aluthge de* T *est l'opérateur* $\tilde{T}$ *défini par*

$$\tilde{T} = |T|^{\frac{1}{2}} U |T|^{\frac{1}{2}} . \tag{1.1.5}$$

1.1.1 Spectre d'un opérateur

Définition 1.1.9 ***(valeur propre et vecteur propre)***

Soit E un espace normé et $T \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$: Un nombre $\lambda \in \mathbb{C}$ s'appelle valeur propre de l'opérateur T; si léquation :

$$(T - \lambda I)x = 0.$$

a une solution $x \neq 0$ dans E.

Une telle solution x est appelée vecteur propre (ou une fonction propre) associé la valeur propre λ.

Définition 1.1.10 ***(point régulier)***

Soit $T \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$, le nombre $\lambda \in \mathbb{C}$ s'appelle un point régulier de l'opérateur T si $(T - \lambda I)$ est inversible.

Définition 1.1.11 ***(ensemble résolvante et la résolvante)***

- *On appelle ensemble résolvant de T l'ensemble des points réguliers de l'opérateur T et note par (T) tel que :*

$$\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}, T - \lambda I \textit{ inversible}\}. \tag{1.1.6}$$

L'ensemble résolvant $\rho(T)$ est un ouvert de $\mathbb{C}$.

- *On définit la résolvante de T comme application*

$$\begin{aligned} R_\lambda(T) : \mathbb{C} &\longmapsto \mathcal{L}(\mathrm{H}) \\ \lambda &\longrightarrow R_\lambda(T) = (T - \lambda I)^{-1}. \end{aligned} \tag{1.1.7}$$

Théorème 1.1.2 *.*

Si $|\lambda| > \|T\|$; alors λ est un point régulier de l'opérateur T (i.e. $\lambda \in R_\lambda(T)$)

Théorème 1.1.3 ***(spectre d'un opérateur)***

On appelle spectre de T l'ensemble

$$\sigma(T) = \mathbb{C} \backslash \rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}, T - \lambda I \textit{ non inversible}\}. \tag{1.1.8}$$

L'ensemble $\sigma(T)$ est un fermé de $\mathbb{C}$.

Exemple 1.1.2 .

Soit l'opérateur $I \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$, *on cherche* $\sigma(T)$

$$\begin{aligned} \sigma(I) &= \{\lambda \in \mathbb{C} : I - \lambda I \text{ n'est pas inversible } \} \\ &= \{\lambda \in \mathbb{C} : (1-\lambda)I \text{ n'est pas inversible } \}. \end{aligned}$$

$(1-\lambda)I$ *non inversible ssi* $\lambda = 1$, *alors* $\sigma(I) = \{1\}$.

Théorème 1.1.4 ***(le spectre ponctuel)***

On appelle spectre ponctuel de T *l'ensemble des valeurs propres de* T, *noté* $\sigma_p(T)$ *tel que*

$$\sigma_p(T) = \{\lambda \in \sigma(T), T - \lambda I \text{ non injectif } \}. \tag{1.1.9}$$

Remarque 1.1.1 .

- *Lorsque* E *est de dimension finie* n, *alors*

$$\sigma_p(T) = \sigma(T).$$

  et le spectre de T *est un ensemble fini ayant au plus* n *éléments qui sont les racines du polynome catactéristique de* T.

- *Mais si* E *est de dimension infinie on a*

$$\sigma_p(T) \subset \sigma(T).$$

Exemple 1.1.3 ***(cas de dimension finie)***

Soit $A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ *définie par* $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$

On a

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 4 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4 = (\lambda - 4)(\lambda + 4) \\ \det(A - \lambda I) &= 0 \Longrightarrow \lambda = 4 \text{ ou } \lambda = -4. \end{aligned}$$

Alors,

$$\sigma(A) = \sigma_p(A) = \{-4, 4\}.$$

Définition 1.1.12 ***(le spectre continu)***

On appelle spectre continu de T et on note par $\sigma_c(T)$, l'ensemble

$$\sigma_c(T) = \{\lambda \in \sigma(T), T - \lambda I \text{ injectif et } Im(T-\lambda I) \neq \overline{Im(T-\lambda I)} = E\ \}. \tag{1.1.10}$$

Définition 1.1.13 ***(le spectre résiduel)***

On appelle spectre résiduel de T et on note par $\sigma_r(T)$, l'ensemble

$$\sigma_r(T) = \{\lambda \in \sigma(T), T - \lambda I \text{ injectif et } \overline{Im(T-\lambda I)} \neq E\}. \tag{1.1.11}$$

Remarque 1.1.2 *.*

Le spectre $\sigma(T)$ est la réunion disjointe de trois ensembles

$$\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \sigma_c(T) \cup \sigma_r(T). \tag{1.1.12}$$

Définition 1.1.14 ***(le spectre approximatif)***

On appelle spectre approximatif de T et on note par $\sigma_{ap}(T)$, l'ensemble

$$\sigma_{ap}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}, \exists (x_n) \subset \mathrm{H} \text{ tel que } \|x_n\| = 1 \text{ et } \|(T-\lambda I)x_n\| \to 0\}. \tag{1.1.13}$$

Remarque 1.1.3 *.*

$$\sigma_p(T) \cup \sigma_c(T) \subset \sigma_{ap}(T) \subset \sigma(T).$$

Définition 1.1.15 ***(rayon spectrale)***

Soit $T \in \mathcal{L}(E)$, on définit le rayon spectral de T comme suit

$$r(T) = \sup\{|\lambda|, \lambda \in \sigma(T)\}. \tag{1.1.14}$$

Théorème 1.1.5 *.*

Soit $T \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$ alors on a :

1. *La limite $\lim\limits_{n\to+\infty} \|T^n\|^{1/n}$ est existe et elle est égale à $\inf\limits_{n\geq 1} \|T^n\|^{1/n}$.*
2. *Si l'espace H est complexe alors $r(T) = \lim\limits_{n\to+\infty} \|T^n\|^{1/n}$*

1.1.2 Quelques classes des opérateurs

Définition 1.1.16 ***(opérateur auto-adjoint)***

Un opérateur $A \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$ est dit auto-adjoint (ou hermitien) si $A^* = A$ cest-à-dire :

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle, \forall x, y \in H$$

Exemple 1.1.4 *.*

Considérons l'opérateur T défini sur $L^2(\mathbb{R})$ par

$$(Tx)(t) = e^{-|t|}x(t).$$

T est un opérateur borné auto-adjoint. En effet,

$$\begin{aligned}
\langle Ax, y \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|}x(t)\overline{y(t)}dt \\
&= \int_{-\infty x}^{+\infty} x(t)\overline{e^{-|t|}y(t)}dt \\
&= \langle x, Ay \rangle.
\end{aligned}$$

Remarque 1.1.4 ***(décomposition cartésienne)***

Tout opérateur borné T sur un espace de Hilbert a décomposition cartésienne $T = A+iB$, où A et B sont deus opérateurs auto-adjoint, de plus $T^* = A - iB$.

En effet, il suffit de prendre

$$A = \frac{1}{2}(T + T^*) \text{ et } B = \frac{1}{2i}(T - T^*).$$

Définition 1.1.17 ***(opérateur anti-hermitien)***

Un opérateur $A \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$ est dit anti-hermitien si :

$$A^* = -A.$$

Exemple 1.1.5 *.*

Soit $T \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$ un opérateur tel que

$$Tx = ix, \forall x \in \mathrm{H}.$$

on a

$$\langle Tx, x\rangle = \langle ix, x\rangle = i\langle x, x\rangle = \langle x, -ix\rangle = \langle x, T^*x\rangle .$$

$$T^*x = -ix.$$

D'où $T^* = -T$, donc T est anti-hermitien.

Définition 1.1.18 ***(opérateur Unitaire)***

Un opérateur borné U, défini sur un espace de Hilbert H, *est dit unitaire si :*

$$UU^* = U^*U = I.$$

Exemple 1.1.6 *.*

Soit $\mathrm{H} = L^2[0\ ,1]$ *défnissons un opérateur T sur* H *par:*

$$Tf(t) = f(1-t), t \in [0,1]$$

On calcule l'adjoint de l'opérateur T

$$\langle Tf(t), g(t)\rangle = \langle f(1-t), g(t)\rangle = \int_0^1 f(1-t)\overline{g(t)}dt$$

On prend $y = 1 - t \Rightarrow dy = -dt$, alors

$$\int_0^1 f(y)\overline{g(1-y)}dy = \langle f(y), T^*g(y)\rangle$$

D'où,

$$T^*g(y) = g(1-y)$$

C'est-à-dire

$$T^*f(t) = f(1-t)$$

Maintenant, on vérifie facilement que T est un opérateur unitaire, tel que

$$\begin{aligned} TT^*f(t) &= Tf(1-t) = f(t) \\ T^*Tf(t) &= T^*f(1-t) = f(t) \end{aligned}$$

Donc, $TT^* = T^*T = I$.

Définition 1.1.19 ***(opérateur Isométrique)***

Un opérateur linéaire A sur un espace de Hilbert H *est isométrique (ou est une isométrie) si*

$$A^*A = I$$

ou bien,

$$\forall x \in \mathrm{H}, \|Ax\| = \|x\|$$

Exemple 1.1.7 *.*

L'opérateur de décalage S (ou shift) est un opérateur isométrie, car pour

$$\begin{aligned} S(x_1, x_2, ...) &= (0, x_1, x_2, ...) \\ S^*(x_1, x_2, ...) &= (x_2, x_3, ...) \end{aligned}$$

On a

$$S^*S(x_1, x_2, ...) = S^*(0, x_1, x_2, ...) = (x_1, x_2, ...)$$

Alors

$$S^*S = I$$

Définition 1.1.20 ***(opérateur positif)***

Un opérateur A sur un espace de Hilbert H *est dit positif (ce qui est noté $A \geq 0$) si :*

$$\langle Ax, x\rangle \geq 0, \forall x \in \mathrm{H}.$$

Exemple 1.1.8 *.*

Soit l'opérateur

$$T : L^2([0,1]) \to L^2([0,1])$$

$$f \to xf(x)$$

On a,

$$\begin{aligned} \langle Tf, f\rangle &= \langle xf(x), f(x)\rangle, \forall f \in L^2([0,1]) \\ &= \int_0^1 xf(x)\overline{f(x)}dx = \int_0^1 x\,|f(x)|^2\,dx \geq 0 \end{aligned}$$

Définition 1.1.21 ***(opérateur Projection)***

Un opérateur linéaire P sur un espace de Hilbert H *est dit projection si :*

$$P^2 = P$$

Définition 1.1.22 ***(opérateur Projection orthogonale)***

Un opérateur linéaire P sur un espace de Hilbert H *est dit projection orthogonale si :*

$$P^2 = P = P^*$$

Exemple 1.1.9 *.*

Soit l'opérateur P défini par :

$$P : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

$$(x_1, x_2, x_3) \to (x_1, 0, x_3)$$

On peut vérifier que

$$P^*(x_1, x_2, x_3) = (x_1, 0, x_3)$$

Alors

$$P(x_1, x_2, x_3) = P^*(x_1, x_2, x_3) = P^2(x_1, x_2, x_3) = (x_1, 0, x_3)$$

donc P est une projection orthogonale.

Définition 1.1.23 ***(opérateur nilpotent)***

Un opérateur T sur un espace de Hilbert H *est dit nilpotent de degré n si*

$$T^n = 0, \textit{ pour un certain entier naturel } n, \textit{ tel que } T^{n-1} \neq 0.$$

Définition 1.1.24 ***(quasi-nilpotent)***

On dit que $T \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$ est quasi-nilpotent si son spectre est réduit à $\{0\}$.

Opérateurs normaux

Définition 1.1.25 *.*

On dit que $T \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$ est un opérateur normal si T commute avec son adjoint.

$$i.e. \quad T^*T = TT^*.$$

Exemple 1.1.10 .

1. *Soit* $T = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{C}$

   $T^* = \begin{pmatrix} \bar{a} & 0 \\ 0 & \bar{b} \end{pmatrix}, T^*T = \begin{pmatrix} \bar{a} & 0 \\ 0 & \bar{b} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{a}a & 0 \\ 0 & \bar{b}b \end{pmatrix} = TT^*.$

2. *On considére l'opérateur* T_φ *defini sur* $L^2[0,1]$ *par:*

$$T_\varphi f(t) = \varphi(t) f(t), \text{ tel que } \varphi \in C([0,1])$$

   T_φ *est un opérateur normal. En effet, pour tout* $f, g \in L^2[0,1]$, *on a*

$$\begin{aligned} \langle Tf, g \rangle &= \langle \varphi(t) f(t), g(t) \rangle \\ &= \int_0^1 \varphi(t) f(t) \overline{g(t)} dt \\ &= \int_0^1 f(t) \overline{\overline{\varphi(t)} g(t)} dt \\ &= \left\langle f(t), \overline{\varphi(t)} g(t) \right\rangle \end{aligned}$$

   D'où $T^* g = \bar{\varphi} f(t)$ *où* $T_\varphi^* f(t) = \overline{\varphi(t)} f(t)$.

   $(T_\varphi T_\varphi^*)\ f(t) = T_\varphi(T_\varphi^* f(t)) = T_\varphi(\overline{\varphi} f(t)) = \varphi \overline{\varphi} f(t) = (T_\varphi^* T_\varphi)\ f(t)$. *d'où* T_φ *est normal.*

Proposition 1.1.2 .

Soit $T \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$, *les assertions suivantes sont équivalentes*

1. T *est normal.*

2. $\|Tx\| = \|T^*x\|$ *pour tout* $x \in \mathrm{H}$.

   Dans le cas complexe, ces assertions sont équivalentes :

3. *Les deux parties réelle et imaginaire de* T *commutent.*

Proposition 1.1.3 .

1. *Si $\alpha \in \mathbb{C}$ et T est normal, alors αT est aussi normal.*

2. *T normal $\Rightarrow T^n$ normal pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Preuve. .

1. Nous avons

$$\begin{aligned}(\alpha T)(\alpha T)^* &= (\alpha T)\overline{\alpha}T^* = \alpha\overline{\alpha}TT^* \\ (\alpha T)^*(\alpha T) &= \overline{\alpha}T^*(\alpha T) = \overline{\alpha}\alpha T^*T.\end{aligned}$$

   Puisque T est normal, il sont égaux.

2. T normal $\implies TT^* = T^*T$

$$\begin{aligned}&\implies (TT^*)^n = (T^*T)^n \\ &\implies T^n(T^*)^n = (T^*)^nT^n \\ &\implies T^n(T^n)^* = (T^n)^*T^n.\end{aligned}$$

   Donc T^n opérateur normal, $\forall n \in \mathbb{N}$.

■

Remarque 1.1.5 .

T^n normal $\not\Rightarrow T$ normal.

En effet, soit $T = \begin{pmatrix} i & 2 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$. On a $T^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ est normal mais T n'est pas normal.

Proposition 1.1.4 .

Si $T \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$ est normal, alors l'opérateur $T - \lambda I$ est normal, $\lambda \in \mathbb{C}$.

Proposition 1.1.5 ***(inverse d'un opérateur normal)***

Soit $T \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$ est un opérateur normal et inversible. Alors T^{-1} est normal.

Théorème 1.1.6 ***(Fuglede-Putnam (1951))***

Soient A, M, N trois opérateurs bornés sur un Hilbert avec M, N normaux et $MA = AN$. Alors $M^*A = AN^*$.

Théorème 1.1.7 .

Soient A et B deux opérateurs normaux, si A commute avec B. Alors $A+B$ est normal.

Preuve. Montrons que

$$(A+B)(A+B)^* = (A+B)^*(A+B)$$

On a

$$\begin{aligned}
(A+B)(A+B)^* &= (A+B)(A^*+B^*) \\
&= AA^* + AB^* + BA^* + BB^* \\
&= A^*A + B^*A + A^*B + B^*B \quad \text{(par la normalité de } A \text{ et } B) \\
&= A^*(A+B) + B^*(A+B) \quad \text{(par la théorème de Fuglede-Putnam)} \\
&= (A^*+B^*)(A+B) \\
&= (A+B)^*(A+B)
\end{aligned}$$

■

Théorie spectrale des opérateurs normaux

Proposition 1.1.6 .

Soit $T \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$ un opérateur normal, alors

1. *Si $Tx = \lambda x$, tel que $\lambda \in \mathbb{C}$ et $x \in \mathrm{H}$. Alors, $T^*x = \bar{\lambda}x$.*
2. *Deux espaces propres de T associé des valeurs propres distincts sont orthogonaux.*

Proposition 1.1.7 .

Le rayon spectral d'un opérateur normal $T \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$ vérifie

$$r(T) = \|T\|.$$

Proposition 1.1.8 .

Le spectre résiduel d'un opérateur normal est vide.

Proposition 1.1.9 .

Le spectre d'un opérateur normal est égale à le spectre approximatif, i.e,

$$\sigma(T) = \sigma_{ap}(T).$$

Corollaire 1.1.1 .

Soit $T \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$ *est un opérateur normal. Alors,*

$$\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \sigma_c(T) = \sigma_{ap}(T).$$

Théorème 1.1.8 .

Soit H *est un espace de Hilbert complexe, soit* $T \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$ *un opérateur normal et* $\lambda \in \mathbb{C}$*. On a*

1. $\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(T_\lambda) = \mathrm{H}\}$
2. $\sigma_p(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \overline{\mathrm{Im}(T_\lambda)} \neq \mathrm{H}\}$
3. $\sigma_c(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \overline{\mathrm{Im}(T_\lambda)} = \mathrm{H} \text{ et } \mathrm{Im}(T_\lambda) \neq \mathrm{H}\}$
4. $\sigma_r(T) = \varnothing$.

Opérateur compact

Définition 1.1.26 ***(compacité)***

Soit U un ensemble d'un espace normé E, U est dit compact si de tout recouvrement de U par des ouverts de U, on peut extaire un sous-recouvrement fini i.e.

$$\forall V_\jmath, \jmath \in J(\text{ouvert}); U \subset \bigcup_{\jmath \in J} V_\jmath, \exists V_{\jmath(k)}, \jmath(k) = 1, 2, ..., n \text{ tel que } U \subset \bigcup_{k=1}^{n} V_\jmath(k) .$$

Définition 1.1.27 ***(relativement compact)***

Un sous ensemble d'un espace normé est dit relativement compact si son adhérence est compacte.

Définition 1.1.28 ***(opérateur compact)***

Soit T *un opérateur d'un espace normé* X *dans un espace normé* Y *, on dit que* T *est un opérateur compact s'il envoie tout ensemble borné dans* X *à un ensemble relativement compact dans* Y*.*

Définition 1.1.29 .

On dit T est un opérateur compact s'il transforme la boule unité B_E de E en une partie relativement compact de F.

Définition 1.1.30 .

L'opérateur T est compact, si et seulement si pour toute suite bornée $\{x_n\}_{n\geq 1} \subset E$, la suite $\{Tx_n\}_{n\geq 1}$ admet que sous-suite convergente dans F.

Théorème 1.1.9 ***(Arzela-Ascoli)***

Une condition nécessaire et suffisante q'une famille des fonctions continues définies sur l'intervalle compact $[a, b]$, est relativement compacte dans $C([a, b])$ est que cette famille est uniformément bornée et équicontinue

Exemple 1.1.11 .

Considérons l'opérateur de Volterra

$$V : L^2([0,1]) \to C([0,1])$$

$$f(t) \to \int_0^x f(t)dt$$

Soit $\bar{B}(0,1) = \{f \in L^2 : \|f\| \leq 1\}$.

On va montrer que $V\bar{B}(0,1)$ est relativement compact dans $C([0,1])$.

- $V\bar{B}(0,1)$ *est uniformément borné car :*

$$\|Vf\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} \left| \int_0^x f(t)dt \right|$$

  Puisque,

$$\left| \int_0^x f(t)dt \right| \leq \int_0^1 |f(t)|\, dt = \|f\|_{L^1}.$$

  Alors

$$\|Vf\|_\infty \leq \|f\|_{L^1}$$

  On sait que

$$\|f\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^2}.$$

Donc

$$\|Vf\|_{\infty} \leq \|f\|_{L^2}$$
$$\|Vf\|_{\infty} \leq 1$$

- $V\bar{B}(0,1)$ *est équicontinu car :*

  $\forall x_1, x_2 \in [0,1]$ *on a*

$$\begin{aligned} Vf(x_2) - Vf(x_1) &= \int_0^{x_2} f(t)dt - \int_0^{x_1} f(t)dt \\ &= \int_{x_1}^{x_2} f(t)dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |Vf(x_2) - Vf(x_1)| &= \left|\int_{x_1}^{x_2} f(t)dt\right| \\ &\leq \int_{x_1}^{x_2} |f(t)|\, dt \\ &\leq \left(\int_{x_1}^{x_2} |f(t)|^2\, dt\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{x_1}^{x_2} dt\right)^{\frac{1}{2}} \quad \textit{(d'après Cauchy-Schwarz)} \\ &\leq \|f\|_{L^2} . |x_2 - x_1|^{\frac{1}{2}} \\ &\leq |x_2 - x_1|^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

d'aprés le théorème d'Arzela-Ascoli. l'ensemble $V\bar{B}(0;1)$ *est relativement compact, d'où l'opérateur* V *est compact.*

1.1.3 L'Invariance et sous-espace réduit

Définition 1.1.31 ***(invariant)***

On dit qu'un sous-espace N *de* H *est invariant (ou stable) pour l'opérateur* $T \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$ *lorsque* $T(N) \subset N$. *(i.e.* $\forall x \in N$, $Tx \in N$*).*

Exemple 1.1.12 .

1. $\{0\}$ *est un sous-espace invariant pour tous opérateur* $T \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$ *: soit* $u \in \{0\}$, *Alors* $u = 0$ *et* $Tu = 0 \in \{0\}$.

2. *Soit* $T \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$ *, on suppose* $x \in \mathrm{H}$ *et* $x \neq 0$.

   Soit $U = \{\lambda x : \lambda \in \mathbb{C}\} = span(x)$, U *est un sous-espace de* H *et est invariant pour* T *si et seulement si* $Tx = \lambda x$ *pour quelques* $\lambda \in \mathbb{C}$.

Définition 1.1.32 ***(induit)***

Soit M *un sous-espace invariant (stable) pour l'opérateur* $T \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$. *On définit la restriction de* T *sur* M *par :*

$T_{|M} : M \mapsto M$

$$(T_{|M})y = Ty, \forall y \in M.$$

Théorème 1.1.10 *[5]*

Soit M *un sous-espace dans* H. *et* $T \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$

1. *Si* M *est invariant pour l'opérateur* T, *alors* $T_{|M}$ *est un opérateur sur l'espace de Hilbert* M, $\left\|T_{|M}\right\| < \|T\|$.

2. *Si* M *est invariant pour l'opérateurs* T *et* S, *alors il est invariant pour* $S+T$, ST, *et* λT; *de plus,* $(\lambda \in \mathbb{C})$

$$\begin{aligned}
(S+T)_{|M} &= S_{|M} + T_{|M}. \\
(ST)_{|M} &= (S_{|M})(T_{|M}). \\
(\lambda T)_{|M} &= \lambda(T_{|M}).
\end{aligned}$$

Définition 1.1.33 ***.***

Un sous-espace M *est dit réduisant pour l'opérateur* $T \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$ *si* M *et* $M^{\perp}$ *sont invariant pour l'opérateur* T.

Théorème 1.1.11 *[5]*

Si M *reduit* $T \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$, *Alors* $(T_{|M})^* = T^*_{|M}$.

Théorème 1.1.12 *[5]*

Si T est un opérateur, et M est un sous-espace fermé, les conditions suivantes sont équivalentes :

1. *M réduit T.*
2. *$M^{\perp}$ réduit$T$.*
3. *M réduit T^*.*
4. *M est invariant pour les deux opérateurs T et T^*.*
5. *$TP_M = P_MT$.*

Définition 1.1.34 ***(le sous-espace propre)***

Si T est un opérateur de H et λ est une valeur propre de T. On appelle sous-espace propre associé à λ le sous-espace

$$M_T(\lambda) = \{x \in \mathrm{H} : Tx = \lambda x\}.$$

Corollaire 1.1.2 .

Les sous-espaces propres de T sont invariants pour l'opérateur T.

Chapitre 2

PROPRIÉTÉS FONDAMENTALES DES OPÉRATEURS HYPONORMAUX

Dans ce chapitre, nous présentons les principaux concepts de ce mémoire, commençant avec la définition de l'opérateur hyponormal et on clarifie cette définition par des exemples génériques, ensuite on étudie quelques opérations sur les opérateurs hyponormaux, enfin, on conclut ce chapitre par des propriétés élémentaires.

2.1 Définitions et propriétés élémentaires

Définition 2.1.1 .

Soit $T \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$ et T^* son adjoint, on dit que T est un opérateur hyponormal si :

$$T^*T \geq TT^* \tag{2.1.1}$$

Dans le sens : $T^*T - TT^* \geq 0$, i.e $(\langle (T^*T - TT^*)x, x\rangle \geq 0, \forall x \in \mathrm{H})$.

Proposition 2.1.1 .

Si T un opérateur linéaire borné et hyponormal dans un espace de Hilbert H alors, on a l'équivlence suivante :

$$\forall x \in \mathrm{H}, \|Tx\| \geq \|T^*x\| \Longleftrightarrow T^*T \geq TT^* \tag{2.1.2}$$

Preuve.

$$\begin{aligned} T^*T & \geq TT^* \Longleftrightarrow T^*T - TT^* \geq 0 \\ & \Longleftrightarrow \langle (T^*T - TT^*)\, x, x\rangle \geq 0, \forall x \in H \\ & \Longleftrightarrow \langle (T^*T)\, x, x\rangle - \langle (TT^*)x, x\rangle \geq 0, \forall x \in H \\ & \Longleftrightarrow \langle Tx, Tx\rangle - \langle T^*x, T^*x\rangle \geq 0, \forall x \in H \\ & \Longleftrightarrow \|Tx\|^2 - \|T^*x\|^2 \geq 0, \forall x \in H \\ & \Longleftrightarrow \quad \|Tx\| \geq \|T^*x\|, \forall x \in H. \end{aligned}$$

Ce qu'il fallait demonter. ■

Exemple 2.1.1 .

1. *Soit l'opérateur* $T \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$ *défini par*

$$T(e_n) = a^{2n} e_{n+1} \text{ tel que } a \geq 1.$$

On a

$$\begin{aligned} \langle Te_n, e'_n\rangle &= \left\langle a^{2n} e_{n+1}, e'_n\right\rangle \\ &= \left\langle (a^2 e_2, a^4 e_{3,...,} a^{2(n-1)} e_n, a^{2n} e_{n+1}, ...), (e'_1, e'_2, ..., e'_{n-1}, e'_n, ...)\right\rangle \\ &= a^2 e_2 e'_1, a^4 e_3 e'_2, ..., a^{2(n-1)} e_n e'_{n-1}, a^{2n} e_{n+1} e'_n, ... \end{aligned} \tag{2.1.3}$$

D'une autre part, on a par définition de l'adjoint

$$\left\langle Te_n, e_n^{'}\right\rangle = \left\langle e_n, T^* e_n^{'}\right\rangle$$

On pose $T^* e_n^{'} = x_n$

$$\begin{aligned} \langle e_n, x_n\rangle &= \langle (e_{1,} e_2, ..., e_{n-1}, e_n, ...), (x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n, ...)\rangle \\ &= e_1 x_1 + e_2 x_2 + ..., e_{n-1} x_{n-1} + e_n x_n + ... \end{aligned} \tag{2.1.4}$$

Par (2.1.3) *et* (2.1.4) *on obtient*

$$\begin{cases} e_1x_1 = 0 \\ e_2x_2 = a^2e_2e_1' \\ \vdots \\ e_nx_n = a^{2(n-1)}e_ne_{n-1}' \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = a^2e_1' \\ \vdots \\ x_n = a^{2(n-1)}e_{n-1}' \end{cases}$$

Donc, l'adjoint de T est défini par

$$T^*(e_n) = a^{2(n-1)}e_{n-1}$$

Cet opérateur est hyponormal, en effet.

$$TT^*(e_n) = a^{4n}e_n \text{ et } T^*T(e_n) = a^{4(n-1)}e_n$$

Alors

$$(T^*T - TT^*)e_n = a^{2n}(1 - a^{-4})e_n \geq 0.$$

2. *Soit l'opérateur $T \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$,*

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & ... & ... \\ T_1 & 0 & 0 & 0 & ... & ... \\ 0 & I & 0 & 0 & ... & ... \\ 0 & 0 & I & 0 & ... & ... \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

On a

$$TT^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & ... & ... \\ 0 & T_1^2 & 0 & 0 & ... & ... \\ 0 & 0 & I & 0 & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & I & ... & ... \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \text{ et } T^*T = \begin{pmatrix} T_1^2 & 0 & 0 & 0 & ... & ... \\ 0 & I & 0 & 0 & ... & ... \\ 0 & 0 & I & 0 & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & I & ... & ... \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

Alors

$$T^*T - TT^* = \begin{pmatrix} T_1^2 & 0 & 0 & 0 & ... & ... \\ 0 & I - T_1^2 & 0 & 0 & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & ... \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

Donc, T est hyponormal sous la condition $(I - T_1^2) \geq 0$.

Proposition 2.1.2 ***(L'inverse d'un opérateur hyponormal)***

Soit $T \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$ un opérateur hyponormal et inversible alors T^{-1} est hyponormal.

Preuve.

$$\begin{aligned}
(T^{-1})(T^{-1})^* &= (T^{-1})(T^*)^{-1} \\
&= (TT^*)^{-1} \\
&\leq (T^*T)^{-1} \\
&\leq (T^*)^{-1}(T^{-1}) \\
&\leq (T^{-1})^*(T^{-1})
\end{aligned}$$

Donc, T^{-1} est hyponormal. ■

Définition 2.1.2 .

Soit $T \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$, on dit que T est un opérateur co-hyponormal si :

$$TT^* \geq T^*T. \tag{2.1.5}$$

Remarque 2.1.1 .

Si $T \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$ est un opérateur hyponormal, Alors T^* est co-hyponormal.

Proposition 2.1.3 .

Soit $T \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$, Alors T est un opérateur hyponormal si et seulement si

$$T^*T + 2\lambda TT^* + \lambda^2 T^*T \geq 0, \text{ pour tout } \lambda \in \mathbb{R}. \tag{2.1.6}$$

Preuve. .

Soit $\lambda \in \mathbb{R}, x \in H$ donné. T est un opérateur hyponormal si et seulement si

$$\begin{aligned}
\|T^*x\| &\leq \|Tx\| \\
&\Longleftrightarrow 4\|T^*\|^4 - 4\|Tx\|^2 \cdot \|Tx\|^2 \leq 0 \\
&\Longleftrightarrow \|Tx\|^2 + 2\lambda\|T^*x\|^2 + \lambda^2\|Tx\|^2 \geq 0 \\
&\Longleftrightarrow \langle Tx, Tx\rangle + 2\lambda\langle T^*x, T^*x\rangle + \lambda^2\langle Tx, Tx\rangle \geq 0 \\
&\Longleftrightarrow \langle T^*Tx, x\rangle + 2\lambda\langle TT^*x, x\rangle + \lambda^2\langle T^*Tx, x\rangle \geq 0 \\
&\Longleftrightarrow \left\langle \left(T^*T + 2\lambda TT^* + \lambda^2 T^*T\right)x, x\right\rangle \geq 0 \\
&\Longleftrightarrow T^*T + 2\lambda TT^* + \lambda^2 T^*T \geq 0.
\end{aligned}$$

■

Lemme 2.1.1 .

Soit $T = A + iB$ une décomposition cartésienne de T, soit $AB = C + iD$ une décomposition cartésiéne de AB.Alors $T \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$ est un opérateur hyponormal si et seulement si $D \leq 0$.

Preuve. .

On calcule $T^*T - TT^*$

$$\begin{aligned}
(A - iB)(A + iB) - (A + iB)(A - iB) &= AA + iAB - iBA + BB - AA + iAB - iBA - BB \\
&= 2i(AB - BA) \\
&= 2i[(C + iD) - (C - iD)] \\
&= -4D
\end{aligned}$$

Donc pour

$$-4D \geq 0 \iff D \leq 0.$$

■

Proposition 2.1.4 .

Soit $T \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$ un opérateur hyponormal alors

$$\|(T - \lambda I)x\| \geq \left\|(T^* - \bar{\lambda} I)x\right\|, \forall x \in \mathrm{H}, \lambda \in \mathbb{C} \tag{2.1.7}$$

(i.e. $T - \lambda I$ est un opérateur hyponormal).

Preuve.

$$\begin{aligned}
& (T^* - \bar{\lambda}I)(T - \lambda I) - (T - \lambda I)(T^* - \bar{\lambda}I) \\
= \; & T^*T - T^*(\lambda I) - (\bar{\lambda}I)T + (\bar{\lambda}I)(\lambda I) - TT^* + T(\bar{\lambda}I) + (\lambda I)T^* - (\lambda I)(\bar{\lambda}I) \\
= \; & T^*T - TT^* \geq 0 \text{ (car } T \text{ hyponormal).}
\end{aligned}$$

■

Lemme 2.1.2 .

Soit $T \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$ *est un opérateur hyponormal et si* $(T - \lambda I)^{-1}$ *existe.*

Alors, $(T - \lambda I)^{-1}$ *est un opérateur hyponormal.*

Preuve. .

On pose que $\lambda = 0$, Alors

$$T^*T - TT^* \geq 0$$

et par conséquence

$$0 \leq T^{-1}(T^*T - TT^*)T^{*-1} = T^{-1}T^*TT^{*-1} - I$$

maintennet depuis $A \geq I \implies A^{-1} \leq I$ on a

$$I - T^*T^{-1}T^{*-1}T \geq 0$$

ainsi

$$(T^{*-1}T^{-1} - T^{-1}T^{*-1}) = T^{*-1}(I - T^*T^{-1}T^{*-1}T)T^{-1}$$

ce qui termine la preuve . ■

Proposition 2.1.5 .

Soit $T \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$ *un opérateur hyponormal.*

Alors,

$$Tx = \lambda x \Longrightarrow T^*x = \bar{\lambda}x$$

Preuve.

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle$$

On a

$$\begin{aligned}\langle Tx, y\rangle &= \langle \lambda x, y\rangle \\ &= \left\langle x, \bar{\lambda} y\right\rangle \\ &= \langle x, T^* y\rangle\end{aligned}$$

Alors

$$T^*y = \bar{\lambda} y.$$

■

Proposition 2.1.6 .

Soit $T \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$ un opérateur hyponormal avec $Tx_1 = \lambda_1 x_1$, $Tx_2 = \lambda_2 x_2$ et $\lambda_1 \neq \lambda_2$ alors

$$\langle x_1, x_2\rangle = 0$$

Preuve. .

On a

$$\begin{aligned}\langle (T-\lambda_1 I)x_1, x_2\rangle - \left\langle x_1, (T^* - \overline{\lambda_2} I)x_2\right\rangle &= 0 \\ &= \langle Tx_1, x_2\rangle - \langle \lambda_1 x_1, x_2\rangle - \langle x_1, T^* x_2\rangle + \left\langle x_1, \overline{\lambda_2} x_2\right\rangle \\ &= (\lambda_2 - \lambda_1)\langle x_1, x_2\rangle = 0 \\ &\Longrightarrow \langle x_1, x_2\rangle = 0 \text{ car } \lambda_1 \neq \lambda_2.\end{aligned}$$

■

Définition 2.1.3 .

On dit qu'un opérateur T est de classe N si

$$\forall x \in \mathrm{H}, \|x\| = 1, \|Tx\|^2 \leq \left\|T^2 x\right\|.$$

Lemme 2.1.3 .

Tout opérateur hyponormal est de classe N.

Preuve. .

$\|Tx\|^2 = \langle Tx, Tx\rangle = \langle T^*Tx, x\rangle \leq \|T^*Tx\| \leq \|T^2x\|$. ■

2.1.1 Sous-espace invariant et sous-espace réduit des opérateurs hyponormaux

Proposition 2.1.7 .

Si $T \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$ est un opérateur hyponormal et $M \subset \mathrm{H}$ est invariant pour T, alors $T_{|M}$ est un opérateur hyponormal.

Preuve.

$$T^*T \geq TT^*$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow (T^*T)_{|M} \geq (TT^*)_{|M} \\ &\Rightarrow T_{|}^*{}_M T_{|M} \geq T_{|M} T_{|}^*{}_M \\ &\Rightarrow (T_{|M})^* T_{|M} \geq T_{|M}(T_{|M})^* \\ &\Rightarrow T_{|M} \text{ est hyponormal.} \end{aligned}$$

■

Proposition 2.1.8 .

Soit $T \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$ un opérateur hyponormal avec $M \subset \mathrm{H}$ est invariant pour T, et soit $T_{|M}$ un opérateur normal, alors M réduit T.

Preuve. .

On pose $R = T_{|M}$ est un opérateur normal, i.e. $R^*R = RR^*$ où R^* est un opérateur sur M. posons $x \in M$, le problème est de montrer que $T^*x \in M$. Pour tout $y \in M$,

$$\begin{aligned} \langle T^*x, y\rangle &= \langle x, Ty\rangle \\ &= \langle x, Ry\rangle \\ &= \langle R^*x, y\rangle \end{aligned}$$

Ainsi, $\langle T^*x - R^*x, y\rangle = 0, \forall y \in M$, $T^*x - R^*x \in M^{\perp}$

Depuis $R^*x \in M$, on a

$$\begin{aligned} \|T^*x\|^2 &= \|T^*x - R^*x + R^*x\|^2 \\ &= \|T^*x - R^*x\|^2 + \|R^*x\|^2 \end{aligned}$$

Depuis T est hyponormal, $\|T^*x\| \leq \|Tx\|, \forall x \in H$; et R est normal

$$\|T^*x\| \leq \|Tx\| = \|Rx\| = \|R^*x\|$$

$$\begin{aligned} \|Tx\|^2 &\geq \|T^*x - R^*x\|^2 + \|Tx\|^2 \\ &\Rightarrow \|T^*x - R^*x\|^2 = 0 \\ &\Rightarrow T^*x = R^*x \in M \\ &\Rightarrow T^*x \in M. \end{aligned}$$

■

Proposition 2.1.9 .

Soit $T \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$ *est un opérateur hyponormal et* $M = \{x \in \mathrm{H}, Tx = \lambda x\}$ *alors,* M *réduit* T *et* $T_{|M}$ *est un opérateur normal.*

Preuve. .

$T_{|M}$ est un opérateur scalaire. Alors $T_{|M}$ est un opérateur normal. Et depuis le corollaire $(1.1.1), M$ est invariant pour T.

donc on a M invariant pour T, et $T_{|M}$ est un opérateur normal, Alors M réduit T.[proposition 2.1.8]. ■

Lemme 2.1.4 .

Soit $T \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$ *un opérateur hyponormal. Alors* $\|Tx\| = \|T^*x\|$ *si et seulement si*

$$T^*Tx = TT^*x.$$

Preuve. .

La preuve de la suffisance est évidente. Si $\|Tx\| = \|T^*x\|$ alors $\langle (T^*T - TT^*)x, x\rangle = 0$ et pour $y \in H$

$$|\langle (T^*T - TT^*)x, y\rangle|^2 \leq |\langle (T^*T - TT^*)x, x\rangle| \cdot |\langle (T^*T - TT^*)y, y\rangle| = 0 \tag{2.1.8}$$

Par l'inégalité genéralisée de Schwarz pour les opérateurs posotifs. Depuis y est arbitaire on a

$$T^*Tx = TT^*x.$$

■

Lemme 2.1.5 .

Soient $T \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$ *un opérateur hyponormal et l'ensemble* $M = \{x \in \mathrm{H} : \|Tx\| = \|T^*x\|\}$ *alors* M *est un sous-espace fermé.*

Preuve. .

Evident du lemme (2.1.4). ∎

Corollaire 2.1.1 .

Soit $T \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$ *un opérateur hyponormal, s'il existe un* $f \in \mathrm{H}, \|f\| = 1,$*tel que*

$$\lim_{n \to +\infty} \inf n \|T^n f\|^{1/n} \longrightarrow 0,$$

Alors T *a un sous-espace propre invariant.*

Preuve. Voir [22] ∎

2.1.2 Opérations sur les opérateurs hyponormaux

Proposition 2.1.10 .

Si $S, T \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$ *sont deux opérateurs hyponormaux tels que* $TS^* = S^*T$ *et* $ST = TS$ *, alors* $S + T$ *est un opérateur hyponormal.*

Preuve.

$$\begin{aligned}
(S+T)(S+T)^* &= (S+T)(S^*+T^*) \\
&= SS^* + ST^* + TS^* + TT^* \\
&= SS^* + T^*S + S^*T + TT^* \\
&\leq S^*S + T^*S + S^*T + TT^* \\
&= (S^*+T^*)(S+T) \\
&= (S+T)^*(S+T)
\end{aligned}$$

∎

Proposition 2.1.11 .

Soientt $T \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$ *un opérateur normal, et* $S \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$ *est un opérateur hyponormal, tel que* $ST = TS$*, alors* $T - S$ *est hyponormal.*

Preuve. .

$$\begin{aligned}(T-S)(T-S)^* &= (T-S)(T^*-S^*)\\ &= TT^*-TS^*-ST^*-SS^*\\ &= T^*T-S^*T-T^*S-SS^*\\ &\leq T^*T-S^*T-T^*S-S^*S\\ &= (T^*-S^*)(T-S)\\ &= (T-S)^*(T-S).\end{aligned}$$

■

Proposition 2.1.12 .

Soient A et B deux opérateurs hyponormaux tel que $AB^*=B^*A$, alors

1. *$span\{A,B\}$ est hyponormal.*
2. *AB et BA sont hyponormaux.*

Preuve. [13] ■

Proposition 2.1.13 .

Si $S,T\in\mathcal{L}(\mathrm{H})$ sont deux opérateurs hyponormaux tels que $TS^*=S^*T$ alors ST est un opérateur hyponormal.

Preuve.

$$\begin{aligned}(ST)(ST)^* &= STT^*S^*\\ &\leq ST^*TS^*\\ &= T^*SS^*T\\ &\leq T^*S^*ST\\ &= (ST)^*(ST)\end{aligned}$$

■

Théorème 2.1.1 .

Soient T_1, T_2 deux opérateurs hyponormaux, on suppose que T_1 commute avec $|T_2|$ et T_2 commute avec $|T_1^*|$. Alors T_1T_2 et T_2T_1 sont hyponormaux.

Preuve. .

Premièrement, nous prouvons l'hyponormalité de T_1T_2. Par les hypothèses

$$T_1^*(T_2^*T_2) = (T_2^*T_2)T_1^* \text{ et } T_2^*(T_1^*T_1) = (T_1^*T_1)T_2^*$$

Pour un opérateur positif P, R^*PR est un opérateur positif pour tout opérateur R, on a

$$\begin{aligned}
(T_1T_2)^*(T_1T_2) - (T_1T_2)(T_1T_2)^* &= T_2^*T_1^*T_1T_2 - T_1T_2T_2^*T_1^* \\
&\geq T_2^*T_1T_1^*T_2 - T_1T_2T_2^*T_1^* \\
&\geq T_1T_1^*T_2^*T_2 - T_1T_2^*T_2T_1^* \\
&= T_1T_1^*T_2^*T_2 - T_1T_1^*T_2^*T_2 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

ensuite, On établit l'hyponormalité de T_2T_1. On note que pour tout opérateur A et $x \in H$,

$$\|Ax\|^2 = \langle Ax, Ax\rangle = \langle A^*Ax, x\rangle = \left\langle (A^*A)^{1/2}x, (A^*A)^{1/2}x\right\rangle = \left\|(A^*A)^{1/2}x\right\|^2.$$

Donc,

$$\begin{aligned}
\|(T_2T_1)^*x\| &= \|T_1^*T_2^*x\| \\
&= \left\|(T_1T_1^*)^{1/2}T_2^*x\right\| \\
&= \left\|T_2^*(T_1T_1^*)^{1/2}x\right\| \\
&\leq \left\|T_2(T_1T_1^*)^{1/2}x\right\| \\
&= \left\|(T_2^*T_2)^{1/2}(T_1T_1^*)^{1/2}x\right\| \\
&= \left\|T_1^*(T_2T_2^*)^{1/2}x\right\| \\
&\leq \left\|T_1(T_2T_2^*)^{1/2}x\right\| \\
&= \|T_2T_1x\|.
\end{aligned}$$

■

Remarque 2.1.2 .

La conclusion du théorème ne tient pas en l'absence de la condition T_2 commutant avec le module de T_1^* comme indiqué dans l'exemple suivant

Exemple 2.1.2 .

Soit H *un espace séparable de Hilbert avec base orthogonale* $\{e_n\}_{n=0}^{\infty}$. *Soit* T_1 *la projection orthogonale de* H *sur* $[e_0, e_1]$, *le linéaire span de* $\{e_0, e_1\}$ *et* T_2 *défini comme* $T_2 e_n = e_{n+1}(n \geq 0)$, *alors* T_1, T_2 *sont des opérateurs hyponormaux et* T_1 *commute avec* $T_2^* T_2$. *Mais*

$$(T_1 T_2)^* e_1 = T_2^* T_1^* e_1 = T_2^* e_1 = e_0 \text{ et } T_1 T_2 e_1 = T_1 e_2 = 0.$$

Donc,

$$\|((T_1 T_2)^* e_1)\| \nleq \|(T_1 T_2) e_1\|$$

D'où $T_1 T_2$ *n'est pas hyponormal.*

Théorème 2.1.2 .

Soient $S, T \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$ *deux opérateurs hyponormaux, alors* $S \oplus T$ *est un opérateur hyponormal.*

Preuve.

$$\begin{aligned} (S \oplus T)(S \oplus T)^* &= (S \oplus T)(S^* \oplus T^*) \\ &= SS^* \oplus TT^* \\ &\leq S^*S \oplus T^*T \\ &= (S^* \oplus T^*)(S \oplus T) \\ &= (S \oplus T)^*(S \oplus T) \end{aligned}$$

Alors $S \oplus T$ est un opérateur hyponormal. ■

Théorème 2.1.3 .

Soient $S, T \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$ *deux opérateurs hyponormaux, alors* $S \otimes T$ *est un opérateur hyponormal.*

Preuve. .

$$\begin{aligned}
(S\otimes T)(S\otimes T)^*(x_1\otimes x_2) &= (S\otimes T)(S^*\otimes T^*)(x_1\otimes x_2),\ \text{pour } (x_1,x_2)\ \in H.\\
&= SS^*x_1\otimes TT^*x_2\\
&\leq S^*Sx_1\otimes T^*Tx_2\\
&= (S^*\otimes T^*)(S\otimes T)(x_1\otimes x_2)\\
&= (S\otimes T)^*(S\otimes T)(x_1\otimes x_2)
\end{aligned}$$

Donc $S\otimes T$ est un opérateur hyponormal. ■

Proposition 2.1.14 .

Soit $T\in\mathcal{L}(\mathrm{H})$ un opérateur hyponormal, si $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$ alors l'opérateur $\alpha T+\beta$ est hyponormal.

Preuve.

$$\begin{aligned}
(\alpha T+\beta)(\alpha T+\beta)^* &= (\alpha T+\beta)(\bar{\alpha}T^*+\bar{\beta})\\
&= \alpha T\bar{\alpha}T^*+\alpha T\bar{\beta}+\beta\bar{\alpha}T^*+\beta\bar{\beta}\\
&\leq \bar{\alpha}T^*\alpha T+\bar{\beta}\alpha T+\bar{\alpha}T^*\beta+\bar{\beta}\beta\\
&= (\bar{\alpha}T^*+\bar{\beta})(\alpha T+\beta)\\
&= (\alpha T+\beta)^*(\alpha T+\beta)
\end{aligned}$$

Donc, $\alpha T+\beta$ est un opérateur hyponormal. ■

Théorème 2.1.4 *[21]*

Soit $T_n:\mathrm{H}\to\mathrm{H}$, $(n=1,2,...)$ une suite d'opérateurs hyponormaux et $T_n\to T$. Alors T hyponormal.

Proposition 2.1.15 .

Soit $T\in\mathcal{L}(\mathrm{H})$ un opérateur hyponormal , alors T^n est hyponormal pour $n\geq 1$.

Preuve.

$$\begin{aligned} T^n(T^n)^* &= T^nT^{*n} \\ &= (TT^*)^n \\ &\leq (T^*T)^n \\ &= T^{*n}T^n \\ &= (T^n)^*(T^n) \end{aligned}$$

Donc, T^n est un opérateur hyponormal. ■

Proposition 2.1.16 .

Si $T \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$ est un opérateur hyponormal alors e^T est hyponormal.

Preuve. [21] ■

Proposition 2.1.17 ***(Ando,Stampfli.)***

Si $T \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$ un opérateur hyponormal, Alors

$$\|T^n\| = \|T\|^n \tag{2.1.9}$$

Pour tout n entier positif.

Preuve. .

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\xi \in H$ fixé. Alors

$$\|T^*T^n\xi\| \leq \|TT^n\xi\| \leq \left\|T^{n+1}\right\| \|\xi\|,$$

d'où $\|T^*T^n\| \leq \|T^{n+1}\|$.

Assumer la relation 2.1.9 pour tout $p \leq n$, et nous la prouver pour $n+1$. Premièremnt noter que

$$\begin{aligned} \|T^n\|^2 &= \|T^{*n}T^n\| = \left\|T^{*n-1}T^*T^n\right\| \leq \left\|T^{*n-1}\right\| \|T^*T^n\| \leq \left\|T^{*n-1}T^{n+1}\right\| = \\ &= \left\|T^{n-1}\right\| \left\|T^{n+1}\right\|. \end{aligned} \tag{2.1.10}$$

depuis $\|T^{n-1}\| = \|T\|^{n-1}$ et $\|T^n\| = \|T\|^n$ on a $\|T\|^{n+1} \leq \|T^{n+1}\|$. L'inégalité inverse étant évidente, la preuve est complète. ■

2.1.3 Normalité des opérateurs hyponormaux

Théorème 2.1.5 .

Soit T un opérateur hyponormal avec $T^n = B$ où n est un entier positif et B un opérateur normal; alors T est normal.

Preuve. voir[23] ∎

Théorème 2.1.6 .

Soit $T = A + iB$ décomposition cartésiènne de T avec AB est hyponormal. Si A ou B positif, alors T est normal.

Preuve. .

Supposons que A est positif, soit $S = AB$ d'où $S^* = BA$.

On a $(AB)A = A(BA)$, donc $SA = AS^*$.

En utilisant le théorème de Fuglede-Putnam, on trouve

$S^*A = AS$, d'où $BA^2 = A^2B$, mais A est positif, alors $AB = BA$ i.e, T est normal.

Maintenant, si B est positif, on applique le même argument. ∎

Théorème 2.1.7 .

Soit $T = A + iB$ décomposition cartésiènne de T avec AB est hyponormal, si T^* est hyponormal alors T est normal.

Preuve. .

Soit $Q = AB$ d'où $Q^* = BA$. On a $(AB)A = A(BA)$ donc $QA = AQ^*$.

En utilisant le théorème de Fuglede-Putnam, on trouve $Q^*A = AQ$ d'où $BA^2 = A^2B$

Depuis, T^* est hyponormal, nous avons

$$TT^* - T^*T = 2i(BA - AB)$$

On pose

$$Y = 2i(BA - AB),$$

d'où $Y \geq 0$

D'autre part,

$$Y^2A = Y(YA) = Y(-AY) = -(YA)Y = -(-AY)Y = AY^2,$$

mais Y est positif, alors $YA = AY = 0$. Donc,

$$A(AB - BA) = (AB - BA)A = 0$$

Ce implique que $\sigma(AB - BA) = \{0\}$. Par conséquent $AB - BA$ est quasi-nilpotent et anti-hermitien. d'ou $AB - BA = 0$, donc T est normal. ■

Théorème 2.1.8 .

Un opérateur hyponormal sur H *, qui a une partie imaginaire compact est un opérateur normal.*

Preuve. .

Soit T un opérateur, et soit $M = \{x \in H \colon \|Tx\| = \|T^*x\|\}$ depuis T est hyponormal le vecteur $x \in M$ si et seulement si $T^*Tx = TT^*x$.

d'apres 2.1.8 M est un sous-espace férmé

Soit $T = A + iB$, tel que A est le partie réel auto-adjoint de T, et B est le partie imaginaire auto-adjoint de T. Pour chuque valeur propre λ de B et un vecteur propre correspondant x, on a, comme $A + i\lambda$ est normal et λ est reél,

$$\|Tx\| = \|(A + i\lambda)\| = \|(A + i\lambda)^*x\| = \|(A - i\lambda)x\| = \|(A - iB)x\| = \|T^*x\|.$$

Ainsi le sous-espace M contient chaque espaces propre de B. et M doit etre l'espace entier et l'opérateur T est normal. ■

Théorème 2.1.9 *[25]*

Soit $T \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$ un opérateur hyponormal, avec $T = U|T|$. Si $\tilde{T} = |T|^{\frac{1}{2}} U |T|^{\frac{1}{2}}$ est normal, alors $|T|U = U|T|$ et T est normal.

Théorème 2.1.10 .

Soit $T \in \mathcal{L}(\mathrm{H}_n)$ un opérateur hyponormal, suppose que $\|TE_n - E_nTE_n\| = \theta_n$, tel que E_n est séquence croissante de projections convergent vers I et chaque E_n a une range n. si $\lim\limits_{n\to+\infty} \inf n\ \theta_n = 0$, Alors T est normal.

Preuve. Voir [22] ■

2.1.4 Matrices H-hyponormaux

Soit $\mathbb{C}^n$ noté l'espace vectoriel de n par un vecteurs complexes équipés par produit scalaire indéfini qu'est induit pour une singulière matrice hermitienne $H \in \mathbb{C}^{n\times n}$, par la formule

$$[x, y] = \langle Hx, y\rangle .$$

tel que $\langle ., .\rangle$ est le produit scalaire usuel sur $\mathbb{C}^n$. Si la matrice hermitienne H est inversible, Alors on a cette définition :

Définition 2.1.4 ***(H-adjoint de matrice)***

Pou toute matrice $T \in \mathbb{C}^{n\times n}$, il existe une seule matrice $T^{[*]}$ satisfait :

$$\left[T^{[*]}x, y\right] = [x, Ty] \quad \forall x, y \in \mathbb{C}^n,$$

Tel que $T^{[*]} = H^{-1}T^*H$.

Définition 2.1.5 ***(Matrice H-hyponormal)***

Soit $H \in \mathbb{C}^{n\times n}$ un matrice hermitienne, Alors T est une matrice H-hyponormal si

$$H(T^{[*]}T - TT^{[*]}) \geq 0,$$

i.e, $T^{[*]}T - TT^{[*]}$ est H-nonnégative.

Exemple 2.1.3 *.*

Soient $H, Y \in \mathbb{C}^{3\times 3}$, défini par

$$H = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} ; et\ Y = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} ;$$

On a

$$Y^{[*]} = H^{-1}Y^*H = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & 2 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

alors $Y^{[*]}Y - YY^{[*]}$ est H-nonnégative

Donc Y est H-hyponormal .

Définition 2.1.6 .

Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{k})$, *on appelle trace de* A, *et on note* $tr(A)$, *la somme des éléments diagonaux de* A.

$$\text{Pour } \; A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}, \; tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Proposition 2.1.18 .

Dans l'éspace de dimension finie toute matrice (opérateur) hyponormal est une matrice (opérateur) normal.

Preuve. .

On a

$$tr[AB] = tr[BA].$$

Il s'ensuite que

$$tr[T^*T - TT^*] = 0.$$

Si $T^*T \geq TT^*$, d'où $T^*T - TT^*$est un opérateur positif avec trace 0, alors $T^*T - TT^* = 0$, donc T est un opérateur normal. ■

Chapitre 3

THÉORIE SPECTRALE DES OPÉRATEURS HYPONORMAUX

Du point de vue de la théorie spectrale générale des opérateurs linéaires, La condition d'hyponormalité a plusieurs conséquences importantes et plutôt inattendues. Parmi ceux-ci, nous mentionnons la formule de spectre continu, ponctuel, résiduel et nous donnons quelques propriétés spectrales des opérateurs hyponormaux.

Le but de ce chapitre est de développer, loin des perspectives plus élaborées sur cette classe d'opérateurs, ces aspects élémentaires de l'analyse des opérateurs hyponormaux.

3.1 Définitions préliminaires

Définition 3.1.1 .

1. *Le cercle de centre* 0 *et de rayon* 1 *est le cercle unité*

$$C(0,1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}.$$

2. *Le disque ouvert de centre* $a \in \mathbb{R}$ *et de rayon* $r > 0$ *est l'ensemble*

$$\Delta(a,r) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-a)^2 + (y-b)^2 < r^2\}.$$

Définition 3.1.2 .

1. *Un opérateur* $T \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$ *est dit cyclique s'il existe* x *dans* H *tel que* $(T^i(x))_{i\in\mathbb{N}}$ *engendre* H.

2. *Un vecteur* $x \in \mathrm{H}$ *est dit cyclique si* $(T^i(x))_{i\in\mathbb{N}}$ *engendre* H.

3. *Un sous-espace* F *de* H *est dit cyclique s'il est invariant pour* T *et si la restriction de* T *à* F *est cyclique.*

Définition 3.1.3 ***(Fonction Analytique)***

Soit $f : U \to \mathbb{C}$ *une fonction d'une variable complexe, où* U *est un ouvert de* $\mathbb{C}$.*On dit que la fonction* f *est analytique sur* U *si pour tout* $a \in U$, *il existe une suite* (a_n) *de nombres complexes et un réel* $r > 0$, *tel que, pour tout* $z \in \Delta(a, r)$, *c'est-à-dire pour tout* z *dans le disque (ouvert) de centre* a *et de rayon* r, *supposé inclus dans* U, *on a :*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-a)^n.$$

Définition 3.1.4 *.*

Soit $T \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$ *un opérateur lineaie borné , On note par* $\rho_T(x)$ *l'ensemble résolvente local de* T *en* x. *i.e. la fonction résolvent de* $\rho_T(x)$; $R_T(\lambda)x = (T - \lambda I)^{-1}x$ *peut admettre des extensions analytiques.*

Remarque 3.1.1 .

- $\rho_T(x)$ *est l'ouvert maximal sur lequel* $R_T(\lambda)$ *admet une extension.*
- *On dit que* T *posséde la propriété d'extension unique (**SVEP**), si l'extension maximal de* $R_T(\lambda)x$ *est unique.*
- *Le fermé* $\sigma_T(x) = \mathbb{C} / \rho_T(x)$ *le spectre local de* T *en* x.

3.2 Quelques propriétés spectrales des opérateurs hyponormaux

Définition 3.2.1 .

On définit le spectre ponctuel d'un opérateur hyponormal T par

$$\sigma_p(T) = \{\lambda \in \sigma(T); \ker(T_\lambda) \neq \{0\}\}. \tag{3.2.1}$$

Définition 3.2.2 .

On définit le spectre résiduel d'un opérateur hyponormal T par

$$\sigma_r(T) = \{\lambda \in \sigma(T); \ker(T_\lambda) = \{0\} \text{ et } T_\lambda \text{ a rang fermé}\}. \tag{3.2.2}$$

Définition 3.2.3 .

On définit le spectre continu d'un opérateur hyponormal T par

$$\sigma_c(T) = \{\lambda \in \sigma(T); \ker(T_\lambda) = \{0\} \text{ et } T_\lambda \text{ n'a pas de rang fermé}\}. \tag{3.2.3}$$

Remarque 3.2.1 .

Soit $T \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$ un opérateur hyponormal, le spectre $\sigma(T)$ est sous-ensembele compact de plan complexe,il est contenu dans la boule de rayon $\|T\|$ et centre 0, Il a la décomposition usuel

$$\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \sigma_c(T) \cup \sigma_r(T)$$

Proposition 3.2.1 .

Soit $T \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$ un opérateur hyponormal. Alors

$$\sigma_p(T) \subset (\sigma_p(T^*))^*,$$

et

$$\sigma_{ap}(T) \subset (\sigma_{ap}(T^*))^*.$$

Si T est hyponormal , Alors $\sigma_p(T) = \varnothing$.

Preuve. .

Rappelons que $T_\lambda = T - \lambda I$.

Pour $\lambda \in \mathbb{C}$ fixé, On a $\|T_\lambda^* x\| \leq \|T_\lambda x\|$, Pour tout vecteur $x \in H$. Alors les deux inclusions sont evidentes. ■

Corollaire 3.2.1 .

Supposons que $T \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$ *est un opérateur hyponormal, Alors*

$$\sigma(T) = (\sigma_{ap}(T^*))^* \tag{3.2.4}$$

Preuve. .

Il suffit de noter la propriété suivante du spectre résiduel

$$\sigma_r(T) \subset (\sigma_p(T^*))^*$$

Et le preuve est compléte. ■

Théorème 3.2.1 ***(Andô)***

Tout opérateur hyponormal a un point $\lambda \in \sigma_{ap}(T)$, *tel que* $|\lambda| = \|T\|$.

Preuve. Voir [4]. ■

Corollaire 3.2.2 .

Un opérateur hyponormal nilpotent généralisé est forcement nul.

Preuve. .

Si T est un opérateur hyponormal, alors $\sigma(T)$ contient un scalaire λ tel que $|\lambda| = \|T\|$. pour tout entier positif n, il s'ensuit que $\sigma(T^n)$ contient λ^n; alors $\|T\|^n = |\lambda|^n = |\lambda^n| \leq \|T^n\| \leq \|T\|^n$ et aussi $\|T^n\| = \|T\|^n$. si, en plus T est un opérateur nilpotent généralisé, alors $\lim \|T^n\|^{1/n} = 0$, donc $\|T\| = 0$. ■

Théorème 3.2.2 .

Soit T *est un opérateur hyponormal dans un espace de Hilbert et soit* $\lambda_\circ$ *un point isolé dans la spectre de* T. *Alors* $\lambda_\circ \in \sigma_p(T)$.

Preuve. .

Par la proposition (2.1.4) , on pouvons supposer $\lambda_\circ = 0$. choisissons $R > 0$ Suffisamment petit pour que 0 soit le seul point of $\sigma(T)$ contenu dans ou sur le cercle $|\lambda| = R$.On définit

$$E = \int\limits_{|\lambda|=R} (T - \lambda I)^{-1} d\lambda.$$

aussi E est une projection non nulle qui commute avec T.

Ainsi, EH est invariant par T et $T_{|EH}$ est hyponormal. Aussi

$$\sigma(T_{|EH}) = \sigma(T) \cap \{|\lambda| < R\}$$

donc $\sigma(T_{|EH}) = 0$.

Du dernier corollaire, nous pouvons conclure que $T_{|EH}$ est la transformation null. En fait, il est maintenant clair que $EH = \{x \in H : Tx = 0\}$ qu'implique EH réduit T. ■

Théorème 3.2.3 .

Soit $T \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$ *un opérateur hyponormal.*

Alors $r(T) = \|T\|$.

Preuve. .

Pour $x \in H$, $\|x\| = 1$ on a

$$\|Tx\|^2 = \langle Tx, Tx\rangle = \langle T^*Tx, x\rangle \leq \|T^*Tx\| \leq \left\|T^2x\right\|.$$

Mais,

$$\|T\|^2 \leq \left\|T^2\right\| \leq \|T\|^2$$

Ce qui implique $\|T\|^2 = \|T^2\|$

Maintenant

$$\begin{aligned} \|T^nx\|^2 &= \langle T^nx, T^nx\rangle = \left\langle T^*T^nx, T^{n-1}x\right\rangle \\ &\leq \|T^*T^nx\| \cdot \left\|T^{n-1}x\right\| \leq \left\|T^{n-1}x\right\| \cdot \left\|T^{n-1}x\right\|. \end{aligned} \tag{3.2.5}$$

Ainsi$\|T^n\|^2 \leq \|T^{n-1}\| \cdot \|T^{n-1}\|$, Et en combinant cela avec l'égalité Ci-dessus, un rendement de simple argument d'induction $\|T^n\| = \|T\|^n$ pour $n = 1, 2, \ldots$.

Depuis $r(T) = \lim\limits_{n\to\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \|T\|$ la preuve est finie. ■

Théorème 3.2.4 .

Soit $T \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$ *un opérateur hyponormal, et soit* $\lambda_0 \in \sigma_c(T)$, *Si* λ_0 *dans le domaine de* $R_T(\lambda)x$ *pour* $x \in \mathrm{H}$, *tel que* $\|x\| = 1$, *alors*

$$\left\|(T - \lambda_0)^{-1}x\right\|^n \leq \left\|(T - \lambda_0)^{-n}x\right\|.$$

Preuve. .

On suppose que $\lambda_0 = 0$, Alors

$$\left\|T^{-1}x\right\|^2 = \left\langle T^{-1}x, T^{-1}x\right\rangle = \left\langle T^{*-1}T^{-1}x, x\right\rangle \leq \left\|T^{*-1}T^{-1}\right\| \leq \left\|T^{-2}\right\|.$$

pour n fixé on peut voir que

$$\begin{aligned}
\left\|T^{-n}x\right\|^2 &= \left\langle T^{-n}x, T^{-n}x\right\rangle = \left\langle T^{*-1}T^{-n}x, T^{-(n-1)}x\right\rangle \\
&\leq \left\|T^{*-1}T^{-n}x\right\| \left\|T^{-(n-1)}x\right\| \\
&\leq \left\|T^{-(n+1)}x\right\| \left\|T^{-(n-1)}.\right\|
\end{aligned}$$

Apres quelque étape on conclu que $\|T^{-1}x\|^k \leq \left\|T^{-k}x\right\|$ pour $k = 1, 2, ...$ ■

Corollaire 3.2.3 .

Si T est un opérateur hyponormal tel que $\sigma(T)$ est l'ensemble de nombres réels, Alors T est auto-adjoint.

Corollaire 3.2.4 .

Si T est un opérateur hyponormal et $\sigma(T)$ se trouve sur le cercle unité, Alors T est unitaire.

Théorème 3.2.5 .

Soit $T \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$ un opérateur hyponormal avec $\sigma(T) = \sigma_c(T)$, Alors pour tout ensemble $F \in \mathbb{C}$ fermé. Alor

$$M = \{x \in \mathrm{H} : \sigma_T(x) \subset F\}.$$

est fermé.

Preuve. Voir [22]. ■

Lemme 3.2.1 *[24]*

Soit T un opérateur hyponormal et $\sigma(T)$ est un arc, Alors $\overline{\sigma_{T^*}(x)} \subseteq \sigma_T(x)$.

Théorème 3.2.6 *[24]*

Si T est un opérateur hyponormal et $\sigma(T)$ est un arc, Alors

$$\sigma_T(x) \,\cap\, \sigma_T(y) = 0 \quad \textit{implique} \quad \langle x, y\rangle = 0.$$

Preuve. .

La fonction

$$f(\lambda) = \left\langle (T-\lambda I)^{-1}x, y \right\rangle = \left\langle x, (T^* - \overline{\lambda} I)^{-1}y \right\rangle = \overline{\left\langle (T^* - \overline{\lambda} I)^{-1}y, x \right\rangle}$$

est analytique pour $\lambda \notin \sigma_T(x)$ et $\lambda \notin \sigma_{T^*}(y)$. Maintenant depuis $\overline{\sigma_{T^*}(\ y)} \subseteq \sigma_T(y)$, on a $\sigma_T(x) \cap \overline{\sigma_{T^*}(y)} = 0$; par conséquent $f(\lambda)$ est analytique partout. clairement $f(\lambda)$ disparait à l'infini et doit donc être indentiquement nulle. Toute fois $f(\lambda) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} - \langle T^n x, y \rangle \lambda^{-(n+1)}$, par conséquent tous les coefficients de λ^n doivent être zéro, en particulier $\langle x, y \rangle$. ■

Corollaire 3.2.5 *[23]*

Si T est un opérateur hyponormal et $\sigma(T)$ est un arc, Alors T satisfait la condition de la limite de Dunford, plus explicitement $\sigma_T(x) \cap \sigma_T(y) = 0$ implique $\|x\| \leq K \|x+y\|, K$ constant pour tout $x, y \in$ H.

Théorème 3.2.7 .

Si T est un opérateur hyponormal et $\sigma(T)$ est un arc, Alors T est normal.

Preuve. Voir [24] ■

Théorème 3.2.8 .

Si T est opérateur hyponormal sur H *avec un seul point limite dans leur spectre , Alors T est normal.*

Preuve. .

On peut supposer par le proposition (2.1.4) que le point limite est 0. par théorème (3.2.2) il existe $\lambda_1 \in \sigma(T)$ tel que $|\lambda_1| = \|T\|$.

Soit $M_1 = \{x \in H : Tx = \lambda_1 x\}$; M_1 n'est pas vide par le théorème(3.2.1) et puisque M_1 réduit T, on conclut du théorème (3.2.1) que $T_{|M_1\perp}$ n'a pas λ dans son spectre. on note également par la proposition (2.1.9) que $T_{|M_1}$ est normal.

On continue de cette façon, en sélectionnant des points dans $\sigma(T)$ commandé par valeur absolue, mettre $M_i = \{x \in H : Tx = \lambda_1 x\}$.

Alors $M_1 \oplus \ldots \oplus M_n$ reduit $T_{\ |M_1 \oplus \ldots \oplus M_n}$ est normal. On observe que $T_{\ |M_1 \oplus \ldots \oplus M_n}$ est hyponormal avec son rayon spectral égal à sa norme. Ainsi, puisque 0 est le seul point limite de $\sigma(T)$, les opérateur normaux $T_{|M_1\oplus\ldots\oplus M_n}$ doivent converger vers T dans la topologie uniforme des opérateurs. Par conséquent, T est normal. ■

Corollaire 3.2.6 .

Si T est un opérateur hyponormal sur H *avec un seul nombre fini de points limites dans son spectre, Alors T est normal.*

Théorème 3.2.9 .

Si T est un scalaire opérateur hyponormal et $\sigma(T)$ a un domaine nul, Alors T est normal.

Preuve. Voir[23] ■

Proposition 3.2.2 .

Soit T un opérateur hyponormal avec $\lambda \in \rho(T)$. Alors

$$\left\|(T-\lambda I)^{-1}x\right\| = \frac{1}{dis(\lambda, \sigma(T))}$$

Ou bien $\|(T-\lambda I)x\| \geq dis(\lambda, \sigma(T))$, où $\|x\| = 1$, $x \in$ H et $dis(\lambda, \sigma(T)) = \min\{|\lambda - w| : w \in \sigma(T)\}$.

Preuve. .

On rappel que pour T hyponormal, $r(T) = \|T\|$. Ainsi pour $\lambda \in \rho(T), \|x\| = 1$, On a

$$\begin{aligned}\|(T-\lambda I)^{-1}x\| \leq \|(T-\lambda I)^{-1}\| &= \max\{|w| : w \in \sigma[(T-\lambda I)^{-1}]\} \\ &= 1/\ \min\{|w| : w \in \sigma[(T-\lambda I)]\} \\ &= 1/\min\{|\lambda - w| : w \in \sigma(T)\} = 1/dis(\lambda, \sigma(T))\end{aligned}$$

La relation $\|(T-\lambda I)x\| \geq dis(\lambda, \sigma(T))$ est évident. ■

Théorème 3.2.10 ***(Putnam)[17]***

Soit $T \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$ un opérateur hyponormal, si μ est mesure de lebsegue. Alors

$$\|T^*T - TT^*\| \leq \frac{1}{\pi}\mu(\sigma(T)).$$

Preuve. .

On prend un vecteur unitaire $\xi \in H$, on doit prouver l'inégalité

$$\langle (T^*T - TT^*)\xi, \xi\rangle \leq \frac{1}{\pi}\mu(\sigma(T)).$$

On consèdère le sous-espace cyclique H_ξ

$$H_\xi = \{f(T)\xi; f \in Rat(\sigma(t))\}$$

tel que $Rat(\sigma(t))$ est l'algèbre des fonctions rationnelles cycliques,

puis l'opérateur $S = T_{|H_\xi}$ est encore hyponormal. et il a ξ comme un vecteur cyclique .

Du plus $\|S^*\xi\| \leq \|T^*\xi\|$, d'où

$$\begin{aligned}\langle (T^*T - TT^*)\xi, \xi\rangle &= \|T\xi\|^2 - \|T^*\xi\|^2 \\ &\leq \|S\xi\|^2 - \|S^*\xi\|^2\end{aligned}$$

$$\langle (S^*S - SS^*)\xi, \xi\rangle \leq tra[S^*S - SS^*].$$

de puis $\sigma(S) \subset \sigma(T)$,

$$\langle (T^*T - TT^*)\xi, \xi\rangle \leq tra[S^*S - SS^*] \leq \frac{1}{\pi}\mu(\sigma(T)).$$

ce qui achève la preuve. ■

Corollaire 3.2.7 *[17]*

Un opérateur hyponormal $T \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$ avec $\mu(\sigma(T)) = 0$ est nécessairement normal.

Bibliographie

[1] *Ando T. On hyponormal operator, Proc.Amer.Math. Soc. 14 (1963), 290-291.*

[2] *Barraa M, Boumazgoun M. Norm of derivation and hyponormal operators. Extracta Math. 12(2001), 225-233.*

[3] *Benzamia S, Sadaoui N. Transformation d'Aluthge. Mémoire de master, univ Hassiba Benbouali Chlef 2016.*

[4] *Berberian S.K. A note on hyponormal operator, Pacific J. Math. 12 (1962), 1171-1175.*

[5] *Berberian S.K. Introduction to Hilbert space, Oxford University Press 1961, New York.*

[6] *Brah N.L, Lohaj M, Marevci F.H, Lohaj Sh. Some properties of paranormal and hyponormal operators, Bulletin Mathematical Analysis and Application. 1(2009), 23-35.*

[7] *Dragan S. characterization of normal, hyponormal and EP operators, 329(2007) 1181-1190.*

[8] *Duggal B P. Cho Muneo. p-hyponormal operators-functional transformations, Scientiac Mathematicae, 25(1999), 141-144.*

[9] *Duggal B P. Tensor products of operators-strong stability and p-hyponormality, Glasgow Math J, 42(2000), 371-381*

[10] *Guesba M, Nadir M. On n-power -hyponormal operators, Global Journal of Pure and Applied Mathematics. 12 (2016), 473-479.*

[11] *Guyker J. Commuting hyponormal operators, pacific J.Math. 91(1980), 307-325.*

[12] *Istrătescu V. On some hyponormal operators, Pacific J. Math. 22(1967) 413-417.*

[13] *John B.C,Waclaw Szymanski. Linear combinations of hyponormal operators, Journal of mathematics, 18(1988), 695-705.*

[14] *Lambert A. Hyponormal composition operators, Bull.London Math.Soc. 18(1986), 395-400.*

[15] *Lombarkia F. Sur l'image et le noyau d'une dérivation généralisée, Thése de doctorat, Université de BATNA 14/04/2010.*

[16] *Mehl C, Rodman L. Hyponormal matrices and semidefinite invariant subspaces in indefinite inner product spaces,Electronic J of linear algebra. 11(2004), 192-204.*

[17] *Mircea M, Mihai P. Lectures on hyponormal operators, Birkhäuser Verlag 1989, Basel· Boston· Berlin.*

[18] *Putnam C R. On semi-normal operator, Pacific J. Math. 7(1957), 1649-1652.*

[19] *Putnam C R. On the spectra of semi- normal operators, Tran.Amer.Math. Soc. 119(1965), 509-523.*

[20] *Putnam C R. The spectra of subnormal operators. Amer.Math. Soc. 2(1971), 473-477.*

[21] *Radhi I.M, Fatin A. Expontial Function of a Bounded Linear Operator On Hilbert Space, Baghdad Science J. 11 (2014), 1267-1273.*

[22] *Stampfli J. A Local Spectral Theory for operators V: spectral supspaces for hyponormal operators,Trans. Amer. Math. Soc. 217(1976), 285-296.*

[23] *Stampfli J. Hyponormal operators, Pacific J. Math. 12 (1962), 1453-1458.*

[24] *Stampfli J. Hyponormal operators and spectral density, Trans. Amer. Math. Soc. 17(1965), 469-476.*

[25] *Tadashi H. A note on p-hyponormal operators, Proc. Amer. Math. Soc, 125(1997), 221-230.*

[26] *Whitly R. A note on hyponormal operator, Proc. Amer. Math. Soc. 49 (1975), 399-400.*

[27] *Xia D. Spectral Theory of hyponormal operators, Springer Basel AG 1983, Basel.*

[28] *Yoshino T. On a problem of bonsall, Tohoku Math.J. 20(1968), 5-7.*

Résumé

Dans ce mémoire, nous avons intéressé en particulier à l'étude d'une classe importante des opérateurs linéaires bornés qui s'appelle l'opérateur hyponormal, on a commencé par quelques préliminaires sur les opérateurs linéaires bornés, et on a donné quelques classes des opérateurs (auto-adjoint, unitaire, positif, normal,…) nous avons introduit les notions fondamentales et rappelles sur invariant et sous-espaces réduit. Ensuite, On a présenté la définition d'opérateur hyponormal et on a donné quelques exemples ainsi ses propriétés principales et on a étudié les opérations des opérateurs hyponormaux, comme la somme directe et le produit tensoriel.

Enfin, on a conclut par introduire la théorie spectrale d'opérateur hyponormal.

Mots clés : espace Hilbert, opérateur, normal, hyponormal, spectre

Abstract

In this note, we had particularly interested in the study of an important class of bounded linear operators called the hyponormal operator, we began with some preliminaries on bounded linear operators, and we gave some classes of operator (self-adjoint, unitary, positive, normal,…) we have introduced Fundamentals notions and recall on invariant and reduced subspaces. Then, we have presented the definition of hyponormal operator, and we gave some examples, also its main properties and we have studied the operations on the hyponormal operators as the direct sum and the tensor product.

Finally, we have concluded by introducing the spectral theory of hyponormal operators.

Key words : Hilbert space, operator, normal, hyponormal, spectrum

الملخص

هذه المذكرة تتعلق بدراسة صنف هامّ من أصناف المؤثرات الخطيّة المحدودة، وهو المؤثر شبه الناظمي. بدأنا بتعاريف أولية حول المؤثرات الخطية المحدودة وبعض خصائصها وأصنافها المهمة ؛ وذكّرنا بمفاهيم أساسية حول الفضاء الجزئي المستقر والمقلّص. ثمّ قدّمنا تعريف المؤثّر شبه الناظمي وأعطينا بعض خصائصه، كذلك درسنا العمليات الجبرية كالجمع المباشر والضرب التزاوجي لهذا الصنف.

وفي الختام قمنا بدراسة نظرية الأطياف الخاصّة بهذا المؤثر.

الكلمات المفتاحية : فضاء هلبرت، مؤثر، ناظمي، شبه الناظمي، طيف.