

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère De L'enseignement Supérieur Et De La Recherche Scientifique



UNIVERSITE ECHAHID HAMMA LAKHDAR D'EL
OUED
FACULTE DE LA SCIENCES EXACTES
Département De Mathématiques



MEMOIRE DE FIN D'ETUDE

Présenté pour l'obtention du Diplôme de **MASTER**

Domaine : Mathématiques et informatique

Filière : Mathématiques

Option : Mathématiques fondamentales

Thème

Résolution numérique des systèmes d'équations non- linéaires.

Présenté par : **Cheriet Zineb**

Madani Soumaya

Soutenu publiquement devant le jury composé de:

Guesba Messaoud	MCA.	Président	Univ. El Oued
Aissaoui Adel	Prof.	Rapporteur	Univ. El Oued
Ferhat Mohamed said	MAA.	Examineur	Univ. El Oued

Année universitaire : 2021/2022

REMERCIEMENTS

Tout d'abord , nous remercions Allah tout puissant de nous avoir aider à terminer ce memoire. La finalisation de ce travail n'aurait été possible sans l'aide précieuse de personnes qui nous sont chères.

Nous voulons tout d'abord à remercier notre encadreur de mémoire : Dr .AISSAOUI ADEL et Dr LABBI YACINE , pour leur aide et leur soutien précieux.

Nous remercions tous les enseignants qui nous ont donné une partie de leur aide savoir et pour leur aide précieuse.

Nous remercions également tous nos callègue d'étude, paraticulièrément notre promotion de master mathématique, 2021/2022 à l'université de Chahid Hama Lakhdar El-Oued
Nos plus précieuses pensées vont à nos famille qui nous soutiennent inconditionnellement.

Nos Remerciements spéciaux à eux.

Enfin, nous n'oublions pas de remercier toute les personnes qui nous ont apporté leur leur soutien et leur aide

Merci Beaucoup

TABLE DES MATIÈRES

Introduction	viii
Notations générales	xii
1 Préliminaire et quelques définitions d'analyse	1
1.1 Les espaces	1
1.1.1 Espaces vectoriels normés	2
1.1.2 Espaces métriques	4
1.1.3 Espaces Banach	6
1.2 Un système d'équations non linéaire- Continuité - Convexité - Convergence des suites	6
1.2.1 Un système d'équations non linéaire	6
1.2.2 Continuité	8
1.2.3 Convexité	9
1.2.4 Convergence	9
1.3 Différentiabilité - Gradient - Jacobien	13
1.3.1 Différentiabilité	13
1.3.2 Gradient	16
1.3.3 Jacobien	16

TABLE DES MATIÈRES

1.3.4	Matrice de Hesse	17
2	Résolution numérique d'une équation non linéaire dans $\mathbb{R}$	18
2.1	Méthode de point fixe :	19
2.1.1	Présentation de la méthode	19
2.1.2	Point répulsif	24
2.1.3	Critère de convergence du méthode	26
2.1.4	Avantages et inconvénients de la méthode	32
2.1.5	Quelques exemples	33
2.2	Méthode de Newton :	36
2.2.1	Présentation de la méthode	37
2.2.2	Critère de convergence du méthode	38
2.2.3	Avantages et inconvénients de la méthode de Newton	41
2.2.4	Exemple numérique de la méthode :	42
3	Résolution numérique une système d'équation non linéaire dans $\mathbb{R}^n$	45
3.1	Méthode de point fixe :	46
3.1.1	Présentation de la méthode	46
3.1.2	Théorème de l'application contractante	47
3.1.3	Critère de convergence de la méthode	53
3.1.4	Avantages et inconvénients de la méthode	55
3.1.5	Exemple numérique	55
3.2	Méthode de Newton	56
3.2.1	Présentation de la méthode	57
3.2.2	Critère de convergence de la méthode	61
3.2.3	Avantages et inconvénients	63
3.2.4	Exemple numérique	63
4	Application numérique en Matlab	68
4.1	Résolution numérique des équations non linéaires $f(x)=0$	68
4.1.1	Méthode du point fixe :	68
4.1.2	Méthode de Newton :	75

TABLE DES MATIÈRES

4.2	Résolution numérique d'un système non-linéaire :	81
4.2.1	Méthode du point fixe :	81
4.2.2	Méthode de Newton :	83
4.3	Analyse d'erreurs pour les méthodes itératives	85
4.4	Test de robustesse	88
Conclusion générale		94
Références		98

TABLE DES FIGURES

1.1	La convergence	11
2.1	la convergence de racine dans le cas point fixe attractif	23
2.2	la convergence de racine dans le cas point fixe répulsif	24
2.3	la convergence de racine dans le cas point fixe douteux	26
2.4	Limitation de la racine à la dernière itération où la condition d'arrêt est satisfaite	32
2.5	Une itération de la méthode Newton	36
2.6	exemple convergence	40
2.7	Les coordonnées du point d'intersection de la courbe f avec l'axe x qui est la racine de l'équation	44
4.1	Convergence d'une méthode de point fixe pour différentes valeurs initiales . .	70
4.2	Les coordonnées des points d'intersection de la courbe de f avec l'axe des abscisses	70
4.3	Le processus itératif converge très rapidement vers la racine	72
4.4	Figure g_1 , le processus itératif ne converge vers aucune valeur d'approximation initiale.	73

TABLE DES FIGURES

4.5	Figure g_2 , le processus itératif converge très rapidement vers la racine qui est le point d'intersection de la droite $y = x$ et de la courbe $y = g_2(x)$ comme le montre	73
4.6	Figure g_3 , le processus itératif converge mais très lentement.	74
4.7	Convergence de la méthode de Newton vers la racine	77
4.8	Convergence de la méthode de Newton pour différentes valeurs initiales . . .	78
4.9	Seul point d'intersection avec l'axe des abscisses (seul racine)	79
4.10	Convergence les deux racines par la méthode de Newton.	82
4.11	Convergence et la vitesse de convergence pour les deux méthodes itératives .	86
4.12	Convergence de les solutions par la méthode du point fixe	89
4.13	Convergence de les solutions par la méthode de Newton	91

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Le calcul scientifique est une discipline qui consiste à développer, analyser et appliquer des méthodes relevant de domaines mathématiques aussi variés que l'analyse, l'algèbre linéaire, la géométrie, la théorie de l'approximation, les équations fonctionnelles, l'optimisation ou le calcul différentiel. Les méthodes numériques trouvent des applications naturelles dans de nombreux problèmes posés par la physique, les sciences biologiques, les sciences de l'ingénieur, l'économie et la finance.

Le calcul scientifique se trouve donc au carrefour de nombreuses disciplines des sciences appliquées modernes, aux quelles il peut fournir de puissants outils d'analyse, aussi bien qualitative que quantitative. Ce rôle est renforcé par l'évolution permanente des ordinateurs et des algorithmes : la taille des problèmes que l'on sait résoudre aujourd'hui est telle qu'il devient possible d'envisager la simulation de phénomènes réels.

La communauté scientifique bénéficie largement de la grande diffusion des logiciels de calcul numérique. Néanmoins, les utilisateurs doivent toujours choisir avec soin les méthodes les mieux adaptées à leurs cas particuliers : il n'existe en effet aucune "boîte noire" qui puisse résoudre avec précision tous les types de problème.

L'analyse numérique a commencé bien avant la conception des ordinateurs et leur utilisation quotidienne que nous connaissons aujourd'hui. Les premières méthodes ont été développées pour essayer de trouver des moyens rapides et efficaces de s'attaquer à des problèmes soit fastidieux à résoudre à cause de leur grande dimension (systèmes à plusieurs dizaines

INTRODUCTION GÉNÉRALE

d'équations par exemple), soit parce qu'il n'existe pas solutions explicites connues même pour certaines équations assez simples en apparence.

Dès que les premiers ordinateurs sont apparus, ce domaine des mathématiques a pris son envol et continue encore à se développer de façon très soutenue. Les applications extraordinairement nombreuses sont entrées dans notre vie quotidienne directement ou indirectement. Nous les utilisons désormais sans nous en rendre compte mais surtout en ignorant la plupart du temps toute la théorie, l'expertise, le développement des compétences et l'ingéniosité des chercheurs pour en arriver là. Nous pouvons téléphoner, communiquer par satellite, faire des recherches sur internet, regarder des films où plus rien n'est réel sur l'écran, améliorer la sécurité des voitures, des trains, des avions, connaître le temps qu'il fera une semaine à l'avance,...et ce n'est qu'une infime partie de ce que l'on peut faire.

Les méthodes numériques (l'analyse numérique) est une branche des mathématiques appliquées s'intéresse au développement d'outils et des méthodes numériques pour le calcul d'approximations des solutions des problèmes mathématique qu'il serait difficile, voire impossible, d'obtenir par des moyens analytiques, Son objectif est notamment d'introduire des procédures calculatoires détaillées susceptibles d'être mises en œuvre par des calculateurs (électroniques, mécaniques ou humains) et d'analyser leurs caractéristiques et leurs performances.

Les méthodes de l'analyse numérique s'intéressent à trouver des solutions approximatives aux :

- * Problèmes dont on ignore les exprimer par des expressions analytiques par les éléments de l'analyse mathématique.
- * Les problèmes dont les solutions analytique sont inconnues ou difficiles à obtenir de telle manière qu'on ne peut les utiliser ou les exploiter, par exemple : le calcul des racines des équations non linéaires et transcendantes tel que : $a \cos^2 x + b \exp^x + c = 0$
- * Les intégrales, les solutions des systèmes d'équations linéaires ou non linéaires (les grands systèmes).
- * Les équations différentielles ordinaires et aux dérivées partielles, par exemple : $y'' \cdot \cos x +$

$$x^3y' + cy = 0, \dots Etc.$$

Langages de programmation et sciences des données :

Sans rentrer dans le détail de ces méthodes numériques et de leur substrat mathématique théorique, on peut citer quelques logiciels basés sur des langages de programmation libres et open source employés aujourd'hui aussi bien en STM qu'en SHS. Les langages de programmation **R** et Python sont communément utilisés aujourd'hui et s'accompagnent de développement logiciels et modules pour faciliter leur utilisation ou bien proposer des traitements spécifiques.

Le langage MATLAB a été conçu par Cleve Moler à la fin des années 1970 à partir de deux bibliothèques écrites en Fortran : LINPACK et EISPACK4.

Alors professeur de mathématiques à l'université du Nouveau-Mexique, il souhaitait permettre à ses étudiants de pouvoir utiliser ces deux bibliothèques sans connaître le Fortran. Cleve Moler l'utilisa ensuite pour des cours donnés à l'université Stanford où il reçut un accueil mitigé de la part des étudiants en mathématiques, habitués au Fortran.

Par contre, les étudiants en technologie, en particulier en traitement du signal, furent beaucoup plus intéressés. Un ingénieur, Jack Little (en) en comprend rapidement les capacités et entreprend avec un collègue, Steve Bangert, de le recoder en langage C. Jack Little, Cleve Moler et Steve Bangert créèrent la société The MathWorks en 1984 afin de commercialiser la version 1.0 de MATLAB 5,6.

MATLAB a ensuite évolué, en intégrant par exemple la bibliothèque LAPACK en 2007, en se dotant de nombreuses boîtes à outils (Toolbox) et en incluant les possibilités données par d'autres langages de programmation comme C++ ou Java.

Dans cette mémoire, on étudie deux méthodes concernant la résolution des équations non linéaire et leur convergence, dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^n$ la méthode du point fixe et la méthode de Newton Raphson . Le manuscrit se compose de trois chapitres que nous décrivons brièvement.

Dans le premier chapitre, on commence par définir les notions principales concernant l'analyse réel et numérique, certains espaces utilisés dans ce travail fait et représenté par les espaces vectoriels normés, l'espace de Banach et métrique, ainsi, certaines définitions importantes ont été rappelées, telles que continuité, convexité et convergence pour résoudre un système d'équations non linéaire, d'autre part, nous avons défini la dérivation des ma-

INTRODUCTION GÉNÉRALE

trices Jacobienne et Hessienne dans les espaces utilisés. Dans le deuxième chapitre de cette mémoire nous étudions deux méthodes, on commence par les théories qui trouvent des solutions numériques d'une équation non linéaire dans $\mathbb{R}$, en particulier la méthode du point fixe et la méthode de Newton. Dans chaque méthode, nous avons présenté ses conditions et le critère de convergence comme exemples de clarification. Dans le troisième chapitre de cette mémoire nous étudions deux méthodes, on commence par les théories qui trouvent des solutions numériques d'un système non linéaire dans $\mathbb{R}^n$, et $n \in \mathbb{N}$ en généralisation la méthode du point fixe et la méthode de Newton. Dans chaque méthode, nous avons présenté ses conditions et le critère de convergence comme exemples de clarification. Enfin, le dernier chapitre de cette mémoire est consacré à l'étude et applications Matlab

QUELQUES NOTATIONS

Certaines notations seront utilisées tout au long de ce mémoire que nous listons ci-dessous :

$\mathbb{R}$	Ensemble des nombres réels.
$\mathbb{R}^+$	Ensemble des nombres réels positifs ou nuls.
$\mathbb{R}^n$	Espace vectoriel réel de dimension n construit sur le corps des réels.
$\mathbb{N}$	Ensemble des nombres naturels.
$\mathbb{C}$	Ensemble des nombres complexes.
$[a, b)$	Intervalle semi-ouvert de $\mathbb{R}$ d'extrémités a et b .
$\mathcal{C} = \mathcal{C}(K, F)$	Ensemble des fonctions continues de K dans F .
$\mathcal{C}^n = \mathcal{C}^n([a, b])$	L'espace des fonctions n —fois continument différentiables dans $[a, b]$.
$ \cdot $	Valeur absolue d'un nombre réel ou module d'un nombre complexe.
f	On dit qu'une fonction numérique lorsque l'ensemble d'arrivée est $\mathbb{R}$
$E.V$	Espace vectoriel .
$E.V.N$	Espace vectoriel normé .
$B(0, 1)$	La boule unité.
$\overline{B}(0, 1)$	La boule fermé.
D	Un ouvert.

CHAPITRE 1

PRÉLIMINAIRE ET QUELQUES DÉFINITIONS D'ANALYSE

Ce chapitre est composé de trois sections. Dans la première section, on considère les espaces sont résumés dans ces trois paragraphes on définit les notions principales concernant l'analyse numérique, les espaces vectoriels normés, l'espace de banach et métrique. Dans la deuxième section, on considère et divisé en quatre paragraphes un système d'équation non linéaire, continuité, convexité et convergence. Enfin, le dernier section de ce chapitre, en tout, quatre paragraphes différentiabilité , matrice Jacobinne et matrice de Hessen.

1.1 Les espaces

Les espaces vectoriels sont des structures algébriques que l'on retrouve quasiment partout en mathématiques et qui sont la structure de base en définitions importantes et proposition. Vous avez déjà rencontré de nombreux espaces en mathématiques, sans jamais les nommer ainsi. Le but de ce court chapitre introductif est de vous permettre de reconnaître, en tant que tel, les espaces vectoriels que vous connaissez déjà, ainsi que quelques objets mathématiques fondamentaux de Analyse réel et numérique . Dans ce chapitre comme précédemment, $\mathbb{K}$ désigne l'ensemble $\mathbb{R}$ ou l'ensemble $\mathbb{C}$.

1.1 Les espaces

1.1.1 Espaces vectoriels normés

Un espace vectoriel normé est un espace vectoriel muni d'une norme[?].

Cette structure mathématique développe des propriétés géométriques de distance compatible avec les opérations de l'algèbre linéaire. Développée notamment par David Hilbert et Stefan Banach, cette notion est fondamentale en analyse et plus particulièrement en analyse fonctionnelle, avec l'utilisation d'espaces de Banach tels que les espaces Loubéig .

Definition 1.1.1. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Une norme sur E est une application $N : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ qui satisfait les propriétés suivantes

1. *Propriété de séparation* : si $x \in E$, $N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
2. *Pour tous $x \in E, \lambda \in \mathbb{K}$, on a $N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$ (la norme est dite positivement homogène).*
3. *Inégalité triangulaire* : si $x, y \in E$, alors $N(x + y) \leq N(x) + N(y)$.

Une application qui satisfait les propriétés 2. et 3. mais pas forcément 1. est appelé une semi norme sur E .

Habituellement une norme est notée par $N(x) = \|x\|$ ou $N(x) = |x|$.

Il est important de retenir l'inégalité suivante, conséquence immédiate de l'inégalité triangulaire : si $\|\cdot\|$ est une semi-norme sur E , alors

$$\forall x, y \in E, \quad |\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|.$$

Un espace vectoriel normé est la donnée d'un espace vectoriel E et d'une norme $\|\cdot\|$ sur E .

Exemples fondamentaux de normes dans $\mathbb{K}^n$

1. La relation

$$\|\mathbf{x}\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|, \quad \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n,$$

définie une norme sur $\mathbb{K}^n$.

1.1 Les espaces

2. Soit $p \in [1, \infty[$. Dans l'espace vectoriel de dimension finie $\mathbb{K}^n$, on définit la norme $\| \mathbf{x} \|_p$, pour $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, par

$$\| x \|_p = \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Si $p = 2$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on reconnaît la norme euclidienne canonique dans $\mathbb{R}^n$.

L'inégalité triangulaire pour la norme $\| \cdot \|_p$ a pour nom l'inégalité de Minkowski.

Cette inégalité peut se déduire de l'inégalité de Holder.

Normes équivalentes

Définition 1.1.2. Soient N_1 et N_2 deux normes sur un espace vectoriel $\mathbb{K}$.

On dit que N_1 et N_2 sont équivalentes s'il existe deux constantes α, β positif telles que

$$\forall x \in E, \quad \alpha N_1(x) \leq N_2(x) \leq \beta N_1(x).$$

Proposition 1.1.1. Deux normes sont équivalentes si et seulement si elles définissent les mêmes suites convergentes.

On en déduit que deux normes équivalentes définissent les mêmes ensembles ouverts, fermés, compacts.

Proposition 1.1.2. Si deux normes sont équivalentes, alors toute partie bornée pour l'une l'est aussi pour l'autre.

Théorème 1.1. Dans un espace de dimension finie E sur $\mathbb{K}$, toutes les normes sont équivalentes.

Corollaire 1.1. Dans un espace vectoriel normé de dimension finie, toutes les normes définissent les mêmes ensembles ouverts, fermés, bornés, compacts, denses, ... ainsi que les mêmes suites convergentes.

Remarque 1.1.1. La réciproque du théorème est vraie. Mais le résultat est faux en dimension infinie.

1.1 Les espaces

Corollaire 1.2. *Dans un espace vectoriel normé de dimension finie, les parties compactes sont les parties fermées et bornées.*

Theoreme 1.2. *Soit E un espace vectoriel normé. La boule unité de E est compacte si et seulement si E est de dimension finie.*

Remarquons que si la boule unité de E est compacte, alors toute partie fermée et bornée de E l'est aussi et réciproquement.

En effet, si $B = B(0, 1)$ est compacte, alors toute boule fermée centrée en 0 l'est aussi. Donc tout fermé borné de E est contenu dans un compact et est donc compact.

1.1.2 Espaces métriques

Nous allons introduire la notion de distance et d'espace métrique[11]. Quand on s'intéresse à la continuité, ce qui importe ce n'est pas la distance elle-même mais les ouverts définis à partir de la distance (des distances différentes peuvent conduire aux mêmes ouverts).

Si une topologie est définie par une distance, la structure topologique n'utilise qu'une partie des informations fournies par la distance.

Distance

Definition 1.1.3. *Soit E un ensemble non vide. On appelle distance sur E , toute application qui satisfait les propriétés suivantes*

$$d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}^+,$$

telle que, pour tout x, y et $z \in E$, on dit

$$(D_1) : \quad d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y.$$

$$(D_2) : \quad d(x, y) = d(y, x) \text{ (symétrie) .}$$

$$(D_3) : \quad d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \text{ (inégalité triangulaire) .}$$

(E, d) s'appelle espace métrique ou E est un ensemble et d est une distance.

Remarque 1.1.2. *Si $A \subset E$ alors la restriction de d à $A \times A$, notée d_A , possède les propriétés (D_1) , (D_2) et (D_3) ci-dessus. (A, d_A) est un sous espace métrique de (X, d) .*

1.1 Les espaces

Exemples de métriques

Exemple 1.1. *L'ensemble des nombre réels $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ muni de la distance usuelle est un espace métrique*

$$d(x, y) = |x - y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R},$$

où $\|\cdot\|$ représente la valeur absolue dans $\mathbb{R}$ ou le module dans $\mathbb{C}$.

En effet

Soit x, y dans $\mathbb{R}$ tel que

$$(D_1) : d(x, y) = 0 \Leftrightarrow |x - y| = 0 \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow x = y, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

$$(D_2) : d(x, y) = |x - y| = |-(y - x)| = |y - x| = d(y, x), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Alors ,

$$(D_3) : d(x, y) = |x - y| = |x - z + z - y| \leq |x - z| + |z - y|, \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}.$$

Exemple 1.2. *Métrie discrète. Elle est définie par*

$$d(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \neq y. \\ 0, & \text{si } x = y. \end{cases}$$

Exemple 1.3. *Soit $E = \Lambda^n$ ($\Lambda = \mathbb{K}$ ou $\mathbb{C}$). Pour tous $\mathbf{x} = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $\mathbf{y} = (y_i)_{1 \leq i \leq n}$ de Λ^n , l'application définie par*

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sup_{1 \leq i \leq n} \|x_i - y_i\|,$$

est une métrique.

Dans autre , si α est réel ≥ 1 , on a une métrique définie par

$$d_\alpha(x, y) = \left(\sup_{1 \leq i \leq n} \|x_i - y_i\|^\alpha \right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Proposition 1.1.3. *[?]*

Tout espace normé est un espace métrique.

1.2 Un système d'équations non linéaire- Continuité - Convexité - Convergence des suites

1.1.3 Espaces Banach

En mathématiques, plus particulièrement en analyse fonctionnelle, on appelle espace de Banach [11] un espace vectoriel normé sur un sous-corps X de $\mathbb{C}$, complet pour la distance issue de sa norme. Comme la topologie induite par sa distance est compatible avec sa structure d'espace vectoriel, c'est un espace vectoriel topologique. Les espaces de Banach possèdent de nombreuses propriétés qui font d'eux un outil essentiel pour l'analyse fonctionnelle. Ils doivent leur nom au mathématicien polonais Stefan Banach.

L'espace $(E, \| \cdot \|_E)$ s'appelle espace vectoriel normé dans E sur $\mathbb{K}$.

Proposition 1.1.4. *Tout espace vectoriel normé de dimension fini est complet.*

Definition 1.1.4. *Un espace $(E, \| \cdot \|_E)$ est dit espace de Banach s'il est complet c-à-d toute suite de Cauchy convergente vers un élément de E .*

Exemple 1.4. $(\mathbb{R}, \| \cdot \|)$ est un espace de Banach.

En effet soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$ donc elle est bornée et d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass donc $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une sous suite convergente mais la proposition donne la convergence de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exemple 1.5. $\mathbb{R}^n$ est un espace de Banach pour chacune des normes suivantes :

$$\| x \|_p = (\| x_1 \|^p + \| x_2 \|^p + \dots + \| x_n \|^p)^{\frac{1}{p}}, 1 \leq p < \infty,$$

et

$$\| x \|_\infty = \max(\| x_1 \|, \dots, \| x_n \|).$$

Cette dernière norme s'appelle la norme de la convergence uniforme dans $\mathbb{R}^n$.

1.2 Un système d'équations non linéaire- Continuité - Convexité - Convergence des suites

1.2.1 Un système d'équations non linéaire

Une équation est dite non linéaire lorsqu'elle implique des termes de degré supérieur à 1 dans la quantité inconnue. Ces termes peuvent être polynomiaux ou susceptibles d'être décomposés[18].

1.2 Un système d'équations non linéaire- Continuité - Convexité - Convergence des suites

Dans certains cas, il est possible de trouver les racines exactes de la fonction $f(x) = 0$, par exemple lorsque $f(x)$ est un polynôme quadratique, ou cubique, sinon, on essaie de trouver des solutions utilisant certaines méthodes numériques (des méthodes itératives).

Le principe de ces méthodes de résolution consistent à partir d'un point arbitraire - le plus proche possible de la solution recherchée et d'arriver à la solution progressivement à travers des tests successifs.

Definition 1.2.1. Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est définie comme étant non linéaire lorsqu'elle ne satisfait pas le principe de superposition qui est

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \neq f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n). \quad (1.1)$$

Maintenant que nous savons à quoi se réfère le terme non linéaire, nous pouvons définir un système d'équation non linéaire

Definition 1.2.2. Un système d'équations non linéaires est un ensemble d'équations comme suite

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \\ F(\mathbf{x}) = 0. \end{array} \right. \text{ tel que } \left\{ \begin{array}{l} F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \\ \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow F(x_1, x_2, \dots, x_n). \end{array} \right.$$

Donc

$$F(x) = F(x_1, x_2, \dots, x_n) = (f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), f_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, x_2, \dots, x_n)) = 0_{\mathbb{R}^n}.$$

Alors

$$f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0,$$

$$f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0,$$

.

.

.

$$f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0,$$

où $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et chaque f_i est une fonction réelle non linéaire $i = 1, 2, \dots, n$.

Definition 1.2.3. Une solution d'un système d'équations $f_1, f_2, \dots, f_n$ en n variables est un point $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que

1.2 Un système d'équations non linéaire- Continuité - Convexité - Convergence des suites

$$f_1(a_1, \dots, a_n) = \dots = f_n(a_1, \dots, a_n) = 0. \quad (1.2)$$

Parce que les système d'équations non linéaires ne peuvent pas être résolution aussi bien que les systèmes linéaires , nous utilisons des procédures appelées méthodes .

Definition 1.2.4. Une méthode itérative est une procédure qui se répète indéfiniment encore une fois, pour trouver la racine d'une équation ou trouver la solution d'un système d'équations.

Definition 1.2.5. Soit F une fonction réelle de $D \subset \mathbb{R}^n$ to $\mathbb{R}^n$.Si $F(p) = p$, pour un certain $p \in D$, alors on dit que p est un point fixe de F .

1.2.2 Continuité

Application continue

Definition 1.2.6. [10]

Soit (X, d) et (Y, d') deux espaces métriques et soit $a \in X$.On dit qu'une application $f : X \rightarrow Y$ est continue au point a si

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a),$$

c'est à dire :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in X \quad d(a, x) < \delta \implies d'(f(a), f(x)) < \varepsilon.$$

Continuité sur un ensemble

Definition 1.2.7. On dire que $f : (X, d) \longrightarrow (Y, d')$ est continue sur (X, d) si elle est continue en tout point de X .

Uniformément continue

Definition 1.2.8. Une application $f : (X, d) \longrightarrow (Y, d')$ est dite uniformément continue sur X si elle vérifiée

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, x' \in X \quad d(x, x') \leq \delta \implies d'(f(x), f(x')) \leq \varepsilon \quad (1.3)$$

1.2 Un système d'équations non linéaire- Continuité - Convexité - Convergence des suites

1.2.3 Convexité

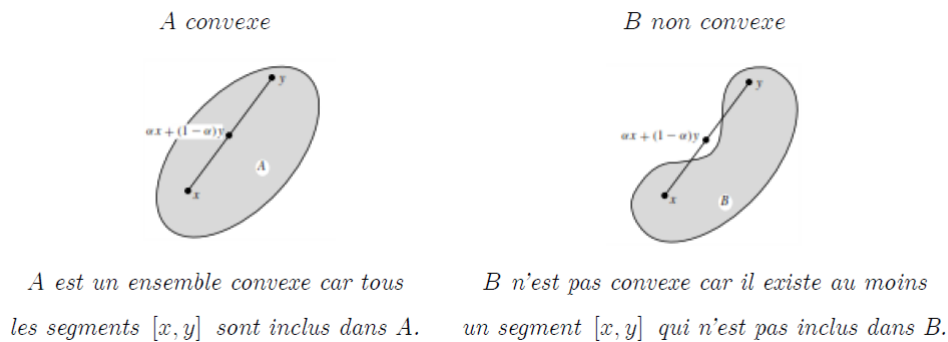
Ensemble convexe

Definition 1.2.9. [10] On dit que $C \subset X$ est un ensemble convexe si

$$\forall \alpha \in [0, 1], \forall (x, y) \in C^2 : \alpha x + (1 - \alpha)y \in C$$

Fonction convexe

Definition 1.2.10. Soit $A \subset X$ un ensemble convexe et $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe sur A si



$$f(\alpha y + (1 - \alpha)x) \leq \alpha f(y) + (1 - \alpha)f(x), \quad \forall x, y \in C, \forall \alpha \in [0, 1].$$

1.2.4 Convergence

1.2.4.1 Convergence simple

Definition 1.2.11. [10] soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, (f_n) une suite de fonctions définies sur I , et f définie sur I . On dit que (f_n) converge simplement vers f sur I si pour tout x appartenant à I , la suite $(f_n(x))$ converge vers $f(x)$.

Exemple 1.6. Soit $I = [0, 1]$ et $f_n(x) = x^n$. Il est clair que (f_n) converge simplement vers la fonction f définie par $f(x) = 0$ si x dans $[0, 1[$ et $f(1) = 1$.

1.2 Un système d'équations non linéaire- Continuité - Convexité

- Convergence des suites

Dès cet exemple très simple, on constate l'insuffisance de la convergence simple : chaque fonction (f_n) est continue, la suite (f_n) converge simplement vers f , et pourtant f n'est pas continue. Ainsi, la continuité n'est pas préservée par convergence simple. C'est pourquoi on a besoin d'une notion plus précise.

1.2.4.2 Convergence uniforme

Definition 1.2.12. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, (f_n) une suite de fonctions définies sur I , et f définie sur I . On dit que (f_n) converge uniformément vers f sur I si

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall x \in I, \forall n \geq n_0, |f_n(x) - f(x)| < \epsilon.$$

Si on note $\|f_n - f\|_\infty = \sup |f_n(x) - f(x)|; x \in I$ on peut aussi remarquer que $f_n(x)$ converge uniformément vers f si l'on a $\|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0$.

La précision apportée par la convergence uniforme par rapport à la convergence simple est la suivante : dire que f_n converge simplement vers f sur I signifie que, pour tout point x de I , et soit $(f_n(x))$ converge vers $f(x)$. La convergence uniforme signifie que, de plus, la convergence a lieu "à la même vitesse" pour tous les points x .

Essayons d'interpréter la différence entre la convergence simple et la convergence uniforme sur la figure dynamique suivante : on représente la suite de fonction

$$f_n(x) = n^a x e^{-nx},$$

pour $a = 0,5$, $a = 1$ ou $a = 1,5$. Cette suite de fonctions converge simplement vers la fonction nulle sur l'intervalle $[0, +\infty[$. La bosse correspond à $\|f_n - f\|_\infty$.

Dans les trois cas, elle se déplace vers la gauche, ce qui va entraîner la convergence simple de la suite vers 0 : tout point de $]0, +\infty[$ sera à un moment donné à droite de cette bosse, et on aura $f_n(x)$ qui tend vers 0. En revanche, pour $a = 1,5$, la hauteur de la bosse augmente : il n'y aura donc pas convergence uniforme.

Pour $a = 1$, la hauteur de la bosse reste constante. Il n'y a pas là non plus convergence uniforme.

Enfin, si $a = 0,5$, la bosse s'aplatit, et sa hauteur tend vers 0 : cela signifie que la suite (f_n) converge uniformément vers 0 sur $[0, +\infty[$.

1.2 Un système d'équations non linéaire- Continuité - Convexité - Convergence des suites

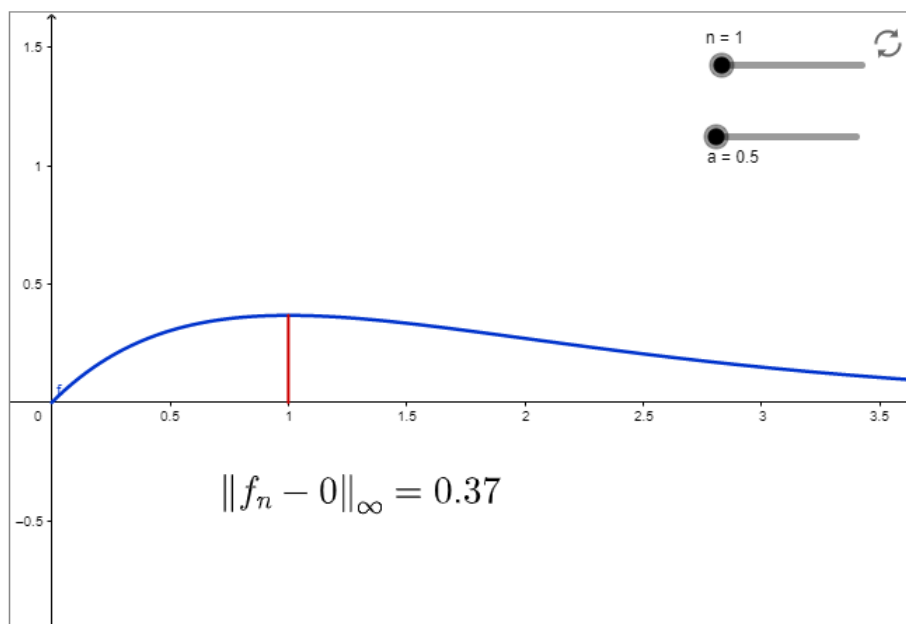


FIGURE 1.1 – La convergence

Theoreme 1.3. *Si les (f_n) sont des fonctions continue sur I , et si elles convergent uniformément vers f sur I , alors f est continue sur I .*

Theoreme 1.4. *Si les (f_n) sont des fonctions continue sur $I = [a, b]$, et si elles convergent uniformément vers f sur I , alors on a :*

$$\int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx \rightarrow 0 \quad (1.4)$$

Theoreme 1.5. *Soit (f_n) une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I . On suppose que*

** il existe x_0 dans I tel que $f_n(x_0)$ converge .*

** (f'_n) converge uniformément vers une fonction g sur I .*

Alors (f_n) converge uniformément vers une fonction f sur I , f est $\mathcal{C}^1$, et $f' = g$.

Ce théorème se déduit aisément du précédent, en remarquant que

$$f_n(x) = f_n(x_0) + \int_{x_0}^x f'_n(t) dt, \quad (1.5)$$

et en passant à la limite.

1.2 Un système d'équations non linéaire- Continuité - Convexité - Convergence des suites

1.2.4.3 Suite convergente

Definition 1.2.13. Une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments d'un espace métrique (X, d) converge ou tend vers un point $a \in X$ lorsque $n \rightarrow \infty$ ssi $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, a) = 0$, c'est-à-dire

$$\forall \epsilon > 0, \exists N_\epsilon \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N_\epsilon \quad d(x_n, a) < \epsilon.$$

On dit aussi que a est la limite de $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ et on note $x_n \rightarrow a$ ou $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

Remarquons que cette limite existe, alors elle est unique.

En effet, si on a a et b dans X tel que

$$\forall \epsilon > 0, \exists N_\epsilon \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_\epsilon : d(x_n, a) < \epsilon,$$

$$\forall \epsilon > 0, \exists N'_\epsilon \in \mathbb{N}, \forall n \geq N'_\epsilon : d(x_n, b) < \epsilon,$$

alors, pour $n \geq \sup\{N_\epsilon, N'_\epsilon\}$ on a $d(a, b) \leq d(a, x_n) + d(x_n, b) \leq 2\epsilon$, et donc $d(a, b) \leq 2\epsilon, \forall \epsilon > 0$.

D'où $d(a, b) = 0$, ce qui donne $a = b$.

1.2.4.4 Méthode convergente

Une des choses dont nous discuterons est la convergence de chacune des méthodes numériques.

Definition 1.2.14. On dit qu'une suite converge si elle a une limite .

Definition 1.2.15. Soit p_n une suite qui converge vers p , ou $p_n \neq p$. Si constantes $\lambda, \alpha > 0$ existent telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|p_{n+1} - p|}{|p_n - p|^\alpha} = \lambda. \quad (1.6)$$

On dit alors que p , convergence différentes.

Definition 1.2.16. Une suite p_n , est dite linéairement convergente si p_n converge vers p d'ordre $\alpha = 1$, pour une constante $\lambda < 1$ telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|p_{n+1} - p|}{|p_n - p|} = \lambda. \quad (1.7)$$

1.3 Différentiabilité - Gradient - Jacobien

Definition 1.2.17. Une suite p , est dite quadratiquement convergente si p converge vers p d'ordre $\alpha = 2$ telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|p_{n+1} - p|}{|p_n - p|^2} = \lambda. \quad (1.8)$$

Definition 1.2.18. Une suite p_n est dite super finement convergente si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|p_{n+1} - p|}{|p_n - p|^\alpha} = 0. \quad (1.9)$$

Remarque 1.2.1. La valeur de a mesure la vitesse à laquelle une séquence converge.

Ainsi, plus la valeur de a élevée, plus la convergence de la suite est rapide. Dans le cas des méthodes numériques, la séquence des solution approchées converge vers la racine. Si la convergence d'une méthode itérative est plus rapide, alors une solution peut être atteinte en moins d'interactions par rapport à une autre méthode avec une convergence plus lente.

1.3 Différentiabilité - Gradient - Jacobien

1.3.1 Différentiabilité

Definition 1.3.1. (1) Soit f est dite différentiable [13] en $a \in \mathbb{R}^n$, s'il existe $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ et une application $q : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ qui tend vers 0 en a telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad f(x) = f(a) + L(x - a) + \|x - a\| q(x). \quad (1.10)$$

(2) Soit L est unique et on la note df_a .

On dit que f est différentiable, si elle est différentiable en tout point. Dans ce cas, sa différentielle est l'application

$$\begin{cases} df : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \\ a \rightarrow df_a. \end{cases} \quad (1.11)$$

On munit $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ de sa norme subordonnée aux deux normes sur $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$.

Si $df : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ est continue sur $\mathbb{R}^n$, on dira que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et on notera $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$.

1.3 Différentiabilité - Gradient - Jacobien

Notation : On notera dans la suite $0_a(\|x - a\|)$ toute application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$ qui divisée par la norme $\|x - a\|$, tend vers 0 lorsque $x \rightarrow a$.

Ainsi on peut réécrire la formule dans la définition de la différentiabilité par

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, f(x) = f(a) + L(x - a) + O_a(\|x - a\|). \quad (1.12)$$

Voyons que cette notion de différentiabilité généralise bien la notion de dérivée directionnelle au sens de Gateaux.

Proposition 1.3.1. *Si f est différentiable en $a \in \mathbb{R}^n$, alors f est Gateaux-différentiable en a et on a*

$$\forall v \in \mathbb{R}^n, D_v f(a) = df_a.v.$$

Donnons maintenant quelques exemples d'applications différentiables.

Exemple :

1. Si f est constante, alors f est différentiable et sa différentielle est l'application nulle.
2. Si $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, alors f est différentiable et sa différentielle est l'application constante égale à f .
3. Si $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ est une application bilinéaire. Alors f est différentiable et on a $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \quad \forall (h_x, h_y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$

$$df_{(x,y)}.(h_x, h_y) = f(x, h_y) + f(h_x, y).$$

4. L'application P_j d'élévation à la puissance j sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est $\mathcal{C}^1$ et sa différentielle est donnée par

$$\forall H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), dP_j M(H) = \sum_{k=0}^{j-1} M^k H M^{j-1-k}.$$

Proposition 1.3.2. *Soient $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ deux applications différentiables en $a \in \Omega$.*

Alors

1. *f est continue en a*
2. *Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $d(f + \lambda g) = df_a + \lambda dg_a$.*

1.3 Différentiabilité - Gradient - Jacobien

3. Si f et g sont à valeurs réelles, alors le produit fg est différentiable en a et on a pour tout $h \in \mathbb{R}^n$

$$d(fg)_a \cdot h = (df_a \cdot h)g(a) + f(a)(dg_a \cdot h).$$

En fait l'étude de la différentiabilité peut se ramener aux applications de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ comme le montre la proposition suivante.

Proposition 1.3.3. Notons les coordonnées de f de la manière suivante $f = (f_1, \dots, f_m)$. Alors f est différentiable en a si et seulement si toutes les applications coordonnées f_i sont différentiables en a . Dans ce cas, la différentielle de f est donnée par

$$df_a = (df_1(a), \dots, df_m(a)) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m). \quad (1.13)$$

Enfin, le théorème suivant permet d'exprimer la différentielle d'une composée d'applications différentiables, ce qui est utile en pratique.

Proposition 1.3.4. Soient Ω_1, Ω_2 deux ouverts de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$ respectivement, $f : \Omega_1 \rightarrow \mathbb{R}^m$ et $g : \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R}^k$ deux applications différentiables, avec $f(\Omega_1) \subset \Omega_2$. Alors si f est différentiable en $a \in \Omega_1$ et g en $f(a)$, la composée $g \circ f$ est différentiable en a et on a

$$d(g \circ f) = dg_{f(a)} \circ df_a. \quad (1.14)$$

Proposition 1.3.5. Si f est différentiable en $a \in \Omega$, on a pour tout $h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$:
 $df_a(h) = \sum_{k=1}^n h_k \delta_k f(a)$.

Le théorème suivant est important puisqu'il permet de montrer la différentiabilité d'une application uniquement grâce à l'étude des dérivées partielles, avec une hypothèse de continuité supplémentaire.

Theoreme 1.6. Il y a équivalence entre :

1. $f \in \mathcal{C}(\Omega, \mathbb{R}^m)$.
2. f admet des dérivées partielles $\delta_k f(a)$ pour tout $k \in 1, \dots, n$, pour tout $a \in \Omega$. De plus les applications dérivées partielles $\delta_k f(\cdot)$ sont continues sur Ω .

1.3.2 Gradient

Definition 1.3.2. [13] Soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ différentiable. On définit le gradient de f en $a \in \Omega$ comme l'unique vecteur $\nabla f_a \in \mathbb{R}^n$ vérifiant :

$$df_a = \langle \nabla f_a, \cdot \rangle \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) .$$

De plus on a

$$\nabla f_a = \begin{pmatrix} \delta_1 f(a) \\ \vdots \\ \delta_n f(a) \end{pmatrix} . \quad (1.15)$$

Remarque 1.3.1. 1. Dans le cadre Hilbertien, l'existence d'un tel vecteur est assuré par le théorème de Riesz (on suppose l'application linéaire continue dans la définition de la différentiabilité dans le cadre du calcul différentiel sur des espaces de Banach).

2. Le vecteur gradient ∇f_a est la direction dans laquelle f varie le plus autour du point a . Cela est une conséquence directe de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, ainsi que de la caractérisation du cas d'égalité par la colinéarité des vecteurs

$$\forall h \in \mathbb{R}, | \langle \nabla f_a, h \rangle | \leq \| \nabla f_a \| \cdot \| h \| . \quad (1.16)$$

C'est cette propriété qui sous-tend les algorithmes d'optimisation dits de "descente de gradient ".

1.3.3 Jacobien

soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ différentiable en $a \in \Omega$. On définit sa jacobienne en a comme la matrice de l'application df_a dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$

$$Jf(a) := \left(\frac{\delta f_i}{\delta x_j} \right)_{(i,j) \in [1,\dots,n] \times [1,\dots,m]} \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R}) := \begin{pmatrix} \frac{\delta f_1}{\delta x_1}(x) & \frac{\delta f_1}{\delta x_2}(x) & \cdots & \frac{\delta f_1}{\delta x_n}(x) \\ \frac{\delta f_2}{\delta x_1}(x) & \frac{\delta f_2}{\delta x_2}(x) & \cdots & \frac{\delta f_2}{\delta x_n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\delta f_n}{\delta x_1}(x) & \frac{\delta f_n}{\delta x_2}(x) & \cdots & \frac{\delta f_n}{\delta x_n}(x) \end{pmatrix} ,$$

1.3 Différentiabilité - Gradient - Jacobien

où l'on note $f = (f_1, \dots, f_m)$.

1.3.4 Matrice de Hesse

Definition 1.3.3. [17] *La matrice Hessienne est une matrice de dérivées partielles du second ordre*

$$H(x) = \left[\frac{\delta^2 f}{\delta x_i \delta x_j} \right]_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{\delta^2 f_1}{\delta^2 x_1}(x) & \frac{\delta^2 f_1}{\delta x_1 \delta x_2}(x) & \cdots & \frac{\delta^2 f_1}{\delta x_1 \delta x_n}(x) \\ \frac{\delta^2 f_2}{\delta x_2 \delta x_1}(x) & \frac{\delta^2 f_2}{\delta^2 x_2}(x) & \cdots & \frac{\delta^2 f_2}{\delta x_2 \delta x_n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\delta^2 f_n}{\delta x_n \delta x_1}(x) & \frac{\delta^2 f_n}{\delta x_n \delta x_2}(x) & \cdots & \frac{\delta^2 f_n}{\delta^2 x_n}(x) \end{pmatrix},$$

CHAPITRE 2

RÉSOLUTION NUMÉRIQUE D'UNE ÉQUATION NON LINÉAIRE DANS $\mathbb{R}$

Ce chapitre est composé de deux sections. Dans la première section, on considère une méthode point fixe et dans la deuxième section, on propose d'étudier une méthode Newton appliquée à la résolutions d'équations non linéaires consiste à élaborer un schéma itératif.

L'objet essentiel de ce section est l'approximation des racines d'une fonction réelle d'une variable réelle, c'est à dire la résolution approchée du problème suivant :

$$\begin{cases} x_0 \text{ donne } \in [a, b]. \\ f(x) = 0. \end{cases} \quad (2.1)$$

La valeur de la variable x qui vérifie cette égalité est appelée solution (ou racine) de l'équation, elle est notée x_0 .

Dans beaucoup de cas, on doit recourir aux méthodes numériques car la solution ne peut pas être déterminée analytiquement. Ainsi, résoudre cette équation revient à définir une succession d'éléments (solutions intermédiaires $x_{0,k}$) qui convergent vers la solution désirée lorsque k tant vers l'infini. On ne parle pas de la solution exacte, car souvent elle n'existe pas, cependant on cherche une solution qui soit approchée de la solution exacte avec une certaine précision.

2.1 Méthode de point fixe :

Il existe plusieurs techniques permettant de résoudre l'équation non linéaire, ces méthodes se distinguent par leurs principes et leurs vitesses de convergence. Nous introduisons dans cette section la méthodes de point fixe et de Newton.

2.1 Méthode de point fixe :

Une des méthodes parmi les plus importantes de résolutions numérique des équations est la méthode du point fixe appliquée à la résolutions d'équations non linéaires consiste à élaborer un schéma itératif, en l'occurrence une suite convergente vers un point fixe x d'une certaine application g , ce point fixe est en l'occurrence. L'objectif ce méthode est la résolution d'équation du type

$$f(x) = 0. \quad (2.2)$$

Soit x^* une solution de $f(x) = 0$, remplaçons l'équation par une équation équivalente ou l'idée générale est de se ramener à une équation du type :

$$g(x) = x \quad (2.3)$$

où $x = x^*$ est un point fixe de l'application g .

Cette section est divisée en trois paragraphes. Dans le premier paragraphe, nous commençons par présentation de la méthode et démontrons un théorème d'existence et d'unicité de la solution, puis trois points de convergence ont été étudiés sur les données. Ensuite, dans le deuxième paragraphe nous donnons critère de convergence du méthode. Enfin, dans le troisième paragraphe, nous énonçons exemple numériques.

Les techniques employées sont basées sur la théorie de résoudre l'équation non linéaire, suivi par méthode de points fixes.

2.1.1 Présentation de la méthode

On introduit alors une suite d'itérée $(x_n)_{n \geq 0}$ qui converge vers le point fixe α de g , qui est en l'occurrence la solution de l'équation $f(x) = 0$, en une équation équivalente $g(x) = x$ où g est une fonction auxiliaire bien choisie. Le point α est alors un point fixe de

2.1 Méthode de point fixe :

g . Approcher les zéros de f revient à approcher les points fixes de g . Le choix de la fonction g est motivé par les exigences du théorème de point fixe.

En effet, elle doit être contractante dans un intervalle I de α , ce qui revient à vérifier que $|g'(x)| < 1$ sur ce intervalle.

Dans ce cas, on construit une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} x_0 \text{ dans } [a, b], \\ x_{n+1} = g(x_n), \quad \forall n \geq 0. \end{cases} \quad (2.4)$$

Il ne reste plus qu'à appliquer localement le théorème de point fixe pour démontrer que

$$\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n. \quad (2.5)$$

Etant donnée f , il y a plusieurs choix possibles pour g .

Exemple 2.1. Vous avez l'équation suivante

$$x^2 - a = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - a = 2x, \Leftrightarrow \frac{1}{2}(x^2 - a + 2x) = x.$$

Quel est le bon choix pour g ? Il sera nécessaire de demander que g soit contractante

Applications contractantes

Une application g est k -contractante sur un intervalle I lorsque

1. $g(I) \subseteq I$, (indispensable pour itérer g).
2. Il existe une constante k vérifiant $0 \leq k < 1$ telle que, pour tout x et y dans I ,

$$|g(y) - g(x)| = k|y - x|. \quad (2.6)$$

Remarque 2.1.1. Si g est dérivable sur I et $|g'(x)| < 1$ est majorée par k , alors, d'après la formule des accroissements finis, g vérifie (2-).

Théorème du point fixe

Theoreme 2.1. [?] *Existence*

Si $g \in \mathcal{C}([a, b])$ et $g'(x) \in \mathcal{C}([a, b])$, alors g a un point fixe α en $[a, b]$.

2.1 Méthode de point fixe :

Unicité.

Si $g' \in \mathcal{C}[a, b]$ et s'il existe une constante k dans $]0, 1[$ telle que

$$|g'(x)| \leq k, \quad (2.7)$$

sur $[a, b]$ alors

- (1) Le point fixe α est unique.
- (2) La suite définie par $x_{n+1} = g(x_n)$ converge vers α le point fixe de g , $\forall x_0 \in [a, b]$.

Point attractif

Théorème de convergence

Proposition 2.1.1. [?] Soit $g : [a, b] \rightarrow [a, b]$ de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose que g admet un point fixe $\alpha \in [a, b]$, vérifiant $|g'(\alpha)| < 1$.

Alors il existe une intervalle $[a, b]$ de α dans I tel que la suite (x_n) définie par

$$\begin{cases} x_0 \in [a, b], \\ x_{n+1} = g(x_n), \forall n \geq 0, \end{cases} \quad (2.8)$$

est converge vers α .

Démonstration :

Comme $|g'(\alpha)| < 1$, il existe $k \neq 0$ tel que $|g'(\alpha)| \leq k < 1$. De plus, g' est continue sur I donc il existe $[a, b] = [\alpha - h, \alpha + h] \subset I$ ($h > 0$) tel que

$$\forall \alpha \in [a, b], |g'(x)| \leq k < 1.$$

Donc g est k -contractante sur $[a, b]$. En particulier, $g(x) \in [a, b]$.

Le théorème de point fixe appliqué localement à g dans $[a, b]$ implique que

$$\forall x_0 \in [a, b], \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \alpha$$

Definition 2.1.1. Le réel α vérifiant les hypothèses du théorème précédent est appelé point fixe attractif de g et $[a, b]$ correspondant est dit intervalle de convergence de la méthode d'approximation.

2.1 Méthode de point fixe :

$$V_\alpha = [\beta, \gamma], \alpha \text{ et } \beta \in \mathbb{R},$$

contenant α tel que

$$0 = g'(\alpha) < 1, \quad \forall x \in [\beta, \gamma].$$

Si $-1 < g'(\alpha) < 0$, prendre comme intervalle de convergence

$$V_\alpha = [\beta, g(\beta)],$$

tel que :

$$-1 < g'(\alpha) < 0, \forall x \in [\beta, g(\beta)].$$

Démonstration :

L'existence de $[a, b]$ de α est assurée par le théorème de convergence pour un point attractif. La formule de Taylor appliquée à la fonction g au point α à l'ordre m donne : il existe un réel c_n dans l'intervalle (x_n, α) tel que

$$x_{n+1} = g(\alpha) + g'(\alpha)(x_n - \alpha) + \dots + \frac{g^{(m-1)}(\alpha)}{(m-1)!}(x_n - \alpha)^{(m-1)} + \frac{g^{(m)}(c_n)}{m!}(x_n - \alpha)^m. \quad (2.9)$$

Si on suppose de plus que

$$g'(\alpha) = \dots = g^{(m-1)}(\alpha) = 0 \text{ et } g^{(m)}(\alpha) \neq 0,$$

alors

$$x_{n+1} = \alpha + \frac{g^{(m)}(c_n)}{m!}(x_n - \alpha)^m. \quad (2.10)$$

Donc

- Le rapport $\frac{|x_{n+1}-\alpha|}{|x_n-\alpha|^m} = \frac{|g^{(m)}(c_n)|}{m!}$ tend vers $\frac{|g^{(m)}(\alpha)|}{m!}$ qui est fini et non nul,
- Pour tout $\epsilon > 0$, le rapport $\frac{|x_{n+1}-\alpha|}{|x_n-\alpha|^{m+\epsilon}} = \frac{|g^{(m)}(c_n)|}{m!|x_n-\alpha|^\epsilon}$ tend vers $+\infty$.

2.1 Méthode de point fixe :

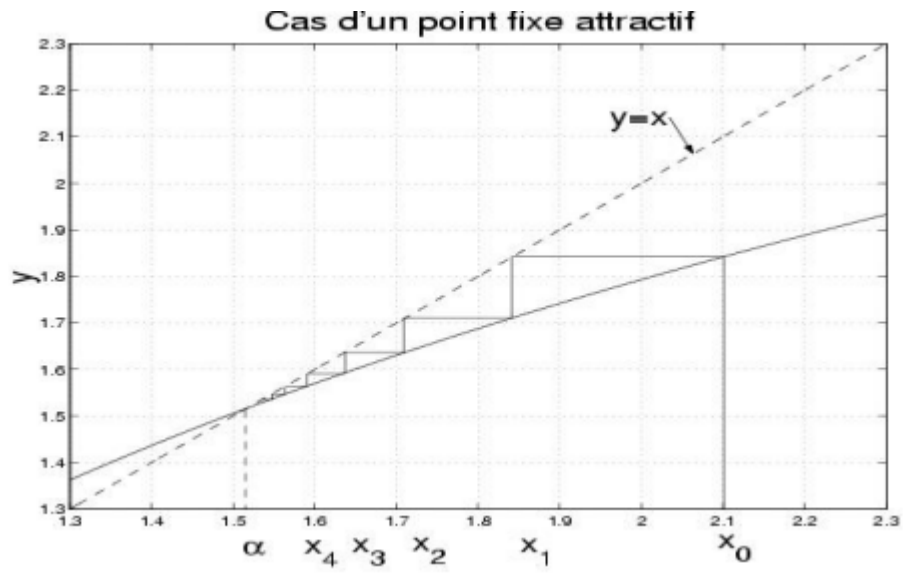


FIGURE 2.1 – la convergence de racine dans le cas point fixe attractif

2.1 Méthode de point fixe :

2.1.2 Point répulsif

Théorème déconvergence

Theoreme 2.2. [?] Soit $g : [a, b] \rightarrow [a, b]$ de classe C^1 . On suppose que g admet un point fixe $\alpha \in [a, b]$ vérifiant $|g'(\alpha)| > 1$. Alors il existe $[a, b]$ de α tel que la suite (x_n) définie par

$$\begin{cases} x_0 \in [a, b] \setminus \{\alpha\}, \\ x_{n+1} = g(x_n); \forall n \geq 0, \end{cases} \quad (2.11)$$

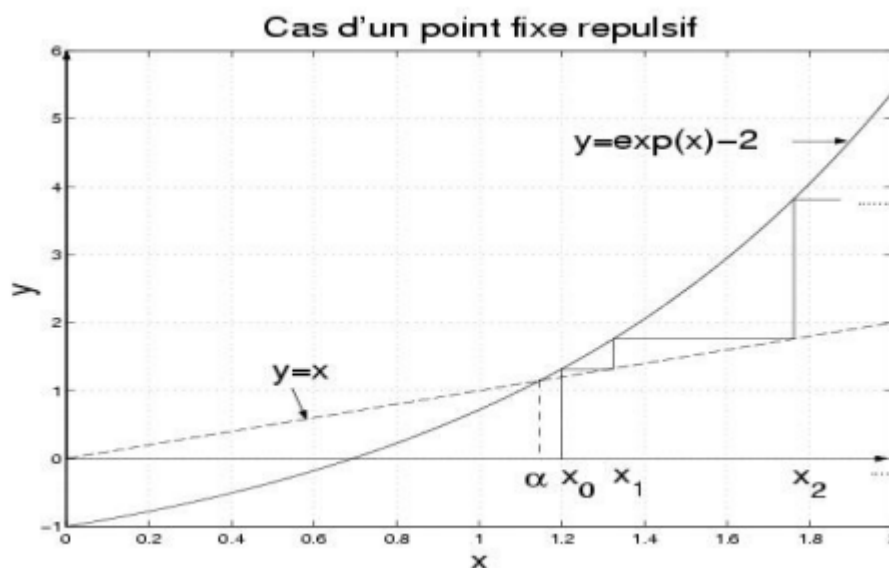
ne converge pas vers α .

Démonstration : Comme $\lim_{x \rightarrow \alpha} \left| \frac{g(x) - g(\alpha)}{x - \alpha} \right| = |g'(\alpha)| > 1$, il existe un voisinage $[a, b] = [\alpha - h, \alpha + h]$, avec $h > 0$ tel que

$$\forall x \in [a, b], |g(x) - \alpha| > |x - \alpha|.$$

Donc (x_n) ne converge pas vers α .

Definition 2.1.2. Le réel α vérifiant les hypothèses du théorème précédent est appelé point fixe répulsif de g .



axua sur la convergence

FIGURE 2.2 – la convergence de racine dans le cas point fixe répulsif

2.1 Méthode de point fixe :

Remarque sur la convergence :

Remarque 2.1.2. Lorsque α est un point répulsif de g , celle-ci devient bijective au voisinage de α et $|(g^{-1})'(\alpha)| = \frac{1}{|g'(\alpha)|} < 1$. Par conséquent, le point α devient un point attractif pour g^{-1} .

En effet, si $|g'(\alpha)| > 1$ alors g est strictement monotone intervalle contenant de α .

2.1.2.1 Point douteux

Definition 2.1.3. [?] Soit $g : [a, b] \rightarrow [a, b]$ de classe $\mathcal{C}^1$ pour laquelle α est un unique point fixe vérifiant $|g'(\alpha)| = 1$. Alors α est appelé point douteux de g , car il peut être attractif ou répulsif comme le montre les deux exemples suivants :

Exemple 2.2. Soit la fonction g définie par

$$g(x) = \sin x, x \in [0, \frac{\pi}{2}].$$

On a $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}], \sin x < x$ et pour tout $x_0 \in [0, \frac{\pi}{2}]$, la suite itérée (x_n) défini par

$$x_{n+1} = g(x_n),$$

est strictement décroissante minorée par 0 donc convergeant vers une limite α .

Comme g est continue et que $\alpha = g(\alpha)$, $\alpha = 0$ est l'unique point fixe de g sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

2.1 Méthode de point fixe :

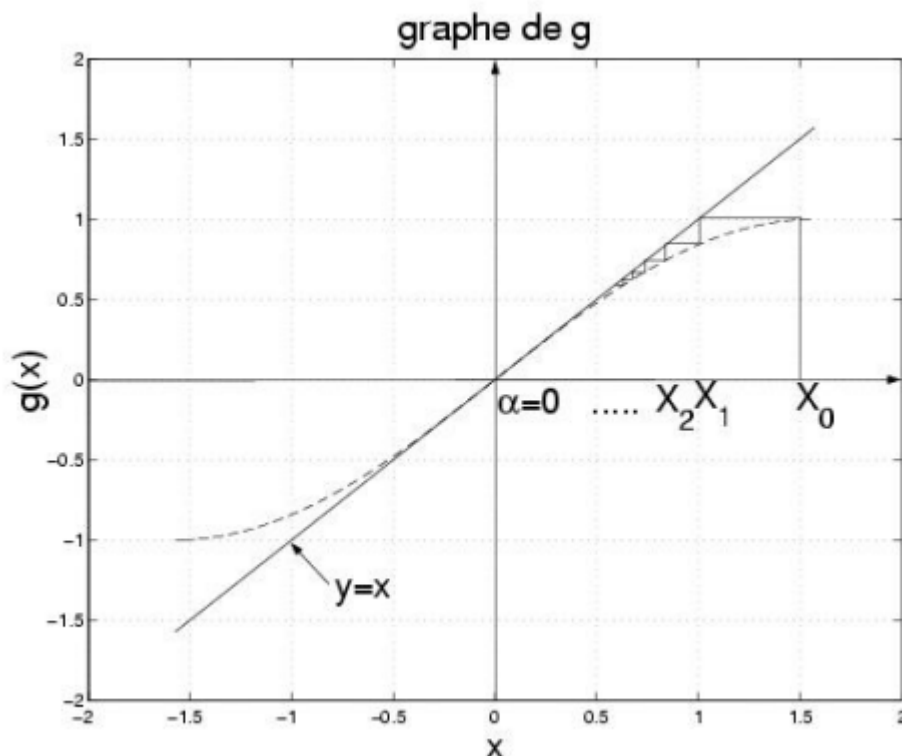


FIGURE 2.3 – la convergence de racine dans le cas point fixe douteux

Exemple 2.3. Soit la fonction $g(x) = x$, $x \in [0, +\infty[$.

On a $\sinh x > x$ et pour tout $x_0 \in]0, +\infty[$, la suite itérée (x_n) défini par

$$x_{n+1} = g(x_n),$$

est strictement croissante et non majorée donc divergente.

Par conséquent, le point fixe $\alpha = 0$ de g est répulsif.

2.1.3 Critère de convergence du méthode

Ordre de convergence

Supposons qu'une suite $(x_n)_{n \geq 0}$ converge vers un élément α un point fixe de g .

$$\left| \lim_{x \rightarrow a} x_n - \alpha \right| = \left| \lim_{x \rightarrow a} \epsilon_n \right| = 0. \quad (2.12)$$

où $\epsilon_n = x_n - \alpha$ représente l'erreur.

2.1 Méthode de point fixe :

Remarque 2.1.3. [6] Si $g'(\alpha) = 0$, on sait que α est un point attractif. Si de plus g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur I et s'il existe $M > 0$ tel que

$$|g^{(2)}(x)| = M,$$

pour tout x dans un voisinage V_α de α alors d'après la formule de Taylor

$$\begin{aligned} g(x) &= g(\alpha) + (x - \alpha)g'(\alpha) + \frac{(x - \alpha)^2}{2}g^{(2)}(c), \text{ avec } c \in]\alpha, x[\\ &= \alpha + \frac{1}{2}g^{(2)}(c)(x - \alpha)^2, \end{aligned}$$

d'où

$$|g(x) - \alpha| = \frac{1}{2}M|x - \alpha|^2, \quad (2.13)$$

avec

$$M = \sup_{x \in I} |g^{(2)}(x)|.$$

La suite (x_n) est alors convergente à convergence au moins quadratique.

Nous allons maintenant présenter un résultat simplifié concernant l'ordre de la méthode de point fixe.

Theoreme 2.3. [8] On définit la méthode du point fixe suivante

$$\begin{cases} x_0 \text{ fixé dans } [a, b], \\ x_{n+1} = g(x_n). \end{cases} \quad (2.14)$$

On suppose que cette suite admet une limite sur $[a, b]$ notée l . Cette méthode est d'ordre p si $\frac{|x_{n+1} - l|}{|x_n - l|^p}$ admet une limite réelle strictement positive lorsque n tend vers l'infini.

Démonstration :

On suppose g et p fois dérivable sur $[a, b]$. En utilisant la formule de Taylor, montrer que la méthode est d'ordre p si et seulement si

$$g'(l) = g''(l) = \dots = g^{(p-1)}(l) = 0,$$

et

$$g^{(p)}(l) \neq 0.$$

On rappelle tout d'abord la formule de Taylor.

2.1 Méthode de point fixe :

Soit $k \geq 1$ un entier et soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ k fois dérivable en $a \in \mathbb{R}$, alors il existe une fonction ϵ_k de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ tel que

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2} + \dots + f^{(k)}(a)\frac{(x-a)^k}{k!} + \epsilon_k(x)(x-a)^k,$$

et

$$\lim_{x \rightarrow a} \epsilon_k(x) = 0.$$

Maintenant, si g est p fois dérivable sur $[a, b]$, on peut écrire que

$$\begin{aligned} g(x_n) &= g(l) + g'(l)(x_{n-l}) + g''(l)\frac{(x_{n-l})^2}{2} + \dots + g^{(p)}(l)\frac{(x_{n-l})^p}{p!} + \epsilon_p(x_n)(x_n - l)^p \\ &= g'(l)\epsilon_n + g''(l)\frac{\epsilon_n^2}{2} + \dots + g^{(p)}(l)\frac{\epsilon_n^p}{p!} + \epsilon_p(x)(x_n - l)^p, \end{aligned}$$

avec

$$\lim_{x_n \rightarrow l} \epsilon_p(x_n) = 0.$$

Posons

$$\mathbf{e}_n = x_{n-l}.$$

On a

$$x_{n+1} = g(x),$$

et

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{n+1} &= g(x_n) - g(l), \\ &= g'(l)(x_{n-l}) + g''(l)\frac{(x_{n-l})^2}{2} + \dots + g^{(p)}(l)\frac{(x_{n-l})^p}{p!} + \epsilon_p(x_n)(x_n - l)^p, \\ &= g'(l)\mathbf{e}_n + g''(l)\frac{\mathbf{e}_n^2}{2} + \dots + g^{(p)}(l)\frac{\mathbf{e}_n^p}{p!} + \epsilon_p(x)\mathbf{e}_n^p. \end{aligned}$$

Si la méthode est d'ordre p alors le quotient $\frac{\mathbf{e}_{n+1}}{\mathbf{e}_n^p}$ tend vers un réel non nul (car $\frac{|x_{n+1}-l|}{|x_n-l|^p}$ admet une limite réelle strictement positive et on enlève juste les valeurs absolues). Or d'après ce qui précède, on a l'égalité suivante

$$\frac{\mathbf{e}_{n+1}}{\mathbf{e}_n^p} = \frac{g'(l)}{\mathbf{e}_n^{p-1}} + \frac{g''(l)}{2\mathbf{e}_n^{p-2}} + \dots + \frac{g^{(p-1)}(l)}{\mathbf{e}(p-1)!} + \frac{g^{(p)}(l)}{p!} + \epsilon_p(x_n).$$

2.1 Méthode de point fixe :

A gauche de l'égalité, le terme tend vers un réel non nul. Concernant les termes à droite, on a que en tend vers 0 quand n tend vers l'infini donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g'(l)}{\mathbf{e}_n^{(p-1)}} = \begin{cases} 0 & g'(l) = 0, \\ \pm \infty & \text{sinon} . \end{cases}$$

De même

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g''(l)}{2\mathbf{e}_n^{(p-2)}} = \begin{cases} 0 & g''(l) = 0, \\ \pm \infty & \text{sinon} , \end{cases}$$

jusqu'à

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1g^{(p-1)}(l)}{\mathbf{e}_n(p-1)!} = \begin{cases} 0 & g^{(p-1)}(l) = 0, \\ \pm \infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Par contre $\frac{g^{(p)}(l)}{p!}$ est un réel $\epsilon_p(x_n)$ tend vers 0. Par unicité de la limite des deux côtés de l'égalité, il faut que $g'(l) = g''(l) = \dots = g^{(p-1)}(l) = 0$ pour que le côté droit tende vers un réel, $\frac{g^{(p)}(l)}{p!}$ en l'occurrence. La limite réelle est en plus différente de 0, donc on doit avoir $g^{(p)}(l) \neq 0$.

Si on a

$$g'(l) = g''(l) = \dots = g^{(p-1)}(l) = 0 \quad \text{et} \quad g^{(p)}(l) \neq 0,$$

alors

$$\mathbf{e}_{n+1} = \frac{\mathbf{e}_n^p}{p!} g^{(p)}(l) + \mathbf{e}_n^p \epsilon_p(x_n),$$

et

$$\frac{\mathbf{e}_{n+1}}{\mathbf{e}_n^p} = \frac{1}{p!} g^{(p)}(l) + \epsilon_p(x_n),$$

d'où comme $\epsilon_p(x_n)$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{\mathbf{e}_{n+1}}{\mathbf{e}_n^p} \right| = \frac{1}{p!} |g^{(p)}(l)| \in \mathbb{R}_+^*,$$

et la méthode est bien d'ordre p .

Theoreme 2.4. [?] Si g est une application définie sur l'intervalle [?] $[a, b]$, a valeurs dans $[a, b]$ alors la suite (x_n) définie par $x_0 \in [a, b]$ et la relation de récurrence, $x_{n+1} = g(x_n)$ converge vers l'unique solution α de l'équation $x = g(x)$ avec $\alpha \in [a, b]$.

2.1 Méthode de point fixe :

Démonstration

la suite (x_n) est bien définie car $g([a, b]) \subset [a, b]$.

Montrons, par l'absurde, que l'équation $x = g(x)$ a au plus une solution. Supposons qu'il y ait deux solutions α_1 et α_2 , alors

$$|\alpha_1 - \alpha_2| = |g(\alpha_1) - g(\alpha_2)| \leq L |\alpha_1 - \alpha_2|,$$

or $L < 1$ donc nécessairement $\alpha_1 = \alpha_2$.

Montrons que la suite (x_n) est convergente. On a

$$|x_{n+1} - x_n| = |g(x_n) - g(x_{n-1})| \leq L |x_n - x_{n-1}|,$$

et par récurrence

$$|x_{n+1} - x_n| \leq L^n |x_1 - x_0|.$$

On en déduit que

$$|x_{n+p} - x_n| \leq L^n |x_1 - x_0| \frac{1 - L^p}{1 - L} \leq |x_1 - x_0| \frac{L^n}{1 - L}.$$

Cette suite vérifie le critère de Cauchy, elle est donc convergente vers $\alpha \in [a, b]$, or l'application g est continue donc la limite α vérifie $g(\alpha) = \alpha$. On a aussi une évaluation de l'erreur en faisant tendre p vers l'infini, on obtient

$$|\alpha - x_n| \leq |x_1 - x_0| \frac{L^n}{1 - L}.$$

On constate que, pour n fixé, l'erreur est d'autant plus petite que L est proche de 0.

Test d'arrêt.

Comme nous l'avons expliqué dans l'introduction, la suite x_n converge vers un réel α vérifiant $g(\alpha) = \alpha$. En fixant la tolérance ϵ on estime qu'on atteint la précision ϵ dès qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$|x_{n_0+1} - x_{n_0}| < \epsilon.$$

Néanmoins, la situation devient plus concrète lorsque g est négative au voisinage de a .

2.1 Méthode de point fixe :

Proposition 2.1.2. [4] Soit $g : [a, b] \rightarrow [a, b]$ de classe $\mathcal{C}$. On suppose que g admet un unique point $\alpha \in [a, b]$ vérifiant $-1 < g'(x) < 0$ pour tout x dans un intervalle de convergence $[a, b]$ de α , soit la suite (x_n) définie par

$$\begin{cases} x_0 \in [a, b], \\ x_{n+1} = g(x_n), \quad \forall n \geq 0. \end{cases} \quad (2.15)$$

Alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |x_{n+1} - \alpha| \leq |x_{n+1} - x_n|.$$

Par conséquent, soit n_0 tel que $|x_{n_0} - \alpha| < \epsilon$; alors x_{n_0} approche α à ϵ près.

Démonstration On applique le théorème des accroissements finis à g entre x_n et α . Il existe alors (c_n) entre x_n et α telle que

$$g(x_n) - g(\alpha) = g'(c_n)(x_n - \alpha).$$

Ce qui donne

$$x_{n+1} - \alpha = g'(c_n)(x_n - \alpha).$$

Comme $g'(c_n) \leq 0$, $(x_{n+1} - \alpha)$ et $(x_n - \alpha)$ sont de signes contraires.

2.1 Méthode de point fixe :

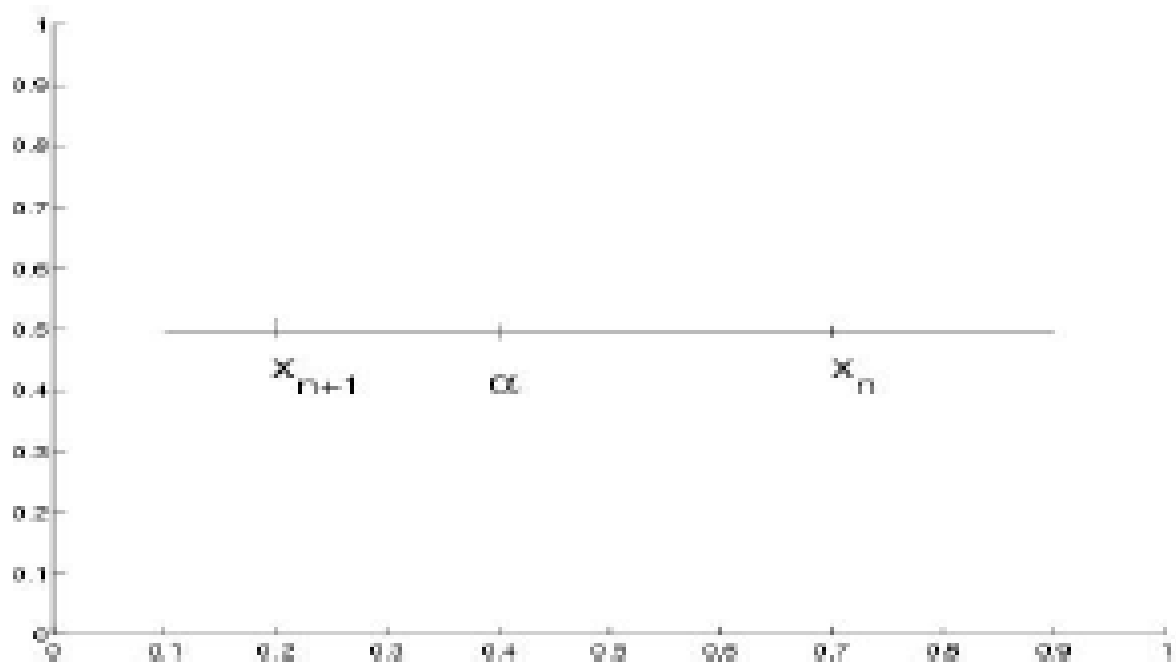


FIGURE 2.4 – Limitation de la racine à la dernière itération où la condition d’arrêt est satisfaite

Finalement

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |x_{n+1} - \alpha| \leq |x_{n+1} - x_n|.$$

2.1.4 Avantages et inconvénients de la méthode

Avantage de la méthode du point fixe : C’est une méthode beaucoup plus générale que la méthode de Newton puisqu’on demande très peu sur la fonction g (on demande seulement qu’elle soit contractante, elle peut n’être même pas dérivable.)

Inconvénient de la méthode du point fixe : Elle est en général moins rapide (surtout lorsque k est proche de 1) puisque l’erreur évolue ”linéairement” et non ”quadratiquement”.

2.1 Méthode de point fixe :

2.1.5 Quelques exemples

Exemple 01 :

Trouver les racines de l'équation par la méthode du point fixe :

$$f(x) = x^2 - 5x + 4.$$

On choisit l'intervalle $[0, 2]$ alors $f(0) = 4 > 0$ et $f(2) = -10 < 0$.

En effet $f(0) \times f(2) < 0$, alors le racine d'équation dans l'intervalle $[0, 2]$.

On choisit entre les deux fonctions suivantes la fonction qui vérifie

$$x = g(x) = \frac{x^2 + 4}{5}.$$
$$x_{n+1} = g(x_n) = \frac{x_n^2 + 4}{5}.$$

On prend la première approximation $x_0 = 2$

$x_1 = \frac{x_0^2 + 4}{5}$	$= \frac{2^2 + 4}{5} = \frac{8}{5} = 1,6.$
$x_2 = \frac{x_1^2 + 4}{5}$	$= \frac{(1,6)^2 + 4}{5} = \frac{6,16}{5} = 1,312.$
$x_3 = \frac{(1,312)^2 + 4}{5}$	$= \frac{5,721}{5} = 1,144.$
$x_4 = \frac{(1,144)^2 + 4}{5}$	$= \frac{5,309}{5} = 1,062.$
$x_5 = \frac{(1,062)^2 + 4}{5}$	$= \frac{5,126}{5} = 1,025.$
$x_6 = \frac{(1,025)^2 + 4}{5}$	$= \frac{5,051}{5} = 1,010.$
$x_7 = \frac{(1,010)^2 + 4}{5}$	$= \frac{5,020}{5} = 1,004.$
$x_8 = \frac{(1,004)^2 + 4}{5}$	$= \frac{5,008}{5} = 1,0016.$
$x_9 = \frac{(1,0016)^2 + 4}{5}$	$= \frac{5,0032}{5} = 1,00064.$
$x_{10} = 1,000256.$	

On remarque que la suite de nombres x_1 jusqu'à x_{10} converge vers la racine $x = 1$ de l'équation donnée car les solutions sont arrondies à trois chiffres après la virgule.

2.1 Méthode de point fixe :

Pour trouver l'autre racine de l'équation, on prend la première approximation $x_0 = 5$, et on trouve

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{x_0^2 + 4}{5} &= \frac{(5)^2 + 4}{5} = \frac{29}{5} &= 5,8. \\x_2 &= \frac{x_1^2 + 4}{5} &= \frac{(5,8)^2 + 4}{5} = \frac{37,64}{5} &= 7,528. \\x_3 &= \frac{x_2^2 + 4}{5} &= \frac{(7,528)^2 + 4}{5} = \frac{60,6}{5} &= 12,12.\end{aligned}$$

On remarque que la suite de nombres x_1, x_2, x_3 diverge, cela signifie que le choix de la fonction récursive $g(x)$ n'est pas approprié .

Exemple 02 :

Trouver les racines de l'équation par la méthode du point fixe : $x^3 - 2 = 0$.

On pose l'équation

$$\begin{aligned}x &= x^3 - 2 + x. \\x &= \frac{2 - x^3 + 5x}{5},\end{aligned}$$

on choisit la valeur première $x_0 = 1, 2$, et on remarque que la valeur réelle de la racine est : $\xi = \sqrt[3]{2} = 1,259921$, plus le choix est proche de la solution, plus la convergence est rapide. 1^{er} cas : on prend

$$x_{n+1} = x_n^3 - 2 + x_n,$$

pour $n \in \mathbb{N}$, on obtient

2.1 Méthode de point fixe :

$$x_0 = 1, 2.$$

$$x_1 = (1, 2)^3 - 2 + 1 = 0, 928.$$

$$x_2 = -0, 273.$$

$$x_3 = -2, 293.$$

$$x_4 = -16, 349.$$

en remarque que n'est pas de convergence.

2^{eme} cas : on prend

$$x_{n+1} = \frac{2 - x_n^3 + 5x_n}{5}.$$

$$x_0 = 1, 2.$$

$$x_1 = 1, 2544.$$

$$x_2 = 1, 2596.$$

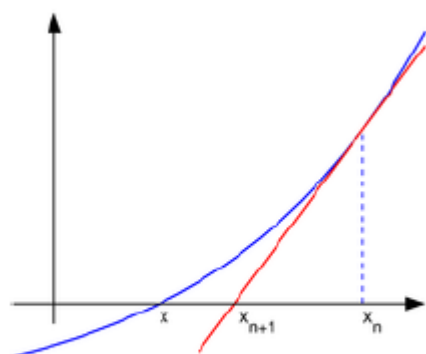
$$x_3 = 1, 2549.$$

$$x_4 = 1, 25992.$$

On remarque ici que les valeurs successives convergent vers la bonne solution .

2.2 Méthode de Newton :

En analyse numérique, la méthode de Newton ou méthode de Newton-Raphson[13] est, dans son application la plus simple, un algorithme efficace pour trouver numériquement une approximation précise d'un zéro (ou racine) d'une fonction réelle d'une variable réelle. Cette méthode doit son nom aux mathématiciens anglais Isaac Newton (1643-1727) et Joseph Raphson (peut-être 1648-1715), qui furent les premiers à la décrire pour la recherche des solutions d'une équation polynomiale. Thomas Simpson (1710-1761) élargit considérablement le domaine d'application de l'algorithme en montrant, grâce à la notion de dérivée, comment on pouvait l'utiliser pour calculer une solution d'une équation non linéaire, pouvant ne pas être un polynôme, et d'un système formé de telles équations.



Une itération de la méthode de Newton.

FIGURE 2.5 – Une itération de la méthode Newton

On va étudier dans la section suivante la méthode de Newton pour la résolution d'un système non linéaire, en fait il semble que l'idée de cette méthode revienne plutôt à Simpson. Donnons l'idée de Newton dans le cas $n = 1$.

Cette section est divisée en trois paragraphes. Dans le premier paragraphe, nous commençons par présentation de la méthode et démontrons un théorème d'existence et d'unicité de la solution, puis de convergence ont été étudiés sur les données. Ensuite, dans le deuxième

2.2 Méthode de Newton :

paragraphe nous donnons critère de convergence du méthode. Enfin, dans le troisième paragraphe, nous énonçons exemple numériques.

Les techniques employées sont basées sur la théorie de résoudre l'équation non linéaire, suivi par méthode de Newton.

2.2.1 Présentation de la méthode

Sous sa forme moderne, l'algorithme peut être présenté brièvement comme suit : à chaque itération, la fonction dont on cherche un zéro est linéarisée en l'itéré (ou point) courant et l'itéré suivant est pris égal au zéro de la fonction linéarisée. Cette description sommaire indique qu'au moins deux conditions sont requises pour la bonne marche de l'algorithme : la fonction doit être dérivable aux points visités (pour pouvoir y linéariser la fonction) et les dérivées ne doivent pas s'y annuler (pour que la fonction linéarisée ait un zéro), s'ajoute à ces conditions la contrainte forte de devoir prendre le premier itéré assez proche d'un zéro régulier de la fonction (i.e., en lequel la dérivée de la fonction ne s'annule pas), pour que la convergence du processus soit assurée.

L'intérêt principal de l'algorithme de Newton est sa convergence quadratique locale.

Definition 2.2.1. *La méthode de Newton s'utilise pour calculer une racine de $f(x) = 0$, où f est une fonction deux fois continûment dérivable de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. En voici le principe : soit x_0 donné, on écrit le développement de Taylor en x_0 :*

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + (x - x_0)\epsilon(x - x_0). \quad (2.16)$$

La méthode de Newton consiste à négliger les termes d'ordre supérieur à 1 (ce qui revient à assimiler localement la courbe à sa tangente) et à considérer alors que x_1 est le point qui annule l'approximation de f ainsi obtenue, c'est-à-dire

$$f(x_0) + (x_1 - x_0)f'(x_0) = 0, \quad (2.17)$$

ce qui donne

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}. \quad (2.18)$$

L'étape ainsi décrite qui permet de passer de x_0 à x_1 permet aussi de passer de x_n à x_{n+1} .

2.2 Méthode de Newton :

L'algorithme de Newton pour résoudre une équation $f(x) = 0$ est le suivant

$$\begin{cases} x_0 \text{ donné ,} \\ x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, n \geq 0. \end{cases} \quad (2.19)$$

Il s'agit donc d'une méthode de point fixe $x_{n+1} = g(x_n)$ pour laquelle g est définie par

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

La méthode de Newton est une méthode de point fixe telle que $g'(x^) = 0$ c'est à dire que la dérivée s'annule au point fixe de la fonction g .*

Une autre manière de présenter la méthode de Newton, plus graphique, est d'obtenir x_{n+1} comme l'intersection de la tangente à la courbe $y = f(x)$ au point x_n avec l'axe x_0 .

Si la méthode de point fixe converge vers x^ , alors on a en passant à la limite quand n tend vers $+\infty$*

$$x^* = x^* - \frac{f(x^*)}{f'(x^*)}.$$

On voit alors que l'on obtient bien $f(x^) = 0$ si $f'(x^*) \neq 0$. On suppose dorénavant que cette condition est remplie c'est à dire que la courbe $y = f(x)$ n'est pas tangente à l'axe O_x lorsqu'elle coupe cet axe.*

2.2.2 Critère de convergence du méthode

Proposition 2.2.1. *Soit f une fonction deux fois continûment dérivable sur $[11]$ $[a, b]$ et $x^* \in [a, b]$ tel que $f(x^*) = 0$ et $f'(x^*) \neq 0$. Alors il existe $\alpha > 0$ tel que la suite générée par la méthode de Newton*

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$

converge vers x^ pour tout $x_0 \in [x^* - \alpha, x^* + \alpha]$.*

Démonstration :

Comme il s'agit d'une méthode de point fixe de la fonction $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ on calcule la dérivée de cette fonction au point fixe

2.2 Méthode de Newton :

$$g'(x) = 1 - \frac{(f'(x))^2 - f''(x)f(x)}{f'(x)^2} = \frac{f''(x)f(x)}{(f'(x))^2},$$

et puisque $f(x^*) = 0$ on a $g'(x^*) = 0$. On peut donc appliquer la proposition qui montre l'existence de α tel que la suite $x_{n+1} = g(x_n)$ converge vers le point fixe si $x_0 \in [x^* - \alpha, x^* + \alpha]$.

Cette proposition donne une condition suffisante de convergence mais heureusement la méthode de Newton converge souvent même si l'on part loin de la solution. Montrons maintenant que la vitesse de convergence est quadratique, ce qui est mieux que linéaire.

Proposition 2.2.2. *La vitesse de convergence d'une suite x_n obtenue par la méthode de Newton peut être obtenue comme application de la formule de Taylor-Lagrange. Il s'agit d'évaluer une majoration de $\log |x_n - a|$.*

f est une fonction définie au voisinage de a et deux fois continûment différentiable. On suppose que a se trouve être un zéro de f qu'on essaie d'approcher par la méthode de Newton. On fait l'hypothèse que a est un zéro d'ordre 1, autrement dit que $f'(a)$ est non nul. La formule de Taylor Lagrange s'écrit

$$f(a) = f(x) + f'(x)(a - x) + \frac{f''(\xi)}{2}(a - x)^2,$$

avec ξ entre x et a .

(2.20)

Partant de l'approximation x , la méthode de Newton fournit au bout d'une itération

$$N_{f(x)} - a = x - \frac{f(x)}{f'(x)} - a = \frac{f''(\xi)}{2f'(x)}(x - a)^2. \quad (2.21)$$

Pour un intervalle compact I contenant x et a et inclus dans le domaine de définition de f , on pose

$$m_1 = \min_{x \in I} |f'(x)|,$$

ainsi que

$$M_2 = \max_{x \in I} |f''(x)|.$$

2.2 Méthode de Newton :

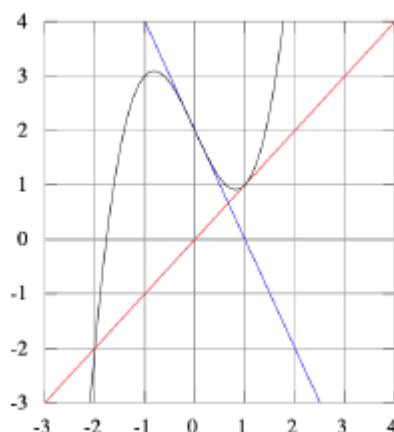


FIGURE 2.6 – exemple convergence

Alors, pour tout $x \in I$

$$|N_{f(x)} - a| \leq \frac{M_2}{2m_1} |x - a|^2. \quad (2.22)$$

Par récurrence immédiate, il vient

$$K |x_n - a| \leq (K |x_0 - a|)^{2^n},$$

où

$$K = \frac{M_2}{2m_1}.$$

En passant au logarithme

$$\log |x_n - a| \leq 2^n \log(K |x_0 - a|) - \log(K). \quad (2.23)$$

La convergence de x_n vers a est donc quadratique, à condition que $|x_0 - a| < \frac{1}{K}$.

Exemples déconvergence

Les tangentes à la courbe représentant la fonction $x \rightarrow x^3 - 2x + 2$ en 0 et en 1 coupent l'axe des x en 1 et en 0 respectivement. Si l'on prend 0 ou 1 comme point de départ, la méthode oscille entre ces deux points et ne converge donc pas.

2.2 Méthode de Newton :

* La tangente à la courbe peut couper l'axe des abscisses hors du domaine de définition de la fonction.

* Si l'on utilise l'algorithme de Newton pour trouver l'unique zéro $x_* = 0$ de la fonction $x \in \mathbb{R} \rightarrow |x|^{\frac{1}{2}}$ en prenant un itéré initial $x_* \neq 0$, on constate que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $x_{k+1} = -x_k$ la suite générée ne converge donc pas, même localement (c'est-à-dire même si x_0 est pris proche du zéro $x_* = 0$). Le problème provient ici, en particulier, de la non-différentiabilité de la fonction en l'unique zéro $x_* = 0$.

Critère d'arrêt

Des critères d'arrêt possibles, déterminés relativement à une grandeur numériquement négligeable, sont

$$\|f(x_k)\| < \epsilon_1 \text{ ou } \|x_{k+1} - x_k\| < \epsilon_2, \quad (2.24)$$

où $\epsilon_1, \epsilon_2 \in \mathbb{R}^+$ représentent des erreurs d'approximations caractérisant la qualité de la solution numérique.

Dans tous les cas, il se peut que le critère d'arrêt soit vérifié en des points ne correspondant pas à des solutions de l'équation à résoudre.

2.2.3 Avantages et inconvénients de la méthode de Newton

L'un des avantages de la méthode de Newton : elle converge très rapidement : approximativement, le nombre de décimales exactes double à chaque itération.

L'inconvénient majeur associé à la méthode de Newton : elle demande plus d'hypothèses sur f : Nous allons demander que f soit de classe $\mathcal{C}^2$ sur un intervalle $I = [a, b]$ et que f' et f'' gardent un signe constant sur cet intervalle. On demande de plus que $f(a)$ et $f(b)$ soient de signes contraires.

2.2 Méthode de Newton :

2.2.4 Exemple numérique de la méthode :

Déterminer la racine de la fonction $f(x) = x - 2\sin x = 0$ par la méthode de Newton-Raphson 0 est une racine évidente de cette fonction.

$$f(x) = x - 2\sin x \Rightarrow f'(x) = 1 - 2\cos x.$$

La relation de récurrence s'écrit

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k - 2\sin x_k}{1 - 2\cos x_k}.$$

On part de la valeur initiale $x_0 = 2$ et on itère

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 - \frac{x_0 - 2\sin x_0}{1 - 2\cos x_0} &&= 1,9010. \\ x_2 &= x_1 - \frac{x_1 - 2\sin x_1}{1 - 2\cos x_1} &&= 1,8955. \end{aligned}$$

Et les itérations suivantes donnent la même valeur. Si l'on part d'une valeur initiale plus éloignée de la solution, $x_0 = 1$ par exemple, on aboutit à la même solution mais avec un

2.2 Méthode de Newton :

nombre plus grand d'itérations et des valeurs qui peuvent osciller

$$x_1 = -7,4727.$$

$$x_2 = 14,4785.$$

$$x_3 = 6,9351.$$

$$x_4 = 16,6357.$$

$$x_5 = 8,3439.$$

$$x_6 = 4,9546.$$

$$x_7 = -8,3013.$$

$$x_8 = -4,8173.$$

$$x_9 = 3,7926.$$

$$x_{10} = 1,8611.$$

$$x_{11} = 1,8962.$$

$$x_{12} = 1,8955.$$

La méthode de Newton-Raphson permet généralement de trouver rapidement et avec une bonne précision les racines d'une fonction. Il existe cependant des situations où elle échoue, par exemple lorsque $f'(x_0)$ est faible, c'est à dire lorsque la tangente est presque horizontale, à proximité d'un extrémum. Enfin, son principal inconvénient est qu'elle nécessite l'évaluation de la fonction $f(x)$ et de sa dérivée $f'(x)$ qui n'est pas toujours facile à écrire analytiquement.

2.2 Méthode de Newton :

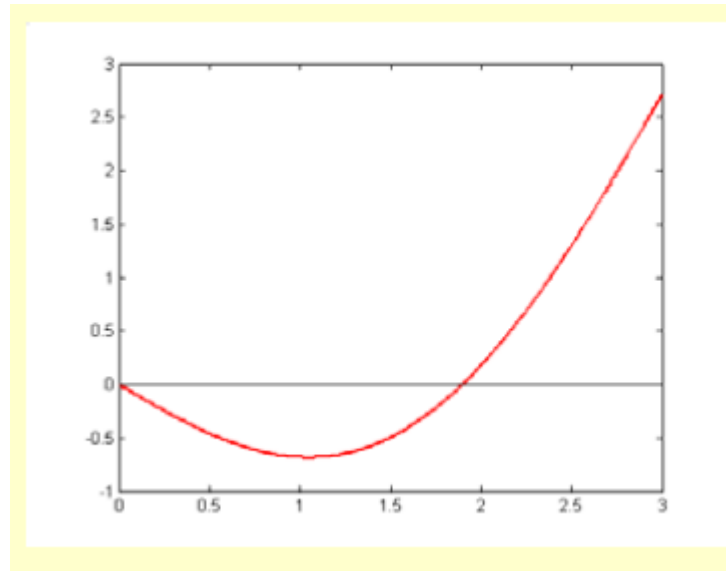


FIGURE 2.7 – Les coordonnées du point d'intersection de la courbe f avec l'axe x qui est la racine de l'équation

CHAPITRE 3

RÉSOLUTION NUMÉRIQUE UNE SYSTÈME D'ÉQUATION NON LINÉAIRE DANS $\mathbb{R}^N$

Ce chapitre est composé de deux sections. Dans la première section, on considère résolutions une systémed'équations non linéaires une méthode point fixe et dans la deuxième section, on propose d'étudier une méthode Newton appliquée à la résolutions une système d'équations non linéaires consiste à élaborer un schéma itératif.

L'objet essentiel de ce section est l'approximation des racines d'une fonction dans $\mathbb{R}^n$ et $n \in \mathbb{N}$, d'une plusieurs variables réelles, c'est à dire la résolution approchée du problème suivant :

$$\begin{cases} \mathbf{x}_0 \text{ donne } \in D \subseteq \mathbb{R}^n. \\ F(\mathbf{x}) = 0. \end{cases} \quad (3.1)$$

Nous allons pour cela etendre au cas de la dimension $n > 1$ certains des algorithmes proposes dans les sections précédentes.

La valeur de la variable $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ qui vérifie cette égalité est appelée solution (ou racine) de l'équation, elle est notée x_0 .

3.1 Méthode de point fixe :

Dans beaucoup de cas, on doit recourir aux méthodes numériques car la solution ne peut pas être déterminée analytiquement. On ne parle pas de la solution exacte, car souvent elle n'existe pas, cependant on cherche une solution qui soit approchée de la solution exacte avec une certaine précision.

Il existe plusieurs techniques permettant de résoudre l'équation non linéaire, ces méthodes se distinguent par leurs principes et leurs vitesses de convergence. Nous introduisons dans cette section la méthodes de point fixe et de Newton.

3.1 Méthode de point fixe :

Elle est fondée sur le fait qu'il est toujours possible de transformer le problème $F(x) = 0$ en un problème équivalent du type $G(x) - x = 0$ où $X^* = X$ est un point fixe de G : $G(X^*) = X^* \rightarrow F(X^*) = 0$. Le choix de la fonction g n'est pas unique.

La méthode revient à déterminer son intersection avec la première bissectrice des axes d'équation $Y = X$. On part d'une abscisse initiale x_0 prise proche de la racine r cherchée puis on calcule $G(x_0) = x_1$; connaissant x_1 on calcule $G(x_1) = x_2$ et ainsi de suite jusqu'à obtenir une stabilisation du processus, c'est à dire $G(x^*) = x^*$ avec une précision donnée. La racine cherchée n'est alors autre que $r \approx x^*$. Cette méthode n'est pas toujours utilisable, elle doit satisfaire deux critères de convergence : si $x \in [a, b]$ alors $G(x) \in [a, b]$ et $-1 \leq G'(x) \leq 1$.

3.1.1 Présentation de la méthode

Theoreme 3.1. *Nous concluons l'analyse des méthodes[15] de résolution des systèmes non linéaires en étendant au cas de la dimension n les techniques de point fixe introduites dans le cas scalaire[6]. Nous récrivons pour cela le problème $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, trouver $X^* \in \mathbb{R}^n$ tel que*

$$F(X^*) = 0, \tag{3.2}$$

sous la forme : étant donné $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, trouver $X^ \in \mathbb{R}^n$ tel que $G(X^*) = X^*$ ou G satisfait la propriété suivante : si X^* est un point fixe de G , alors $F(X^*) = 0$, on introduit*

3.1 Méthode de point fixe :

la méthode itérative suivante pour résoudre

$$G(X^*) = X^*, \quad (3.3)$$

étant donné $X^{(0)} \in \mathbb{R}^n$, calculer pour $k = 0, 1, \dots$ jusqu'à convergence ,

$$X^{(k+1)} = G(X^{(k)}). \quad (3.4)$$

La définition qui suit sera utile dans l'analyse de la convergence des itérations de point fixe.

Definition 3.1.1. On dit qu'une application $G : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est contractante sur l'ensemble $D_0 \subset D$ s'il existe une constante $\alpha < 1$ telle que $\| G(x) - G(y) \| \leq \alpha \| x - y \|$ pour tout x, y dans D_0 ou $\| \cdot \|$ est une norme vectorielle[6].

Une application contractante est aussi appelée contraction.

Le théorème suivant donne l'existence et l'unicité d'un point fixe de G .

3.1.2 Théorème de l'application contractante

Proposition 3.1.1. Si $G : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une contraction sur un ensemble fermé $D_0 \subset D$ telle que $G(x) \in D_0$ pour tout $x \in D_0$, alors G admet un unique point fixe dans D_0 .

Le résultat suivant donne une condition suffisante pour avoir convergence de la suite. Il s'agit d'une extension du théorème vu dans le cas scalaire.

Proposition 3.1.2. On suppose que $G : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ possède un point fixe X^{P*} a l'intérieur de D et que G est continument différentiable dans un voisinage de X^* .

On note J_G la jacobienne de G et on suppose que $\rho(J_G(X^{(*)})) < 1$.

Alors il existe un voisinage S de X^* tel que $S \subset D$ et pour tout $X^{(0)} \in S$, la suite définie par demeure dans D et converge vers[?] X^* .

Le rayon spectral étant l'infimum des normes matricielles subordonnées, il suffit, pour être assuré de la convergence, de vérifier qu'on a $\| J_G(x) \| < 1$ pour une certaine norme.

3.1 Méthode de point fixe :

Theoreme 3.2. Soit $G \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, on définit la fonction $F \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ par $F(x) = x - G(x)$. On peut alors remarquer que $G(x) = 0$ si et seulement si $F(x) = x$. Résoudre le système non linéaire revient donc à trouver un point fixe de F . Encore faut il qu'un tel point fixe existe.

On rappelle le théorème de point fixe bien connu.

Soit E un espace métrique complet, d la distance sur E , et $F : E \rightarrow E$ une fonction strictement contractante, c'est à dire telle qu'il existe $k \in]0, 1[$ tel que

$$d(F(x), F(y)) \leq kd(x, y), \quad (3.5)$$

pour tout $x, y \in E$ Alors il existe un unique point fixe $x^* \in E$ qui vérifie $F(x^*) = x^*$. De plus si $x^{(0)} \in E$, et $x^{(k+1)} = F(x^{(k)})$, $\forall k \geq 0$ alors $x^{(k)} \rightarrow x^*$ quant $k \rightarrow +\infty$.

Démonstration :

Etape : 1 Existence de x^* et convergence de la suite

Soit $x^{(0)} \in E$ et $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $x^{(k+1)} = F(x^{(k)})$ pour $k \geq 0$. On va montrer que

1. La suite $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy (donc convergente car E est complet),
- 2.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x^{(k)} = x^* \text{ est point fixe de } F.$$

Par hypothèse, on sait que pour tout $k \geq 1$,

$$d(x^{(k+1)}, x^{(k)}) = d(F(x^{(k)}), F(x^{(k-1)})) \leq kd(x^{(k)}, x^{(k-1)}).$$

Par récurrence sur k , on obtient que

$$d(x^{(k+1)}, x^{(k)}) \leq kd(x^{(1)}, x^{(0)}), \quad \forall k \geq 0.$$

Soit $k \geq 0$ et $p \geq 1$, on a donc

3.1 Méthode de point fixe :

$$\begin{aligned}
d(x^{(k+p)}, x^{(k)}) &\leq d(x^{(k+p)}, x^{(k+p-1)}) + \dots + d(x^{(k+1)}, x^{(k)}). \\
&\leq \sum_{q=1}^p d(x^{(k+p)}, x^{(k+q-1)}). \\
&\leq \sum_{q=1}^p k^{k+p-1} d(x^{(1)}, x^{(0)}). \\
&\leq d(x^{(1)}, x^{(0)}) k^k (1 + k + \dots + k^{p-1}). \\
&\leq d(x^{(1)}, x^{(0)}) \frac{k^k}{j - k} \rightarrow 0 \text{ quand } k \rightarrow +\infty \text{ car } k < 1.
\end{aligned}$$

La suite $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ est donc de Cauchy, i.e.

$$\forall \epsilon > 0, \exists k_\epsilon \in \mathbb{N}; \forall k \geq k_\epsilon, \quad \forall p \geq 1 \quad d(x^{(k+p)}, x^{(k)}) \leq \epsilon.$$

Comme E est complet, on a donc $x^{(k)} \rightarrow x^*$ dans E quand $k \rightarrow +\infty$. Comme la fonction F est strictement contractante, elle est continue, donc on a aussi $F(x^{(k)}) \rightarrow F(x^*)$ dans E quand $k \rightarrow +\infty$. En passant à la limite dans l'égalité $x^{(k+1)} = F(x^{(k)})$ on en déduit que $x^* = F(x^*)$.

Etape 2 : Unicité

Soit x^* et y^* des points fixes de f , qui satisfont donc : $x^* = F(x^*)$ et $y^* = F(y^*)$. Alors $d(F(x^*), F(y^*)) = d(x^*, y^*) \leq k d(x^*, y^*)$; comme $k < 1$, ceci est impossible sauf $x^* = y^*$.

La méthode du point fixe s'appelle aussi méthode des itérations successives. Dans le cadre de ce cours, nous prendrons $E = \mathbb{R}^n$, et la distance associée à la norme euclidienne, que nous noterons $|\cdot|$.

$$\forall (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \quad \text{avec } \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n), \mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n).$$

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |\mathbf{x} - \mathbf{y}| = \left(\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Généralisation

Remarque 3.1.1. [15] *Le théorème passé se généralise en remplaçant l'hypothèse F strictement contractante" par il existe $k > 1$ tel que $F^{(k)} = F \circ F \circ \dots \circ F$; k fois est strictement*

3.1 Méthode de point fixe :

contractante ” (reprendre la démonstration du théorème pour le vérifier).

La question qui vient alors naturellement est : que faire pour résoudre $G(x) = 0$ si la méthode du point fixe appliquée à la fonction $x \rightarrow x - G(x)$ ne converge pas. Dans ce cas, F n'est pas strictement contractante ; une idée possible est de pondérer la fonction g par un paramètre $\omega \neq 0$ et d'appliquer les itérations de point fixe à la fonction $F_\omega(x) = x - \omega G(x)$, on remarque là encore que x est encore solution du système passé si et seulement si x est point fixe de $F_\omega(x)$. On aimerait dans ce cas trouver ω pour que F_ω soit strictement contractante, c.à.d. pour que

$$|F_\omega(x) - F_\omega(y)| = |x - y - \omega(G(x) - G(y))| \leq k |x - y|, \quad (3.6)$$

pour $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ avec $k < 1$.

Or

$$\begin{aligned} |x - y - \omega(G(x) - G(y))|^2 &= (x - y - \omega(G(x) - G(y))).(x - y - \omega(G(x) - G(y))) \\ &= |x - y|^2 - 2(x - y)(\omega(G(x) - G(y))) + \omega^2 |G(x) - G(y)|^2. \end{aligned}$$

Supposons que g soit lipschitzienne, et soit $M > 0$ sa constante de Lipschitz

$$|G(x) - G(y)| \leq M |x - y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

On a donc

$$|x - y - \omega(G(x) - G(y))|^2 \leq (1 + \omega^2 M^2) |x - y|^2 - 2(x - y)(\omega(G(x) - G(y))).$$

Or on veut

$$|x - y - \omega(G(x) - G(y))|^2 \leq k |x - y|^2, \quad \text{avec } k < 1. \quad (3.7)$$

On a donc intérêt à ce que le terme $-2(x - y)(\omega(G(x) - G(y)))$ soit de la forme $-a |x - y|^2$ avec a strictement positif. Pour obtenir ceci, on va supposer de plus que

$$\exists \alpha > 0 \text{ tel que } (G(x) - G(y)).(x - y) \geq \alpha |x - y|^2, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

On obtient alors

$$|x - y - \omega(G(x) - G(y))|^2 \leq (1 + \omega^2 M^2 - 2\omega\alpha) |x - y|^2. \quad (3.8)$$

3.1 Méthode de point fixe :

Et donc si $\omega \in]0, \frac{2\alpha}{M^2}[$ le polynôme $\omega^2 M^2 - 2\omega\alpha$ est strictement négatif : soit $-\mu$ (noter que $\mu \in]0, 1[$) et on obtient que

$$\|x - y - \omega(G(x) - G(y))\|^2 \leq (1 - \mu) \|x - y\|^2.$$

On peut donc énoncer le théorème suivant

Point fixe de contraction avec relaxation

Theoreme 3.3. *On désigne [15] par $\|\cdot\|$ la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$. Soit $G \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ lipschitzienne de constante de Lipschitz $M > 0$ et telle que*

$$\exists \alpha > 0 \text{ tel que } (G(x) - G(y)) \cdot (x - y) \geq \alpha \|x - y\|^2, \forall x, y \in \mathbb{R}^n,$$

est vérifiée, alors la fonction $F_\omega \rightarrow x - \omega G(x)$ est strictement contractante si

$$0 < \omega < \frac{2\alpha}{M^2}.$$

Il existe donc un et un seul $x^ \in \mathbb{R}^n$ tel que $G(x^*) = 0$ et $x^{(k)} \rightarrow x^*$ quand $k \rightarrow +\infty$ avec*

$$x^{(k+1)} = F_\omega(x^{(k)}) = x^{(k)} - \omega G(x^{(k)}).$$

Remarque 3.1.2. *Le théorème passé permet de montrer que sous les hypothèses et pour $\omega \in]0, \frac{2\alpha}{M^2}[$ on peut obtenir la solution de exemple passé en construisant la suite*

$$\begin{aligned} x^{(k+1)} &= x^{(k)} - \omega G(x^{(k)}), \quad n \geq 0, \\ x^{(0)} &\in \mathbb{R}^n. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Or on peut aussi écrire cette suite de la manière suivante (avec $F(x) = x - G(x)$)

$$\begin{aligned} x^{(k+1)} &= F(x^{(k)}), \quad \forall n \geq 0, \\ x^{(k+1)} &= \omega x^{(k+1)} + (1 - \omega)x^{(k)}, \quad x^{(0)} \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

En effet si $x^{(k+1)}$ est donné par la suite, alors

$$x^{(k+1)} = \omega x^{(k+1)} + (1 - \omega)x^{(k)} = \omega F(x^{(k)}) + (1 - \omega)x^{(k)} = -\omega G(x^{(k)}) + x^{(k)}.$$

Le procédé de construction de la suite (2.8) est l'algorithme de relaxation sur F .

La proposition suivante donne une condition suffisante pour qu'une fonction vérifie les hypothèses.

3.1 Méthode de point fixe :

Proposition 3.1.3. Soit $h \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ et $(\lambda_i)_{i=1,n}$ les valeurs propres de la matrice hessienne de h . On suppose qu'il existe des réels strictement positifs α et M tels que

$$\alpha \leq \lambda_i(x) \leq M, \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Alors la fonction $G = \nabla h$ (gradient de h) vérifie les deux hypothèses du théorème passé

.

Démonstration :

Montrons d'abord que l'hypothèse est vérifiée. Soit $(x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2$ on veut montrer que

$$(G(x) - G(y)) \cdot (x - y) \geq \alpha |x - y|^2.$$

On introduit pour cela la fonction $\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ définie par

$$\varphi(t) = G(x + t(y - x)).$$

On a donc

$$\varphi(1) - \varphi(0) = G(y) - G(x) = \int_0^1 \varphi'(t) dt. \quad (3.10)$$

Or

$$\varphi'(t) = DG(x + t(y - x))(y - x).$$

Donc

$$G(y) - G(x) = \int_0^1 DG(x + t(y - x))(y - x) dt.$$

On en déduit que

$$(G(y) - G(x))(y - x) = \int_0^1 DG(x + t(y - x))(y - x)(y - x) dt.$$

Comme $\lambda_i(x) \in [\alpha, M]$, $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, on a

$$\alpha | \omega |^2 \leq DG(z) \omega \cdot \omega \leq M | \omega |^2 \quad \text{pour tout } \omega, z \in \mathbb{R}^n.$$

On a donc

$$(G(y) - G(x)) \cdot (y - x) \geq \int_0^1 \alpha |y - x|^2 dt = \alpha |y - x|^2, \quad (3.11)$$

ce qui montre que l'hypothèse est bien vérifiée.

3.1 Méthode de point fixe :

Montrons maintenant que l'hypothèse est vérifiée. On veut montrer que $\|G(y) - G(x)\| \leq M \|y - x\|$. Comme

$$G(y) - G(x) = \int_0^1 DG(x - t(y - x))(y - x) dt,$$

on a

$$\begin{aligned} \|G(y) - G(x)\| &\leq \int_0^1 \|DG(x - t(y - x))(y - x)\| dt \\ &\leq \int_0^1 \|DG(x - t(y - x))\| \|y - x\| dt, \end{aligned}$$

où $\|\cdot\|$ est la norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ induite par la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$.

Or, comme $\lambda_i(x) \in [\alpha, M]$ pour tout $i = 1, \dots, n$ la matrice $DG(x - t(y - x))(y - x)$ est symétrique définie positive et donc, d'après la proposition son rayon spectral est égal à sa norme, pour la norme induite par la norme euclidienne.

On a donc

$$\|DG(x - t(y - x))(y - x)\| = \rho(DG(x - t(y - x))(y - x)) \leq M. \quad (3.12)$$

On a donc ainsi montré que : $\|G(y) - G(x)\| \leq M \|y - x\|$ ce qui termine la démonstration.

3.1.3 Critère de convergence de la méthode

Vitesse de convergence

Definition 3.1.2. [15] Soit $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^n$ et $x^* \in \mathbb{R}^n$ On suppose que $x^{(k)} \rightarrow x^*$ lorsque $k \rightarrow +\infty$, que la suite est non stationnaire, c.à.d. que $x^{(k)} \neq x^*$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, et que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\|x^{(k+1)} - x^*\|}{\|x^{(k)} - x^*\|} = \beta \in [0, 1]. \quad (3.13)$$

On s'intéresse à la "vitesse de convergence" de la suite $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$. On dit que :

3.1 Méthode de point fixe :

1. La convergence est sous-linéaire si $\beta = 1$.
2. La convergence est au moins linéaire si $\beta \in [0, 1[$.
3. La convergence est linéaire si $\beta \in]0, 1[$.
4. La convergence est super linéaire si $\beta = 0$. Dans ce cas, on dit également que
 - (a) La convergence est au moins quadratique s'il existe $\gamma \in \mathbb{R}_+$ il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que si $k \geq n_0$ alors

$$\|x^{(k+1)} - x^*\| \leq \gamma \|x^{(k)} - x^*\|^2. \quad (3.14)$$

- (b) La convergence est quadratique si

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\|x^{(k+1)} - x^*\|}{\|x^{(k)} - x^*\|^2} = \gamma > 0. \quad (3.15)$$

Plus généralement, on dit que

- (a) La convergence est au moins d'ordre p s'il existe $\gamma \in \mathbb{R}_+$ il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tels que si $k \geq k_0$ alors

$$\|x^{(k+1)} - x^*\| \leq \gamma \|x^{(k)} - x^*\|^p. \quad (3.16)$$

- (b) La convergence est d'ordre p si

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\|x^{(k+1)} - x^*\|}{\|x^{(k)} - x^*\|^p} = \gamma > 0. \quad (3.17)$$

Vitesse de convergence d'une méthode

Proposition 3.1.4. Soit $F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ on suppose qu'il existe $x^* \in \mathbb{R}$ tel que $F(x^*) = x^*$
On construit la suite

$$\begin{cases} x^{(0)} \in \mathbb{R}, \\ x^{(k+1)} = F(x^{(k)}). \end{cases} \quad (3.18)$$

1. Si on suppose que $F'(x^*) \neq 0$ et $|F'(x^*)| < 1$ alors il existe $\alpha > 0$ tel que $x^{(0)} \in I_\alpha = [x^* - \alpha, x^* + \alpha]$ on a

$$x^{(k)} \rightarrow x^* \text{ lorsque } k \rightarrow +\infty.$$

De plus si $x^{(k)} \neq x^*$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ alors

$$\frac{|x^{(k+1)} - x^*|}{|x^{(k)} - x^*|} \rightarrow |F'(x^*)| = \beta \text{ avec } \beta \in]0, 1[.$$

La convergence est donc linéaire .

3.1 Méthode de point fixe :

2. Si on suppose maintenant que $F'(x^*) = 0$ et $F \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ alors il existe $\alpha > 0$ tel que $x^{(0)} \in I_\alpha = [x^* - \alpha, x^* + \alpha]$ on a $x^{(k)} \rightarrow x^*$ lorsque $k \rightarrow +\infty$ et si $x^{(k)} \neq x^*$, $\forall k \in \mathbb{N}$ alors

$$\frac{|x^{(k+1)} - x^*|}{|x^{(k)} - x^*|^2} \rightarrow \beta = \frac{1}{2} |F''(x^*)|.$$

Dans ce cas, la convergence est donc au moins quadratique .

3.1.4 Avantages et inconvénients de la méthode

Avantage de la méthode du point fixe : C'est une méthode beaucoup plus générale que la méthode de Newton puisqu'on demande très peu sur la fonction g (on demande seulement qu'elle soit contractante, elle peut n'être même pas dérivable.)

Inconvénient de la méthode du point fixe : Elle est en général moins rapide (surtout lorsque k est proche de 1) puisque l'erreur évolue "linéairement" et non "quadratiquement".

3.1.5 Exemple numérique

Trouver la solution du système d'équations suivant :

$$\begin{cases} x^3 + y^3 - 6x + 3 = 0 \\ x^3 - y^3 - 6x + 2 = 0, \end{cases}$$

pour $(x_0, y_0) = (0, 5; 0, 5)$

Nous écrivons le système d'équations comme suit

$$x = F(x, y) = \frac{x^3 + y^3}{6} + \frac{1}{2}$$

$$y = G(x, y) = \frac{x^3 - y^3}{6} + \frac{1}{3}$$

$$F_x = \frac{x^2}{2} \quad F_y = \frac{y^2}{2}$$

$$G_x = \frac{x^2}{2} \quad G_y = -\frac{y^2}{2}$$

$$|F_x + F_y| = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = \frac{0.25}{2} + \frac{0.25}{2} = \frac{0.5}{2} = 0.25 < 1$$

$$|G_x + G_y| = \left| \frac{x^2}{2} + \frac{-y^2}{2} \right| = \frac{x^2 + y^2}{2} = \frac{0.25 + 0.25}{2} = \frac{0.5}{2} = 0.25 < 1$$

Anisi ,la condition de convergence est satisfaite,nous pouvons donc appliquer les deux relation itératives

3.2 Méthode de Newton

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= \frac{1}{6}(x_n^3 + y_n^3) + \frac{1}{2} \\ y_{n+1} &= \frac{1}{6}(x_n^3 - y_n^3) + \frac{1}{3}\end{aligned}$$

nous trouvons

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{1}{6}(x_0^3 + y_0^3) + \frac{1}{2} = \frac{1}{6}(0.125 + 0.125) + \frac{1}{2} = 0.542 \\ y_1 &= \frac{1}{6}(x_0^3 - y_0^3) + \frac{1}{3} = 0.333 \\ x_2 &= \frac{1}{6}(x_1^3 + y_1^3) + \frac{1}{2} = \frac{1}{6}(0.542)^3 + (0.333)^2 + \frac{1}{2} = \frac{1}{6}(0.159) + (0.037) + \frac{1}{2} = 0.533 \\ y_2 &= \frac{1}{6}(x_1^3 - y_1^3) + \frac{1}{3} = \frac{1}{6}(0.542)^2 - (0.333)^3 + \frac{1}{3} = \frac{1}{6}(0.159) - (0.037) + \frac{1}{3} = 0.353 \\ x_3 &= \frac{1}{6}(x_2^3 + y_2^3) + \frac{1}{2} = \frac{1}{6}(0.533)^3 + (0.353)^3 + \frac{1}{2} = 0.532 \\ y_3 &= \frac{1}{6}(x_2^3 - y_2^3) + \frac{1}{3} = \frac{1}{6}(0.533)^3 - (0.353)^3 + \frac{1}{3} = 0.351 \\ x_4 &= \frac{1}{6}(0.532)^3 + (0.351)^3 + \frac{1}{2} = 0.532 \\ y_4 &= \frac{1}{6}(0.532)^3 - (0.351)^3 + \frac{1}{3} = 0.531\end{aligned}$$

donc la racine approximation est $(0.532, 0.531)$

3.2 Méthode de Newton

La méthode de Newton pour la résolution d'un système d'équations est une généralisation de l'algorithme de Newton pour la recherche du zéro d'une fonction unidimensionnelle. Le fait qu'un algorithme pour un problème unidimensionnel puisse être efficacement généralisé au cas multidimensionnel est une situation exceptionnelle. La méthode de Newton est souvent aussi appelée méthode de Newton-Raphson.[\[16\]](#)

3.2.1 Présentation de la méthode

Dans la formulation classique on écrit le système d'équations comme

$$F(y) = 0 \equiv \begin{cases} f_1(y) = 0. \\ f_2(y) = 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f_n(y) = 0 \end{cases} \quad (3.19)$$

Cette écriture est équivalente à la notation $h(y, z) = 0$, à la différence que les variables z sont directement dans F .

On approche la solution y^* par la séquence $\{y^{(k)}\}_{k=1,2,\dots}$. Etant donné $y^{(k)} \in \mathbb{R}^n$ et une évaluation de la matrice Jacobienne

$$\nabla F(y^{(k)}) = \begin{bmatrix} \frac{\delta f_1}{\delta y_1} \big|_{y_1=y_1^k} & \cdots & \frac{\delta f_1}{\delta y_n} \big|_{y_n=y_n^k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\delta f_n}{\delta y_1} \big|_{y_1=y_1^k} & \cdots & \frac{\delta f_n}{\delta y_n} \big|_{y_n=y_n^k} \end{bmatrix}$$

on construit une approximation meilleure $y^{(k+1)}$ de y^* . Pour ce faire on approche $F(y)$ dans le voisinage de $y^{(k)}$ par une fonction affine

$$F(y) \approx F(y^{(k)}) + \nabla F(y^{(k)})(y - y^{(k)}).$$

On peut résoudre ce “modèle local” pour obtenir une valeur de y qui satisfasse

$$F(y^{(k)}) + \nabla F(y^{(k)})(y - y^{(k)}) = 0, \quad (3.20)$$

c'est à dire

$$y = y^{(k)} - (\nabla F(y^{(k)}))^{-1} F(y^{(k)}).$$

On construira alors un nouveau modèle local autour de la valeur obtenue pour y . A l'itération k on a

$$y^{(k+1)} = y^{(k)} - (\nabla F(y^{(k)}))^{-1} F(y^{(k)}),$$

3.2 Méthode de Newton

et $y^{(k+1)}$ est solution du système linéaire

$$\underbrace{\nabla F(y^{(k)})}_{\mathbf{J}} \underbrace{(y^{(k+1)} - y^{(k)})}_{\mathbf{s}} = - \underbrace{F(y^{(k)})}_{\mathbf{b}}. \quad (3.21)$$

Méthode de Newton

La méthode de Newton est l'une des méthodes numériques les plus populaires et est même désignée par Burden et Faires comme la méthode la plus puissante utilisée pour résoudre l'équation

$$f(x) = 0. \quad (3.22)$$

Cette méthode provient du développement en série de Taylor de la fonction

$$f(x),$$

autour du point x_1 .

$$f(x) = f(x_1) + (x - x_1) f'(x_1) + \frac{1}{2!} (x - x_1)^2 f''(x_1) + \dots$$

Où j et ses dérivées du premier et du second ordre. f' et f'' sont calculés en x_1 si nous prenons les deux premiers termes du développement en série de Taylor, nous avons

$$f(x) \approx f(x_1) + (x - x_1) f'(x_1). \quad (3.23)$$

On pose alors (3.2) à zéro (i.e $f(x) = 0$ pour trouver la racine de l'équation qui nous donne

$$f(x_1) + (x - x_1) f'(x_1) = 0. \quad (3.24)$$

En réarrangeant le (3.3) nous obtenons la prochaine approximation de la racine, nous donnant $x = x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$

Ainsi en généralisant (3.4) on obtient La méthode itérative de Newton

$$x_i = x_{i-1} - \frac{f(x_{i-1})}{f'(x_{i-1})}, i \in \mathbb{N}, \quad (3.25)$$

ou $x_i \rightarrow \bar{x}$ as $i \rightarrow \infty$, et est l'approximation d'une racine de la fonction $f(x)$.

3.2 Méthode de Newton

Remarque 3.2.1. Lorsque les itérations commencent à avoir les memes valeurs réétées, as x_i c'est à dire $x_i = x_{i+1} = \text{bar}x$, cela indique que

$$f(x) = 0$$

converge vers $\text{bar}x$. Ainsi , x_i est la racine de la fonction $f(x)$.

Preuve de remarque :

Puisque

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

si $x_i = x_{i+1}$, alors

$$x_i = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}.$$

Cela implique que

$$\frac{f(x_i)}{f'(x_i)} = 0,$$

et donc

$$f(x_i) = 0.$$

Un autre indicateur que x_i est la racine de la fonction est s'il satisfait que $|f(x_i)| < \epsilon$ où $\epsilon > 0$ est une tolérance donnée. Cependant, (3.5) ne peut être utilisé que pour résoudre des équations non linéaires ne faisant intervenir qu'une seule variable. Cela signifie que nous devons prendre (3.5) et le modifier, afin de l'utiliser pour résoudre des équations algébriques non linéaires impliquant plusieurs variables.

Nous savons de l'algèbre linéaire que nous pouvons prendre des systèmes d'équations et exprimer ces systèmes sous la forme de matrices et de vecteurs. Dans cet esprit et en utilisant la Définition 2.2.

nous pouvons exprimer le système non linéaire comme une matrice avec un vecteur correspondant. Ainsi, l'équation suivante est dérivée : $\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{x}^{(k-1)} - J(\mathbf{x}^{(k-1)})^{-1} \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k-1)})$ ou $k = 1, 2, \dots, n$ représente l'itération $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

F est une fonction vectorielle, et $(J(\mathbf{x}))^{-1}$ est l'inverse de la matrice jacobienne. Cette équation représente la procédure de Newton Méthode de résolution de systèmes algébriques

3.2 Méthode de Newton

non linéaires. Cependant, au lieu de résoudre l'équation $f(x) = 0$, nous résolvons maintenant le système $F(x) = 0$. Nous allons maintenant passer par l'équation et définir chaque composant.

(1) Soit F une fonction qui envoie $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}^n$.

$$\mathbf{F}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

où $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

(2) Soit $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Alors $\mathbf{x}$ représente le vecteur

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

où $x_i \in \mathbb{R}$ and $i = 1, 2, \dots, n$. (3) D'après la Définition 2.13, nous savons que $J(\mathbf{x})$ est la matrice jacobienne.

Ainsi $J(\mathbf{x})^{-1}$ est

$$J(\mathbf{x})^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \end{bmatrix}^{-1}. \quad (3.27)$$

Nous décrivons maintenant les étapes de la méthode de Newton

Étape 1 :

Soit $\mathbf{x}^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$

Étape 2 :

Calculez $J(\mathbf{x}^{(0)})$ et $\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(0)})$.

3.2 Méthode de Newton

Étape 3 :

Nous devons maintenant calculer le vecteur $\mathbf{y}^{(0)}$, où

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

Afin de trouver $\mathbf{y}^{(0)}$, nous résolvons le système linéaire $J(\mathbf{x}^{(0)}) \mathbf{y}^{(0)} = -\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(0)})$, en utilisant l'élimination gaussienne.

Remarque 3.2.2.

En réarrangeant le système à l'étape 3, nous obtenons que

$$\mathbf{y}^{(0)} = -J(\mathbf{x}^{(0)})^{-1} \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(0)})$$

nous pouvons remplacer . La signification de ceci est que, puisque

$$\mathbf{y}^{(0)} = -J(\mathbf{x}^{(0)})^{-1} \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(0)}) ,$$

nous pouvons remplacer $-J(\mathbf{x}^{(0)})^{-1} \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(0)})$,

dans notre formule itérative par $\mathbf{y}^{(0)}$.

Ce résultat donnera que $\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{x}^{(k-1)} - J(\mathbf{x}^{(k-1)})^{-1} \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k-1)}) = \mathbf{x}^{(k-1)} - \mathbf{y}^{(k-1)}$

Étape 4 : une fois que $\mathbf{y}^{(0)}$ est trouvé, nous pouvons maintenant terminer la première itération en résolvant pour $\mathbf{x}^{(1)}$. Ainsi, en utilisant le résultat de l'étape 3, nous avons ce

3.2.2 Critère de convergence de la méthode

Le taux de convergence r d'une méthode itérative est défini comme

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|\mathbf{e}^{(k+1)}\|^r}{\|\mathbf{e}^k\|} = c \quad (3.28)$$

3.2 Méthode de Newton

ou $\exp^{(k)}$ est l'erreur à l'itération k et c une constante finie. On distingue alors les cas particuliers suivants :

* $r = 1$ et $c < 1$, convergence linéaire

* $r > 1$, convergence super-linéaire

* $r = 2$, convergence quadratique

Dans la pratique ceci correspond à un gain de précision par itération d'un nombre de digits constant pour une convergence linéaire ; l'accroissement de la précision par itération va en augmentant pour une convergence super-linéaire, et dans le cas d'une convergence quadratique la précision double à chaque itération.

La méthode de Newton converge quadratiquement sous certaines conditions. On vérifie

$$\| y^{(k+1)} - y^* \| \leq \beta \gamma \| y^{(k+1)} - y^* \|^2 \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.29)$$

où γ mesure la non-linéarité relative

$$\| \nabla F(y^*)^{-1} \| \leq \beta < \infty, \quad (3.30)$$

et γ est la constante de Lipschitz.

La convergence est seulement garantie si $y^{(0)}$ se trouve dans un voisinage de y^* , voisinage qu'il faut définir.

Pour la solution de modèles macroéconométriques, $y^{(0)}$ est défini par y_{t-1} ce qui constitue en général un bon voisinage.

La convergence quadratique des itérations de l'exemple 1 peut être vérifiée dans le tableau de la Figure 1. En effet pour chaque composante $y_i^{(k)}$, on vérifie

$$| y_i^{(k+1)} - y_i^{sol} | < | y_i^{(k)} - y_i^{sol} |^2. \quad (3.31)$$

3.2.3 Avantages et inconvénients

L'un des avantages de la méthode de Newton est que sa forme n'est pas trop compliquée et qu'elle peut être utilisée pour résoudre une variété de problèmes. L'inconvénient majeur associé à la méthode de Newton est que $J(x)$, ainsi que son inversion doivent être calculés à chaque itération. Le calcul de la matrice jacobienne et de son inverse peut prendre beaucoup de temps selon la taille de votre système. Un autre problème auquel nous pouvons être confrontés lors de l'utilisation de la méthode de Newton est qu'elle peut ne pas converger.

La complexité de la méthode de Newton est déterminée par la résolution du système non linéaire. Si l'on compare les méthodes itératives avec la méthode de Newton pour une itération on remarque que la différence de travail réside dans l'évaluation de la matrice Jacobienne et la solution d'un système linéaire. Ceci peut paraître un désavantage de la méthode de Newton. Dans la pratique cependant on peut montrer que lorsque on résout le système linéaire avec une méthode directe creuse et lorsqu'on utilise des dérivées analytiques les deux méthodes sont de complexité comparable étant donné que le nombre d'itérations pour Newton est nettement inférieur aux nombre d'itérations pour les méthodes itératives.

Si la méthode de Newton ne parvient pas à converger, cela entraînera une oscillation entre les points.

3.2.4 Exemple numérique

Exemple 1 :

On considère le système nonlinéaire

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2) = x_2 \exp^{x_1} - 2 = 0, \\ f_2(x_1, x_2) = x_2 + x_1^2 - 4 = 0, \end{cases}$$

qu'on peut écrire sous la forme $f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \end{pmatrix} = 0_{\mathbb{R}^2}$ ou $X = (x_1, x_2)$.

La Jacobienne de F est

$$J_{F(x)} = \begin{pmatrix} x_2 \mathbf{e}^{x_1} & \mathbf{e}^{x_1} \\ 2x_1 & 1 \end{pmatrix}$$

3.2 Méthode de Newton

Une itération de la méthode de Newton en partant de l'approximation initiale $(x_1^0, x_2^0) = (0, 1)$ revient à calculer X_1 ou $X_0 = (0, 1)$ le vecteur initial alors

$$X_1 = X_0 - (J_F(X_0))^{-1}F(X_0).$$

Donc

$$J_F(X_0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

alors

$$(J_F(X_0))^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$F(X_0) = \begin{pmatrix} f_1(X_0) \\ f_2(X_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Alors la première itération

$$X_1 = X_0 - (J_F(X_0))^{-1}F(X_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

On ne peut pas prendre l'approximation initiale $(x_1^0, x_2^0) = (1, 2)$ car dans ce cas

$$J_{F(X_0)} = \begin{pmatrix} 2\mathbf{e} & \mathbf{e} \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

n'est pas une matrice inversible .

Exemple 2 : On veut résoudre le système non linéaire

$$x_1^2 = 1$$

$$x_1^2 + x_2^2 = 2$$

$$x_1^2 + x_1x_2 + x_3^2 = 1$$

lequel est équivalent à

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 1 = 0$$

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 - 2 = 0$$

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_1x_2 + x_3^2 = 1$$

3.2 Méthode de Newton

– On calcule 3 itérations de la méthode de Newton en partant du vecteur initial $(x_1^0, x_2^0, x_3^0) = (0, 75; -0, 75; 0, 75)$. Donc on calcule X_1, X_2, X_3 .

La Jacobienne de F est

$$J_{F(X)} = \begin{pmatrix} 2x_1 & 0 & 0 \\ 2x_1 & 2x_2 & 0 \\ 2x_1 + x_2 & x_1 & 2x_3 \end{pmatrix}$$

Alors

$$J_{F(X_0)} = \begin{pmatrix} 1,5 & 0 & 0 \\ 1,5 & -1,5 & 0 \\ 0,75 & 0,75 & 1,5 \end{pmatrix} = (1,5) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0,5 & 0,5 & 1 \end{pmatrix}$$

Ce qui implique que

$$(J_{F(X_0)})^{-1} = -\frac{1}{1,5} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0,5 & 1 \end{pmatrix}$$

Le vecteur

$$F(X_0) = \begin{pmatrix} f_1(X_0) \\ f_2(X_0) \\ f_3(X_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,4375 \\ -0,875 \\ -0,4375 \end{pmatrix}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} X_1 &= X_0 - (J_{F(X_0)})^{-1} F(X_0) = \begin{pmatrix} 0,75 \\ -0,75 \\ 0,75 \end{pmatrix} + \frac{1}{1,5} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0,5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0,4375 \\ -0,875 \\ -0,4375 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1,0416 \\ -1,0416 \\ 1,0416 \end{pmatrix} = 1,3888 X_0 \end{aligned}$$

Alors

$$J_{F(X_1)} = 1,3888 J_{F(X_0)},$$

3.2 Méthode de Newton

donc

$$(J_{F(X_1)})^{-1} = 1,3888(J_{F(X_0)})^{-1}.$$

Le vecteur

$$F(X_1) = \begin{pmatrix} f_1(X_1) \\ f_2(X_1) \\ f_3(X_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,0849 \\ 0,1698 \\ 0,0849 \end{pmatrix}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} X_2 &= X_1 - (J_F(X_1))^{-1}F(X_1) = \begin{pmatrix} 1,0416 \\ -1,0416 \\ 1,0416 \end{pmatrix} + \frac{1}{2,0832} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0,5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,0849 \\ 0,1698 \\ 0,0849 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1,0008 \\ -1,0008 \\ 1,0008 \end{pmatrix} = 1,3344X_0 \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} X_3 &= X_2 - (J_F(X_2))^{-1}F(X_2) = \begin{pmatrix} 1,0008 \\ -1,0008 \\ 1,0008 \end{pmatrix} + \frac{1}{2,0016} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0,5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,0016 \\ 0,0032 \\ 0,0016 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1,0000 \\ -1,0000 \\ 1,0000 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On regroupe tous les résultats dans le tableau qui suit

k	X_k	$\ X_{k+1} - X_k\ $
0	$X_0 = (0.75, -0.75, 0.75)^T$	.
1	$X_1 = (1.0416, -1.0416, 1.0416)^T$	$\ X_1 - X_0\ = 0.5 > \epsilon$
2	$X_2 = (1.0008, -1.0008, 1.0008)^T$	$\ X_2 - X_1\ = 0.0706 > \epsilon$
3	$X_3 = (10000, -10000, 10000)^T$	$\ X_3 - X_2\ = 0.00000192 < \epsilon = 10^{-5}$.

TABLE 3.1 – Les résultats pour trois itérations

3.2 Méthode de Newton

- On ne peut pas démarrer l'algorithme si

$$\begin{pmatrix} 2x_1^0 & 0 & 0 \\ 2x_1^0 & 2x_2^0 & 0 \\ 2x_1^0 + x_2^0 & x_1^0 & 2x_3^0 \end{pmatrix}$$

n'est pas une matrice inversible , donc si le det

$$\det J_{F(X_0)} = 0.$$

Or

$$\det J_{F(X_0)} = 2^3 x_1^0 x_2^0 x_3^0 = 0,$$

si et seulement si $x_1^0 = 0$ ou $x_2^0 = 0$ ou $x_3^0 = 0$.

CHAPITRE 4

APPLICATION NUMÉRIQUE EN MATLAB

Dans ce chapitre, nous discuterons des algorithmes et des méthodes pour trouver les racines des équations algébriques non linéaires où nous appliquerons la méthode du point fixe et la méthode de Newton en utilisant l'environnement Matlab pour trouver des solutions pour les équations non linéaires et les systèmes d'équations non linéaires.

4.1 Résolution numérique des équations non linéaires $f(x)=0$

4.1.1 Méthode du point fixe :

Exemple 01 : La résolution d'équations

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 3 = 0$$

, par la méthode du point fixe

Trouver la racine de l'équation $x^3 - 2x^2 + x - 3 = 0$ pour valeur initiale $x_0 = 0.5$
les résultats essayer pour différentes valeurs initiales prises dans $[0, 10]$.

4.1 Résolution numérique des équations non linéaires $f(x)=0$

```
clc; clear; close all
f = inline('x^3 - 2*x^2 + x - 3')
g = inline('sqrt(( 2*x^2 - x + 3)/x)')
E = 1e-3; itermax = 100; x(1)= 0.5; dx=1; k=1;
while abs(dx) > E
    x(k+1) = g(x(k));
    fprintf('\n the solution is : %f for the iteration N° : %f', x(k), k)
    dx = abs(x(k+1) - x(k));
    k=k+1;
    if k>itermax
        break;
    end
end
plot(x)
grid
title('pour valeur initiale x_0 = 0.5')
xlabel('itérations')
ylabel('x')
fprintf('\n la solution est : %f ', x(end))
fprintf('\n f(x) = %f ', f(x(end)))
```

>>

f =

Inline function:

f(x) = x^3 - 2*x^2 + x - 3

g =

Inline function:

g(x) = sqrt((2*x^2 - x + 3)/x)

```
la solution de 1 équation est : 0.500000 à 1 itération N° : 1.000000
la solution de 1 équation est : 2.449490 à 1 itération N° : 2.000000
la solution de 1 équation est : 2.263565 à 1 itération N° : 3.000000
la solution de 1 équation est : 2.202833 à 1 itération N° : 4.000000
la solution de 1 équation est : 2.183472 à 1 itération N° : 5.000000
la solution de 1 équation est : 2.177361 à 1 itération N° : 6.000000
la solution de 1 équation est : 2.175440 à 1 itération N° : 7.000000
la solution de 1 équation est : 2.174836 à 1 itération N° : 8.000000
la solution de 1 équation est : 2.174646 à 1 itération N° : 9.000000
la solution est : 2.174587
f(x) = 0.000177
```

4.1 Résolution numérique des équations non linéaires $f(x)=0$

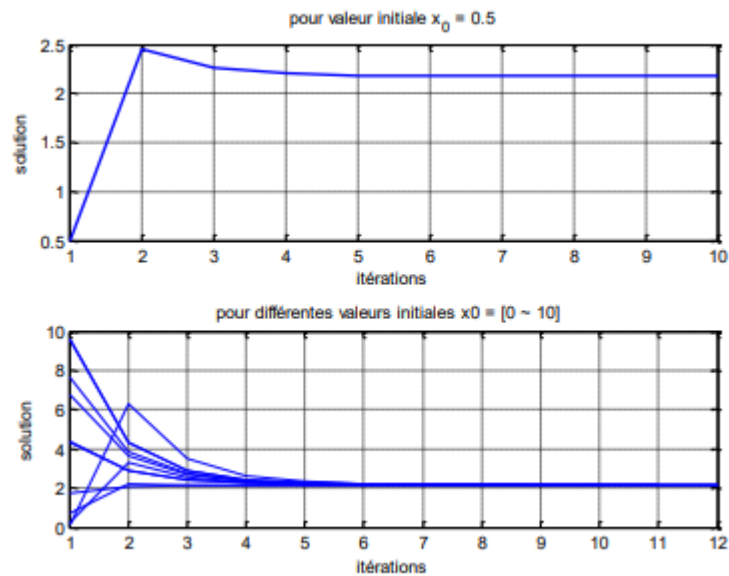


FIGURE 4.1 – Convergence d’une méthode de point fixe pour différentes valeurs initiales

Exemple 02 :

Trouver la racine de l’équation :

$$x^4 - x - 10 = 0$$

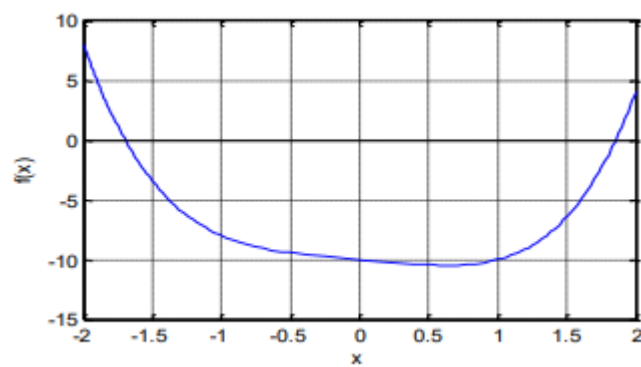


FIGURE 4.2 – Les coordonnées des points d’intersection de la courbe de f avec l’axe des abscisses

4.1 Résolution numérique des équations non linéaires $f(x)=0$

Considérez la formule itérative $g_1(x) = \frac{10}{x^3-1}$ et être $x_{n+1} = \frac{10}{x_n^3-1}, n = 1, 2, \dots$ On met la valeur initiale (estimation initiale) x_0 valant 2, 0, on trouve la suite de valeurs suivante :

8	7	6	5	4	3	2	1	0	n
-10	-9.99e-3	-10	-9.978e-3	-10.004	0.071	5.214	1.429	2	x_n
-9.99e-3	-10	-9.99e-3	-10	-9.978e-3	-10.004	0.071	5.214	1.429	$g_1(x_n)$

TABLE 4.1 – Convergence d’une méthode de point fixe pour la fonction $g_2(x)$

Nous trouvons que le processus itératif avec la formule g_1 entre dans une boucle infinie sans convergence.

On considère donc une autre fonction de la forme $g_2(x) = (x + 10)^{\frac{1}{4}}$, alors la formule récursive en point fixe est :

$$x_{n+1} = (x_n + 10)^{\frac{1}{4}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

On pose l’estimation initiale de la valeur initiale x_0 à 1, 0, puis 2, 4, 15, 50 et -7 (dans le but d’étudier l’effet de l’estimation des valeurs initiales sur la convergence), on trouve la série suivante de valeurs :

6	5	4	3	2	1	0	n
	1.85558	1.85558	1.85553	1.85424	1.82116	1.0	x_n
	1.85558	1.85558	1.85559	1.8558	1.861	2.0	x_n
1.85558	1.85558	1.85559	1.8557	1.85866	1.93434	4.0	x_n
1.85558	1.85558	1.85560	1.85615	1.87029	2.23606	15	x_n
1.85558	1.85558	1.85563	1.85696	1.89086	2.78315	50	x_n
1.85558	1.85558	1.85555	1.85474	1.83410	1.31607	-7	x_n

TABLE 4.2 – Le processus itératif ne converge vers aucune valeur d’approximation initiale.

4.1 Résolution numérique des équations non linéaires $f(x)=0$

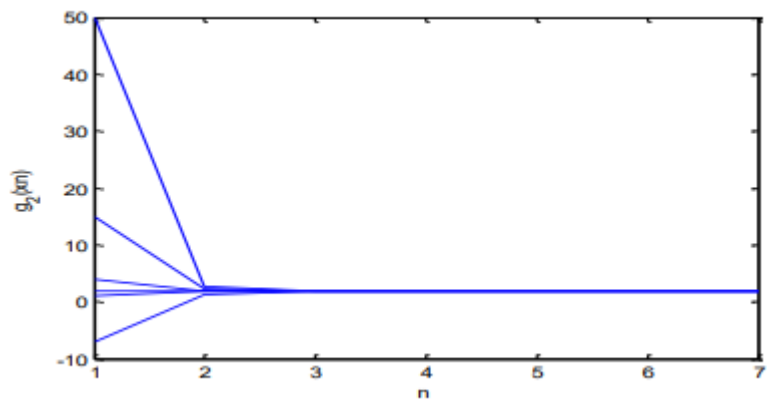


FIGURE 4.3 – Le processus itératif converge très rapidement vers la racine

Nous constatons que pour g_2 , la série de valeurs récursives converge rapidement vers 1,85558 avec toute estimation initiale.

Mettons dans la formule $g_3(x) = \frac{(x+10)^{9\frac{1}{2}}}{x}$ la formule récursive en point fixe

$$x_{n+1} == \frac{(x_n + 10)^{9\frac{1}{2}}}{x_n}, \qquad Oun = 0, 1, 2, \dots, n$$

En supposant que la valeur initiale de x_0 est de 1,8 (une bonne estimation par rapport à la valeur racine), nous trouvons

98	...	6	5	4	3	2	1	0	n
1.8555	...	1.82129	1.89355	1.81529	1.90035	1.80825	1.9084	1.8	x_n

TABLE 4.3 – Le processus itératif converge mais très lentement.

Nous constatons qu’avec toute supposition initiale, le processus itératif pour g_3 converge, mais très lentement.

Interprétation géométrique de la convergence avec g_1 , g_2 et g_3 .

4.1 Résolution numérique des équations non linéaires $f(x)=0$

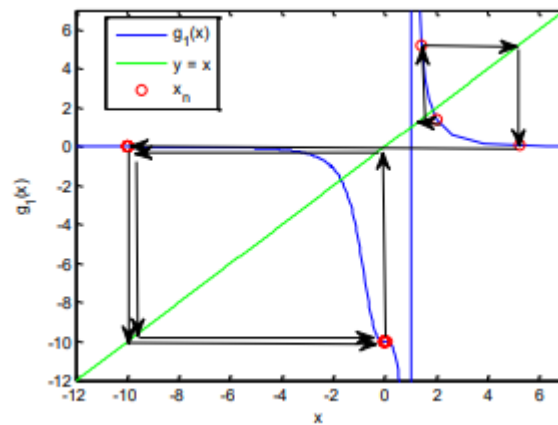


FIGURE 4.4 – Figure g_1 , le processus itératif ne converge vers aucune valeur d'approximation initiale.

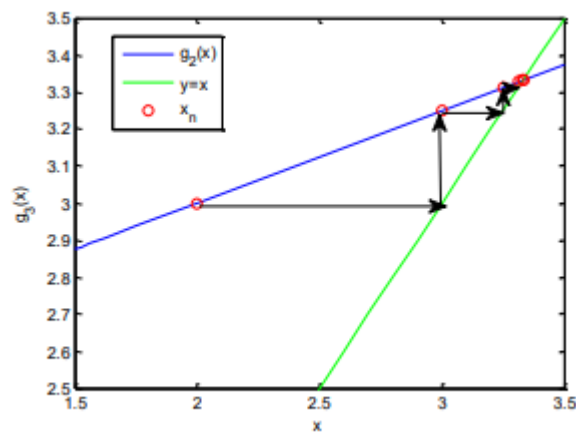


FIGURE 4.5 – Figure g_2 , le processus itératif converge très rapidement vers la racine qui est le point d'intersection de la droite $y = x$ et de la courbe $y = g_2(x)$ comme le montre

4.1 Résolution numérique des équations non linéaires $f(x)=0$

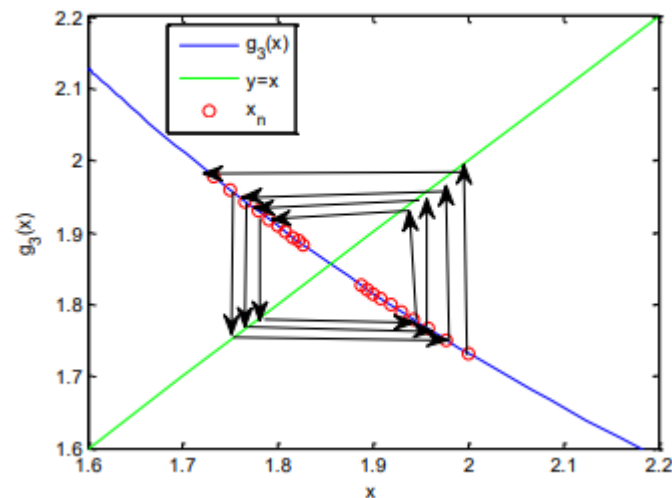


FIGURE 4.6 – Figure g_3 , le processus itératif converge mais très lentement.

Les graphiques g_1 , g_2 et g_3 montrent le tracé itératif de convergence en point fixe avec g_1 , g_2 et g_3 respectivement pour les valeurs d'approximations initiales $x_0 = 2$. il est clair que :

- Figure g_1 , le processus itératif ne converge vers aucune valeur d'approximation initiale.
- Figure g_2 , le processus itératif converge très rapidement vers la racine qui est le point d'intersection de la droite $y = x$ et de la courbe $y = g_2(x)$ comme le montre la figure.
- Figure g_3 , le processus itératif converge mais très lentement.

Où l'on peut écrire un programme en Matlab pour retrouver les derniers murs de l'exemple précédent comme suit :

4.1 Résolution numérique des équations non linéaires $f(x)=0$

```
clear;clc;
g = inline('exp((exp(-x)/3))')
E=1e-3;x0=2;
n=0; dx=1;
while dx>E & n<100
    x1=g(x0);
    dx=abs(x1-x0);
    x0=x1;
    n=n+1;
end
disp(['solution : ',num2str(x1),', iterations : ',num2str(n)])
```

```
>> solution : 1.1154, iterations : 5
```

4.1.2 Méthode de Newton :

Exemple 01 :

Trouver la racine de l'équation

$$f(x) = x \sin(\pi * x) - \exp(-x) = 0$$

4.1 Résolution numérique des équations non linéaires $f(x)=0$

```
clc; clear; close all
f = inline('x*sin(pi*x)-exp(-x)')
df = inline('sin(pi*x)+x*pi*cos(pi*x)+exp(-x)')
E = 1e-4; itermax = 100; x(1)= 0.5; dx=1; k=1;
while abs(dx) > E
    x(k+1) = x(k) - f(x(k))/df(x(k));
    fprintf('\n la solution de l équation est : %f à l itération N° : %f', x(k), k)
    dx = abs(x(k+1) - x(k));
    k=k+1;
    if k>itermax
        break;
    end
end
plot(x)
grid
title('pour valeur initiale x_0 = 0.5')
xlabel('itérations')
ylabel('x')
fprintf('\n la solution est : %f ', x(end))
fprintf('\n f(x) = %f ', f(x(end)))
```

```
>>
f =
    Inline function:
    f(x) = x*sin(pi*x)-exp(-x)
df =
    Inline function:
    df(x) = sin(pi*x)+x*pi*cos(pi*x)+exp(-x)

la solution de l équation est : 0.500000 à l itération N° : 1.000000
la solution de l équation est : 0.566311 à l itération N° : 2.000000
la solution de l équation est : 0.577812 à l itération N° : 3.000000
la solution de l équation est : 0.578262 à l itération N° : 4.000000
la solution est : 0.578263
f(x) = -1.9133e-012
```

pour valeur initiale $x_0 = 0,5$

4.1 Résolution numérique des équations non linéaires $f(x)=0$

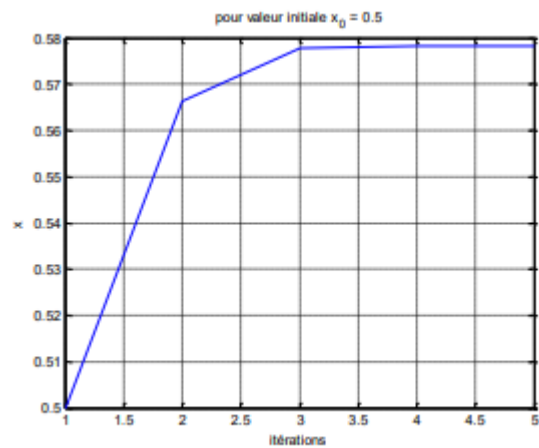


FIGURE 4.7 – Convergence de la méthode de Newton vers la racine

les résultats essayer pour différentes valeurs initiales prises dans $[0, 100]$.

Exercice 02 :

Trouver la racine de l’équation $f(x) = x^2 - 7$

4	3	2	1	0	n
2.00	2.01	2.26	3.33	6.00	x_n
2.4e-4	0.062	1.137	7.11	32	$f\left(x_n\right)$
4.00	4.031	4.533	6.66	12	$f'\left(x_n\right)$
2.00	2.00	2.01	2.26	3.33	x_{n+1}
6.1e-6	0.015	0.25	1.06	2.66	dx

TABLE 4.4 – Convergence de la méthode de Newton pour la fonction $f\left(x\right)$

4.1 Résolution numérique des équations non linéaires $f(x)=0$

4	3	2	1	0	n
2.00	2.01	2.26	3.33	6.00	x_n
2.4e-4	0.062	1.137	7.11	32	$f(x_n)$
4.00	4.031	4.533	6.66	12	$f'(x_n)$
2.00	2.00	2.01	2.26	3.33	x_{n+1}
6.1e-6	0.015	0.25	1.06	2.66	dx

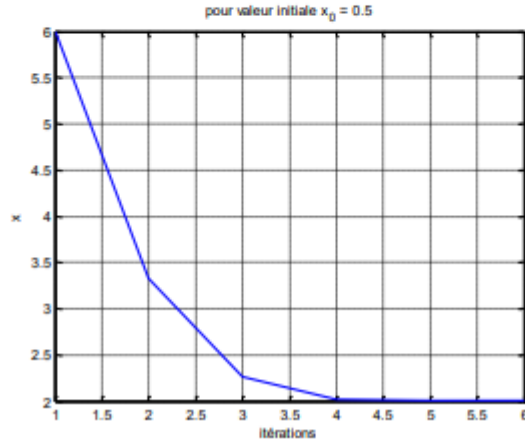


FIGURE 4.8 – Convergence de la méthode de Newton pour différentes valeurs initiales

Ainsi, en utilisant une valeur initiale de x_0 après 4 étapes, nous trouvons une racine de l'équation $f(x) = x^2 - 4$ est $x = 2$. Si nous devons choisir une valeur initiale différente, nous pouvons trouver la même racine, ou nous peut trouver l'autre, $x = -2$.

les résultats essayer pour différentes valeurs initiales prises dans $[0, 100]$.

4.1 Résolution numérique des équations non linéaires $f(x)=0$

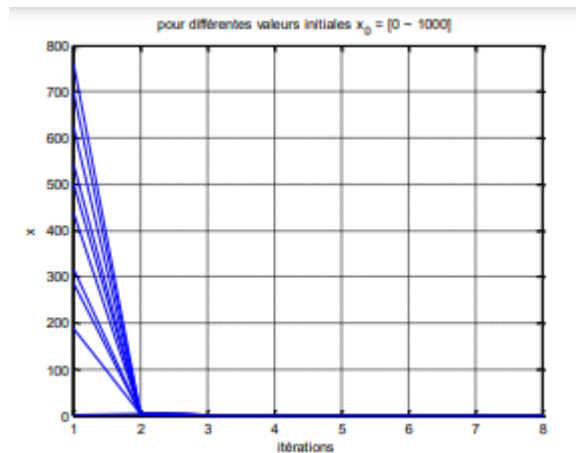


FIGURE 4.9 – Seul point d'intersection avec l'axe des abscisses (seul racine)

Algorithme de la méthode de Newton :

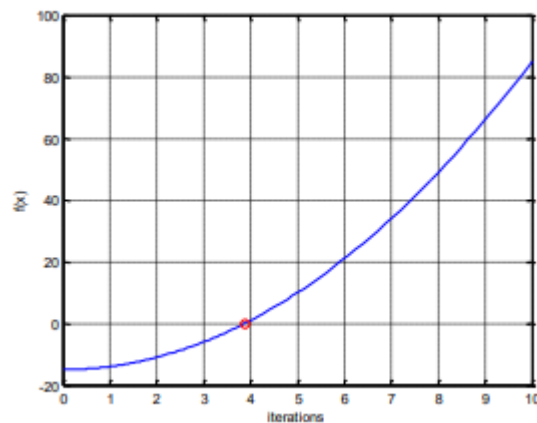
Les étapes de l'algorithme de Newton sont les suivantes :

- pour que f soit une fonction différentiable. Nous cherchons à résoudre pour $f(x) = 0$, en commençant par une estimation initiale de $x = x_0$.
- Dans la n ème étape, étant donné x_n , approximez les x_{n+1} suivants dans une relation récursive :
 - $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ puis répétez
- Arrêt lorsque la condition de convergence $|x_{n+1} - x_n| \leq \epsilon$ est remplie, où ϵ est la tolérance (précision requise)

Un programme peut être écrit en Matlab pour trouver la racine de l'équation précédente comme suit :

4.1 Résolution numérique des équations non linéaires $f(x)=0$

```
clear;clc;
f = inline(' x^2-15');
df = inline('2*x ');
E=1e-3;x0=2;
n=0; dx=1;
while dx>E & n<100
    x1=x0-f(x0)/df(x0);
    dx=abs(x1-x0);
    x0=x1;
    n=n+1;
end
disp(['solution : ',num2str(x1),', iterations : ',num2str(n)])
fplot(f,[0,10]);hold on;plot(x1, 0,'or')
xlabel('iterations');ylabel('f(x)');grid
```



Convergence les deux racines par la méthode de point fixe

Observation :

Cette méthode est meilleure, plus rapide et plus précise que la méthode de classification répétée.

4.2 Résolution numérique d'un système non-linéaire :

4.2.1 Méthode du point fixe :

Exemple 01 : Trouver la solution du système d'équations suivant :

$$\begin{cases} x^3 + y^3 - 6x + 3 = 0, \\ x^3 - y^3 - 6x + 2 = 0, \end{cases} \quad \text{pour } (x_0, y_0) = (0, 5; 0, 5).$$

Nous écrivons le système d'équations comme suit

$$x = f(x, y) = \frac{x^3 + y^3}{6} + \frac{1}{2},$$

$$y = g(x, y) = \frac{x^3 - y^3}{6} + \frac{1}{3},$$

```
clc; clear; close all
f1 = inline('x^3+y^3-6*x+3')
f2 = inline('x^3-y^3-6*y+2')
fxy = inline('(x^3+y^3)/6+1/2') ;
gxy = inline('(x^3-y^3)/6+1/3') ;
E = 1e-4; itmax = 100; x(1)= 0.5; y(1)= 0.5; dx=1; k=1;
while abs(dx) > E
    x(k+1)=fxy(x(k), y(k));
    y(k+1)=gxy(x(k), y(k));
```

4.2 Résolution numérique d'un système non-linéaire :

```
fprintf('\n la solution de l équation est : %f , %f à l itération N° : %f',  
x(k), y(k), k)  
dx = abs(max([x(k+1) - x(k); y(k+1) - y(k)]));  
k=k+1;  
if k>itermax  
    break;  
end  
end  
subplot(2,1,1)  
plot(x)  
grid  
title('pour valeurs initiales x_0 = 0.5, y_0 = 0.5')  
xlabel('itérations')  
ylabel('x')  
subplot(2,1,2)  
plot(x)  
grid  
xlabel('itérations')  
ylabel('y')  
  
fprintf('\n la solution est : %f , %f', x(end), y(end))  
fprintf('\n f1(x,y) = %f ', f1(x(end), y(end)))  
fprintf('\n f2(x,y) = %f ', f2(x(end), y(end)))
```

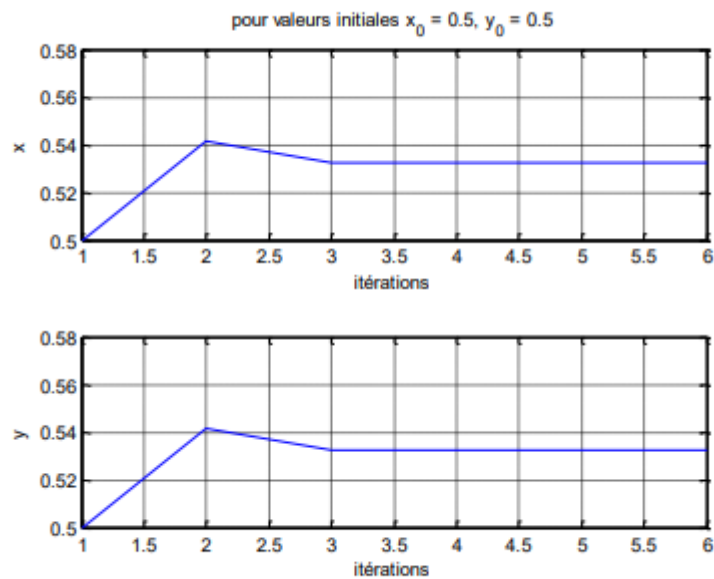


FIGURE 4.10 – Convergence les deux racines par la méthode de Newton.

4.2 Résolution numérique d'un système non-linéaire :

```
>>
f1 =
    Inline function:
    f1(x,y) = x^3+y^3-6*x+3
f2 =
    Inline function:
    f2(x,y) = x^3-y^3-6*y+2

la solution de 1 équation est : 0.500000 ,0.500000 à 1 itération N° : 1.000000
la solution de 1 équation est : 0.541667 ,0.333333 à 1 itération N° : 2.000000
la solution de 1 équation est : 0.532661 ,0.353648 à 1 itération N° : 3.000000
la solution de 1 équation est : 0.532560 ,0.351150 à 1 itération N° : 4.000000
la solution de 1 équation est : 0.532391 ,0.351291 à 1 itération N° : 5.000000

la solution est : 0.532375 , 0.351258
f1(x,y) = -0.000025
f2(x,y) = -0.000001
```

4.2.2 Méthode de Newton :

Exemple 02 : Trouver la solution du système d'équations suivant :

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 1, \\ x^2 - y^2 &= -\frac{1}{2}, \end{aligned} \quad \text{pour } (x_0, y_0) = (0,75; 0,75).$$

Nous écrivons le système d'équations comme suit

$$\left. \begin{aligned} f(x, y) &= x^2 + y^2 - 1 = 0, \\ g(x, y) &= x^2 - y^2 + \frac{1}{2} = 0, \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} \frac{\delta f}{\delta x} &= 2x \\ \frac{\delta f}{\delta y} &= 2y \\ \frac{\delta g}{\delta x} &= 2x \\ \frac{\delta g}{\delta y} &= -2y \end{aligned}$$

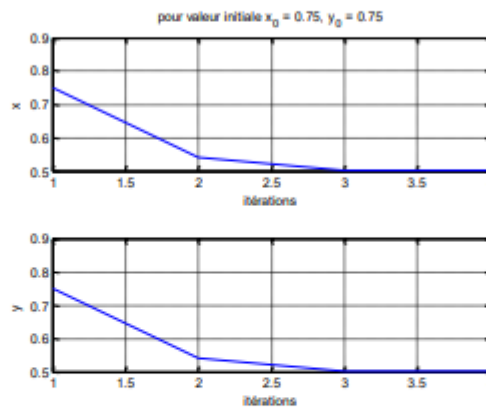
4.2 Résolution numérique d'un système non-linéaire :

```
clc; clear; close all
f = inline('x^2+y^2-1')
g = inline('x^2-y^2+1/2')
fx = inline('2*x') ;
fy = inline('2*y') ;
gx = inline('2*x') ;
gy = inline('-2*y');
E = 1e-4; itermax = 100; x(1)= 0.75; y(1)= 0.75; dx=1; k=1;
while abs(dx) > E
    J = [fx(x(k)), fy(y(k)); gx(x(k)), gy(y(k))];
    F = [f(x(k), y(k)); g(x(k), y(k))];
    X = [x(k); y(k)] - inv(J)*F;
    x(k+1)=X(1); y(k+1)=X(2);
    fprintf('\n la solution de l'équation est : %f ,%f à l'itération N° : %f',
x(k), y(k), k)
    dx = abs(max([x(k+1) - x(k); y(k+1) - y(k)]));
    k=k+1;
    if k>itermax
        break;
    end
end
subplot(2,1,1)
plot(x)
grid
title('pour valeur initiale x_0 = 0.75, y_0 = 0.75')
xlabel('itérations')
ylabel('x')
subplot(2,1,2)
plot(x)
```

4.3 Analyse d'erreurs pour les méthodes itératives

```
grid
xlabel('itérations')
ylabel('y')

fprintf('\n la solution est : %f , %f', x(end), y(end))
fprintf('\n f(x,y) = %f ', f(x(end),y(end)))
fprintf('\n g(x,y) = %f ', g(x(end),y(end)))
```



```
>>
f=
    Inline function:
    f(x,y) = x^2+y^2-1
g=
    Inline function:
    g(x,y) = x^2-y^2+1/2

la solution de 1 équation est : 0.750000 ,0.750000 à 1 itération N° : 1.000000
la solution de 1 équation est : 0.541667 ,0.875000 à 1 itération N° : 2.000000
la solution de 1 équation est : 0.501603 ,0.866071 à 1 itération N° : 3.000000
la solution est : 0.500003 , 0.866025
f(x,y) = 0.000003
g(x,y) = 0.000003
```

4.3 Analyse d'erreurs pour les méthodes itératives

Caractéristiques de convergence méthode du point fixe représenté par une condition suffisante de convergence de la suite des approximations est que la valeur absolue de la pente de F soit inférieure à 1 dans un voisinage de la racine r , et que x_0 le point de départ soit dans ce voisinage.

Alors que la convergence de méthode de la newton est plus fiable que la méthode du point fixe qui est basée sur la formule itérative extraite.

On reprend la fonction

4.3 Analyse d'erreurs pour les méthodes itératives

$$f(x) = x^2 - \sin(x) - 3 \quad \text{sur } [1, 2]$$

Nous allons décrire graphiquement l'évolution de $|x_n - \alpha|$ en fonction de n pour les deux méthodes du point fixe et de newton comme suit :

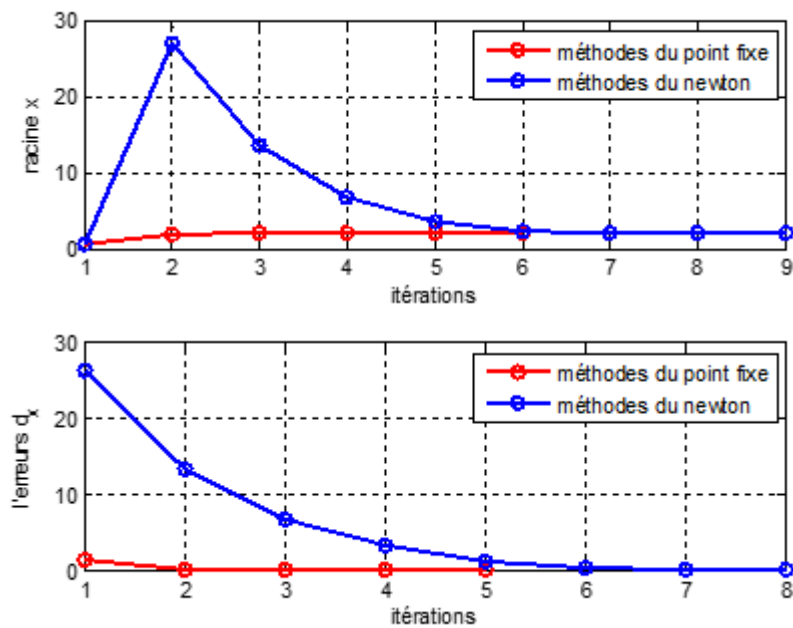


FIGURE 4.11 – Convergence et la vitesse de convergence pour les deux méthodes itératives

4.3 Analyse d'erreurs pour les méthodes itératives

```
clc;clear;close all
f = inline('x^2 - sin(x) - 3')
df = inline('2*x - cos(x)')
g = inline('sqrt(sin(x) + 3)')
x0=0.5;
x(1)=x0; n = 1; E = 1e-3;
dx = 1;
while dx > E
    x(n+1) = g(x(n));
    dx = abs(x(n+1) - x(n));
    er(n) = dx;
    n = n + 1;
end
subplot(2,1,1)
plot(x, '-or', 'LineWidth', 2)
subplot(2,1,2)
plot(er, '-or', 'LineWidth', 2)
x(end)
dx = 1; clear x; clear er;
x(1)=x0; n = 1;
while dx > E
    x(n+1) = x(n) - f(x(n))/df(x(n));
    dx = abs(x(n+1) - x(n));
    er(n) = dx;
    n = n + 1;
end
subplot(2,1,1)
hold on
plot(x, '-ob', 'LineWidth', 2)
legend('méthodes du point fixe', 'méthodes du newton')
x(end)
grid
xlabel('itérations')
ylabel('racine x')
subplot(2,1,2)
hold on
plot(er, '-ob', 'LineWidth', 2)
legend('méthodes du point fixe', 'méthodes du newton')
grid
xlabel('itérations')
ylabel('l''erreurs d_x')
```

```
>>
f =
    Inline function:
    f(x) = x^2 - sin(x) - 3
df =
    Inline function:
    df(x) = 2*x - cos(x)
g =
    Inline function:
    g(x) = sqrt(sin(x) + 3)
ans =
    1.979310050556231
ans =
    1.979320157484580
```

4.4 Test de robustesse

Soit un système non linéaire (5D) défini par l'équation non linéaire suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} 2.3 * x_1 + x_2^2 + 2 * x_4 + 0.01 * x_5 - 1.45 = 0, \\ -x_2 + 1.3 * x_5 + 9 = 0 \\ x_2 * x_3 - x_5^2 + 9 = 0 \\ x_1^3 - 2 * x_4 * x_3 + x_5^2 - 0.8 = 0 \\ -5 * x_3 - x_5 - 3 * x_5 * x_4 * x_2 + 3.6 = 0 \end{array} \right. \quad (4.1)$$

- Méthode du point fixe :

pour les valeurs initiales : $x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = x_4(0) = x_5(0) = 1$

4.4 Test de robustesse

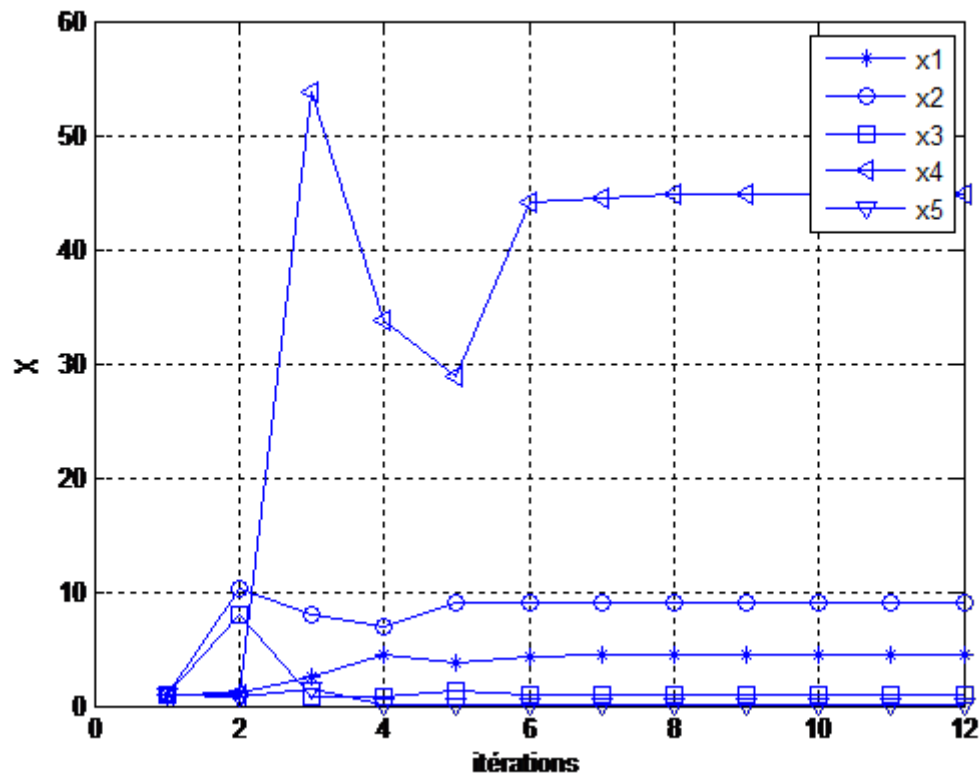


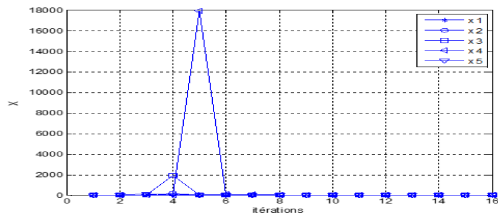
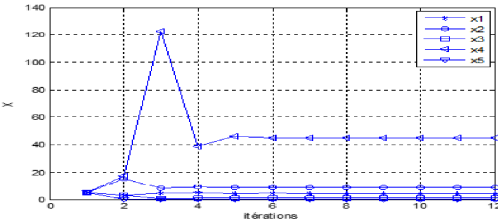
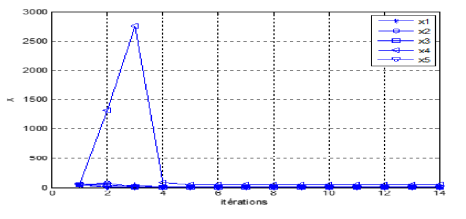
FIGURE 4.12 – Convergence de les solutions par la méthode du point fixe

```

la solution est : 1.216440 ,10.300000 , -8.000000 , -0.930000 , -0.800000 à l'itération N° : 1
la solution est : 2.468402 ,7.960000 , -0.811650 , -53.714906 , -1.545046 à l'itération N° : 2
la solution est : 4.407293 ,6.991440 , -0.830758 , -33.786737 , -0.007175 à l'itération N° : 3
la solution est : 3.847086 ,8.990673 , -1.287281 , -28.783465 , -0.010952 à l'itération N° : 4
la solution est : 4.215376 ,8.985763 , -1.001024 , -44.115191 , -0.012942 à l'itération N° : 5
la solution est : 4.466760 ,8.983176 , -1.001566 , -44.494585 , -0.007247 à l'itération N° : 6
la solution est : 4.480217 ,8.990579 , -1.001867 , -44.760460 , -0.007185 à l'itération N° : 7
la solution est : 4.489490 ,8.990660 , -1.001042 , -44.842471 , -0.007137 à l'itération N° : 8
la solution est : 4.490984 ,8.990722 , -1.001033 , -44.853862 , -0.007121 à l'itération N° : 9
la solution est : 4.491347 ,8.990743 , -1.001026 , -44.856133 , -0.007119 à l'itération N° : 10
la solution est : 4.491412 ,8.990746 , -1.001024 , -44.856745 , -0.007118 à l'itération N° : 11
la solution est : 4.491412 , 8.990746, -1.001024, -44.856745, -0.007118
f1(x1,x2,x3,x4,x5) = 0.000194
f2(x1,x2,x3,x4,x5) = 0.000001
f3(x1,x2,x3,x4,x5) = -0.000002
f4(x1,x2,x3,x4,x5) = -0.001010
f5(x1,x2,x3,x4,x5) = -0.000132 >>

```

4.4 Test de robustesse

Convergence de la méthode de la méthode du point fixe pour différentes valeurs initiales			
cas	valeurs initiales $x_1(0)=x_2(0)=x_3(0)=x_4(0)=x_5(0)$	solutions	Convergence
1	0.5	4.491434 8.990746 -1.001024 -44.856878 -0.007118	
2	5	4.491434 8.990746 -1.001024 -44.856868 -0.007118	
3	50	4.491433 8.990746 -1.001024 -44.856876 -0.007118	

- Méthode de Newton :

pour les valeurs initiales : $x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = x_4(0) = x_5(0) = 1$

4.4 Test de robustesse

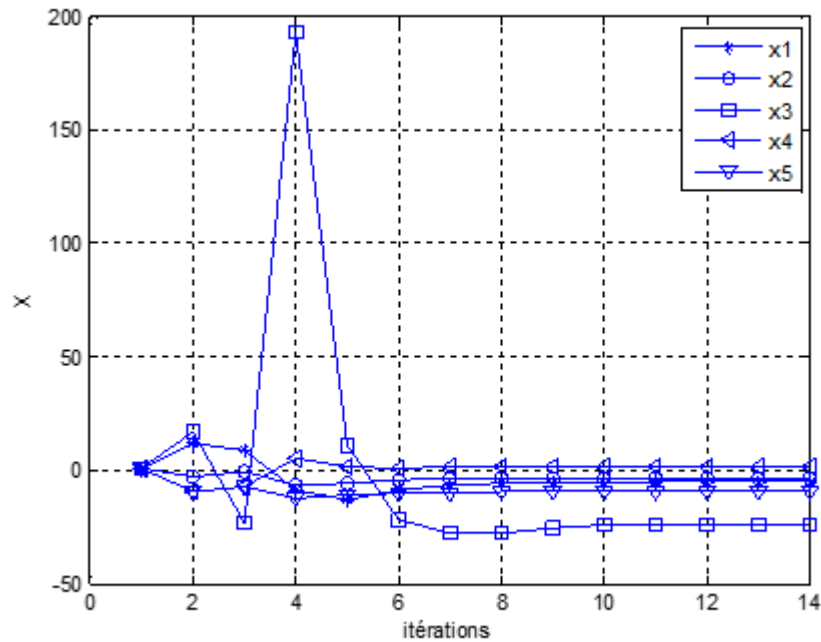
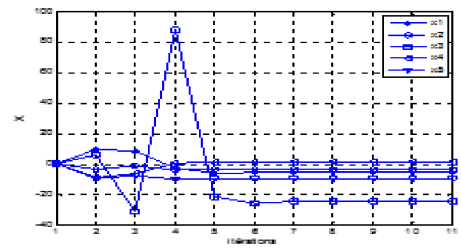
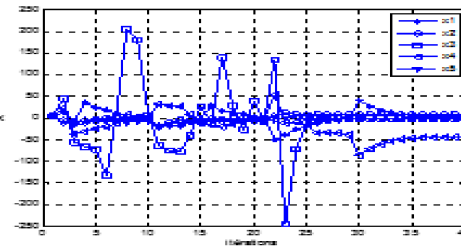
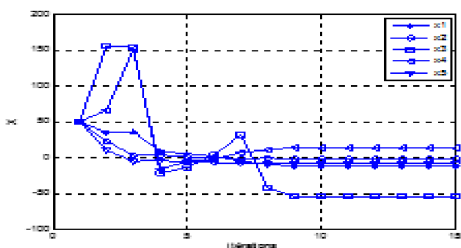


FIGURE 4.13 – Convergence de les solutions par la méthode de Newton

```
>>
la solution est : 11.882770 , -3.145164 , 16.830031 , -9.248310 , -9.342434 à l'itération N° : 1
la solution est : 8.968517 , -0.818317 , -23.071573 , -7.178745 , -7.552551 à l'itération N° : 2
la solution est : -8.385131 , -6.750773 , 192.787319 , 5.239032 , -12.115979 à l'itération N° : 3
la solution est : -13.051877 , -5.539297 , 10.839993 , 1.182510 , -11.184075 à l'itération N° : 4
la solution est : -9.025435 , -4.613867 , -22.019954 , 0.940934 , -10.472206 à l'itération N° : 5
la solution est : -6.686635 , -3.867889 , -27.983468 , 1.262080 , -9.898376 à l'itération N° : 6
la solution est : -5.749582 , -3.458190 , -27.581369 , 1.489324 , -9.583223 à l'itération N° : 7
la solution est : -5.477783 , -3.351741 , -25.257031 , 1.460541 , -9.501339 à l'itération N° : 8
la solution est : -5.412736 , -3.339754 , -24.391325 , 1.420200 , -9.492119 à l'itération N° : 9
la solution est : -5.406520 , -3.339136 , -24.290531 , 1.415040 , -9.491643 à l'itération N° : 10
la solution est : -5.406216 , -3.339107 , -24.285449 , 1.414787 , -9.491621 à l'itération N° : 11
la solution est : -5.406201 , -3.339106 , -24.285211 , 1.414776 , -9.491620 à l'itération N° : 12
la solution est : -5.406200 , -3.339106 , -24.285199 , 1.414775 , -9.491620 à l'itération N° : 13
la solution est : -5.406200 , -3.339106 , -24.285199 , 1.414775 , -9.491620
f1(x1,x2,x3,x4,x5) = 0.000000
f2(x1,x2,x3,x4,x5) = 0.000000
f3(x1,x2,x3,x4,x5) = 0.000002
f4(x1,x2,x3,x4,x5) = 0.000000
f5(x1,x2,x3,x4,x5) = -0.000000 >>
```

4.4 Test de robustesse

Convergence de la méthode de la méthode du Newton pour différentes valeurs initiales			
cas	valeurs initiales $x_1(0)=x_2(0)=x_3(0)=x_4(0)=x_5(0)$	solutions	Convergence
1	0.5	-5.406200 -3.339106 -24.285199 1.414775 -9.491620	
2	5	4.491433 8.990746 -1.001024 -44.856872 -0.007118	
3	50	-11.523581 -0.906403 -54.136047 13.604436 -7.620310	

On peut remarquer à partir des résultats précédents de la résolution du système non linéaire (5D) que la méthodes de point fixe pas toujours convergentes et newton converge très vite .

Dans l'étude précédente, en utilisant l'environnement Matlab, nous avons présenté des applications par les méthodes itératives pour résoudre des systèmes avec une seule et un système des équations non linéaires, et avons constaté qu'elles convergent vers la racine par itérations rapides selon la formule itérative pour la méthode de point fixe méthode et selon

4.4 Test de robustesse

le valeur initial pour de la méthode de Newton.

CONCLUSION GÉNÉRALE

A partir de cet article, il est sûr de dire que les méthodes numériques sont un volet vital des mathématiques. Ils sont un outil puissant non seulement pour résoudre des équations algébriques non linéaires à une variable, mais aussi pour des systèmes d'équations algébriques non linéaires. Même des équations ou des systèmes d'équations qui peuvent sembler simplistes dans leur forme peuvent en fait nécessiter l'utilisation de méthodes numériques pour être résolues. Les méthodes numériques sont également importantes dans la résolution des problèmes aux limites des équations différentielles ordinaires non linéaires. Résoudre des problèmes de valeurs aux limites d'équations différentielles ordinaires linéaires peut être assez difficile. Ainsi, il serait presque impossible de résoudre des problèmes de valeurs aux limites d'équations différentielles ordinaires non linéaires sans mettre en œuvre des méthodes numériques. Dans cet article, nous n'avons examiné que deux méthodes numériques, cependant, il y en a plusieurs autres que nous n'avons pas encore examinées de plus près.

Les principaux résultats de cet article peuvent être mis en évidence dans deux domaines différents : la convergence et le rôle de la méthode de Newton. En ce qui concerne la convergence, nous pouvons résumer qu'une méthode numérique avec un taux de convergence plus élevé peut atteindre la solution d'un système en moins d'itérations par rapport à une autre méthode avec une convergence plus lente.

Par exemple, la méthode de Newton converge de manière quadratique et la méthode du point fixe ne converge que de manière super linéaire. L'implication de ceci serait que, étant

donné exactement le même système d'équations non linéaires désigné par F , la méthode de Newton arriverait à la solution de $F = 0$ en moins d'itérations par rapport au point fixe. Le deuxième résultat clé de cet article est la signification de la méthode de Newton dans les méthodes numériques. Dans le cas des deux méthodes de point fixe, la méthode de Newton est incorporée dans chacun de leurs algorithmes. La méthode de Broyden avait un algorithme presque identique à la méthode de Newton, à l'exception de l'utilisation de la matrice d'approximation.

La méthode de Newton une fois que le problème aux limites a été converti en un système algébrique non linéaire. Non seulement la méthode de Newton faisait partie de ces méthodes, mais aussi d'autres méthodes numériques diverses que j'avais rencontrées. Cela démontre la diversité que possède la méthode de Newton ; il peut être appliqué à de nombreux problèmes. Cela signifie que nous pouvons faire une conjecture que la méthode de Newton est un processus notable dans le domaine des méthodes numériques.

Ce que j'aimerais faire ensuite en ce qui concerne les méthodes numériques, c'est que j'aimerais explorer davantage de méthodes utilisées pour résoudre les problèmes de valeurs aux limites des équations différentielles ordinaires non linéaires. Dans cet article, j'en ai brièvement examiné une, mais j'aimerais concentrer davantage mon attention sur ces types de méthodes itératives. Par exemple, la méthode de prise de vue est certainement une méthode que j'aimerais examiner de plus près.

Après tout le matériel examiné dans cet article, nous pouvons conclure que les méthodes numériques sont un élément clé dans le domaine des mathématiques non linéaires.

ANNEX

A.1.

```

clc; clear; close all
f1 = inline('2.3*x1+x2^2+2*x4+0.01*x5-1.45','x1','x2','x3','x4','x5')
f2 = inline('-x2+1.3*x5+9','x1','x2','x3','x4','x5')
f3 = inline('x2*x3-x5^2+9','x1','x2','x3','x4','x5')
f4 = inline('x1^3-2*x4*x3+x5^2-0.8','x1','x2','x3','x4','x5')
f5 = inline('-5*x3-x5-3*x5*x4*x2+3.6','x1','x2','x3','x4','x5')
E = 1e-4; itermax = 100; x1(1)= 1; x2(1)= 1; x3(1)= 1; x4(1)= 1; x5(1)= 1;
dx=1; k=1;

while abs(dx) > E
    J = [
        2.3          2*x2(k)          0          2          0.01;...
        0          -1          0          0          1.3;...
        0          x3(k)          x2(k)          0          2*x5(k);...
        3*x1(k)^2      0          -2*x4(k)      -2*x3(k)      2*x5(k);...
        0          -3*x5(k)*x4(k)      -5          -3*x5(k)*x2(k)      -1-3*x4(k)*x2(k);...
        1;
        f1(x1(k),x2(k),x3(k),x4(k),x5(k))
        f2(x1(k),x2(k),x3(k),x4(k),x5(k))
        f3(x1(k),x2(k),x3(k),x4(k),x5(k))
        f4(x1(k),x2(k),x3(k),x4(k),x5(k))
        f5(x1(k),x2(k),x3(k),x4(k),x5(k))];
    X = [x1(k);x2(k);x3(k);x4(k);x5(k)] - inv(J)*F;
    x1(k+1)= X(1); x2(k+1)= X(2); x3(k+1)= X(3); x4(k+1)= X(4); x5(k+1)= X(5);
    fprintf('\n la solution est : %f ,%f ,%f ,%f ,%f À l''itération N° : %d', x1(end), ...
    x2(end), x3(end), x4(end), x5(end), k)
    ERR = [x1(k+1) - x1(k);x2(k+1) - x2(k);x3(k+1) - x3(k);x4(k+1) - x4(k);x5(k+1) - x5(k)];
    dx = abs(max(ERR));
    k=k+1;
    if k>itermax
        break;
    end
end

plot(x1,'-s');hold on;
plot(x2,'-o');
plot(x3,'-s');
plot(x4,'-<');
plot(x5,'-v');
legend('x1','x2','x3','x4','x5')
grid
xlabel('itérations')
ylabel('X')
fprintf('\n la solution est : %f , %f, %f, %f, %f', x1(end), x2(end), x3(end), x4(end), x5(end))
fprintf('\n f1(x1,x2,x3,x4,x5) = %f ', f1(x1(end),x2(end),x3(end),x4(end),x5(end)))
fprintf('\n f2(x1,x2,x3,x4,x5) = %f ', f2(x1(end),x2(end),x3(end),x4(end),x5(end)))
fprintf('\n f3(x1,x2,x3,x4,x5) = %f ', f3(x1(end),x2(end),x3(end),x4(end),x5(end)))
fprintf('\n f4(x1,x2,x3,x4,x5) = %f ', f4(x1(end),x2(end),x3(end),x4(end),x5(end)))
fprintf('\n f5(x1,x2,x3,x4,x5) = %f ', f5(x1(end),x2(end),x3(end),x4(end),x5(end)))

```

A.2.

```

clc; clear; close all
f1 = inline('2.3*x1+x2^2+2*x4+0.01*x5-1.45','x1','x2','x3','x4','x5');
f2 = inline('-x2+1.3*x5+9','x1','x2','x3','x4','x5');
f3 = inline('x2*x3-x5^2+9','x1','x2','x3','x4','x5');
f4 = inline('x1^3-2*x4*x3+x5^2-0.8','x1','x2','x3','x4','x5');
f5 = inline('-5*x3-x5-3*x5*x4*x2+3.6','x1','x2','x3','x4','x5');
g4 = inline('-(2.3*x1+x2^2+0.01*x5-1.45)/2','x1','x2','x3','x4','x5');
g2 = inline('1.3*x5+9','x1','x2','x3','x4','x5');
g3 = inline('(-x5^2+9)/x2','x1','x2','x3','x4','x5');
g1 = inline('(-(-2*x4*x3+x5^2-0.8))^(1/3)','x1','x2','x3','x4','x5');
g5 = inline('(-5*x3-x5+3.6)/(3*x4*x2)','x1','x2','x3','x4','x5');
E = 1e-4; itermax = 1000; x1(1)= 1; x2(1)= 1; x3(1)= 1; x4(1)= 1; x5(1)= 1;
dx=1; k=1;

while abs(dx) > E
    x1(k+1)=g1(x1(k),x2(k),x3(k),x4(k),x5(k));
    x2(k+1)=g2(x1(k),x2(k),x3(k),x4(k),x5(k));
    x3(k+1)=g3(x1(k),x2(k),x3(k),x4(k),x5(k));
    x4(k+1)=g4(x1(k),x2(k),x3(k),x4(k),x5(k));
    x5(k+1)=g5(x1(k),x2(k),x3(k),x4(k),x5(k));
    fprintf('\n la solution est : %f,%f,%f,%f,%f à l''itération N° : %d', x1(end), ...
x2(end), x3(end), x4(end), x5(end), k)
    ERR = [x1(k+1) - x1(k);x2(k+1) - x2(k);x3(k+1) - x3(k);x4(k+1) - x4(k);x5(k+1) - x5(k)];
    dx = abs(max(ERR));
    k=k+1;
    if k>itermax
        break;
    end
end

plot(x1,'-');hold on;
plot(x2,'-o');
plot(x3,'-s');
plot(x4,'-<');
plot(x5,'-v');
legend('x1','x2','x3','x4','x5')
grid
xlabel('itérations')
ylabel('X')
fprintf('\n la solution est : %f , %f, %f, %f, %f', x1(end), x2(end), x3(end), x4(end), x5(end))
fprintf('\n f1(x1,x2,x3,x4,x5) = %f ', f1(x1(end),x2(end),x3(end),x4(end),x5(end)))
fprintf('\n f2(x1,x2,x3,x4,x5) = %f ', f2(x1(end),x2(end),x3(end),x4(end),x5(end)))
fprintf('\n f3(x1,x2,x3,x4,x5) = %f ', f3(x1(end),x2(end),x3(end),x4(end),x5(end)))
fprintf('\n f4(x1,x2,x3,x4,x5) = %f ', f4(x1(end),x2(end),x3(end),x4(end),x5(end)))
fprintf('\n f5(x1,x2,x3,x4,x5) = %f ', f5(x1(end),x2(end),x3(end),x4(end),x5(end)))

```

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Atkinson, K.E. *An Introduction to Numerical Analysis*. Nonlinear Systems of Equations (pp. 88-95). Canada : John Wiley Sons.(1978).
- [2] Bastien J., *Introduction à l'analyse numérique : Applications sous Matlab*. Dunod, (2003).
- [3] Burden, R.L., Faires, J.D *Numerical Analysis. Numerical Solutions of Nonlinear Systems of Equations*. Belmont : Thomson Brooks/Cole.(2005), pp. 597-640.
- [4] Burden, R.L., Faires, J.D *Numerical Analysis Special Types of Matrices*. Belmont : Thomson Brooks/Cole. (2005), pp. 389-413
- [5] Burden, R.L., Faires, J.D *Numerical Analysis. Boundary-Value Problems for Ordinary Differential Equations*. Belmont : Thomson Brooks/Cole. (2005), pp. 641-685.
- [6] Burden, Richard L., J. D. Faires, and A. Burden. *Numerical solutions of nonlinear systems of equations*. Numerical analysis. Cengage Learning, Boston (1997), pp. 544-576.
- [7] CIARLET P. G., *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation*. Cours et exercices corrigés. Mathématiques appliquées pour la maîtrise. Dunod, (1998).
- [8] Dahlquist, Germund, and Åke Björck. *Numerical methods in scientific computing*. Volume i. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2008.

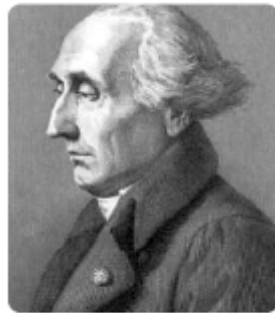
BIBLIOGRAPHIE

- [9] Dion J. G., Gaudet R., *Méthodes d'Analyse Numérique : de la théorie à l'application*. MODULO, (1996).
- [10] FILBET F., *Analyse numérique - Algorithme et étude mathématique*. Dunod, (2009).
- [11] Iyengar, Satteluri RK, and R. K. Jain. *Numerical Methods*. (As Per Anna University). New Age International. (2009).
- [12] Jedrzejewski F., *Introduction aux méthodes numériques*. Deuxième édition, Springer-Verlag, (2005). France.
- [13] JLagrange, Joseph Louis. *Traité de la résolution des équations numériques de tous les degrés : avec des notes sur plusieurs points de la théorie des équations algébriques*. chez Courcier, (1806)
- [14] LASCAUX P., THÉODOR R., *Analyse numérique matricielle appliquée à l'art de l'ingénieur. Méthodes itératives*. Dunod, (2000).
- [15] Press, W.H., Flannery, B.P., Teukolsky, S.A., Vetterling, W.T. *Numerical Recipes in C. Newton-Raphson Method for Nonlinear Systems of Equations*. pp.286-289. New York : Cambridge University Press.(1988).
- [16] Quarteroni, Alfio, Riccardo Sacco, and Fausto Saleri. *Méthodes numériques. Algorithmes, analyse* (2007).
- [17] Rheinboldt, Werner C. *Methods for solving systems of nonlinear equations*. Society for Industrial and Applied Mathematics. (1998).
- [18] Schatzman, Michelle. *Analyse numérique : cours et exercices pour la licence*. Inter Editions. (1991).

Quelques mathématiciens célèbres liés à l'étude des analyses numériques :



Charles Hermite (1822-1901), mathématicien français qui a beaucoup travaillé sur les polynômes (entre autres), on lui doit l'interpolation qui porte son nom.



Joseph Louis, comte de Lagrange (1736-1813), mathématicien, on lui doit entre autres choses la notation f' pour désigner la dérivée d'une fonction.



Sir Isaac Newton (1642–1727), Newton qui partage avec Gottfried Wilhelm Leibniz la découverte du calcul infinitésimal, a également développé une méthode éponymique pour trouver un point fixe.

Résumé

Ce projet de séminaire spécialisé se concentrera sur les méthodes numériques impliquées dans la résolution de systèmes d'équations non linéaires. Dans la première partie de ce travail, nous parlons de l'accélération de la convergence des méthodes itératives de point fixe. Nous parlerons particulièrement de l'itération de Newton et de la façon dont on peut augmenter son ordre de convergence. Cette méthode, nommée d'après Isaac Newton, est un algorithme populaire pour approximer le zéro d'une fonction. Nous parlerons donc des conditions dans lesquelles cet algorithme nous donne des résultats valides. Dans la deuxième partie de ce travail, nous appliquerons les résultats de la première partie au problème de la recherche de la racine n -ième d'un nombre. Cela nous conduira à des familles d'algorithmes que nous comparerons. Nous présenterons également des méthodes associées très spécifiquement au calcul de la racine n -ième d'un nombre que nous généraliserons pour tout problème. A l'aide du programme informatique Matlab, nous allons résoudre un problème aux limites d'un système ordinaire non linéaire..

Mots clés :Système d'equation non-linéaire, convergence, contraction ,méthode de point fixe, méthode de Newton.

Abstract

This Honours Seminar Project will focus on the numerical methods involved in solving systems of nonlinear equations. In the first part of this work, we talk about the acceleration of the convergence of iterative methods of fixed point. We will speak particularly of the iteration of Newton and the way in which one can increase its order of convergence. This method, named after Isaac Newton, is a popular algorithm for approximating the zero of a function. We will therefore talk about the conditions under which this algorithm gives us valid results. In the second part of this work, we will apply the results of the first part to the problem of finding the n -th root of a number. This will lead us to families of algorithms that we will compare. We will also present methods associated very specifically with the calculation of the n -th root of a number that we will generalize for any problem. Using the computer program Matlab, we will solve a boundary value problem of a nonlinear ordinary system.

Keywords: Non-linear equation system, convergence, contraction, fixed point method, Newton method.

ملخص :

سيركز مشروع هذا العمل على الأساليب العددية المستخدمة في حل أنظمة المعادلات غير الخطية. في الجزء الأول من هذا العمل ، نتحدث عن تسريع تقارب الطرق التكرارية للنقطة الثابتة. سنتحدث بشكل خاص عن تكرار نيوتن والطريقة التي يمكن بها زيادة ترتيب التقارب. هذه الطريقة، التي سميت باسم إسحاق نيوتن ، هي خوارزمية شائعة لتقريب صفر دالة. لذلك سوف نتحدث عن الشروط التي بموجبها تعطينا هذه الخوارزمية نتائج صحيحة. في الجزء الثاني من هذا العمل ، سنطبق نتائج الجزء الأول لمشكلة إيجاد جذر العدد n . سيقودنا هذا إلى مجموعات من الخوارزميات التي سوف نقارنها. سوف نقدم أيضًا طرقًا مرتبطة على وجه التحديد بحساب الجذر رقم n لرقم n سوف نقوم بتعميمه لأي مشكلة. باستخدام برنامج الكمبيوتر ماتلاب، سنحل مشكلة القيمة الحدية لنظام عددي غير الخطي

الكلمات المفتاحية: نظام المعادلة غير الخطية ، التقارب ، التقلص ، طريقة النقطة الثابتة ، طريقة نيوتن