



République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de
la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ HAMMA LAKHDAR EL OUED

FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES

Mémoire de fin d'étude

MASTER ACADEMIQUE

Domaine: Mathématiques et Informatique

Filière: Mathématiques

Spécialité: Mathématiques fondamentales et Appliquées

Thème

Opérateurs linéaires continus

Fondements et Applications

Présenté par: Hamaiti Abdelhalim
Mestour Khaled

Soutenu publiquement devant le jury composé de

<u>Mesai Aoein Mohammed Salah</u>	MCA/Prof.	Président	Univ. El Oued
Rehouma Abdehamid	Prof.	Rapporteur	Univ. El Oued
Ben Ali- Ibrahim	MCA/MC	Examineur	Univ. El Oued

Année universitaire 2017 – 2018

Remerciements

Je tiens à exprimer toute ma gratitude et ma profonde reconnaissance à notre encadreur de mémoire, Docteur Abdelhamid Rehouma qui nous a proposé le sujet de ce mémoire. Merci pour ses précieux conseils et ses encouragements.

Nos remerciements vont également à Dr Mesai Aoein Mohammed Salah pour le grand honneur qu'elle nous fait en présidant le jury de ce mémoire, et Docteur Ben ali- Ibrahim d'avoir accepté de faire partie du jury de ce mémoire. Merci pour leurs remarques et toutes leurs idées. Je remercie également toutes les personnes qui nous ont aidé à réaliser ce travail.

Table des matières

Introduction	1
1 Préliminaires	3
1.1 Espaces et sous-espaces linéaires	3
1.2 Ensembles linéairement indépendants, sous-espaces engendrés	4
1.3 Espaces métriques	5
1.4 Espaces normes	6
1.5 Espaces de Hilbert	7
1.6 Orthogonalé	10
2 Opérateurs linéaires continus	12
2.1 Opérateurs linéaires sur un espace normé	12
2.1.1 Les opérateurs linéaires bornées	14
2.1.2 L'espace norme $(\mathbb{L}(\mathbb{X}; \mathbb{Y}), \ \cdot\)$	19
2.1.3 L'algèbre de Banach $\mathbb{L}(\mathbb{X})$	24
2.1.4 Opérateur régulier	24
2.1.5 Opérateur compact	25
2.1.6 Convergence dans $(\mathbb{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y}), \ \cdot\)$	27
2.1.7 Théorème du graphe fermé	29
2.2 Opérateurs linéaires sur un espace de Hilbert	29
2.2.1 Formes bilinéaires et formes quadratiques	29
2.2.2 Théorème de Lax-Milgram	35
2.2.3 Opérateur adjoint	35
2.2.4 Quelques classes d'opérateurs	39
2.2.5 Spectre d'un opérateur	41
3 Applications	43
3.1 Applications des théorèmes de Banach Steinhaus et de Hahn Banach	43
3.2 Applications de théorème de Lax-Milgram	49
3.3 Équations Intégrales de Fredholm et applications	52

CONCLUSION	54
Bibliographie	55

Notations générales

$[\cdot]$ ensemble des combinaison linéaires.

$\| \cdot \|$ norme.

$B(x_0, r) = \{x; \|x - x_0\| < r\}$ boule ouverte, centrée en x_0 de rayon r .

$B_F(x_0, r) = \{x; \|x - x_0\| \leq r\}$ boule fermée, centrée en x_0 de rayon r .

$d(\cdot, \cdot)$ une distance.

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ produit scalaire.

$\mathbb{H}$ espace de Hilbert.

$|\cdot|$ module.

$A^\perp$ orthogonal de A .

T^{-1} inverse d'un opérateur T .

$I_{\mathbb{H}}$ opérateur identité.

$\ker(T)$ noyau de l'opérateur T .

$Im(T)$ image de l'opérateur T .

$\mathbb{L}_a(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ espace des opérateurs linéaires de $\mathbb{X}$ dans $\mathbb{Y}$.

$\mathbb{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ espace des opérateurs linéaires borné de $\mathbb{X}$ dans $\mathbb{Y}$.

$\mathbb{L}_r(\mathbb{X})$ ensemble des opérateurs linéaires réguliers de $\mathbb{X}$ dans $\mathbb{X}$.

$\mathbb{L}_c(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ ensemble des opérateurs linéaires compacts de $\mathbb{X}$ dans $\mathbb{Y}$.

$\mathbb{X}'$ espace dual de $\mathbb{X}$.

$G(T)$ graphe de l'opérateur T .

T^* opérateur adjoint de l'opérateur T .

$\sigma(T)$ ensemble spectrale de T .

$p(T)$ ensemble résolvante de T .

$\sigma_p(T)$ ensemble spectre ponctuel.

$\sigma_c(T)$ ensemble spectre continu.

$\sigma_r(T)$ ensemble spectre résiduel.

$M_n(\mathbb{R})$ ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels.

$S^{++}(\mathbb{R}^n)$ ensemble des matrices carrées d'ordre n symétriques définies positives.

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ouvert.

$L^p(\Omega) = \{u \text{ mesurable sur } \Omega \text{ et } \int_{\Omega} |u|^p < \infty\} \quad 1 \leq p \leq \infty$.

$L^\infty(\Omega) = \{u \text{ mesurable sur } \Omega \text{ et il existe } C \text{ tel que } |u(x)| \leq C \text{ presque partout sur } \Omega\}$.

$C(\Omega)$ espace des fonctions continues sur Ω .

$C_c(\Omega)$ fonctions continues à support compact dans Ω .

$C^k(\Omega)$ fonctions k fois continûment différentiables sur Ω (k entier ≥ 0).

$C_c^k(\Omega) = C_c(\Omega) \cap C^k(\Omega)$.

$C_b^\infty(\Omega)$ ensemble de fonctions infiniment dérivables et bornées sur Ω .

$\mathbb{H}^1, \mathbb{H}_0^1$ espaces de Sobolev.

Introduction générale

La théorie des opérateurs linéaires d'un espace linéaire normé vers autre, constitue un lieu de rencontre privilégié pour diverses disciplines des mathématiques. Les opérateurs linéaires continus et compacts d'un espace linéaire normé vers autre, forment une classe assez particulière des opérateurs linéaires d'un espace linéaire normé vers autre.

Un des problèmes fondamentaux de la théorie des opérateurs linéaires continus celui qui concerne l'étude des opérateurs linéaires continus d'un espace de Hilbert dans autre espace hilbertien. On définit ainsi les opérateurs adjoints des opérateurs linéaires continus d'un espace de Hilbert qui est aussi un opérateur linéaire continu, possède les mêmes propriétés de l'opérateur linéaire original. Dans ce mémoire, nous allons traiter quelques notions et applications et propriétés structurelles des opérateurs linéaires continus et compacts d'un espace linéaire normé (ou de Hilbert) vers autre.

Ce travail est composé de 3 chapitres :

Le premier chapitre est consacré au rappel sur les espaces et sous espaces linéaires on parle aussi sur les ensembles linéairement indépendants, sous-espaces engendrés. On met l'accent sur quelques notions des espaces métriques, et les espaces normés, aussi quelques notions sur les espaces de Hilbert, on parlera sur quelques propriétés de l'orthogonalité. Citons l'égalité de parallélogramme, aussi le théorème de la projection orthogonale d'un point quelconque sur un sous ensemble fermé et convexe de cet espace de Hilbert. On termine le chapitre par quelques notions sur les familles orthogonales.

Le deuxième chapitre est la suite du premier. Dans ce chapitre, on présente les définitions et les propriétés générales des opérateurs linéaires continus d'un espace linéaire normé vers autre. On parle aussi sur les opérateurs linéaires continus inversibles d'un espace linéaire normé vers autre et l'inégalité de l'énergie. On donne quelques exemples des opérateurs linéaires continus inversibles, la transformation inverse est linéaire mais n'est pas continue. La famille des opérateurs linéaires continus d'un espace linéaire normé vers autre constitue aussi un espace linéaire normé, qui nous permettra de définir l'opérateur adjoint de cet opérateur linéaire continu et de calculer sa norme (l'opérateur linéaire continu et son adjoint ont la même norme).

L'ensemble des opérateurs linéaires continus inversibles d'un espace linéaire normé dans lui-même constitue la structure d'algèbre. Dans ce chapitre deux on définit encore l'opérateur linéaire continu et compact, on parle aussi sur le théorème de graphe fermé.

Les opérateurs linéaires continus d'un espace de Hilbert dans autre est une partie très importante dans ce chapitre deux, on parlera aussi sur les opérateurs adjoints des opérateurs linéaires continus d'un espace de Hilbert vers autre espace hilbertien. On parle ainsi sur les opérateurs linéaires continus auto adjoints d'un espace de Hilbert vers lui même et leurs propriétés structurelles.(spectre et ensemble résolvant d'un opérateur continu d'un espace de Hilbert dans autre).

Le troisième chapitre s'occupe de trois applications sur les opérateurs linéaires continus d'un espace linéaire normé vers autre. Ces applications sont choisis selon le cas, ces applications sont illustrées par les propriétés structurelles citées aux chapitre un et chapitre deux. Une de ces application est application directe des théorème de Hahn Banach et le théorème de Banach-Steinhaus. La deuxième application on s'intéresse d'étudier le théorème de Lax-Milgram sur un intervalle borné qui se réduit à l'étude du problème de Dirichlet pour l'équation de Sturm-Liouville, durant cette étude nous effectuons un opérateur différentiel linéaire continu, alors nous investissons quelques notions et théorèmes déjà donnés au chapitre deux. La troisième application on investit une équation intégrale de Fredholm qui se réduit à étudier un opérateur intégral, on montrera que cet opérateur est linéaire borné donc continue en fin on montre que cet opérateur intégral est compact.

Le mémoire se termine par une conclusion générale.

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre, nous aborderons la définition des les espaces et sous espaces linéaires On met l'accent sur quelques notions des espaces métriques, et les espaces normés, aussi quelques notions sur les espaces de Hilbert, on parlera sur quelques propriétés.

1.1 Espaces et sous-espaces linéaires

Définition 1.1.1 *Un espace linéaire (vectoriel) $\mathbb{X}$ sur le corps $\mathbb{K}$ est un ensemble non vide des éléments $x, y, \dots$, appelés vecteurs, muni de deux opérations.*

1. *La première opération, l'addition, est une opération interne pour laquelle $\mathbb{X}$ devient un groupe abélien. Il existe donc une application $\mathbb{X} \times \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$, notée*

$$(x, y) \rightarrow x + y,$$

qui a les propriétés suivantes : pour tout $x, y, z \in \mathbb{X}$

(a) $x + (y + z) = (x + y) + z$ (associativité).

(b) *Il existe en $\mathbb{X}$ un vecteur 0 , le vecteur zéro, tel que pour tout $x \in \mathbb{X}$ on aura $x + 0 = 0 + x = x$.*

(c) *Pour tout $x \in \mathbb{X}$, il existe dans $\mathbb{X}$ un vecteur $(-x)$, l'opposé de x ,*

tel que $x + (-x) = (-x) + x = 0$.

(d) $x + y = y + x$ (commutativité).

2. *La deuxième opération, la multiplication des vecteurs par les scalaires est donc une opération externe. C'est l'application $\mathbb{K} \times \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$, notée $(\alpha, x) \rightarrow \alpha x$, qui possède les propriétés suivantes : pour tout $x, y \in \mathbb{X}$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$*

(a) *Si $1 \in \mathbb{K}$ alors $1x = x$.*

(b) $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$ (associativité).

(c) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$ (distributivité par rapport à la somme des scalaires).

(d) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$ (distributivité par rapport à la somme des vecteurs).

Définition 1.1.2 Soit $\mathbb{X}$ un espace linéaire sur le corps $\mathbb{K}$. Sous-espace linéaire de $\mathbb{X}$ est un sous-ensemble $\mathbb{X}_1 \subseteq \mathbb{X}$ qui forme lui-même un espace linéaire, sur le même corps $\mathbb{K}$, par rapport aux opérations de $\mathbb{X}$ restreintes à $\mathbb{X}_1$.

On peut vérifier facilement que $\mathbb{X}_1 \subseteq \mathbb{X}$, $\mathbb{X}_1 \neq \emptyset$, est un sous-espace linéaire de $\mathbb{X}$ si et seulement si

$$x, y \in \mathbb{X}_1 \Rightarrow (x + y) \in \mathbb{X}_1.$$

et

$$x \in \mathbb{X}_1, \alpha \in \mathbb{K} \Rightarrow \alpha x \in \mathbb{X}_1.$$

Exemple 1.1.1 Le corps $\mathbb{K}$ est un espace linéaire sur $\mathbb{K}$.

Exemple 1.1.2 Soit $\mathbb{N}_n = \{1, 2, \dots, n\}$ l'espace linéaire $\mathbb{F}(\mathbb{N}_n, \mathbb{K})$ est noté $\mathbb{K}^n$. Chaque vecteur $x \in \mathbb{K}^n$ est déterminé par n nombres de $\mathbb{K}$, $\zeta_1 = x(1), \zeta_2 = x(2), \dots, \zeta_n = x(n)$. Les éléments de $\mathbb{K}^n$ sont des n -uples $x = (\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n)$.

Si $x = (\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n)$ et $y = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$, alors

$$x + y = (\zeta_1 + \eta_1, \zeta_2 + \eta_2, \dots, \zeta_n + \eta_n).$$

et

$$\alpha x = (\alpha \zeta_1, \alpha \zeta_2, \dots, \alpha \zeta_n).$$

L'élément nul est $0 = (0, 0, \dots, 0)$ et l'opposé de x est

$$-x = (-\zeta_1, -\zeta_2, \dots, -\zeta_n).$$

1.2 Ensembles linéairement indépendants, sous-espaces engendrés

Définition 1.2.1 Soit $\mathbb{X}$ un espace linéaire sur $\mathbb{K}$ et $A = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset \mathbb{X}$

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k x_k. \quad (1.1)$$

S'appelle une combinaison linéaire. Les éléments $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$, s'appellent les coefficients de la combinaison linéaire.

Remarque 1.2.1 $[A]$ L'ensemble des combinaison linéaires sur A .

Définition 1.2.2 Soit $A = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$ un ensemble fini contenu dans $\mathbb{X}$.

$$\text{L'ensemble fini } A \text{ est linéairement indépendant} \Leftrightarrow \left(\sum_{k=1}^n \alpha_k x_k = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \dots, \alpha_n = 0 \right). \quad (1.2)$$

Dans le cas contraire A est linéairement dépendant.

Exemple 1.2.1 Dans l'espace linéaire $C([a, b])$ $a < b$, l'ensemble $A = \{1, t, t^2, \dots, t^n\}$ est linéairement indépendant.

En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la relation $\alpha_0 1 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \dots + \alpha_n t^n = 0$ pour tout $t \in [a, b]$ entraîne $\alpha_i = 0, i = 0, 1, \dots, n$. Par convention, on considère l'ensemble vide $\emptyset$ comme étant linéairement indépendant.

Définition 1.2.3 Un sous-ensemble B de $\mathbb{X}$ s'appelle une base algébrique de l'espace linéaire $\mathbb{X}$ si :

1. B est un ensemble linéairement indépendant.
2. $[B] = \mathbb{X}$, i.e. le sous-espace linéaire engendré par B est $\mathbb{X}$.

1.3 Espaces métriques

Définition 1.3.1 Soit $\mathbb{X}$ un ensemble quelconque non vide. Une semi-métrique, ou semi-distance, sur $\mathbb{X}$ est une application

$$\Psi : \mathbb{X} \times \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$$

telle que, pour tout $x, y, z \in \mathbb{X}$ on a

- $c_1)$ $\Psi(x, y) \geq 0$, (propriété de non-négativité).
- $c_2)$ $\Psi(x, x) = 0$, (propriété d'identité).
- $c_3)$ $\Psi(x, y) = \Psi(y, x)$, (propriété de symétrie).
- $c_4)$ $\Psi(x, y) \leq \Psi(x, z) + \Psi(z, y)$, (inégalité de triangle).

L'ensemble $\mathbb{X}$ muni d'une semi-métrique Ψ s'appelle espaces semi-métrique que nous notons par $(\mathbb{X}, \Psi)$.

Définition 1.3.2 Soit $\mathbb{X}$ un ensemble quelconque non vide. Une métrique ou encore une distance sur $\mathbb{X}$ est une semi-métrique $d : \mathbb{X} \times \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$, telle que

$c_5)$. $d(x, y) = 0$ implique $x = y$.

L'ensemble $\mathbb{X}$ muni d'une métrique d s'appelle espace métrique, noté par $(\mathbb{X}, d)$.

Exemple 1.3.1 $d(x, y) = \frac{|x-y|}{1+|x-y|}$ est une distance sur $\mathbb{R}$, car pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ on a :

1. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow \frac{|x-y|}{1+|x-y|} = 0 \Leftrightarrow |x-y| = 0 \Leftrightarrow x = y$.
2. $d(x, y) = \frac{|x-y|}{1+|x-y|} = \frac{|-1||y-x|}{1+|-1||y-x|} = \frac{|y-x|}{1+|y-x|} = d(y, x)$.
3. Pour vérifier la propriété c_4), il est suffisant d'observer que pour tout $\alpha, \beta, \gamma \geq 0$, tels que $\gamma \leq \alpha + \beta$, on a

$$\frac{\gamma}{1+\gamma} \leq \frac{\alpha+\beta}{1+\alpha+\beta} \leq \frac{\alpha}{1+\alpha} + \frac{\beta}{1+\beta}.$$

on pose $\alpha = |x-y|, \beta = |y-z|, \gamma = |x-z|$.

Définition 1.3.3 On dit que deux distances d_1, d_2 sur un ensemble E sont équivalentes s'il existe deux constantes réelles $\beta \geq \alpha \geq 0$ telles que :

$$\alpha d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq \beta d_1(x, y), \text{ pour tout } x, y \in E.$$

Exemple 1.3.2 Soit $(d_i)_{1 \leq i \leq p}$ une famille finie de p distances sur E_i , on pose

$$E = \prod_{i=1}^p E_i.$$

Et on définit sur le produit cartésien $E \times E$ deux distances comme suit

$$D_1(x, y) = \sup_{1 \leq i \leq p} d_i(x_i, y_i), \quad D_2(x, y) = \sum_{i=1}^p d_i(x_i, y_i).$$

Pour tout $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ de E .

On a :

$$\sup_{1 \leq i \leq p} d_i(x_i, y_i) \leq \sum_{i=1}^p d_i(x_i, y_i) \leq p \sup_{1 \leq i \leq p} d_i(x_i, y_i),$$

donc

$$D_1(x, y) \leq D_2(x, y) \leq p D_1(x, y).$$

Alors D_1 et D_2 sont équivalentes, telles que $\alpha = 1, \beta = p$.

1.4 Espaces normes

Définition 1.4.1 Soit $\mathbb{X}$ un espace linéaire sur $\mathbb{K}$. On appelle semi-norme pour $\mathbb{X}$, une application $p : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$, telle que pour tout $x, y \in \mathbb{X}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ on a :

$$N_1) \quad p(x) \geq 0, \quad (\text{propriété de non-négativité}).$$

$$N_2) \quad p(\lambda x) = |\lambda| p(x), \quad (\text{propriété d'homogénéité absolue}).$$

$$N_3) \quad p(x + y) \leq p(x) + p(y), \quad (\text{propriété de sous-additivité}).$$

Il est possible que $p(x) = 0$ et $x \neq 0$.

L'espace linéaire $\mathbb{X}$ muni d'une semi-norme s'appelle espace semi-norme.

Définition 1.4.2 Soit $\mathbb{X}$ un espace linéaire sur $\mathbb{K}$. On appelle norme sur $\mathbb{X}$, une application

$\| \cdot \| : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$, telle que $\| \cdot \|$ est une semi-norme pour $\mathbb{X}$ et de plus

$$N_4) \quad \| x \| = 0 \text{ implique } x = 0.$$

Un espace linéaire $\mathbb{X}$ muni d'une norme s'appelle espace normé, noté par $(\mathbb{X}, \| \cdot \|)$.

Exemple 1.4.1 Soit $E = M_n(\mathbb{R})$, si A est dans E , on pose $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ alors

$$\| A \|_{\infty} = \sup_{1 \leq i, j \leq n} |a_{ij}|,$$

définit une norme sur E .

Exemple 1.4.2 L'espace $C([0, 1], \mathbb{R})$ est dit normé, lorsqu'il est muni d'une des normes suivantes :

1. $\|f\|_\infty = \sup_{t \in [0, 1]} |f(t)|.$
2. $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt.$
3. $\|f\|_2 = \sqrt{\int_0^1 |f(t)|^2 dt}.$

Un espace normé est un espace métrique dont la distance est définie par

$$d(x, y) = \|x - y\|.$$

Définition 1.4.3 On dit que deux normes $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ sur un ensemble E sont équivalentes s'il existe deux constantes réelles $\beta \geq \alpha \geq 1$ telles que

$$\alpha \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \beta \|x\|_1, \text{ pour tout } x \in E.$$

Définition 1.4.4 (Espace de Banach) Un espace de Banach est un espace linéaire normé complet.

Note : On dit qu'un espace normé $(X, \|\cdot\|)$ est complet si toute suite de Cauchy de X est convergente dans X .

Exemple 1.4.3 L'espace $E = C([a, b], \mathbb{R}^n)$ des fonctions continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}^n$. Le nombre

$$\|f\| = \max_{a \leq t \leq b} |f(t)|,$$

où $|\cdot|$ est la norme dans $\mathbb{R}^n$, définit une norme rendant $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach.

1.5 Espaces de Hilbert

Définition 1.5.1 Soit X un $\mathbb{C}$ espace linéaire, s'il existe un nombre complexe $Z = \langle x, y \rangle$ pour tout couple de vecteurs x et y dans X qui vérifie les conditions suivantes :

1. $\forall x \in X \quad \langle x, x \rangle \geq 0.$
2. $\forall x \in X \quad \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0.$
3. $\forall x, y \in X \quad \overline{\langle x, y \rangle} = \langle y, x \rangle.$
4. $\forall x, y, z \in X \quad \langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle.$
5. $\forall x, y \in X \quad \forall \lambda \in \mathbb{C} \quad \langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle.$

Alors $\langle x, y \rangle$ est dit produit scalaire de x et y , et on note par $\langle x, y \rangle$.

Un espace linéaire muni d'un produit scalaire est appelé un espace **préhilbertien**.

Définition 1.5.2 Un espace de Hilbert est un espace complet par rapport à la norme induite par un produit scalaire. En d'autres mots, un espace de Hilbert est un espace de Banach dont la norme est induite par un produit scalaire.

Note : (Espace de Hilbert = Espace préhilbertien + complet).

Exemple 1.5.1 L 'espace

$$l^2(\mathbb{C}) = \{x = (x_i)_i; x_i \in \mathbb{C}, \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 < \infty\},$$

muni du produit scalaire

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \bar{y}_i$$

est un espace de Hilbert.

Quelques propriétés

- **Inégalité de Cauchy-Schwarz** : pour tout $x, y \in \mathbb{X}$, on a

$$|\langle x, y \rangle| \leq \sqrt{\langle x, x \rangle} \sqrt{\langle y, y \rangle}. \quad (1.3)$$

Preuve. L'inégalité (1.3) est trivialement satisfaite si $\langle x, y \rangle = 0$.

Nous supposons donc que $\langle x, y \rangle \neq 0$. Alors nous obtenons

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left\langle \frac{x}{\sqrt{\langle x, x \rangle}} - \frac{\langle x, y \rangle y}{|\langle x, y \rangle| \sqrt{\langle y, y \rangle}}, \frac{x}{\sqrt{\langle x, x \rangle}} - \frac{\langle x, y \rangle y}{|\langle x, y \rangle| \sqrt{\langle y, y \rangle}} \right\rangle \\ &\leq 1 - \frac{2|\langle x, y \rangle|}{\sqrt{\langle x, x \rangle} \sqrt{\langle y, y \rangle}} + 1 \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} 0 &\leq 1 - \frac{2|\langle x, y \rangle|}{\sqrt{\langle x, x \rangle} \sqrt{\langle y, y \rangle}} + 1 \Rightarrow \frac{2|\langle x, y \rangle|}{\sqrt{\langle x, x \rangle} \sqrt{\langle y, y \rangle}} \leq 2 \\ &\Rightarrow |\langle x, y \rangle| \leq \sqrt{\langle x, x \rangle} \sqrt{\langle y, y \rangle}. \end{aligned}$$

Corollaire 1.5.1

$$|\langle x, y \rangle| \leq \frac{1}{2}(\langle x, x \rangle + \langle y, y \rangle). \quad (1.4)$$

Preuve.

$$\begin{aligned} 0 &\leq (\sqrt{\langle x, x \rangle} - \sqrt{\langle y, y \rangle})^2 = \left(\sqrt{\langle x, x \rangle}\right)^2 + \left(\sqrt{\langle y, y \rangle}\right)^2 - 2\sqrt{\langle x, x \rangle} \sqrt{\langle y, y \rangle}. \\ &\Rightarrow \sqrt{\langle x, x \rangle} \sqrt{\langle y, y \rangle} \leq \frac{1}{2} \left(\left(\sqrt{\langle x, x \rangle}\right)^2 + \left(\sqrt{\langle y, y \rangle}\right)^2 \right) \end{aligned}$$

d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz (1.3)

$$|\langle x, y \rangle| \leq \frac{1}{2}(\langle x, x \rangle + \langle y, y \rangle).$$

- **Loi du parallélogramme** : Pour tout $x, y \in \mathbb{X}$, on a

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2). \quad (1.5)$$

Preuve.

En effet

$$\begin{aligned}\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle + \langle x - y, x - y \rangle \\ &= \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle \\ &\quad + \langle x, x \rangle - \langle x, y \rangle - \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle \\ &= 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).\end{aligned}$$

Théorème 1.5.1 [5] *Soit $\mathbb{X}$ un espace de Banach. $\mathbb{X}$ est un espace de Hilbert (i.e. sa norme est induite par un produit scalaire) si et seulement si pour tout $x, y \in \mathbb{X}$, on a*

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Le produit scalaire est unique, et on a

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i\|x + iy\|^2 - i\|x - iy\|^2).$$

Théorème 1.5.2 *Soient $\mathbb{H}$ un espace de Hilbert, $A \subset \mathbb{H}$ un ensemble non vide convexe et fermé et $x_0 \in \mathbb{H} \setminus A$.*

Alors il existe un et seulement un $y_0 \in A$, tel que $\|x_0 - y_0\| = \inf_{y \in A} \|x_0 - y\|$.

Preuve.

a) Montrons d'abord l'existence de y_0 .

Soit $d = \inf_{y \in A} \|x_0 - y\| > 0$ choisissons une suite $\{y_n; \|x_0 - y_n\| \leq d + \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\} \subset A$ d'après la loi du parallélogramme(1.5), nous obtenons

$$\begin{aligned}\|y_m - y_n\|^2 &= \|(y_m - x_0) - (y_n - x_0)\|^2 \\ &= 2\|y_m - x_0\|^2 + 2\|y_n - x_0\|^2 - 4\left\|\frac{y_m + y_n}{2} - x_0\right\|^2 \\ &\leq 2\left(d + \frac{1}{m}\right)^2 + 2\left(d + \frac{1}{n}\right)^2 - 4d^2 \\ &= \frac{4}{m}d + \frac{2}{m^2} + \frac{4}{n}d + \frac{2}{n^2} < \varepsilon.\end{aligned}$$

Si $m, n > n_0(\varepsilon)$ puis que A est un ensemble convexe, $\frac{y_m + y_n}{2} \in A$ et $\left\|\frac{y_m + y_n}{2} - x_0\right\|^2 \geq d^2$. Donc $\{y_n; n \in \mathbb{N}\} \subset A$ est une suite de Cauchy et il existe un $y_0 \in \mathbb{H}$ tel que $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y_0$.

Parce que A est fermé $y_0 \in A$.

b) Montrons que $\|x_0 - y_0\| = d$. Nous avons

$$d \leq \|x_0 - y_0\| \leq \|x_0 - y_n\| + \|y_n - y_0\| < d + \frac{1}{n} + \varepsilon, \text{ si } n > n_0(\varepsilon),$$

d'où

$$\|x_0 - y_0\| = d.$$

c) Il nous reste à montrer l'unicité de y_0 . Soit $z_0 \in A$, tel que $\|x_0 - z_0\| = d$. En utilisant la loi du parallélogramme (1.5), on a

$$\begin{aligned}\|z_0 - y_0\|^2 &= \|(z_0 - x_0) - (y_0 - x_0)\|^2 \\ &= 2\|z_0 - x_0\|^2 + 2\|y_0 - x_0\|^2 - \|z_0 + y_0 - 2x_0\|^2 \\ &= 4d^2 - 4\left\|\frac{z_0 + y_0}{2} - x_0\right\|^2 \leq 4d^2 - 4d^2 = 0.\end{aligned}$$

D'où $z_0 = y_0$.

1.6 Orthogonalé

Définition 1.6.1 Soit $\mathbb{H}$ un espace de Hilbert.

Deux vecteurs $x, y \in \mathbb{H}$ sont orthogonaux si $\langle x, y \rangle = 0$, on note $x \perp y$.

Remarque 1.6.1 La relation d'orthogonalité possède les propriétés suivante :

1. $0_{\mathbb{H}} \perp x$ pour tout $x \in \mathbb{H}$.
2. $x \perp y \Rightarrow y \perp x$.
3. $x \perp x \Rightarrow x = 0_{\mathbb{H}}$.
4. $x \perp x_n, n \in \mathbb{N}$, et $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x_0\| \Rightarrow x \perp x_0$.

Définition 1.6.2 *Considérons deux ensembles A_1 et A_2 non vides d'un espace de Hilbert $\mathbb{H}$.*

Nous disons que A_1 est orthogonal à A_2 , noté par $A_1 \perp A_2$, si pour tout $x \in A_1$ et pour tout $y \in A_2$ on a $x \perp y$, c.à.d. $\langle x, y \rangle = 0$.

Théorème 1.6.1 *Si A est un ensemble non vide d'un espace de Hilbert $\mathbb{H}$, alors*

$$A^\perp = \{x; x \in \mathbb{H}, \text{ et } x \perp A\}$$

est un sous-espace linéaire fermé de $\mathbb{H}$.

$A^\perp$ s'appelle la complément orthogonal de A .

Preuve.

Observons d'abord que $A^\perp \neq \emptyset$, puis que au moins $0_{\mathbb{H}} \in A^\perp$. Soient $x_1, x_2 \in A^\perp$; $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$ et $y \in A$ alors

$$\langle \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y \rangle = \lambda_1 \langle x_1, y \rangle + \lambda_2 \langle x_2, y \rangle = 0$$

donc $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in A^\perp$ et $A^\perp$ est un sous-espace linéaire de $\mathbb{H}$.

Soit maintenant $x_0 \in \bar{A}^\perp$ alors il existe une suite $\{x_n; n \in \mathbb{N}\} \subset A^\perp$ telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x_0\| = 0$.

Nous avons pour tout $y \in A$

$$\langle x_0, y \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle x_n, y \rangle = 0.$$

Donc $x_0 \in A^\perp$ et $A^\perp$ est un sous-espace linéaire fermé.

Définition 1.6.3 *Un ensemble non vide A d'un espace de Hilbert est un système orthogonal si : pour tout $x, y \in A, x \neq y$, on a $x \perp y$.*

Définition 1.6.4 *Un ensemble $E = \{e_i; i \in I\}$ d'un espace de Hilbert $\mathbb{H}$ est un système orthonormal si :*

$$\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j \\ 0, & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Chapitre 2

Opérateurs linéaires continus

Dans ce chapitre, on présente deux parties dans la première partie, nous parlerons les définitions et les propriétés générales des opérateurs linéaires continus d'un espace linéaire normé vers autre. On donne quelques exemples des opérateurs linéaires continus. Dans la deuxième partie nous parlerons les définitions et les propriétés générales des opérateurs linéaires continus d'un espace Hilbert vers autre. Nous avons fait définir l'opérateur adjoint.

2.1 Opérateurs linéaires sur un espace normé

Dans ce paragraphe, nous donnons des caractérisations des opérateurs linéaires continus. soient $(\mathbb{X}, \| \cdot \|_{\mathbb{X}})$ et $(\mathbb{Y}, \| \cdot \|_{\mathbb{Y}})$ deux espaces normés sur le même corps $\mathbb{K}$.

Définition 2.1.1 Soient $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ deux espaces linéaires sur le même corps $\mathbb{K}$.

Une application $T : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ est additive si :

$$T(x_1 + x_2) = Tx_1 + Tx_2$$

pour tout $x_1, x_2 \in \mathbb{X}$.

Une application $T : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ est homogène si :

$$T(\lambda x) = \lambda Tx.$$

Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x \in \mathbb{X}$.

Une application $T : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ est linéaire si elle est additive et homogène.

En d'autres termes, l'application $T : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ est linéaire si et seulement si

$$T(\lambda x_1 + \mu x_2) = \lambda Tx_1 + \mu Tx_2$$

pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et $x_1, x_2 \in \mathbb{X}$.

Notons par $\mathbb{L}_a(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ l'ensemble des opérateurs linéaires de $\mathbb{X}$ dans $\mathbb{Y}$.

Une application linéaire apparaît aussi sous les noms de transformation linéaire ou opérateur linéaire. Nous utiliserons le nom d'opérateur linéaire.

Exemple 2.1.1 1. Soit $\mathbb{X} = L^2([0, 1])$ et

$$T : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$$

$$f \rightarrow Tf(x) = \int_0^1 (x-t)f(t)dt.$$

2. L'opérateur de **multiplication** :

$$M : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$$

$$f \rightarrow Mf(x) = x \cdot f(x) \quad \forall x \in [0, 1].$$

3. L'opérateur de **Volterra** :

$$V : C([0, 1]) \rightarrow C([0, 1])$$

$$f \rightarrow Vf(x) = \int_0^x k(x, t)f(t)dt.$$

où $k(x, t)$ est une fonction en x et t (noyau).

Exemple 2.1.2 L'application $T : C_b^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow C_b^\infty(\mathbb{R})$

donnée par

$$(Tf)(t) = \frac{df(t)}{dt}$$

est un opérateur linéaire.

$C_b^\infty(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble de fonctions infiniment dérivables et bornées sur $\mathbb{R}$.

Notations :

- On notera $\ker(T)$ le noyau de l'opérateur T ; i.e.

$$\ker(T) = \{x \in \mathbb{X}; \quad Tx = 0\}.$$

Et aussi noté parfois $N(T)$.

- $Im(T)$ désignera l'image de $\mathbb{X}$ par T . On le notera aussi $T\mathbb{X}$; i.e.

$$Im(T) = \{Tx; \quad x \in \mathbb{X}\}.$$

Et aussi noté parfois $R(T)$.

Théorème 2.1.1 Soit T un opérateur linéaire $T : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$. Alors

- i) $T0 = 0$.
- ii) $T\mathbb{X}$ est un sous-espace linéaire de $\mathbb{Y}$.
- iii) $\ker(T) = \{x \in \mathbb{X}; Tx = 0\}$ est un sous-espace linéaire de $\mathbb{X}$.
- iv) T est une application injective si et seulement si $Tx = 0$ entraîne $x = 0$, i.e. $\ker(T) = \{0_{\mathbb{X}}\}$.

Preuve.

i) Nous avons

$$T0 = T(x + (-x)) = Tx + T(-x) = Tx - Tx = 0.$$

ii) Soient $y_1, y_2 \in T\mathbb{X}$ tels que $y_1 = Tx_1$ et $y_2 = Tx_2$. Pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, on a

$$T(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha Tx_1 + \beta Tx_2 = \alpha y_1 + \beta y_2.$$

Donc $\alpha y_1 + \beta y_2 \in T\mathbb{X}$.

iii) Soient $x_1, x_2 \in \ker(T)$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, alors $T(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha Tx_1 + \beta Tx_2 = 0$ et $\alpha x_1 + \beta x_2 \in \ker(T)$.

iv) Soit T une application linéaire injective. Alors $x \neq 0$ entraîne $Tx \neq T0 = 0$, donc $\ker(T) = \{0_{\mathbb{X}}\}$.

Supposons maintenant que $\ker(T) = \{0_{\mathbb{X}}\}$. Alors $Tx = 0$ entraîne $x = 0$, donc T est injectif, parce que si $x_1 \neq x_2$ alors $x_1 - x_2 \notin \ker(T)$, donc $T(x_1 - x_2) \neq 0$, d'où $Tx_1 \neq Tx_2$.

Théorème 2.1.2 Soit $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ deux espaces linéaires sur le même corps $\mathbb{K}$ et $T : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ un opérateur linéaire. Alors T est inversible sur $T\mathbb{X}$ et $T^{-1} : T\mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$ est opérateur linéaire si et seulement si T est injectif.

Preuve.

a) Pour tout $y_1, y_2 \in T\mathbb{X}$, il existe un seul $x_1 \in \mathbb{X}$ et un seul $x_2 \in \mathbb{X}$ tel que $y_1 = Tx_1$ et $y_2 = Tx_2$ alors, pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$

$$T(\lambda x_1 + \mu x_2) = \lambda y_1 + \mu y_2 \in T\mathbb{X}.$$

Donc

$$\begin{aligned} T^{-1}(\lambda y_1 + \mu y_2) &= \lambda x_1 + \mu x_2 \\ &= \lambda T^{-1}y_1 + \mu T^{-1}y_2. \end{aligned}$$

b) Si T^{-1} existe sur $T\mathbb{X}$, alors évidemment T est injectif.

2.1.1 Les opérateurs linéaires bornés

Définition 2.1.2 L'opérateur linéaire $T \in \mathbb{L}_a(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ est borné s'il existe un nombre $M > 0$, tel que

$$\|Tx\|_{\mathbb{Y}} \leq M \|x\|_{\mathbb{X}}. \quad (2.1)$$

Pour tout $x \in \mathbb{X}$.

Exemple 2.1.3 1. $I : C([0, 1]) \rightarrow C([0, 1])$

est bien borné car :

$$\|Ix\| = \|x\| \leq M \|x\|; \quad \forall M \geq 1.$$

2. L'opérateur de multiplication T défini sur l'espace $C([1, 2])$, alors :

$$\begin{aligned}\|Tf\| &= \sup_{x \in [1, 2]} |Tf(x)| \\ &= \sup_{x \in [1, 2]} |x \cdot f(x)| \\ &\leq 2 \|f\| \quad (M = 2) \quad \forall f \in C([1, 2]).\end{aligned}$$

Définition 2.1.3 L'opérateur linéaire T est continu à $x_0 \in \mathbb{X}$ si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \sigma > 0, \forall x \in \mathbb{X} \quad \|x - x_0\|_{\mathbb{X}} < \sigma \Rightarrow \|Tx - Tx_0\|_{\mathbb{Y}} < \epsilon. \quad (2.2)$$

Puis que la continuité de T peut être caractérisée par les suites, T est continue à x_0 si pour toute suite $\{x_n; n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{X}$ telle que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x_0\|_{\mathbb{X}} = 0.$$

On a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|Tx_n - Tx_0\|_{\mathbb{Y}} = 0.$$

Théorème 2.1.3 Soit $x_0 \in \mathbb{X}$ quelconque, si $T \in \mathbb{L}_a(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ alors on a :

$$T \text{ est continue en } x_0 \Leftrightarrow T \text{ est continue sur } \mathbb{X}.$$

Preuve.

T est continue en $x_0 \Leftrightarrow \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x_0\|_{\mathbb{X}} = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \|Tx_n - Tx_0\|_{\mathbb{Y}} = 0 \right\}$. Soit $x \in \mathbb{X}$ quelconque il suffit de montrer que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x'_n - x\|_{\mathbb{X}} = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \|Tx'_n - Tx\|_{\mathbb{Y}} = 0.$$

On a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x'_n - x\|_{\mathbb{X}} = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \|(x'_n - x + x_0) - x_0\|_{\mathbb{X}} = 0.$$

On pose $y_n = (x'_n - x + x_0)$ on a T est continue en $x_0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \|Ty_n - Tx_0\|_{\mathbb{Y}} = 0$, i.e.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|T(x'_n - x + x_0) - Tx_0\|_{\mathbb{Y}} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \|Tx'_n - Tx + Tx_0 - Tx_0\|_{\mathbb{Y}} = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \|Tx'_n - Tx\|_{\mathbb{Y}} = 0.$$

Donc T est continue sur $\mathbb{X}$.

Définition 2.1.4 L'opérateur $T : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ est dite uniformément continu si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \sigma > 0, \forall x, y \in \mathbb{X} \quad \|x - y\|_{\mathbb{X}} < \sigma \Rightarrow \|Tx - Ty\|_{\mathbb{Y}} < \epsilon. \quad (2.3)$$

σ ne dépend pas de ϵ .

Définition 2.1.5 (Application lipschitzienne) Si k est un réel positif, on appelle application lipschitzienne de rapport k , toute opérateurs T vérifiant :

$$\|Tx - Ty\|_{\mathbb{Y}} \leq k \|x - y\|_{\mathbb{X}}.$$

Éventuellement on précise : k -lipschitzienne.

Exemple 2.1.4 Soit $E \subset (\mathbb{R}_+, |\cdot|)$, on définit l'opérateur T par :

$$Tx = \frac{x}{1+x}.$$

On a $\forall x \in \mathbb{R}_+$

$$\begin{aligned} |Tx - Ty| &= \left| \frac{x}{1+x} - \frac{y}{1+y} \right| \\ &= \left| \frac{x(1+y) - y(1+x)}{(1+x)(1+y)} \right| \\ &= \left| \frac{x + xy - y - yx}{(1+x)(1+y)} \right| \\ &= \frac{|x - y|}{(1+y)(1+x)} \\ &\leq |x - y|. \end{aligned}$$

C'est-à-dire T est lipschitzienne de rapport 1 sur $\mathbb{R}_+$.

Remarque 2.1.1 Il est clair que, si T est lipschitzienne alors, T est uniformément continue mais le contraire n'est pas toujours juste, par exemple l'opérateur $T :]0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ qui est définie par $Tx = \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$, mais elle est non lipschitzienne.

Théorème 2.1.4 L'opérateur linéaire $T \in \mathbb{L}_a(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ est continu sur $\mathbb{X}$ si et seulement s'il est borné.

Preuve.

a) Soit T un opérateur linéaire borné et soit $x_0 \in \mathbb{X}$ quelconque. La relation (2.1) appliquée à $(x - x_0)$

$$\|T(x - x_0)\|_{\mathbb{Y}} \leq M \|x - x_0\|_{\mathbb{X}}.$$

montre que T est continu à x_0 et donc sur $\mathbb{X}$.

b) Montrons que (2.2) entraîne (2.1) en vérifiant que non (2.1) entraîne non (2.2). Supposons donc qu'il existe des vecteurs $x_n \in \mathbb{X}$, $\|x_n\|_{\mathbb{X}} = 1$ tels que

$$\|Tx_n\|_{\mathbb{Y}} > n \|x_n\|_{\mathbb{X}} = n.$$

La suite $\{y_n = x_n / \sqrt{n}; n \in \mathbb{N}^*\}$ converge vers 0, mais puis que $\|Ty_n\|_{\mathbb{Y}} > \sqrt{n}$ $\{Ty_n; n \in \mathbb{N}^*\}$ ne converge pas vers $T0 = 0$.

Exemple 2.1.5 Soit $T \in \mathbb{L}_a(C_b^\infty(\mathbb{R}), C_b^\infty(\mathbb{R}))$ défini par

$$Tf(t) = \frac{df(t)}{dt}.$$

Pour tout $f \in C_b^\infty(\mathbb{R})$. Alors nous avons pour $f(t) = \sin nt$, $\|f\|_\infty = 1$ et $\|Tf\|_\infty = \|n \cos nt\|_\infty = n$, donc T n'est pas borné et pas continu sur $C_b^\infty(\mathbb{R})$.

Notons par $\mathbb{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) \subset \mathbb{L}_a(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ l'ensemble des opérateurs linéaires continus de $\mathbb{X}$ dans $\mathbb{Y}$. Observons d'abord que $\mathbb{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) \neq \emptyset$, puis que au moins l'opérateur nul $0 \in \mathbb{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$. Nous donnons maintenant des caractéristiques différentes pour un opérateur linéaire continu.

Théorème 2.1.5 Soit $T \in \mathbb{L}_a(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$. Les énoncés suivants sont équivalents

- 1) T est continu à 0.
- 2) T est continu sur $\mathbb{X}$.
- 3) T est uniformément continu sur $\mathbb{X}$.
- 4) $\exists M > 0 : \|Tx\|_{\mathbb{Y}} \leq M \|x\|_{\mathbb{X}}$, pour tout $x \in \mathbb{X}$.
- 5) $\exists M > 0 : \|Tx\|_{\mathbb{Y}} \leq M$, pour tout $x \in B_F(0, 1)$, i.e. $\{\forall x \in \mathbb{X}; \|x\|_{\mathbb{X}} \leq 1\}$.

Preuve.

5) $\Rightarrow$ 4)

$x = 0 : 4)$ est vérifié

$x \neq 0 : \frac{x}{\|x\|_{\mathbb{X}}} \in B_F(0, 1)$ donc

$$\begin{aligned} & \| T(\frac{x}{\|x\|_{\mathbb{X}}}) \|_{\mathbb{Y}} \leq M \\ \Rightarrow & \frac{1}{\|x\|_{\mathbb{X}}} \| Tx \|_{\mathbb{Y}} \leq M \\ \Rightarrow & \| Tx \|_{\mathbb{Y}} \leq M \| x \|_{\mathbb{X}} \quad \forall x \in \mathbb{X} - \{0_{\mathbb{X}}\}. \end{aligned}$$

4) $\Rightarrow$ 3)

T est uniformément continue $\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \lambda > 0$ tel que $\forall x, x' \in \mathbb{X} \quad \| x - x' \|_{\mathbb{X}} < \lambda \Rightarrow \| Tx - Tx' \|_{\mathbb{Y}} < \epsilon$.

Soit $\epsilon > 0$, on pose $\lambda = \frac{\epsilon}{M}$ on a

$$\begin{aligned} \| Tx - Tx' \|_{\mathbb{Y}} &= \| T(x - x') \|_{\mathbb{Y}} \\ &\leq M \| x - x' \|_{\mathbb{X}}. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} & \| x - x' \|_{\mathbb{X}} < \frac{\epsilon}{M} \\ \Rightarrow & M \| x - x' \|_{\mathbb{X}} < \epsilon \\ \Rightarrow & \| Tx - Tx' \|_{\mathbb{Y}} \leq M \| x - x' \|_{\mathbb{X}} \\ & < M(\frac{\epsilon}{M}) = \epsilon \\ \Rightarrow & \| Tx - Tx' \|_{\mathbb{Y}} < \epsilon. \end{aligned}$$

3) $\Rightarrow$ 2) et 2) $\Rightarrow$ 1) évident par définition.

1) $\Rightarrow$ 5)

$\forall \epsilon > 0, \exists \lambda > 0$ tel que $\| x \|_{\mathbb{X}} < \lambda \Rightarrow \| Tx \|_{\mathbb{Y}} < \epsilon$. Pour $\epsilon = 1$ on a

$$\exists \lambda_1 > 0 \quad \| x \|_{\mathbb{X}} < \lambda_1 \Rightarrow \| Tx \|_{\mathbb{Y}} < 1.$$

Soit $x \in B_F(0, 1) \Rightarrow \| x \|_{\mathbb{X}} \leq 1$ on a :

$$\begin{aligned} & \| \frac{\lambda_1}{2} x \|_{\mathbb{X}} = \frac{\lambda_1}{2} \| x \|_{\mathbb{X}} \leq \frac{\lambda_1}{2} < \lambda_1 \\ \Rightarrow & \| T(\frac{\lambda_1}{2} x) \|_{\mathbb{Y}} \leq 1 \\ \Rightarrow & \frac{\lambda_1}{2} \| Tx \|_{\mathbb{Y}} \leq 1 \\ \Rightarrow & \| Tx \|_{\mathbb{Y}} \leq \frac{2}{\lambda_1} = M, \quad \forall x \in B_F(0, 1). \end{aligned}$$

2.1.2 L'espace norme $(\mathbb{L}(\mathbb{X}; \mathbb{Y}), \| \cdot \|)$

Dans ce qui suit, $\mathbb{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ signifie l'ensemble des opérateurs linéaires continus de $\mathbb{X}$ dans $\mathbb{Y}$ qui est un sous-espace linéaire de l'espace linéaire $\mathbb{L}_a(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$. Donc $\mathbb{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ peut être regardé lui-même comme un espace linéaire sur le corps $\mathbb{K}$. Introduisons maintenant une norme pour $\mathbb{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$.

Théorème 2.1.6 *L'application $\| \cdot \| : \mathbb{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par*

$$\| T \| = \sup \{ \| Tx \|_{\mathbb{Y}} ; x \in \mathbb{X} \text{ et } \| x \|_{\mathbb{X}} \leq 1 \} \quad (2.4)$$

est une norme pour $\mathbb{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$.

Preuve.

Pour tout $T \in \mathbb{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$, $\| T \| \geq 0$ et $\| T \|$ est finie. Si $\| T \| = 0$, alors $Tx = 0$ pour tout $x \in \mathbb{X}$. En effet pour $x \neq 0$

$$\| Tx \|_{\mathbb{Y}} = \| x \|_{\mathbb{X}} \| T \frac{x}{\| x \|_{\mathbb{X}}} \|_{\mathbb{Y}} = 0.$$

Donc $Tx = 0$ sur $\mathbb{X}$ et $T = 0$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\| \lambda T \| = |\lambda| \| T \|$ parce que

$$\begin{aligned} \| \lambda T \| &= \sup \{ \| (\lambda T)x \|_{\mathbb{Y}} ; \| x \|_{\mathbb{X}} \leq 1 \} \\ &= \sup \{ |\lambda| \| Tx \|_{\mathbb{Y}} ; \| x \|_{\mathbb{X}} \leq 1 \} \\ &= |\lambda| \| T \| . \end{aligned}$$

En fin, pour tout $x \in \mathbb{X}$, tel que $\| x \|_{\mathbb{X}} \leq 1$, nous avons

$$\begin{aligned} \| (T_1 + T_2)x \|_{\mathbb{Y}} &= \| T_1x + T_2x \|_{\mathbb{Y}} \leq \| T_1x \|_{\mathbb{Y}} + \| T_2x \|_{\mathbb{Y}} \\ &\leq \| T_1 \| + \| T_2 \| . \end{aligned}$$

Remarque 2.1.2 [6] *Soit $T \in \mathbb{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ alors*

$$\begin{aligned} \| T \| &= \sup_{\| x \|_{\mathbb{X}} \leq 1} \{ \| Tx \|_{\mathbb{Y}} \} \\ &= \sup_{\| x \|_{\mathbb{X}} = 1} \{ \| Tx \|_{\mathbb{Y}} \} \\ &= \sup_{x \neq 0} \left\{ \frac{\| Tx \|_{\mathbb{Y}}}{\| x \|_{\mathbb{X}}} \right\} \\ &= \inf \{ M ; \| Tx \|_{\mathbb{Y}} \leq M \| x \|_{\mathbb{X}}, \text{ pour tout } x \in \mathbb{X} \}. \end{aligned}$$

Théorème 2.1.7 *Soient $(\mathbb{X}, \| \cdot \|_{\mathbb{X}})$ un espace normé et $(\mathbb{Y}, \| \cdot \|_{\mathbb{Y}})$ un espace de Banach. Alors $\mathbb{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ est un espace de Banach.*

Preuve.

On sait déjà que $\mathbb{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ est un espace normé. Il nous reste à montrer que $\mathbb{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ est complet. Soit $\{T_n; n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ une suite de Cauchy. Alors $\|T_n - T_m\| < \varepsilon$ si $n, m > n_0(\varepsilon)$. Pour $x \in \mathbb{X}$ fixé l'inégalité

$$\|T_n x - T_m x\|_{\mathbb{Y}} \leq \|T_n - T_m\| \cdot \|x\|_{\mathbb{X}} \leq \varepsilon \|x\|_{\mathbb{X}} \quad n, m > n_0(\varepsilon).$$

Montre que $\{T_n x; n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{Y}$ est une suite de Cauchy. Mais $(\mathbb{Y}, \|\cdot\|_{\mathbb{Y}})$ est un espace de Banach, donc $T_n x$ est convergente, i.e. $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n x$ existe pour tout $x \in \mathbb{X}$. Définissons l'application $T : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ par $Tx = \lim_{n \rightarrow +\infty} T_n x$, pour tout $x \in \mathbb{X}$. Montrons que $T \in \mathbb{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$.

D'abord T est linéaire parce que

$$\begin{aligned} T(\alpha x + \beta y) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} T_n(\alpha x + \beta y) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} (\alpha T_n x + \beta T_n y) \\ &= \alpha Tx + \beta Ty \end{aligned}$$

pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ et $x, y \in \mathbb{X}$.

D'autre part, nous avons

$$\|T_n x\|_{\mathbb{Y}} \leq M \|x\|_{\mathbb{X}}, \text{ pour tout } x \in \mathbb{X}.$$

Ce qui entraîne, pour $n \rightarrow \infty$, que

$$\|Tx\|_{\mathbb{Y}} \leq M \|x\|_{\mathbb{X}}, \text{ et donc } T \in \mathbb{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y}).$$

Enfin, montrons que $T_n \xrightarrow{\|\cdot\|} T$.

Nous avons

$$\begin{aligned} \|T_m x - T_n x\|_{\mathbb{Y}} &\leq \|T_m - T_n\| \cdot \|x\|_{\mathbb{X}} \\ &< \varepsilon \|x\|_{\mathbb{X}}. \end{aligned}$$

Si $n, m > n_0(\varepsilon)$ et pour tout $x \in \mathbb{X}$.

En fixant n , nous obtenons pour $m \rightarrow \infty$. Nous avons

$$\begin{aligned} \|Tx - T_n x\|_{\mathbb{Y}} &\leq \|T - T_n\| \cdot \|x\|_{\mathbb{X}} \\ &< \varepsilon \|x\|_{\mathbb{X}}, \text{ si } n > n_0(\varepsilon), \end{aligned}$$

et donc

$$\|T - T_n\| < \varepsilon, \text{ si } n > n_0(\varepsilon), \text{ c-à-d } T_n \xrightarrow{\|\cdot\|} T.$$

Corollaire 2.1.1 Soit $(\mathbb{X}, \|\cdot\|)$ un espace normé. Alors l'espace dual topologique $\mathbb{X}'$ est un espace de Banach. En effet $\mathbb{X}' = \mathbb{L}(\mathbb{X}, \mathbb{K})$ et $\mathbb{K}$ est un espace de Banach.

Théorème 2.1.8 Soit $T \in \mathbb{L}_a(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$. L'opérateur inverse T^{-1} existe et est continu sur $T\mathbb{X} \subset \mathbb{Y}$ si et seulement s'il existe un nombre $k > 0$, tel que

$$k \|x\|_{\mathbb{X}} \leq \|Tx\|_{\mathbb{Y}}, \text{ pour tout } x \in \mathbb{X}. \quad (2.5)$$

Preuve.

Si $\mathbb{X} = \{0_{\mathbb{X}}\}$ il n'y a rien à dire. Supposons donc que $\mathbb{X} \neq \{0_{\mathbb{X}}\}$

1. Soit $T^{-1} \in \mathbb{L}(T\mathbb{X}, \mathbb{X})$. Évidemment $T^{-1} \neq 0$.

$$\forall y \in T\mathbb{X}, \|T^{-1}y\|_{\mathbb{X}} \leq \|T^{-1}\| \cdot \|y\|_{\mathbb{Y}}$$

et donc, en posant $y = Tx$, nous obtenons

$$\|x\|_{\mathbb{X}} \leq \|T^{-1}\| \cdot \|Tx\|_{\mathbb{Y}},$$

parce que $\|T^{-1}\| > 0$, la relation 2.5 est montrée avec $k = \frac{1}{\|T^{-1}\|}$.

2. Supposons maintenant qu'on a (2.5). Alors

$$\ker(T) = \{x; Tx = 0\} = \{0_{\mathbb{X}}\},$$

donc T^{-1} existe sur $T\mathbb{X}$ et T^{-1} est linéaire.

Montrons que T^{-1} est continu

$$\forall x \in \mathbb{X} \quad k \|x\|_{\mathbb{X}} \leq \|Tx\|_{\mathbb{Y}}.$$

Soit $x = T^{-1}y$, i.e. $y = Tx$, alors

$$k \|T^{-1}y\|_{\mathbb{X}} \leq \|y\|_{\mathbb{Y}}$$

entraîne que

$$\|T^{-1}y\|_{\mathbb{X}} \leq \frac{1}{k} \|y\|_{\mathbb{Y}}, \quad \forall y \in T\mathbb{X}, \text{ et } T^{-1} \text{ est continu.}$$

Exemple 2.1.6 Soit T l'opérateur définie par : $C([a, b]) \rightarrow \mathbb{K}$ tq $Tx = \int_a^b x(t)dt$

avec $\|x\|_{\infty} = \max_{a \leq t \leq b} |x(t)|$.

Montrons que $T \in (C([a, b]))'$. En effet

$$\begin{aligned} \forall x, y \in C([a, b]) \quad \forall \lambda, \beta \in \mathbb{K} \quad T(\lambda x + \beta y) &= \int_a^b (\lambda x + \beta y)(t)dt \\ &= \int_a^b (\lambda x(t) + \beta y(t)) dt \\ &= \int_a^b \lambda x(t)dt + \int_a^b \beta y(t)dt \\ &= \lambda \int_a^b x(t)dt + \beta \int_a^b y(t)dt \\ &= \lambda Tx + \beta Ty. \end{aligned}$$

Donc T est linéaire.

T est bornée. En effet : $\forall x \in C([a, b])$ on a

$$\begin{aligned} \|Tx\| &= \left| \int_a^b x(t) dt \right| \\ &\leq \int_a^b |x(t)| dt \\ &\leq \max_{a \leq t \leq b} |x(t)| \int_a^b dt \\ &\leq (b-a) \|x\|_{\infty} . \\ \Rightarrow \frac{\|Tx\|}{\|x\|_{\infty}} &\leq (b-a), x \neq 0. \end{aligned}$$

Donc $\|T\|_{(C([a,b]))'} \leq b-a$.

Soit $x_0 \in C([a, b])$ tel que $x_0(t) = 1, \forall t \in [a, b]$. Donc $\|x_0\|_{\infty} = 1$.

En plus :

$$\begin{aligned} Tx_0 &= \int_a^b x_0(t) dt = \int_a^b dt = b-a \\ \Rightarrow \frac{\|Tx_0\|}{\|x_0\|_{\infty}} &= b-a \leq \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|_{\infty}} = \|T\|_{(C([a,b]))'} . \end{aligned}$$

Conclusion : $\|T\|_{(C([a,b]))'} = b-a$.

Théorème 2.1.9 (Hahn-Banach, forme analytique) [2] Soit E un espace linéaire sur $\mathbb{R}$ et $p : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une application vérifiant

$$p(\lambda x) = \lambda p(x), \forall x \in E \text{ et } \forall \lambda > 0. \quad (2.6)$$

$$p(x+y) \leq p(x) + p(y), \forall x, y \in E. \quad (2.7)$$

Soit d'autre part, $G \subset E$ un sous-espace linéaire et soit $g : G \longrightarrow \mathbb{R}$ une application linéaire tel que

$$g(x) \leq p(x), \forall x \in G. \quad (2.8)$$

Alors il existe une forme linéaire f définie sur E qui prolonge g , i.e.

$$g(x) = f(x), \forall x \in G$$

et telle que

$$f(x) \leq p(x), \forall x \in E. \quad (2.9)$$

Preuve. Pour la démonstration voir [2], page 1.

Corollaire 2.1.2 Soit G un sous-espace linéaire de E et soit $g : G \longrightarrow \mathbb{R}$ une application linéaire et continue. Alors il existe $f \in E'$ qui prolonge g et tel que

$$\|f\|_{E'} = \|g\|_{G'} .$$

Preuve. Appliquer le théorème 2.1.9 avec $p(x) = \|g\|_{G'} \cdot \|x\|_E$.

Corollaire 2.1.3 Pour tout $x_0 \in E$ il existe $f_0 \in E'$ tel que

$$\|f_0\|_{E'} = \|x_0\|_E, \text{ et } \langle f_0, x_0 \rangle = \|x_0\|_E^2.$$

Preuve. Appliquer le corollaire 2.1.2 avec $G = \mathbb{R}x_0$, et $g(tx_0) = t \|x_0\|_E^2$ de sorte que

$$\|g\|_{G'} = \|x_0\|_E.$$

Corollaire 2.1.4 Pour tout $x \in E$ on a

$$\|x\|_E = \sup_{\substack{f \in E' \\ \|f\|_{E'} \leq 1}} |\langle f, x \rangle| = \max_{\substack{f \in E' \\ \|f\|_{E'} \leq 1}} |\langle f, x \rangle|.$$

Preuve. Supposons que $x \neq 0$. Il est clair que

$$\sup_{\substack{f \in E' \\ \|f\|_{E'} \leq 1}} |\langle f, x \rangle| \leq \|x\|_E.$$

D'autre part (corollaire 2.1.3) on sait qu'il existe $f_0 \in E'$ tel que $\|f_0\|_{E'} = \|x\|_E$ et $\langle f_0, x \rangle = \|x\|_E^2$.

On pose $f_1 = \|x\|_E^{-1} f_0$ de sorte que $\|f_1\|_{E'} = 1$ et $\langle f_1, x \rangle = \|x\|_E$.

Théorème 2.1.10 (Banach-Steinhaus)[2] Soient E et F deux espaces de Banach. Soit $(T_i)_{i \in I}$ une famille (non nécessairement dénombrable) d'opérateurs linéaires et continues de E dans F . On suppose que

$$\sup_{i \in I} \|T_i x\| < \infty, \forall x \in E.$$

Alors

$$\sup_{i \in I} \|T_i\|_{\mathcal{L}(E, F)} < \infty.$$

Autrement dit, il existe une constante c telle que

$$\|T_i x\| \leq c \|x\|, \forall x \in E \forall i \in I.$$

Preuve. Pour la démonstration voir, [2], page 17.

Théorème 2.1.11 (Arzela-Ascoli)[12] Soit $(\mathbb{X}, \|\cdot\|_{\mathbb{X}})$ un espace norme compact, $(\mathbb{Y}, \|\cdot\|_{\mathbb{Y}})$ un espace norme complet. Une partie A de $C(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ est relativement compacte si et seulement si :

1. A est équicontinue, c'est-à-dire :

$$\forall x \in \mathbb{X}, \forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0 \forall f \in A, \forall y \in \mathbb{X} \quad \|x - y\|_{\mathbb{X}} < \eta \Rightarrow \|f(x) - f(y)\|_{\mathbb{Y}} < \epsilon.$$

2. Pour tout $x \in \mathbb{X}$, l'ensemble $A(x) = \{f(x); f \in A\}$ est relativement compact, (i.e. A est uniformément borné).

Preuve. Pour la démonstration voir, [12], page 346.

2.1.3 L'algèbre de Banach $\mathbb{L}(\mathbb{X})$

Si $(\mathbb{X}, \| \cdot \|)$ est un espace de Banach, alors $\mathbb{L}(\mathbb{X}) = \mathbb{L}(\mathbb{X}, \mathbb{X})$ muni de la norme introduite dans (2.4) est aussi un espace de Banach. De plus $\mathbb{L}(\mathbb{X})$ est une algèbre linéaire avec identité.

Définition 2.1.6 Une algèbre linéaire $\mathbb{X}$ munie d'une norme s'appelle une algèbre normée si on a pour tout $x, y \in \mathbb{X}$

$$\| x \cdot y \| \leq \| x \| \cdot \| y \| . \quad (2.10)$$

Remarque 2.1.3 La condition (2.10) assure la continuité du produit de deux vecteurs dans une algèbre linéaire. En effet, si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \| x_n - x_0 \| = 0$, et $\lim_{n \rightarrow \infty} \| y_n - y_0 \| = 0$

$$\begin{aligned} \| x_n y_n - x_0 y_0 \| &= \| x_n y_n - x_0 y_n + x_0 y_n - x_0 y_0 \| \\ &\leq \| x_n - x_0 \| \cdot \| y_n \| + \| x_0 \| \cdot \| y_n - y_0 \| \longrightarrow 0 \text{ lorsque } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Définition 2.1.7 Un algèbre de Banach est une algèbre normée qui est complète par rapport à la norme, i.e. Un espace de Banach.

Théorème 2.1.12 Soit $(\mathbb{X}, \| \cdot \|)$ un espace de Banach. Alors $\mathbb{L}(\mathbb{X})$ est un algèbre de Banach .

Preuve. Nous savons déjà que $\mathbb{X}$ est un espace de Banach et que $\mathbb{X}$ est une algèbre linéaire avec identité. Il nous reste à montrer que pour $T_1, T_2 \in \mathbb{L}(\mathbb{X})$ on a

$$\| T_1 \circ T_2 \| \leq \| T_1 \| \cdot \| T_2 \| .$$

Soient donc $T_1, T_2 \in \mathbb{L}(\mathbb{X})$. Alors

$$\begin{aligned} \| (T_1 \circ T_2)x \| &= \| T_1(T_2 x) \| \\ &\leq \| T_1 \| \cdot \| T_2 x \| \\ &\leq \| T_1 \| \cdot \| T_2 \| \cdot \| x \| \end{aligned}$$

$\forall x \in \mathbb{X}$ donc $T_1 \circ T_2 \in \mathbb{L}(\mathbb{X})$, et $\| T_1 \circ T_2 \| \leq \| T_1 \| \cdot \| T_2 \|$.

2.1.4 Opérateur régulier

Définition 2.1.8 Soient $(\mathbb{X}, \| \cdot \|)$ un espace de Banach. Un opérateur $T \in \mathbb{L}(\mathbb{X})$ est régulier, si

a) $T\mathbb{X} = \mathbb{X}$.

b) T^{-1} existe sur $\mathbb{X}$, et $T^{-1} \in \mathbb{L}(\mathbb{X})$.

L'ensemble d'opérateurs réguliers sur $\mathbb{X}$ est noté par $\mathbb{L}_r(\mathbb{X})$.

Exemple 2.1.7 Soit $\mathbb{X} = l^2(\mathbb{C})$, et considérons l'opérateur de déplacement $T_s \in \mathbb{L}(\mathbb{X})$ défini par

$$T_s x = T_s((\zeta_1, \zeta_2, \dots)) = (0, \zeta_1, \zeta_2, \dots).$$

Alors T_s est injective et $T_s^{-1} \in \mathbb{L}(T_s \mathbb{X})$, mais pas dans $\mathbb{L}(\mathbb{X})$, donc T_s n'est pas régulier.

Exemple 2.1.8 Considérons $(\mathbb{X} = C[a, b], \|\cdot\|_\infty)$, et $T \in \mathbb{L}(\mathbb{X})$ défini par

$$T(f)(t) = tf(t), \quad f \in \mathbb{X}.$$

Alors $T \in \mathbb{L}_r(\mathbb{X})$, si et seulement si $0 \notin [a, b]$.

Théorème 2.1.13 Soient $T_1, T_2 \in \mathbb{L}_r(\mathbb{X})$ alors $T_1 \circ T_2 \in \mathbb{L}_r(\mathbb{X})$, et $\lambda T_1 \in \mathbb{L}_r(\mathbb{X})$ pour tout $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$.

Preuve. Montrons d'abord que $T_1 \circ T_2$ admet une inverse sur $\mathbb{X}$, et que

$$(T_1 \circ T_2)^{-1} = T_2^{-1} \circ T_1^{-1}.$$

En effet

$$(T_1 \circ T_2)\mathbb{X} = T_1\mathbb{X} = \mathbb{X}$$

et

$$(T_1 \circ T_2) \circ (T_2^{-1} \circ T_1^{-1}) = (T_2^{-1} \circ T_1^{-1}) \circ (T_1 \circ T_2) = I_{\mathbb{X}}.$$

Puis que l'élément inverse, s'il existe, est unique

$$(T_1 \circ T_2)^{-1} = T_2^{-1} \circ T_1^{-1}.$$

D'autre part

$$\|(T_1 \circ T_2)^{-1}\| = \|T_2^{-1} \circ T_1^{-1}\| \leq \|T_2^{-1}\| \cdot \|T_1^{-1}\| < \infty.$$

Ce qui montre que $T_1 \circ T_2 \in \mathbb{L}_r(\mathbb{X})$. Si $\lambda \neq 0$, $(\lambda T_1)^{-1} = 1/\lambda T_1^{-1}$ et

$$\|(\lambda T_1)^{-1}\| = \frac{1}{|\lambda|} \|T_1^{-1}\| < \infty.$$

Donc $\lambda T_1 \in \mathbb{L}_r(\mathbb{X})$, pour tout $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$.

2.1.5 Opérateur compact

Soient $(\mathbb{X}, \|\cdot\|_{\mathbb{X}})$ un espace normé et $(\mathbb{Y}, \|\cdot\|_{\mathbb{Y}})$ un espace de Banach.

Définition 2.1.9 Un opérateur linéaire $T \in \mathbb{L}_a(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ est compact ou complètement continu si l'image de chaque ensemble borné de $\mathbb{X}$ est relativement compact dans $\mathbb{Y}$.

Notons par $\mathbb{L}_c(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) \subset \mathbb{L}_a(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ l'ensemble des opérateurs linéaires compacts de $\mathbb{X}$ dans $\mathbb{Y}$.

Remarque 2.1.4 Si $T \in \mathbb{L}_c(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ alors $T \in \mathbb{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ i.e. Un opérateur linéaire compact est continu.

Exemple 2.1.9 On définit l'opérateur T comme suit $T : C([0, 1]) \rightarrow C([0, 1])$ tq

$$Tf(x) = \int_0^1 K(x, t)f(t)dt$$

où $K : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ est continu.

On montre :

1) T est un opérateur linéaire compact.

2) Dans le cas $K(x, t) = e^{x+t}$ détermine la norme de T .

Solution :

1) La boule unité dans $C([0, 1])$ est $B_F(0, 1) = \{f \in C([0, 1]); \|f\|_\infty \leq 1\}$.

Pour montrer que $TB_F(0, 1)$ est relativement compact dans $C([0, 1])$ on, utilise le théorème d'Arzela-Ascoli 2.1.11.

i) $TB_F(0, 1)$ est uniformément borné : En effet $\forall f \in B_F(0, 1)$ on a

$$\begin{aligned} |Tf(x)| &= \left| \int_0^1 K(x, t) f(t) dt \right| \\ &\leq \int_0^1 |K(x, t)| |f(t)| dt \\ &\leq \|f\|_\infty \int_0^1 |K(x, t)| dt \\ &\leq \int_0^1 |K(x, t)| dt \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sup_{f \in B_F(0, 1)} |Tf(x)| \leq \sup_{x \in [0, 1]} \int_0^1 |K(x, t)| dt.$$

On pose $M = \sup_{x \in [0, 1]} \int_0^1 |K(x, t)| dt$ on trouve $\|Tf\| \leq M$. D'où $TB_F(0, 1)$ est uniformément borné.

ii) $TB_F(0, 1)$ est équicontinu : En effet $\forall f \in B_F(0, 1)$ et pour tous $x, y \in [0, 1]$ on a

$$\begin{aligned} |Tf(y) - Tf(x)| &= \left| \int_0^1 (K(y, t) - K(x, t)) f(t) dt \right| \\ &\leq \|f\|_\infty \int_0^1 |K(y, t) - K(x, t)| dt \\ &\leq \int_0^1 |K(y, t) - K(x, t)| dt \\ &< \int_0^1 \epsilon dt = \epsilon. \end{aligned}$$

Donc $\exists \delta = \epsilon$ tel que $|y - x| < \delta$, d'où $TB_F(0, 1)$ est équicontinu.

2) Déterminons la norme de T on a

$$\begin{aligned} |Tf(x)| &= \left| \int_0^1 e^{x+t} f(t) dt \right| \\ &= e^x \left| \int_0^1 e^t f(t) dt \right| \\ &\leq e^x \|f\|_\infty \int_0^1 e^t dt \\ &\leq e(e - 1) \|f\|_\infty \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \|Tf\|_\infty \leq e(e - 1) \|f\|_\infty. \text{ Donc } \|T\| \leq e(e - 1).$$

Maintenant, on montre $\|T\| \geq e(e - 1)$, on prend $g(x) = 1 \forall x \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} Tg(x) &= \int_0^1 e^{x+t} dt \\ &= e^x \int_0^1 e^t dt. \end{aligned}$$

Donc $\|T\| \geq \|Tg\|_\infty = e(e-1)$, alors

$$\|T\| = e(e-1).$$

2.1.6 Convergence dans $(\mathbb{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y}), \|\cdot\|)$

Définition 2.1.10 Soient $\{T_n; n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ et $T \in \mathbb{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$.

a) La suite $\{T_n; n \in \mathbb{N}\}$ converge en norme, ou uniformément vers T si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n - T\| = 0,$$

et nous écrivons $T_n \xrightarrow{u} T$.

b) La suite $\{T_n; n \in \mathbb{N}\}$ converge ponctuellement vers T si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n x - T x\|_{\mathbb{Y}} = 0, \text{ pour tout } x \in \mathbb{X}.$$

Et nous écrivons $T_n \xrightarrow{s} T$.

c) La suite $\{T_n; n \in \mathbb{N}\}$ converge faiblement vers T si

$$x'(T_n x) \rightarrow x'(T x),$$

pour tout $x' \in \mathbb{Y}'$ et pour tout $x \in \mathbb{X}$, et nous écrivons $T_n \xrightarrow{w} T$.

Exemple 2.1.10 Soit $(T_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{L}(l^2(\mathbb{C}))$ défini par :

$$T_n(x_1, x_2, \dots) = \left(\frac{1}{n}x_1, \frac{1}{n}x_2, \dots\right), \quad n \in \mathbb{N}^*$$

On a :

$$\begin{aligned} \|T_n\| &= \sup_{\|x\|_{l^2} \leq 1} \|T_n x\|_{l^2} \\ &= \sup_{\|x\|_{l^2} \leq 1} \left\| \left(\frac{1}{n}x_1, \frac{1}{n}x_2, \dots\right) \right\|_{l^2} \\ &= \frac{1}{n} \sup_{\|x\|_{l^2} \leq 1} \|(x_1, x_2, \dots)\|_{l^2} \\ &= \frac{1}{n} \sup_{\|x\|_{l^2} \leq 1} \|x\|_{l^2} \leq \frac{1}{n} \longrightarrow 0 \text{ prend } n \longrightarrow \infty. \end{aligned}$$

Donc $\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n\| = 0$ c'est-à-dire $T_n \xrightarrow{u} 0$.

Exemple 2.1.11 Considérons la suite d'opérateurs linéaires bornés $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ défini de $l^2(\mathbb{C})$ vers $l^2(\mathbb{C})$ comme suit :

$$T_n(x_1, x_2, \dots) = (0, 0, \dots, 0, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots).$$

On va montrer $\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n x\|_{l^2} = 0 \quad \forall x \in l^2(\mathbb{C})$ on a

$$\|T_n x\|_{l^2}^2 = \sum_{i=n+1}^{\infty} |x_i|^2 \longrightarrow 0 \text{ prend } n \longrightarrow \infty.$$

Donc $T_n \xrightarrow{s} 0$.

Exemple 2.1.12 Considérons la suite des opérateurs suivante :

$$T_n : \mathbb{R} \longrightarrow l^2(\mathbb{C})$$

$$s \longmapsto se_n$$

tel que $e_n = (0, 0, \dots, \underbrace{1}_{\text{rang } n}, \dots)$ on va montrer $x'(T_ns) \longrightarrow 0$ prend $n \longrightarrow \infty$, $\forall x' \in (l^2(\mathbb{C}))' \forall s \in \mathbb{R}$
on a

$$\begin{aligned} x'(T_n x) &= x'(se_n) \\ &= sx'(e_n) \\ &= sx'(0, 0, \dots, \underbrace{1}_{\text{rang } n}, \dots). \end{aligned}$$

Donc $\lim_{n \rightarrow \infty} x'(T_ns) = 0 \Rightarrow T_n \xrightarrow{w} 0$.

Théorème 2.1.14 a) $T_n \xrightarrow{u} T$ entraîne que $T_n \xrightarrow{s} T$.

b) $T_n \xrightarrow{s} T$ entraîne que $T_n \xrightarrow{w} T$.

Preuve.

a) Nous avons pour tout $x \in \mathbb{X}$

$$\|T_n x - Tx\|_{\mathbb{Y}} = \|(T_n - T)x\|_{\mathbb{Y}} \leq \|T_n - T\| \cdot \|x\|_{\mathbb{X}} \rightarrow 0, \text{ si } n \rightarrow \infty.$$

b) Nous avons pour tout $x' \in \mathbb{Y}'$, et pour tout $x \in \mathbb{X}$ fixé

$$\begin{aligned} |x'(T_n x) - x'(Tx)| &= |x'((T_n - T)x)| \\ &\leq \|x'\| \cdot \|T_n x - Tx\|_{\mathbb{Y}} \rightarrow 0, \text{ si } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Remarque 2.1.5 $T_n \xrightarrow{s} T$ n'entraîne pas $T_n \xrightarrow{u} T$. Considérons $\mathbb{X} = \mathbb{Y} = l^2$, et soit $T_n \in \mathbb{L}(\mathbb{X})$ la projection orthogonale de $\mathbb{X}$ sur $\langle e_{n+1}, e_{n+2}, \dots \rangle$, i.e.

$$T_n((\zeta_1, \zeta_2, \dots)) = (\underbrace{0, 0, \dots, 0}_n, \zeta_{n+1}, \zeta_{n+2}, \dots).$$

Alors nous avons pour tout $x \in \mathbb{X}$,

$$\|(T_n - 0)x\|_2^2 = \sum_{k=n+1}^{\infty} |\zeta_k|^2 \rightarrow 0, \text{ si } n \rightarrow \infty,$$

et $T_n \xrightarrow{s} T = 0$. Mais d'autre part,

$$\|T_n\| \geq \|T_n e_{n+1}\|_2 = 1 \not\rightarrow 0$$

c-à-d. $T_n \not\xrightarrow{u} T = 0$.

Remarque 2.1.6 $T_n \xrightarrow{w} T$ n'entraîne pas $T_n \xrightarrow{s} T$.

Remarque 2.1.7 Rappelons qu'une suite $\{x_n; n \in \mathbb{N}\}$ d'éléments d'un espace normé $(\mathbb{X}, \|\cdot\|)$ converge en normé vers un élément $x \in \mathbb{X}$ si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0.$$

De plus la suite $\{x_n; n \in \mathbb{N}\}$ converge faiblement vers x si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Tx_n = Tx \quad \forall T \in \mathbb{X}'.$$

comme dans les cas précédents la convergence en norme implique la convergence faible mais pas inversement.

2.1.7 Théorème du graphe fermé

Définition 2.1.11 Soient $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ deux espaces linéaires sur le même corps $\mathbb{K}$, et $T \in \mathbb{L}_a(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$. Alors le graphe de l'opérateur linéaire T est l'ensemble

$$G(T) = \{(x, Tx); x \in \mathbb{X}\} \subset \mathbb{X} \times \mathbb{Y}.$$

Définition 2.1.12 Soient $(\mathbb{X}, \|\cdot\|_{\mathbb{X}})$ et $(\mathbb{Y}, \|\cdot\|_{\mathbb{Y}})$ deux espaces normés, et $T \in \mathbb{L}_a(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$. Alors T est opérateur linéaire avec un graphe fermé si pour tout $x_0 \in \mathbb{X}$;

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x_0\|_{\mathbb{X}} = 0 \\ \text{et} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \|Tx_n - y_0\|_{\mathbb{Y}} = 0 \end{array} \right. \Rightarrow y_0 = Tx_0.$$

Observons que $T \in \mathbb{L}_a(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ est un graphe fermé si et seulement si son graphe

$G(T) = \{(x, Tx); x \in \mathbb{X}\}$ est un ensemble fermé dans $\mathbb{X} \times \mathbb{Y}$.

Théorème 2.1.15 [5] Soient $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ deux espaces de Banach, et $T \in \mathbb{L}_a(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$. Alors $T \in \mathbb{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ si et seulement si T est un opérateur avec un graphe fermé.

Preuve. Pour la démonstration voir, [5], page 380.

2.2 Opérateurs linéaires sur un espace de Hilbert

2.2.1 Formes bilinéaires et formes quadratiques

Définition 2.2.1 Soit $\mathbb{X}$ un espace linéaire sur $\mathbb{K}$. Une application f de $\mathbb{X} \times \mathbb{X}$ dans $\mathbb{K}$ est une forme bilinéaire si $f(x, y)$ est linéaire en x et anti-linéaire en y ; en d'autres mots, si

i) Pour tout $x_1, x_2, y \in \mathbb{X}$ nous avons

$$f(x_1 + x_2, y) = f(x_1, y) + f(x_2, y).$$

ii) Pour tout $x, y_1, y_2 \in \mathbb{X}$ nous avons

$$f(x, y_1 + y_2) = f(x, y_1) + f(x, y_2).$$

iii) Pour tout $x, y \in \mathbb{X}$, et $\lambda \in \mathbb{K}$ nous avons

$$f(\lambda x, y) = \lambda f(x, y) \text{ et } f(x, \lambda y) = \bar{\lambda} f(x, y).$$

Définition 2.2.2 Soit $\mathbb{X}$ un espace linéaire sur $\mathbb{C}$. Une forme bilinéaire f est dit hermitienne si on a pour tout $x, y \in \mathbb{X}$

$$f(x, y) = \overline{f(y, x)}.$$

Définition 2.2.3 Soit $\mathbb{X}$ un espace linéaire sur $\mathbb{R}$. Une forme bilinéaire f est dit symétrique si on a pour tout $x, y \in \mathbb{X}$

$$f(x, y) = f(y, x).$$

Exemple 2.2.1 Soit $\mathbb{H}$ un espace de Hilbert sur $\mathbb{K}$. Alors le produit scalaire est une forme bilinéaire hermitienne si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ est symétrique si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Définition 2.2.4 Soit $\mathbb{X}$ un espace normé. Une forme bilinéaire f est bornée sur $\mathbb{X} \times \mathbb{X}$ s'il existe un $M > 0$ tel que

$$|f(x, y)| \leq M \|x\| \cdot \|y\| \quad (2.11)$$

Pour tout x et $y \in \mathbb{X}$. Il est facile à vérifier que l'ensemble de formes bilinéaires forment un espace vectoriel par rapport aux opérations habituelles de fonctions et si $\mathbb{X}$ est un espace normé, l'ensemble de formes bilinéaires bornées est un sous-espace que nous pouvons munir d'une norme de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \|f\| &= \inf\{M; \text{tel que (2.11) est satisfait}\} \\ &= \sup\{|f(x, y)|; \|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1\} \\ &= \sup\{|f(x, y)|; \|x\| = 1, \|y\| = 1\} \\ &= \sup\{(|f(x, y)|) / (\|x\| \cdot \|y\|); x \neq 0, y \neq 0\}. \end{aligned}$$

Définition 2.2.5 Soit f une forme bilinéaire sur $\mathbb{X}$. Alors l'application $\hat{f} : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$ définie par

$$\hat{f}(x) = f(x, x)$$

est appelée une forme quadratique sur $\mathbb{X}$.

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, si on connaît la forme quadratique $\hat{f}$. On peut récupérer la forme bilinéaire.

En effet l'équation

$$\hat{f}(x + y) = f(x + y, x + y) = \hat{f}(x) + f(x, y) + f(y, x) + \hat{f}(y)$$

nous donne

$$\hat{f}(x+y) - \hat{f}(x-y) = 2f(x,y) + 2f(y,x)$$

et

$$\hat{f}(x+iy) - \hat{f}(x-iy) = -2if(x,y) + 2if(y,x)$$

ce que entraîne que

$$f(x,y) = \frac{1}{4} \left(\hat{f}(x+y) - \hat{f}(x-y) + i\hat{f}(x+iy) - i\hat{f}(x-iy) \right)$$

et f est unique.

Théorème 2.2.1 Soit $\mathbb{X}$ un espace linéaire sur $\mathbb{C}$, et f une forme bilinéaire. Alors f est hermitienne si et seulement si

$$\hat{f}(x) = f(x,x) \in \mathbb{R}, \text{ pour tout } x \in \mathbb{X}.$$

Preuve.

a) Si $f(x,y) = \overline{f(y,x)}$ pour tout $x,y \in \mathbb{X}$, alors

$$f(x,x) = \overline{f(x,x)}$$

et donc $f(x,x) \in \mathbb{R}$ pour tout $x \in \mathbb{X}$.

b) Soit $f(x,x) \in \mathbb{R}$ pour tout $x \in \mathbb{X}$. Alors nous avons pour tout $x,y \in \mathbb{X}$

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \frac{1}{4} \left(\hat{f}(x+y) - \hat{f}(x-y) + i\hat{f}(x+iy) - i\hat{f}(x-iy) \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(\hat{f}(y+x) - \hat{f}(y-x) - i\hat{f}(y+ix) + i\hat{f}(y-ix) \right) \\ &= \overline{f(y,x)}. \end{aligned}$$

et f est hermitienne.

Soit maintenant $\mathbb{X}$ un espace normé. Nous avons introduit une normé pour les formes bilinéaires bornées. De même nous pouvons le faire pour des formes quadratiques bornées, i.e. Pour les formes quadratiques $\hat{f}$, pour les quelles il existe un $M(\hat{f}) > 0$ tel qu'on ait pour tout $x \in \mathbb{X}$

$$|\hat{f}(x)| \leq M(\hat{f}) \|x\|^2. \quad (2.12)$$

Nous définissons cette normé par

$$\begin{aligned} \|\hat{f}\| &= \inf\{M(\hat{f}); \text{ tel que (2.12) est satisfait} \} \\ &= \sup\{|\hat{f}(x)|; \|x\| \leq 1\} \\ &= \sup\{|\hat{f}(x)|; \|x\| = 1\} \\ &= \sup\{|\hat{f}(x)| / \|x\|^2; x \neq 0\}. \end{aligned}$$

Théorème 2.2.2 Soit $\mathbb{X}$ un espace linéaire sur $\mathbb{C}$. Alors une forme bilinéaire f est bornée si et seulement si la forme quadratique associée à $\hat{f}$ est bornée, et nous avons

$$\|\hat{f}\| \leq \|f\| \leq 4 \|\hat{f}\|.$$

Preuve.

La première inégalité étant évidente, nous montrons $\|f\| \leq 4 \|\hat{f}\|$. En effet

$$|f(x, y)| \leq \frac{\|\hat{f}\|}{4} \left(\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 + \|x + iy\|^2 + \|x - iy\|^2 \right) \leq \|\hat{f}\| (\|x\| + \|y\|)^2 \quad (2.13)$$

ce qui entraîne que

$$\begin{aligned} \|f\| &= \sup\{|f(x, y)|; \|x\|=1, \|y\|=1\} \\ &\leq 4 \|\hat{f}\|. \end{aligned}$$

Remarque 2.2.1 Si $\mathbb{X} = \mathbb{H}$ est un espace de Hilbert sur $\mathbb{C}$, la loi du parallélogramme (1.5) appliquée à (2.13) nous donne

$$\|\hat{f}\| \leq \|f\| \leq 2 \|\hat{f}\|.$$

Remarque 2.2.2 Soit $\mathbb{X} = \mathbb{H}$ est un espace de Hilbert sur $\mathbb{R}$, et f une forme bilinéaire symétrique. Alors on a

$$\|f\| = \|\hat{f}\|.$$

En effet nous appliquons la loi du parallélogramme (1.5) à

$$|f(x, y)| \leq \frac{\|\hat{f}\|}{2} (\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2).$$

Théorème 2.2.3 Soit $\mathbb{H}$ un espace de Hilbert sur $\mathbb{C}$, et f une forme bilinéaire hermitienne, et bornée sur $\mathbb{H}$. Alors on a

$$\|f\| = \|\hat{f}\|.$$

Preuve. Il nous reste à montrer que $\|f\| \leq \|\hat{f}\|$. Fixons deux éléments x , et $y \in \mathbb{H}$ tels que $f(x, y) \neq 0$, et soit $e^{i\alpha} = f(x, y) / |f(x, y)|$. Alors nous avons

$$\begin{aligned} |f(x, y)| &= f(e^{-i\alpha}x, y) \\ &= \frac{1}{4} \left(\hat{f}(e^{-i\alpha}x + y) - \hat{f}(e^{-i\alpha}x - y) \right) \end{aligned}$$

et donc en utilisant la loi de parallélogramme (1.5) à

$$|f(x, y)| \leq \frac{\|\hat{f}\|}{4} (\|e^{-i\alpha}x + y\|^2 + \|e^{-i\alpha}x - y\|^2)$$

nous obtenons

$$|f(x, y)| \leq \frac{\|\hat{f}\|}{2} (\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

et donc

$$\|f\| \leq \|\hat{f}\|.$$

Définition 2.2.6 Soit $\mathbb{X}$ un espace linéaire sur $\mathbb{K}$. Une forme quadratique est dite positive, si $\hat{f}(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{X}$.

Rappelons que la forme bilinéaire f sur $\mathbb{X}$, associée à une telle $\hat{f}$ est nécessairement hermitienne, si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

Exemple 2.2.2 Le carré d'une norme déduite d'un produit scalaire d'un espace de Hilbert, est une forme quadratique positive.

Théorème 2.2.4 (Riesz)[11, 1, 10] Si $\mathbb{H}$ est un espace de Hilbert sur le corps $\mathbb{K}$ et si $x' \in \mathbb{H}'$, alors il existe un unique $y \in \mathbb{H}$, tel que

$$x'(x) = \langle x, y \rangle, \text{ pour tout } x \in \mathbb{H}, \quad (2.14)$$

et de plus

$$\|x'\|_{\mathbb{H}'} = \|y\|_{\mathbb{H}}. \quad (2.15)$$

Preuve. Pour la démonstration voir, [11], page 123.

Théorème 2.2.5 Soient $\mathbb{H}$ un espace de Hilbert sur $\mathbb{K}$, et f une forme bilinéaire bornée sur $\mathbb{H}$. Alors il existe un et seulement un $T \in \mathcal{L}(\mathbb{H})$ tel que

$$f(x, y) = \langle x, Ty \rangle \text{ pour tout } x, y \in \mathbb{H}.$$

Preuve.

Fixons $y \in \mathbb{H}$. Alors $x'_y(x) = f(x, y) \in \mathbb{H}'$. D'après le théorème de Riesz (voir 2.2.4) il existe un élément unique $z(y) \in \mathbb{H}$ tel que $x'_y(x) = \langle x, z(y) \rangle$. Il nous faut montrer que l'application $y \rightarrow Ty = z(y)$ est dans $\mathcal{L}(\mathbb{H})$. En effet nous avons pour tout $x \in \mathbb{H}$

$$\begin{aligned} \langle x, z(y_1 + y_2) \rangle &= f(x, y_1 + y_2) \\ &= f(x, y_1) + f(x, y_2) \\ &= \langle x, z(y_1) \rangle + \langle x, z(y_2) \rangle \end{aligned}$$

ce qui entraîne que

$$z(y_1 + y_2) = z(y_1) + z(y_2).$$

D'autre part nous avons pour tout $x \in \mathbb{H}$, et $\alpha \in \mathbb{K}$ fixé

$$\begin{aligned}\langle x, z(\alpha y) \rangle &= f(x, \alpha y) = \bar{\alpha} f(x, y) \\ &= \bar{\alpha} \langle x, z(y) \rangle = \langle x, \alpha z(y) \rangle,\end{aligned}$$

ce qui montre que

$$z(\alpha y) = \alpha z(y).$$

Pour montrer que z est borné. Nous avons pour tout $y \in \mathbb{H}$

$$\begin{aligned}\|z(y)\|^2 &= \langle z(y), z(y) \rangle \\ &= f(z(y), y) \\ &\leq \|f\| \|z(y)\| \|y\| \\ \Rightarrow \|z(y)\| &\leq \|f\| \|y\|\end{aligned}$$

Remarque 2.2.3 Soient $\mathbb{H}$ un espace de Hilbert sur $\mathbb{K}$, et f une forme bilinéaire bornée sur $\mathbb{H}$. Alors il existe un et seulement un $T' \in \mathcal{L}(\mathbb{H})$, tel que

$$f(x, y) = \langle T' x, y \rangle \text{ pour tout } x, y \in \mathbb{H}.$$

Théorème 2.2.6 Soit $T \in \mathcal{L}(\mathbb{H})$. Alors

$$\|T\| = \sup\{\langle Tx, y \rangle; \|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1\}.$$

Preuve.

L'inégalité

$$\begin{aligned}|\langle Tx, y \rangle| &\leq \|Tx\| \cdot \|y\| \\ &\leq \|T\| \cdot \|x\| \cdot \|y\|,\end{aligned}$$

montre que

$$\sup\{\langle Tx, y \rangle; \|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1\} \leq \|T\|.$$

Pour obtenir l'inégalité dans l'autre sens, nous prenons

$$y = Tx / \|Tx\|, \quad \|Tx\| \neq 0$$

et nous avons

$$\begin{aligned}\|T\| &= \sup\{\|Tx\|; \|x\| \leq 1\} \\ &= \sup\{\langle Tx, Tx / \|Tx\| \rangle; \|x\| \leq 1\} \\ &\leq \sup\{\langle Tx, y \rangle; \|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1\}.\end{aligned}$$

Corollaire 2.2.1 Soient $T \in \mathbb{L}(\mathbb{H})$, et $f(x, y) = \langle x, Ty \rangle$. Alors

$$\begin{aligned} \|T\| &= \sup\{\langle x, Ty \rangle; \|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1\} \\ &= \|f\|. \end{aligned}$$

2.2.2 Théorème de Lax-Milgram

Avant d'énoncer le théorème on fait les hypothèses suivantes :

- 1) L est une forme linéaire définie sur $\mathbb{H}$ de plus, L est continue, i.e. il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\forall v \in \mathbb{H}, |L(v)| \leq C \|v\|_{\mathbb{H}}.$$

- 2) a est une forme bilinéaire définie sur $\mathbb{H} \times \mathbb{H}$ vérifiant de plus

- i) a est continue sur $\mathbb{H} \times \mathbb{H}$, i.e. il existe une constante $M > 0$ telle que

$$\forall (u, v) \in \mathbb{H} \times \mathbb{H}, |a(u, v)| \leq M \|u\|_{\mathbb{H}} \cdot \|v\|_{\mathbb{H}}.$$

- ii) a est coercive i.e. il existe une constante $\alpha > 0$ telle que

$$\forall u \in \mathbb{H}, a(u, u) \geq \alpha \|u\|_{\mathbb{H}}^2.$$

Théorème 2.2.7 [7] Soient $\mathbb{H}$ un espace de Hilbert réel, a une forme bilinéaire, continue et coercive sur $\mathbb{H}$ et L une forme linéaire continue sur $\mathbb{H}$. Alors, il existe un unique élément u de $\mathbb{H}$ solution du problème

$$L(v) = a(u, v) \quad \forall v \in \mathbb{H}.$$

De plus si a est symétrique, u est l'unique solution du problème de minimisation suivant :

$$J(u) \leq J(v) \quad \forall v \in \mathbb{H}$$

où J est définie sur $\mathbb{H}$ par

$$J(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - L(v) \quad \forall v \in \mathbb{H}.$$

2.2.3 Opérateur adjoint

Définition 2.2.7 L'adjoint de l'opérateur $T \in \mathbb{L}(\mathbb{H})$ est l'opérateur $T^* \in \mathbb{L}(\mathbb{H})$

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle.$$

Théorème 2.2.8 Soit $T \in \mathbb{L}(\mathbb{H})$, il existe un unique opérateur $T^* \in \mathbb{L}(\mathbb{H})$, pour tout $x, y \in \mathbb{H}$

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle.$$

Preuve.

Soit y donné dans $\mathbb{H}$, l'application $x \rightarrow \langle Tx, y \rangle$ est forme linéaire continue sur $\mathbb{H}$. Par le théorème 2.2.4, il suit qu'il existe un unique $z \in \mathbb{H}$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{H}$, on ait $\langle Tx, y \rangle = \langle x, z \rangle$. On note $z = T^*y$. T^* est bien défini, et ce de manière unique, en tant qu'application de $\mathbb{H}$ dans $\mathbb{H}$ car pour y donné, on définit z , l'image de y par T^* , de façon unique. Montrons que T^* est linéaire

$$\begin{aligned} \langle x, T^*(\alpha y_1 + \beta y_2) \rangle &= \langle Tx, \alpha y_1 + \beta y_2 \rangle \\ &= \langle Tx, \alpha y_1 \rangle + \langle Tx, \beta y_2 \rangle \\ &= \bar{\alpha} \langle Tx, y_1 \rangle + \bar{\beta} \langle Tx, y_2 \rangle \\ &= \bar{\alpha} \langle x, T^*y_1 \rangle + \bar{\beta} \langle x, T^*y_2 \rangle \\ &= \langle x, \alpha T^*y_1 + \beta T^*y_2 \rangle. \end{aligned}$$

D'où pour tout $x \in \mathbb{H}$,

$$\langle x, T^*(\alpha y_1 + \beta y_2) \rangle = \langle x, \alpha T^*y_1 + \beta T^*y_2 \rangle.$$

Montrons maintenant que T^* est borné.

$$\begin{aligned} \|T^*y\|^2 &= \langle T^*y, T^*y \rangle = \langle TT^*y, y \rangle \leq \|TT^*y\| \cdot \|y\| \leq \|T\| \cdot \|T^*y\| \cdot \|y\| \\ &\Rightarrow \|T^*y\| \leq \|T\| \cdot \|y\|. \end{aligned}$$

Alors T^* est borné et de plus

$$\|T^*\| \leq \|T\| \tag{2.16}$$

il suit que $T^* \in \mathbb{L}(\mathbb{H})$.

Exemple 2.2.3 1. L'adjoint de l'opérateur identité $I_{\mathbb{H}}$ est $I_{\mathbb{H}}^* = I_{\mathbb{H}}$ car :

$$\langle I_{\mathbb{H}}x, y \rangle = \langle x, I_{\mathbb{H}}^*y \rangle \quad \forall x, y \in \mathbb{H}.$$

2. soit $T \in \mathbb{L}(\mathbb{H})$ définie par

$$\begin{aligned} T : \mathbb{H} &\longrightarrow \mathbb{H} \\ x &\longmapsto \langle x, a \rangle b \end{aligned}$$

où $a, b \in \mathbb{C}$.

Soit $x, y \in \mathbb{H}$

$$\begin{aligned} \langle Tx, y \rangle &= \langle \langle x, a \rangle b, y \rangle \\ &= \langle x, a \rangle \langle b, y \rangle \\ &= \langle x, a \overline{\langle b, y \rangle} \rangle \\ &= \langle x, a \langle y, b \rangle \rangle. \end{aligned}$$

Donc $T^*x = a \langle x, b \rangle$.

3. On considère opérateur shift $S : l^2(\mathbb{C}) \rightarrow l^2(\mathbb{C})$ défini par :

$$S(x_1, x_2, \dots) = (0, x_1, x_2, \dots).$$

Soit x et y dans $l^2(\mathbb{C})$: Alors

$$\begin{aligned} \langle x, S^* y \rangle &= \langle Sx, y \rangle \\ &= \langle (0, x_1, x_2, \dots), (y_1, y_2, \dots) \rangle \\ &= x_1 \bar{y}_2 + x_2 \bar{y}_3 + \dots \\ &= \langle (x_1, x_2, \dots), (y_2, y_3, \dots) \rangle. \end{aligned}$$

Alors S^* est défini par :

$$S^*(x_1, x_2, \dots) = (x_2, x_3, \dots).$$

Théorème 2.2.9 (Propriétés de l'adjoint)

$$1. (A + B)^* = A^* + B^*; (\lambda A)^* = \bar{\lambda} A^*.$$

$$2. (A^*)^* = A; (AB)^* = B^* A^*.$$

$$3. \forall A, B \in \mathcal{L}(\mathbb{H}); \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$$

$$(\alpha A + B\beta)^* = \bar{\alpha} A^* + \bar{\beta} B^*.$$

4. Si A est inversible (il existe un autre opérateur A^{-1} tel que $A^{-1}A = I_{\mathbb{H}}$), alors

$$(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}.$$

$$5. \|T\| = \|T^*\|.$$

Preuve.

1. Pour la démonstration on met $(A + B)^*$ dans un produit scalaire

$$\langle w, (A + B)^* v \rangle$$

avec $v, w \in \mathbb{H}$ quelconques. Ensuite on utilise la définition de l'adjoint et la linéarité du produit scalaire

$$\begin{aligned} \langle w, (A + B)^* v \rangle &= \langle (A + B)w, v \rangle \\ &= \langle Aw, v \rangle + \langle Bw, v \rangle \\ &= \langle w, A^* v \rangle + \langle w, B^* v \rangle \\ &= \langle w, (A^* + B^*) v \rangle. \end{aligned}$$

Donc on trouve que $(A + B)^* = A^* + B^*$.

De la même manière

$$\begin{aligned}\langle (\lambda A)^* w, v \rangle &= \langle w, \lambda A v \rangle \\ &= \bar{\lambda} \langle w, A v \rangle \\ &= \bar{\lambda} \langle A^* w, v \rangle \\ &= \langle \bar{\lambda} A^* w, v \rangle.\end{aligned}$$

D'où $(\lambda A)^* = \bar{\lambda} A^*$.

2.

$$\begin{aligned}\langle (A^*)^* w, v \rangle &= \langle w, A^* v \rangle \\ &= \overline{\langle A^* v, w \rangle} \\ &= \overline{\langle v, A w \rangle} \\ &= \langle A w, v \rangle.\end{aligned}$$

Donc $(A^*)^* = A$.

Donc on trouve que $(AB)^* = B^* A^*$

$$\begin{aligned}\langle w, (AB)^* v \rangle &= \langle (AB) w, v \rangle \\ &= \langle B w, A^* v \rangle \\ &= \langle w, B^* A^* v \rangle.\end{aligned}$$

Donc $(AB)^* = B^* A^*$.

3.

$$\begin{aligned}\langle (\alpha A + B \beta)^* w, v \rangle &= \langle w, (\alpha A + \beta B) v \rangle \\ &= \langle w, \alpha A v \rangle + \langle w, \beta B v \rangle \\ &= \bar{\alpha} \langle A^* w, v \rangle + \bar{\beta} \langle B^* w, v \rangle \\ &= \langle (\bar{\alpha} A^* + \bar{\beta} B^*) w, v \rangle.\end{aligned}$$

D'où $(\alpha A + B \beta)^* = \bar{\alpha} A^* + \bar{\beta} B^*$.

4. D'une part, pour tous $v, w \in \mathbb{H}$

$$\begin{aligned}\langle w, v \rangle &= \langle A^{-1} A w, v \rangle \\ &= \langle A w, (A^{-1})^* v \rangle.\end{aligned}$$

D'autre part

$$\begin{aligned}\langle w, v \rangle &= \langle w, A^* (A^*)^{-1} v \rangle \\ &= \langle A w, (A^*)^{-1} v \rangle.\end{aligned}$$

On peut conclure que $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$.

5. En combinant avec (2.16) :

$$\begin{aligned} \| (T^*)^* \| &\leq \| T^* \| \\ \Rightarrow \| T \| &\leq \| T^* \| . \end{aligned} \quad (2.17)$$

Donc (2.16) et (2.17) $\Rightarrow \| T \| = \| T^* \|$.

Définition 2.2.8 *A est dit hermitien, ou auto-adjoint, si $A^* = A$, i.e.*

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle \quad \forall x, y \in \mathbb{H}.$$

Exemple 2.2.4 1. Considérons l'opérateur A défini sur $L^2(\mathbb{R})$ par

$$(Ax)(t) = e^{-|t|}x(t)$$

A est un opérateur borné auto-adjoint. En effet

$$\begin{aligned} \langle Ax, y \rangle &= \int_{\mathbb{R}} e^{-|t|}x(t)\overline{y(t)}dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} x(t)\overline{e^{-|t|}y(t)}dt \\ &= \langle x, Ay \rangle. \end{aligned}$$

2. L'opérateur identité $I_{\mathbb{H}}$ est un opérateur auto-adjoint car $I_{\mathbb{H}}^* = I_{\mathbb{H}}$

$$\langle I_{\mathbb{H}}x, y \rangle = \langle x, I_{\mathbb{H}}y \rangle, \quad \forall x, y \in \mathbb{H}.$$

2.2.4 Quelques classes d'opérateurs

Définition 2.2.9 *Un opérateur $A \in \mathbb{L}(\mathbb{H})$ est dit*

1. **Positif** si : $\langle Av, v \rangle \geq 0 \quad \forall v \in \mathbb{H}$.

Exemple 2.2.5 $I_{\mathbb{H}}$ l'opérateur identité et $0_{\mathbb{H}}$ l'opérateur nul sont opérateur positive car : si $x \in \mathbb{H}$ alors

$$\begin{aligned} \langle I_{\mathbb{H}}x, x \rangle &= \langle x, x \rangle \geq 0; \\ \langle 0_{\mathbb{H}}x, x \rangle &= \langle 0, x \rangle = 0. \end{aligned}$$

2. **Unitaire** si : $AA^* = A^*A = I_{\mathbb{H}}$ c'est-à-dire $A^{-1} = A^*$.

3. **Isométrique** si : $A^*A = I_{\mathbb{H}}$.

Exemple 2.2.6 L'opérateur de décalage S (ou shift) est un opérateur isométrie, car pour

$$\begin{aligned} S(x_1, x_2, \dots) &= (0, x_1, x_2, \dots) \\ S^*(x_1, x_2, \dots) &= (x_2, x_3, \dots). \end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned} S^*S(x_1, x_2, \dots) &= S^*(0, x_1, x_2, \dots) \\ &= (x_1, x_2, \dots). \end{aligned}$$

Alors, $S^*S = I_{\mathbb{H}}$.

4. **Projection** si : $A^2 = A$.

5. **Projection orthogonale** si : $A^2 = A = A^*$.

Exemple 2.2.7 Soit l'opérateur A défini par :

$$\begin{aligned} A : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x_1, x_2, x_3) &\rightarrow (x_1, 0, x_3) \end{aligned}$$

On peut vérifier que

$$A^*(x_1, x_2, x_3) = (x_1, 0, x_3).$$

Alors,

$$\begin{aligned} A(x_1, x_2, x_3) &= A^*(x_1, x_2, x_3) \\ &= A^2(x_1, x_2, x_3) \\ &= (x_1, 0, x_3) \end{aligned}$$

donc A est une projection orthogonale.

6. **Anti-hermitien** si : $A^* = -A$.

Exemple 2.2.8 Soit $\mathbb{H}$ un espace de Hilbert, A est un opérateur tel que :

$$Ax = ix, \forall x \in \mathbb{H}, i \in \mathbb{C}$$

on a

$$\begin{aligned} \langle Ax, y \rangle &= \langle ix, y \rangle \\ &= i\langle x, y \rangle \\ &= \langle x, -iy \rangle \\ &= \langle x, A^*y \rangle \end{aligned}$$

$$\Rightarrow A^*x = -ix = -Ax$$

d'où $A^* = -A$, donc A est anti-hermitien.

7. **Normaux** si : A commute avec son adjoint, i.e. $A^*A = AA^*$.

Exemple 2.2.9 La multiplication A_φ par une fonction mesurable bornée φ est un opérateur normal sur $L^2([0, 1])$, car

$$A_\varphi : L^2([0, 1]) \rightarrow L^2([0, 1]), \varphi \in C([0, 1])$$

$$A_\varphi f(t) = \varphi(t)f(t)$$

On a

$$\langle A_\varphi f, g \rangle = \langle f, A_\varphi g \rangle, \forall f, g \in L^2([0, 1])$$

$$\langle \varphi(t)f(t), g(t) \rangle = \langle f(t), \overline{\varphi(t)}g(t) \rangle$$

donc

$$(A_\varphi^* g)(t) = \overline{\varphi(t)}g(t)$$

d'où

$$A_\varphi^* = A_{\bar{\varphi}}.$$

Alors,

$$A_\varphi^* A_\varphi = A_{\bar{\varphi}} A_\varphi$$

$$= A_\varphi A_{\bar{\varphi}}$$

$$= A_\varphi A_\varphi^*.$$

Donc A_φ est un opérateur normal.

2.2.5 Spectre d'un opérateur

Définition 2.2.10 (*valeur propre et vecteur propre*) [5] Soit $T \in \mathbb{L}(\mathbb{H})$, le nombre complexe λ est dit valeur propre de T s'il existe un vecteur x dans $\mathbb{H} - \{0_{\mathbb{H}}\}$ (s'appelle vecteur propre associé à λ) tel que

$$(T - \lambda I_{\mathbb{H}})x = 0, \quad Tx = \lambda x.$$

Définition 2.2.11 (*ensemble résolvante*) Soit $T \in \mathbb{L}(\mathbb{H})$, on dit que $\lambda \in \mathbb{C}$ appartient à l'ensemble résolvant de T si $T - \lambda I_{\mathbb{H}}$ est une bijection de $\mathbb{H}$ dans $\mathbb{H}$ et que $(T - \lambda I_{\mathbb{H}})^{-1} \in \mathbb{L}(\mathbb{H})$. L'ensemble résolvant de T est noté $\rho(T)$, i.e.

$$\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda I_{\mathbb{H}} \text{ inversible}\}.$$

Définition 2.2.12 Soit $T \in \mathbb{L}(\mathbb{H})$, on appelle spectre de T , et on note $\sigma(T)$ le complémentaire dans $\mathbb{C}$ de $\rho(T)$. Le spectre de T est donc l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que $T - \lambda I_{\mathbb{H}}$ non inversible, ceci équivalant à définir $\sigma(T)$ comme l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que $T - \lambda I_{\mathbb{H}}$ n'est pas bijective, i.e.

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda I_{\mathbb{H}} \text{ non inversible}\}.$$

Remarque 2.2.4

$$\sigma(T) \cup \rho(T) = \mathbb{C}.$$

$$\sigma(T) \cap \rho(T) = \emptyset.$$

Définition 2.2.13 On appelle spectre ponctuel de T l'ensemble des valeurs propres de T , noté $\sigma_p(T)$ tel que

$$\sigma_p(T) = \{\lambda \in \sigma(T) : T - \lambda I_{\mathbb{H}} \text{ non injectif}\}.$$

Remarque 2.2.5 Lorsque $\mathbb{H}$ est dimension finie, alors $\sigma(T) = \sigma_p(T)$.

Mais si $\mathbb{H}$ est dimension infinie, on a $\sigma_p(T) \subset \sigma(T)$.

Exemple 2.2.10 Soit $A \in M_2(\mathbb{R})$ défini par $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$

on a

$$\det(A - \lambda I_{M_2}) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 4 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4 = (\lambda - 2)(\lambda + 2)$$

$$\det(A - \lambda I_{M_2}) = 0 \Rightarrow \lambda = 2 \text{ ou } \lambda = -2.$$

Alors,

$$\sigma(A) = \sigma_p(A) = \{2, -2\}.$$

Définition 2.2.14 On appelle spectre continu de T , et on note par $\sigma_c(T)$, l'ensemble

$$\sigma_c(T) = \{\lambda \in \sigma(T) : T - \lambda I_{\mathbb{H}} \text{ injectif et } \overline{\text{Im}(T - \lambda I_{\mathbb{H}})} = \mathbb{H}\}.$$

Définition 2.2.15 On appelle spectre résiduel de T , et on note par $\sigma_r(T)$, l'ensemble

$$\sigma_r(T) = \{\lambda \in \sigma(T) : T - \lambda I_{\mathbb{H}} \text{ injectif et } \overline{\text{Im}(T - \lambda I_{\mathbb{H}})} \neq \mathbb{H}\}.$$

Remarque 2.2.6 Le spectre $\sigma(T)$ est la réunion disjointe de trois ensembles

$$\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \sigma_c(T) \cup \sigma_r(T).$$

Chapitre 3

Applications

Dans ce chapitre .Nous aborderons de trois applications sur les opérateurs linéaires continus d'un espace linéaire normé vers autre. Ces applications sont choisis selon le cas, ces application sont illustrées par les propriétés structurelles citées aux chapitre un et deux. Une de ces application est application directe des théorème de Hahn Banach et théorème de Banach-Steinhaus. La deuxième application on s'intéresse d'étudier le théorème de Lax-Milgram sur un intervalle borné qui se réduit à l'étude du problème de Dirichlet pour l'équation de Sturm-Liouville, durant cette étude nous effectuons un opérateur différentiel linéaire continu, alors nous investissons quelques notions et théorèmes déjà donnés au chapitre deux. La troisième application on investit une équation intégrale de Fredholm qui se réduit à étudier un opérateur intégral, on montrera que cet opérateur est linéaire borné donc continue en fin on montre que cet opérateur intégral est compact.

3.1 Applications des théorèmes de Banach Steinhaus et de Hahn Banach

On rappelle que pour tous $p \in [1, +\infty[$ $l^p(\mathbb{C}) = \left\{ x = (x_n)_{n \in N^*} \subset \mathbb{C} : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty \right\}$ est muni de sa norme usuelle $\|x\|_{l^p(\mathbb{C})} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}$ et

$$l^{\infty}(\mathbb{C}) = \left\{ x = (x_n)_{n \in N^*} \subset \mathbb{C} : \sup_{n \in N^*} |x_n| < \infty \right\}$$

avec

$$\|x\|_{l^{\infty}(\mathbb{C})} = \sup_{n \in N^*} |x_n|.$$

A) Soient $n \in N^*$ et $(a_i)_{i \in N^*} \in l^2(\mathbb{C})$. Pour tous $n \in N^*$ on définit les formes suivantes :

$$\begin{aligned} T_n : l^2(\mathbb{C}) &\rightarrow \mathbb{C} \\ (x_i)_{i \in N^*} &\mapsto T_n(x_i)_{i \in N^*} = \sum_{i=1}^n a_i x_i. \end{aligned} \tag{3.1}$$

On montre les caractérisations suivantes :

1. $\forall n \in N^*, T_n \in (l^2(\mathbb{C}))'$.
2. $\forall n \in N^*, \|T_n\|_{(l^2(\mathbb{C}))'} = \sqrt{\sum_{i=1}^n |a_i|^2}$.

On pose :

$$T : l^2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$$

$$(x_i)_{i \in N^*} \mapsto T(x_i)_{i \in N^*} = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i. \quad (3.2)$$

On montre :

3. T est une application bien définie et que $T \in (l^2(\mathbb{C}))'$.
4. $\|T\|_{(l^2(\mathbb{C}))'} = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^2}$.
5. $T_n \xrightarrow{s} T$ C'est à dire que la suite $(T_n)_{n \in N^*}$ converge ponctuellement vers T dans $l^2(\mathbb{C})$.

Démonstration

T_n est linéaire et bornée. En effet

$$T_n((x_i) + \alpha(y_i)) = \sum_{i=1}^n a_i(x_i + \alpha y_i) = T_n(x_i) + \alpha T_n(y_i).$$

On a, en utilisant l'inégalité de Cauchy Schwarz(1.3)

$$|T_n(x_i)| = \left| \sum_{i=1}^n a_i x_i \right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n |a_i|^2} \|x\|_{l^2}$$

d'où le point 1). Pour montrer le point 2). On a

$$\|T_n\|_{(l^2)'} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n |a_i|^2}.$$

Il existe $\bar{x} = (\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n, 0, 0, \dots, 0) \in l^2$, tq

$$|T_n(\bar{x}_i)| = \sum_{i=1}^n |a_i|^2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |a_i|^2} \|\bar{x}\|_{l^2}$$

implique

$$\frac{|T_n(\bar{x}_i)|}{\|\bar{x}\|_{l^2}} = \sqrt{\sum_{i=1}^n |a_i|^2} \leq \sup \left\{ \frac{|T_n(x_i)|}{\|x\|_{l^2}}, x \in l^2, x \neq 0 \right\} = \|T_n\|_{(l^2)'}.$$

D'où le point 2). De nouveau T est linéaire et bornée. En effet

$$T((x_i) + \alpha(y_i)) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i(x_i + \alpha y_i) = T(x_i) + \alpha T(y_i).$$

On a, en utilisant l'inégalité de Cauchy Schwarz(1.3)

$$|T(x_i)| = \left| \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i \right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^2} \|x\|_{l^2}$$

d'où le point 3). Pour montrer le point 4). On a

$$\| T \|_{(l^2)'} \leq \| a \|_{l^2} .$$

Il existe $\bar{x} = (\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \dots, \bar{a}_n, \dots) \in l^2$, tq

$$| T(\bar{x}_i) | = \sum_{i=1}^{\infty} | a_i |^2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} | a_i |^2} \| \bar{x} \|_{l^2}$$

implique

$$\frac{| T(\bar{x}_i) |}{\| \bar{x} \|_{l^2}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} | a_i |^2} \leq \sup \left\{ \frac{| T(x_i) |}{\| x \|_{l^2}}, x \in l^2, x \neq 0 \right\} = \| T \|_{(l^2)'} .$$

D'où le point 4). On a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} | T_n(x_i) - T(x_i) | = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \sum_{i=n+1}^{\infty} a_i x_i \right| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\sum_{i=n+1}^{\infty} | a_i |^2} \sqrt{\sum_{i=n+1}^{\infty} | x_i |^2} = 0.$$

D'où le point 5) est prouvé.

B) On suppose maintenant que $(a_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de nombres complexes quelconque.

On se propose de montrer, en utilisant le théorème de Banach-Steinhaus 2.1.10, l'implication suivante :

$$\left(\forall (x_i)_{i \in \mathbb{N}^*} \in l^2(\mathbb{C}), \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i \text{ est convergente dans } \mathbb{C} \right) \Rightarrow \left((a_i)_{i \in \mathbb{N}^*} \in l^2(\mathbb{C}) \right). \quad (3.3)$$

Lemme

$$\left(\forall (x_i)_{i \in \mathbb{N}^*} \in l^2(\mathbb{C}), \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i \text{ est convergente dans } \mathbb{C} \right) \Rightarrow \left(\forall (x_i)_{i \in \mathbb{N}^*} \in l^2(\mathbb{C}) : \sup_{n \in \mathbb{N}^*} | T_n(x_i)_{i \in \mathbb{N}^*} | < \infty \right). \quad (3.4)$$

C'est à dire qu'en admettant l'hypothèse : $\forall (x_i)_{i \in \mathbb{N}^*} \in l^2(\mathbb{C}), \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$ est convergente dans $\mathbb{C}$, montrer que la suite des formes $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie en A) est ponctuellement bornée (i.e : pour toute suite $(x_i)_{i \in \mathbb{N}^*} \in l^2(\mathbb{C})$ on a : $\sup_{n \in \mathbb{N}^*} | T_n(x_i)_{i \in \mathbb{N}^*} | < \infty$). En effet

$$\lim_{n \rightarrow \infty} | T_n(x_i) - T(x_i) | = 0$$

implique que la suite $\{T_n(x_i)_{i \geq 1}\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente dans $(\mathbb{C}, | \cdot |)$ donc bornée, il vient alors :

$$\sup_{n \in \mathbb{N}^*} | T_n(x_i)_{i \in \mathbb{N}^*} | < \infty.$$

D'où la formule (3.4). Ce qui assure la validité de la condition de théorème de Banach-Steinhaus 2.1.10, alors il existe $K > 0$, tq

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \| T_n \|_{(l^2)'} = \sqrt{\sum_{i=1}^n | a_i |^2} \leq K.$$

Il vient alors que

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} | a_i |^2} \leq K. \quad (3.5)$$

Ce qui montre que $(a_i)_{i \in \mathbb{N}^*} \in l^2(\mathbb{C})$: Ce qui termine la démonstration. D'où la formule (3.3).

Corollaire 3.1.1 (théorème de Hahn Banach)

E' est l'espace des formes linéaires continues d'un espace normé E dans le corps des nombres complexes $\mathbb{C}$

$$\forall x_0 \in E \Rightarrow \exists f \in E'$$

tq

$$\|f\|_{E'} = \|x_0\|_E$$

et

$$f(x_0) = \|x_0\|_E^2.$$

Preuve. $[x_0] = \{\lambda x_0; \lambda \in \mathbb{R}\}$ est un sous espace linéaire normé de E , définissons la fonctionnelle linéaire

$$g:[x_0] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\lambda x_0 \mapsto g(\lambda x_0) = \lambda \|x_0\|_E^2,$$

il est bien que :

$$g(\lambda x_0 + \alpha \mu x_0) = g(\lambda x_0) + \alpha g(\mu x_0)$$

D'où g est linéaire. Montrons que g est bornée. On a

$$|g(\lambda x_0)| \leq |\lambda| \|x_0\|_E^2$$

implique

$$\|g\|_{[x_0]'} = \sup_{\lambda \neq 0} \frac{|g(\lambda x_0)|}{|\lambda| \|x_0\|_E} = \|x_0\|_E.$$

D'après le corollaire 2.1.2 il existe un prolongement linéaire continu f sur E de g tel que

$$\|f\|_{E'} = \|x_0\|_E$$

et

$$f(x_0) = g(x_0) = \|x_0\|_E^2.$$

Ce qui fallait démontrer.

c) Applications de théorème de Hahn Banach

Théorème 3.1.1 Soit $A \in \mathbb{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$, application linéaire continue, alors

$$\forall x_0 \in \mathbb{X}, \exists g_0 \in \mathbb{Y}' \text{ telle que } g_0(Ax_0) = \|Ax_0\|_{\mathbb{Y}} \text{ et } \|g_0\|_{\mathbb{Y}'} = 1. \quad (3.6)$$

Aussi on a,

$$\forall x \in \mathbb{X}, \|x\|_{\mathbb{X}} = \sup_{\substack{f \in \mathbb{X}' \\ \|f\|_{\mathbb{X}'} \leq 1}} |f(x)|. \quad (3.7)$$

Encore,

$$f(x) = 0, \forall f \in \mathbb{X}' \Rightarrow x = 0. \quad (3.8)$$

Démonstration.

D'après corollaire de théorème de Hahn Banach précédent 3.1.1,

$$\forall x_0 \in \mathbb{X} \Rightarrow Ax_0 \in \mathbb{Y} \Rightarrow \exists f \in \mathbb{Y}'$$

tq

$$\|f\|_{\mathbb{Y}'} = \|Ax_0\|_{\mathbb{Y}}$$

et

$$f(Ax_0) = \|Ax_0\|_{\mathbb{Y}}^2.$$

Considérons maintenant,

$$g_0(y) = \frac{f(y)}{\|Ax_0\|_{\mathbb{Y}}}, \text{ si } x_0 \notin \ker(A).$$

On remarque que $g_0 \in \mathbb{Y}'$ et

$$g_0(Ax_0) = \frac{f(Ax_0)}{\|Ax_0\|_{\mathbb{Y}}} = \|Ax_0\|_{\mathbb{Y}}$$

aussi que

$$\|g_0\|_{\mathbb{Y}'} = \frac{\|f\|_{\mathbb{Y}'}}{\|Ax_0\|_{\mathbb{Y}}} = 1.$$

D'où le point (3.6). Pour montrer le point (3.7), il est bien que

$$\forall f \in \mathbb{X}' \quad |f(x)| \leq \|f\|_{\mathbb{X}'} \cdot \|x\|_{\mathbb{X}}$$

implique

$$\sup_{\substack{f \in \mathbb{X}' \\ \|f\|_{\mathbb{X}'} \leq 1}} |f(x)| \leq \|x\|_{\mathbb{X}}.$$

Appliquons le résultat (3.6), en posant, $\mathbb{X} = \mathbb{Y}$, et $A = I_{\mathbb{X}} \in \mathbb{L}(\mathbb{X}, \mathbb{X})$ et aussi $g_0(x) = \|x\|_{\mathbb{X}}$ et $\|g_0\|_{\mathbb{X}'} = 1$, i.e.

$$\|x\|_{\mathbb{X}} = |g_0(x)| \leq \sup_{\substack{f \in \mathbb{X}' \\ \|f\|_{\mathbb{X}'} \leq 1}} |f(x)|.$$

D'où l'égalité (3.7). Montrons enfin la relation (3.8).

Soit $f(x) = 0$, pour tout $f \in \mathbb{X}'$

implique

$$f(x) = 0, \forall f \in \mathbb{X}', \text{ et } \|f\|_{\mathbb{X}'} \leq 1.$$

D'après la formule (3.7)

$$\sup_{\substack{f \in \mathbb{X}' \\ \|f\|_{\mathbb{X}'} \leq 1}} |f(x)| = 0 = \|x\|_{\mathbb{X}}.$$

D'où $x = 0$.

Théorème 3.1.2 (Opérateur adjoint) Soit $A \in \mathbb{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$, application linéaire continue, alors

$$\exists g_0 \in \mathbb{Y}' \text{ telle que } :g_0(Ax_0) = \| Ax_0 \|_{\mathbb{Y}} \text{ et } \| g_0 \|_{\mathbb{Y}'} = 1. \quad (3.9)$$

Et $A^* \in \mathbb{L}(\mathbb{Y}', \mathbb{X}')$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{X}, \quad A^*(g(x)) = g(Ax) \quad (3.10)$$

aussi

$$\| A^* \|_{\mathbb{L}(\mathbb{Y}', \mathbb{X}')} = \| A \|_{\mathbb{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})} . \quad (3.11)$$

Si $A, B \in \mathbb{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ alors,

$$A + B \in \mathbb{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$$

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}, \quad (\lambda A + \mu B)^* = \lambda A^* + \mu B^*. \quad (3.12)$$

Démonstration.

$\forall x \in \mathbb{X}$ on a $Ax \in \mathbb{Y}$ alors $\forall g \in \mathbb{Y}'$, il existe $f \in \mathbb{X}'$ tq $g(Ax) = f(x)$ d'où

la définition de $A^*(g) = f$ équivaut $g(Ax) = f(x)$. $A^* \in \mathbb{L}(\mathbb{Y}', \mathbb{X}')$, en effet, $\forall g, h \in \mathbb{Y}'$

$$A^*(g + \alpha h)(x) = (g + \alpha h)(Ax) = g(Ax) + \alpha h(Ax) = A^*(g)(x) + \alpha A^*(h)(x)$$

aussi

$$| g(Ax) | \leq \| g \|_{\mathbb{Y}'} \cdot \| A \|_{\mathbb{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})} \cdot \| x \|_{\mathbb{X}} .$$

D'où A^* est linéaire bornée. Pour calculer la norme de A^* : On a,

$$\| A^* \|_{\mathbb{L}(\mathbb{Y}', \mathbb{X}')} = \sup_{\substack{g \in \mathbb{Y}' \\ \|g\|_{\mathbb{Y}'} \leq 1}} \frac{| g(Ax) |}{\| g \|_{\mathbb{Y}'} \cdot \| x \|_{\mathbb{X}}} \leq \| A \|_{\mathbb{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})} . \quad (3.13)$$

Pour montrer l'égalité on utilise le corollaire de théorème de Hahn Banach [3.1.1](#),

$$\forall x \in \mathbb{X}, \exists g_0 \in \mathbb{Y}' \text{ telle que } ,g_0(Ax) = \| Ax \|_{\mathbb{Y}} \text{ et } \| g_0 \|_{\mathbb{Y}'} = 1.$$

implique

$$\| Ax \|_{\mathbb{Y}} = | A^*(g_0)(x) | \leq \| A^* \|_{\mathbb{L}(\mathbb{Y}', \mathbb{X}')} \cdot \| x \|_{\mathbb{X}}$$

ce qui nous donne,

$$\forall x \in \mathbb{X} - \{0_{\mathbb{X}}\}, \quad \frac{\| Ax \|_{\mathbb{Y}}}{\| x \|_{\mathbb{X}}} \leq \| A^* \|_{\mathbb{L}(\mathbb{Y}', \mathbb{X}')} .$$

c'est à dire

$$\| A \|_{\mathbb{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})} \leq \| A^* \|_{\mathbb{L}(\mathbb{Y}', \mathbb{X}')} . \quad (3.14)$$

D'où la formule (3.11). Montrons maintenant la formule (3.12). On a

$$(\lambda A + \mu B)^*(g(x)) = g((\lambda A + \mu B)(x)) = \lambda A^*(g(x)) + \mu B^*(g(x)).$$

D'où l'égalité (3.12).

3.2 Applications de théorème de Lax-Milgram

Définition 3.2.1 (*espace de Sobolev $\mathbb{H}^1$*) Soit $I =]a, b[$ un intervalle dans $\mathbb{R}$.

L'espace de Sobolev $\mathbb{H}^1(I)$ est défini par

$$\mathbb{H}^1(I) = \{u \in L^2(I); \exists g \in L^2(I) \text{ tel que } \int_I u\varphi = - \int_I g\varphi, \forall \varphi \in C_c^1(I)\}.$$

Où $C_c^1(I)$ est l'espace des fonction de classe $C^1(I)$ à support compact.

$\mathbb{H}^1(I)$ est un espace de Hilbert muni du produit scalaire,

$$\langle u, v \rangle_{\mathbb{H}^1(I)} = \langle u, v \rangle_{L^2(I)} + \langle u', v' \rangle_{L^2(I)} = \int_a^b (uv + u'v'), \forall u, v \in \mathbb{H}^1(I)$$

et la norme associée,

$$\|u\|_{\mathbb{H}^1(I)} = (\|u\|_{L^2(I)}^2 + \|u'\|_{L^2(I)}^2)^{\frac{1}{2}} \quad (3.15)$$

est équivalente à la norme suivante :

$$\|u\|_{\mathbb{H}^1(I)} = \|u\|_{L^2(I)} + \|u'\|_{L^2(I)}.$$

1. L'étude du problème de Dirichlet pour l'équation de Sturm-Liouville.

Soit le problème aux limites suivant,

$$\begin{cases} (-p(u)y'(u))' + q(u)y(u) = f(u), & u \in]0, 1[\quad (\text{E. D}) \\ y(0) = 0; \quad y(1) = 0 & (\text{C. L}) \end{cases} \quad (3.16)$$

$$\begin{cases} q \in C([0, 1]); \quad q \geq 0 \text{ sur } [0, 1] \\ p \in C^1([0, 1]); \quad \exists \alpha > 0 \text{ tel que } p \geq \alpha \text{ sur } [0, 1] \end{cases}$$

$$\mathbb{H}_0^1(]0, 1[) = \{z \in \mathbb{H}^1(]0, 1[); \quad z(0) = z(1) = 0\}.$$

Soit y la solution du problème (3.16) et soit x un élément quelconque de $\mathbb{H}_0^1(]0, 1[)$.

Multiplions l'équation (E. D) par $x(u)$ et intégrons sur $]0, 1[$, par une intégration par parties on obtient

$$\int_0^1 [py'(u)x'(u) + qy(u)x(u)]du = \int_0^1 f(u)x(u)du$$

car $x(0) = x(1) = 0$.

On considère alors la forme bilinéaire,

$$B(y, x) = \int_0^1 [py'(v)x'(v) + qy(v)x(v)]dv,$$

B est évidemment bilinéaire et symétrique. Elle est définie et positive à cause des conditions imposées à p et q .

B est ainsi un produit scalaire et $\mathbb{H}_0^1(]0, 1[)$ muni de B est un espace de Hilbert. Le théorème de Riesz 2.2.4, appliqué à cet espace, justifie l'existence et l'unicité de $y \in \mathbb{H}_0^1(]0, 1[)$, solution du problème,

$$\forall x \in \mathbb{H}_0^1(]0, 1[); \quad B(y, x) = L(x),$$

avec

$$L(x) = \int_0^1 f(u)x(u)du.$$

Revenons à l'application du théorème de Lax-Milgram 2.2.7, Montrons que B est continue et coercive.

$$|B(y, x)| \leq P \|y'\|_{L^2} \cdot \|x'\|_{L^2} + Q \|y\|_{L^2} \cdot \|x\|_{L^2}.$$

En notant par P (resp. Q) la borne supérieure de $p(u)$ (resp. $q(u)$) sur $]0, 1[$.

Donc

$$|B(y, x)| \leq (P + Q) \|y\|_{\mathbb{H}^1} \cdot \|x\|_{\mathbb{H}^1}.$$

D'autre part B est coercive.

En effet, d'après les conditions sur p (resp. q) ; on a

$$\begin{cases} B(x, x) = \int_0^1 (px'^2 + qx^2) \geq 0 \\ B(x, x) \geq \alpha \|x'\|_{L^2}^2 \quad p \geq \alpha \end{cases}$$

or,

$$\begin{aligned} x \in \mathbb{H}_0^1(]0, 1[); |x(u)| &= \left| \int_0^u x'(v)dv \right| \\ &\leq \int_0^1 |1 \times x'(v)| dv \leq \|x'\|_{L^2} \left(\int_0^1 dv \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \|x'\|_{L^2}. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \int_0^1 |x(u)|^2 du &\leq \int_0^1 \|x'\|_{L^2}^2 du \\ \Rightarrow \|x\|_{L^2}^2 &\leq \|x'\|_{L^2}^2. \end{aligned}$$

Et donc

$$B(x, x) \geq \frac{\alpha}{2} (\|x\|_{L^2}^2 + \|x'\|_{L^2}^2) = \frac{\alpha}{2} \|x\|_{\mathbb{H}^1}^2, \text{ d'après (3.15)}$$

on a ainsi établi que,

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{2} \|x\|_{\mathbb{H}^1}^2 &\leq |B(x, x)| \leq (P + Q) \|x\|_{\mathbb{H}^1}^2 \\ \Rightarrow \sqrt{\frac{\alpha}{2}} \|x\|_{\mathbb{H}^1} &\leq \sqrt{B(x, x)} \leq \sqrt{P + Q} \|x\|_{\mathbb{H}^1} \\ \Rightarrow \sqrt{\frac{\alpha}{2}} \|x\|_{\mathbb{H}^1} &\leq \|x\|_{\mathbb{H}_0^1} \leq \sqrt{P + Q} \|x\|_{\mathbb{H}^1}. \end{aligned}$$

Ce qui prouve que la norme définie par B est équivalente sur $\mathbb{H}_0^1(]0, 1[)$ à la norme $\mathbb{H}^1(]0, 1[)$.

2. Soient $\mathbb{H} = \mathbb{R}^n$, et $A \in S^{++}(\mathbb{R}^n) \subset M_n(\mathbb{R})$ avec,

*) $M_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels.

**) $S^{++}(\mathbb{R}^n)$ est l'ensemble des matrices carrées d'ordre n symétriques définies positives, où $\mathbb{R}^n$ est muni du produit scalaire usuel

$$\langle u, v \rangle = u^\top v = \sum_{k=1}^n u_k v_k, \quad \forall (u, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n.$$

Alors A définit une forme $a(.,.)$ bilinéaire continue, symétrique et coercive sur $\mathbb{R}^n$ donnée par,

$$a(u, v) = u^\top A v = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_i v_j.$$

En effet, on a

$$\begin{aligned} a(v, u) &= v^\top A u = \langle v, A u \rangle \\ &= \langle A u, v \rangle = (A u)^\top v \\ &= u^\top A^\top v = u^\top A v \quad (A^\top = A) \\ &= \langle u, A v \rangle = a(u, v) \end{aligned}$$

$\Rightarrow a(v, u) = a(u, v)$ d'où la symétrie de $a(.,.)$.

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz (1.3), on obtient

$$|a(u, v)| = |v^\top A u| = |\langle v, A u \rangle| \leq \|v\| \cdot \|A u\| \leq \|A\| \cdot \|u\| \cdot \|v\|.$$

Alors $a(.,.)$ est continue.

En outre si A est une matrice symétrique définie positive, alors nous savons que

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_i u_j \geq c \|u\|^2.$$

Où, $c = \min_{i=1 \dots n} \lambda_i$ avec λ_i ($i = 1, \dots, n$) sont les valeurs propres de A .

Cela signifie que $a(.,.)$ est coercive.

Alors d'après le théorème de Lax-Milgram 2.2.7 il existe un unique élément u de $\mathbb{R}^n$ solution de problème,

$$u^\top A v = b^\top v.$$

Avec $b \in \mathbb{R}^n$ (fixé) et $T_b(v) = b^\top v = \langle b, v \rangle$.

$T_b(v)$ une forme linéaire en v continue car

$$|T_b(u)| \leq \|b\| \cdot \|u\|.$$

De plus A doit être inversible et toutes les valeurs propres de A sont non nulles, et comme $a(.,.)$ est symétrique, u est l'unique solution du problème de minimisation $J(u) \leq J(v)$,

$$J(u) = \frac{1}{2} u^\top A v - b^\top v, \quad \forall v \in \mathbb{R}^n.$$

3.3 Équations Intégrales de Fredholm et applications

Soit $E = L^2(I, \mathbb{C})$ muni de la norme $\| \cdot \|_2$, où $I = [0, 1]$ est un intervalle compact de $\mathbb{R}$.

Où

$$\| f \|_2 = \sqrt{\int_I | f(x) |^2 dx}$$

Considérons l'opérateur intégral, $T : E \longrightarrow E$ défini par

$$T_K(f)(x) = \int_I K(x, t) f(t) dt$$

de "noyau" $K \in C(I \times I, \mathbb{C})$. D'après l'inégalité de Cauchy- Schwarz(1.3), on a

$$\begin{aligned} | T_K(f)(x) | &= \left| \int_I K(x, t) f(t) dt \right| \\ &\leq \int_I | K(x, t) | | f(t) | dt \\ &\leq \| K(x, \cdot) \|_2 \| f \|_2 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \| T_K f \|_2^2 &= \int_I | T_K(f)(x) |^2 dx \\ &= \int_I \left| \int_I K(x, t) f(t) dt \right|^2 dx \\ &\leq \| f \|_2^2 \int_I \int_I | K(x, t) |^2 dt dx \\ &\leq \| f \|_2^2 \int_I \| K(x, \cdot) \|_2^2 dx \\ &\leq \| f \|_2^2 \| K \|_2^2 . \end{aligned}$$

ou encore

$$\| T_K f \|_2 \leq \| K \|_2 \cdot \| f \|_2$$

Ceci montre que lorsque $f \in L^2(I, \mathbb{C})$, la fonction T_K est bien définie presque partout et qu'elle est de carré intégrable.

T_K est clairement un opérateur linéaire, et le calcul ci-dessus montre qu'il est borné et que

$$\| T_K \|_2 = \sup \left\{ \frac{\| T_K f \|_2}{\| f \|_2}, 0 \neq f \in L^2(I, \mathbb{C}) \right\} \leq \| K \|_2 .$$

Pour montrer que T_K est un opérateur compact, nous devons montrer

que $A := T_K(\{f, f \in L^2(I, \mathbb{C}), \| f \|_2 \leq 1\})$ est un sous-ensemble relativement compact dans E .

1. Soit $f \in L^2(I, \mathbb{C})$, telle que $\| f \|_2 \leq 1$, alors pour tout $x \in I$

$$| T_K(f)(x) | = \left| \int_I K(x, t) f(t) dt \right| \leq \| K(x, \cdot) \|_2 \cdot \| f \|_2 \leq \sup_{x \in I} \| K(x, \cdot) \|_2 \leq C.$$

D'où $A(t) = \{T_K f(t), f \in L^2(I, \mathbb{C}), \| f \|_2 \leq 1\}$ est donc borné.

2. Équicontinuité : Comme K est continue sur le compact $I \times I$, elle est équicontinue, d'où pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que :

$$|x_1 - x_2| + |t_1 - t_2| < \delta \text{ entraîne } |K(x_1, t_1) - K(x_2, t_2)| < \epsilon$$

Ainsi, pour tout $f \in$ boule unité $= \{f \in L^2(I, \mathbb{C}), \|f\|_2 \leq 1\}$,
par l'inégalité triangulaire on aura

$$\begin{aligned} |T_K(f)(x_1) - T_K(f)(x_2)| &\leq \int_I |K(x_1, t) - K(x_2, t)| |f(t)| dt \\ &< \epsilon \int_I |f(t)| dt \\ &< \epsilon \|f\|_2 \\ &< \epsilon \end{aligned}$$

car $\|f\|_2 \leq 1$. Cela montre que l'ensemble $A := T_K(\{f, f \in L^2(I, \mathbb{C}), \|f\|_2 \leq 1\})$ est équicontinu.

D'après le théorème d'Arzela-Ascoli [2.1.11](#), $A := T_K(\{f, f \in L^2(I, \mathbb{C}), \|f\|_2 \leq 1\})$ est relativement compact dans E . D'où T_K est un opérateur compact.

CONCLUSION

Ce mémoire est considéré comme un manuel pour quelques connaissances de bases sur la théorie des opérateurs linéaires continus connus en analyse fonctionnelle. On a commencé par quelques préliminaires sur les espaces métriques, et les espaces de Hilbert la base de notre travail. Dans ce but, nous avons illustré les définitions et les propriétés des opérateurs linéaires continus d'un espace linéaire normé ou de Hilbert vers autre, avec des exemples variés toutes les fois que nous avons introduit une nouvelle notion ou montré un théorème. Le deuxième chapitre de ce mémoire est consacrée à l'étude des propriétés fondamentales générales des opérateurs linéaires continus. Le troisième chapitre de ce mémoire est consacrée aux trois projets applications sur les opérateurs linéaires continus. Dans ce chapitre trois de ce travail nous avons apporté des applications différentes illustrées dans le domaine de la théorie constructive des opérateurs linéaires continus d'un espace linéaire normé (ou de Hilbert) vers autre. L'application directe des théorème de Hahn Banach et théorème de Banach Steinhausen constitue la première application dans ce chapitre trois. La deuxième application est une investissement de théorème de Lax-Milgram sur un intervalle borné qui se réduit à l'étude du problème de Dirichlet pour l'équation de Sturm-Liouville, nous construisons durant cet investissement un opérateur différentiel linéaire continu. La troisième application est un investit d'une équation intégrale de Volterra et de Fredholm qui se réduit à étudier un opérateur intégral, on montrera que cet opérateur est linéaire borné donc continue en fin on montre que cet opérateur intégral est compact. Nous avons donc trois buts pour les projets :

- a) approfondir le contenu du chapitre.
- b) apprendre à faire un développement mathématique.
- c) élargir un peu le champ des applications des opérateurs linéaires continus d'un espace linéaire normé (ou de Hilbert) vers autre. Comme le titre de ce mémoire le mentionne.

Bibliographie

- [1] H. Boccara. *Analyse Fonctionnelle, Edition Marketing*, 1984.
- [2] H. Brezis. *Analyse fonctionnelle Théorie et Applications*, 1987.
- [3] H. Brezis. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, 2010.
- [4] A. Dold, B. Eckmann. *Lecture Notes in Mathematics*, 1975.
- [5] W. Hengartner, M. Lambert, C. Reischer. *Introduction à L'analyse Fonctionnelle*, 1981.
- [6] W.V. Lovitt. *Linear Intégral Équation* , 1950.
- [7] B. Lucquin. *Équations aux Dérivées Partielles et leurs Approximations*, Ellipses, 2004.
- [8] J. Marsden, T. Lance, S. Gelbart. *Lectures on Analysis*, 1969.
- [9] L. Pierre. *Introduction La théorie Spectrale*, 2003.
- [10] W. Rudin. *Analyse Réelle et Complexe*, 1987.
- [11] P. Rynne, A. Youngson. *Linear Analysis Functional*, 2008.
- [12] L. Schwartz. *Analyse 1, théorie des ensembles et topologie*, 1997.

Résumé

Dans ce mémoire on a exposé quelques connaissances principales des opérateurs linéaires continus d'un espace vectoriel normé ou de Hilbert vers autre. On a commencé par quelques préliminaires sur les espaces métriques, et les espaces de Hilbert la base de notre travail. Le deuxième chapitre de ce mémoire est consacrée à l'étude des propriétés fondamentales des opérateurs linéaires continus. Le troisième chapitre de ce mémoire est consacrée aux trois projets applications sur les opérateurs linéaires continus d'un espace vectoriel normé ou de Hilbert vers autre. L'application directe des théorème de Hahn Banach et théorème de Banach Steinhausen constitue la première application. La deuxième application on investit le théorème de Lax-Milgram sur un intervalle borné, nous construisons durant cet investissement un opérateur linéaire continu. La troisième application est un investit d'une équation intégrale de Fredholm qui se réduit à étudier un opérateur intégral, on montrera que cet opérateur est linéaire borné donc continue et compact.

Mots clefs: Opérateur linéaire bornée. Continues. Espaces de Banach. Espaces de Hilbert. Produit scalaire. Norme. Opérateur inversible. Opérateur adjoint.

Abstract

In this memorial we expose fundamental properties of continuous linear operator from normed spaces (or Hilbert space) to other .We start by exposing a few preliminaries on metrics spaces and Hilbert spaces. The second chapter of this memorial is specified to study the fundamental properties of linear continuous operators .The third chapter of this memorial is to make use of three projects works on linear continuous operators from normed spaces (or Hilbert space) to other .The direct application of the Banach Steinhaus and Hahn Banach theorems is the first application . The second application is to invest Lax-Milgram theorem on interval to construct of a corresponding linear continuous operator. The third application is exploitation of integral equation due Fredholm to construct an integral operator, this operator is linear and continuous and compact.

Keys words : Bounded Linear Operator. Continuous. Banach spaces. Hilbert spaces. Inner products. Norm. Inverse of Operator. The adjoint of an Operator.

ملخص

في هذه المذكرة تعرضنا بشيء من التفصيل الى الخواص الأساسية للمؤثرات الخطية المستمرة من فضاء نظيمي أو هيلبرتي نحو فضاء آخر المعروفة في نظريات التحليل الدالي. بدأنا بالتطرق إلى بعض المفاهيم حول الفضاءات المترية وفضاءات هيلبرت وهي أساس هذا العمل. في الفصل الثاني تطرقنا للحديث بالتفصيل عن الخواص الأساسية للمؤثرات الخطية المستمرة. في الفصل الثالث اقترحنا ثلاث مشاريع تطبيقات عملية على المؤثرات الخطية المستمرة من فضاء نظيمي أو هيلبرتي نحو فضاء آخر. المشروع التطبيقي الأول يتمثل في التطبيق المباشر لنظريتي بناخ ستهائوس وهان بناخ. التطبيق العملي الثاني هو استعمال نظرية لأكس-ميلغرام على مجال محدود لتكوين مؤثرات خطية و مستمرة. التطبيق العملي الثالث هو استخدام معادلة تفاضلية تكاملية لفريد هلم لتعريف مؤثر تكاملي هذا المؤثر خطي ومستمر ومتراص.

الكلمات المفتاحية : مؤثر خطي محدود . مستمر. فضاء بناخ. فضاء هيلبرت. جداء سلمي . نظيم. المؤثر العكوس.

المؤثر القرين .