

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche
Scientifique



UNIVERSITÉ D'EL-OUED

FACULTÉ DES SCIENCES ET DE TECHNOLOGIE

Mémoire de fin d'étude

LICENCE ACADEMIQUE

Domaine: Mathématiques et Informatique

Filière: Mathématiques

Spécialité: Modélisation mathématique & simulation
numérique

Présenté par: Benine Souad
Gherghout Maroua
Kaddouri Heddi

Thème

**La géométrie différentielle des
courbes gauches paramétrées**

Soutenu juin 2014

Devant le jury composé de:

Mr. Nouar Aziza Souad
Mr. Dahda Bachir
Mr. Beloul Said

MA (B) Univ. El-Oued Président
MA (B) Univ. El-Oued examinateur
MA (A) Univ. El-Oued Rapporteur

Remerciements

Nous remercions en premier lieu le grand Dieu qui nous a donné le courage, la volonté, la force et la patience durant les moments difficiles pour accomplir ce travail.

Nous exprimons également nos profondes gratitude et respectueuses reconnaissances à notre encadreur: Mr. **Said BELOUL** pour sa bonne volonté d'accepter nous encadrer. Nous lui réservons aussi notre respect absolu pour tout le temps qu'il a consacré pour nous diriger et nous permettre de mener à bien ce travail.

Nous adressons également nos remerciements à tout l'ensemble des membres de Jury pour le temps qu'ils ont consacré pour apprécier ce travail. Tous nos enseignants du département de mathématiques et informatique, ont aussi le mérite d'être remerciés pour leurs précieux aides et engagements pour nous donner les bases des sciences mathématiques. Nous devons saluer Mr: **Med Tayeb MEFTAH** professeur de l'enseignement supérieur à l'université de Ouargla pour avoir imprégné quelques idées et aménagé quelques styles dans ce manuscrit.

Merci à nos camarades de la promotion 2014 de Mathématiques et nos amis pour leur compagnie, leur aide, leur humour, et leur soutien moral aux moments où tout allait mal.

Cette page n'aurait probablement pas pu s'écrire sans l'appui moral des membres de nos familles.

Nos remerciements les plus chaleureux sont aussi transmis pour tous ceux qui de près ou de loin ont contribué à l'accomplissement de ce modeste travail.

Table des matières

Introduction générale	2
1 Rappels sur les courbes planes	3
1.1 Définitions	3
1.1.1 La courbe plane	3
1.1.2 La courbe régulière	5
1.1.3 Les courbes équivalentes	5
1.2 Longueur d'arc	6
1.3 Repère de Serret-Frenet	8
1.3.1 Le vecteur tangent et le vecteur normal	8
1.3.2 Repère de Serret-Frenet	9
1.4 La courbure algébrique	10
1.5 Interprétation géométrique	11
1.6 Formules de Serret-Frenet	14
1.7 Le cercle osculateur	14
2 Les courbes gauches (dans $\mathbb{R}^3$)	16
2.1 Définition	16
2.2 Le vecteur tangent	18
2.3 Le vecteur normal	18
2.4 La Courbure	19
2.5 Binormale et repère de Serret-Frenet	20
2.5.1 Définition	20

2.5.2	Rappel sur le produit vectoriel	21
2.5.3	Définition	22
2.6	Torsion d'une courbe	22
2.6.1	Formules de Serret-Frenet	24
2.7	Les plans associés à une courbe gauche	28
2.7.1	Plan tangent(osculateur)	28
2.7.2	Plan normal	28
2.7.3	Plan rectifiant	28
2.8	Théorème fondamental des courbes gauches	31
3	Applications	33
3.1	L'hélice circulaire	33
3.1.1	La longueur d'arc	34
3.1.2	La fonction de longueur d'arc	34
3.1.3	La paramétrisation normale	34
3.1.4	Le repère mobile de Serret-Frenet	34
3.1.5	La courbure	35
3.1.6	La torsion	35
3.2	La fenêtre de Viviani	37
3.2.1	La représentation paramétrique	37
3.2.2	La longueur d'arc	38
3.2.3	Le repère mobile de Serret-Frenet	39
3.2.4	La courbure	40
3.2.5	La torsion	41
3.3	La cubique gauche	41
3.3.1	La longueur d'arc	41
3.3.2	Le repère mobile de Serret-Frenet	42
3.3.3	La courbure et la torsion	42
	Conclusion générale	43
	Bibliographie	44

Introduction générale

La géométrie est une science remontant à un passé très lointain continue, par sa haute finesse de raisonnement cartésien, à s'imposer parmi les disciplines contemporaines. Dès ce temps, les babyloniens et égyptiens dans leur civilisation, ont pris mains sur les grands développements qu'ont hérités de leurs ancêtres prédécesseurs, les Grecs dans le 17ème siècle avant JC.

Avec le développement des mathématiques à travers les âges, l'évolution de la géométrie s'ouvre sur catégories plusieurs: analytique, projective et différentielle. Cette dernière, a étudié les courbes planes, tridimensionnelles et les surfaces, C'est là qu'apparut dans l'histoire, pour la première fois, que les courbes planes sont intimement liées aux développements du calcul infinitésimal. Les premiers résultats qui furent obtenus au XVIIe siècle sont directement issus des considérations purement géométriques et cinématiques (cf. Calcul infinitésimal – Histoire). Les courbes dans l'espace à trois dimensions (dites à « double courbure ») ont été étudiées par Clairaut (1731). C'est grâce à Monge qui, dans un mémoire présenté en 1771, que les notions fondamentales de rayon de courbure et de surface réglée développable engendrée par les tangentes à une courbe gauche, ont été exposées. En 1826, Cauchy définit la normale principale et donna des expressions de la courbure et de la torsion. Enfin, Frénet (1847) et Serret (1850) démontrèrent l'équivalent des formules qui portent leurs noms.

Dans ce travail, nous allons étudier la géométrie différentielle des courbes gauches, plus précisément, on va décrire les propriétés d'une courbe gauche, comme la courbure, la torsion, la longueur d'un arc, qui sont communément utilisées dans diverses branches des sciences appliquées.

Suivant une logique respectant l'enchaînement des idées qui sont exprimées en paragraphes et sous paragraphes, nous avons réparti ces idées formant ce mémoire, en trois chapitres.

Le premier chapitre contient un rappel sur la notion des courbes planes comme: la courbe régulière, les courbes équivalentes, la longueur d'arc, la courbure algébrique, le repère de Serret-Frenet (le vecteur tangent et le vecteur normal), l'interprétation géométrique de la courbure, le théorème fondamental des courbes planes, les formules de Serret-Frenet et le cercle osculateur.

Le deuxième chapitre, est consacré à l'étude des courbes gauches (dans R^3) et leurs éléments de la géométrie différentielle telles que: la courbure, la binormale à une courbe, le repère de Serret-Frenet, la torsion, la formule de Serret-Frenet et les plans associés à une courbe (plans tangents, normaux et rectifiants).

Dans le troisième chapitre, on va appliquer notre étude sur quelques courbes gauches comme: l'hélice, la fenêtre de Viviani et la cubique gauche.

Chapitre 1

Rappels sur les courbes planes

1.1 Définitions

1.1.1 La courbe plane

Soit I un intervalle (limité ou illimité) et α une application de I dans $\mathbb{R}^2$ c'est à dire $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, telle que $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ où $x(t) \in \mathbb{R}$ et $y(t) \in \mathbb{R}$ pour $t \in I$.

L'ensemble $C = \{\alpha(t)/t \in I\}$ est appelée une courbe plane. On dit que α est une représentation paramétrique de C , ou bien C est paramétrée par α .

Exemple 1.1.1 1) *Droite affine: si la représentation d'une courbe α , dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est:*

$$\begin{cases} x(t) = \gamma(t) + a \\ y(t) = \delta(t) + b \\ t \in I \subset \mathbb{R} \end{cases}$$

Si de plus $I = \mathbb{R}$ alors α est une droite affine de vecteur directeur $(\gamma(t), \delta(t))$ passant par le point $A(a, b)$. Si de plus $I \subset \mathbb{R}$ alors α est la partie de la droite affine de vecteur directeur (γ, δ) passant par le point $A(a, b)$, correspondant aux valeurs prises par x et y quand $t \in I$.

2) *Cercle: si la représentation d'une courbe α , dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est:*

$$\begin{cases} x(t) = R\cos(t) \\ y(t) = R\sin(t) \\ t \in I \subset \mathbb{R} \end{cases}$$

Si $I = [0, 2\pi]$, alors α est le cercle de centre O et de rayon R , c'est à dire

$$R^2 = R^2 \cos^2 t + R^2 \sin^2 t.$$

Si $I \subset [0, 2\pi]$, alors α est la partie du cercle de centre O et de rayon R , correspondant aux valeurs prises par x et y quand $t \in I$.

Ainsi si $I = [0, \pi]$, c'est à dire $t \in [0, \pi]$ alors $x \in [-R, +R]$ et $y \in [0, R]$ c'est à dire α est le demi cercle "positif" de centre O et de rayon R .

3) Folium de Descartes: $\alpha(t) = \left(\frac{3t}{1+t^3}, \frac{3t^2}{1+t^3} \right)$, pour $t \in]-1, +\infty[$.

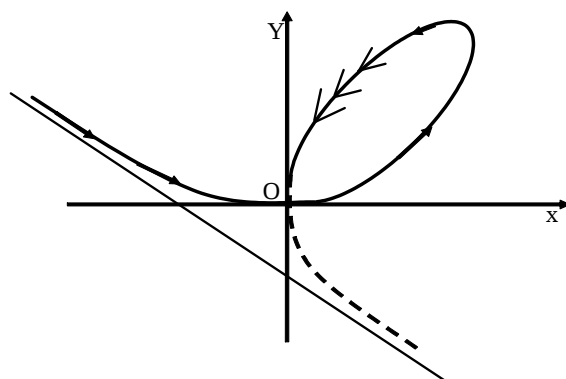


Figure 1.1.1 : Folium de Descartes

4) L'astroïde: sa paramétrisation est donnée par $\alpha(t) = (a \cos^3 t, a \sin^3 t)$ pour $t \in [0, 2\pi]$, elle est représentée par la figure (1.1.2).

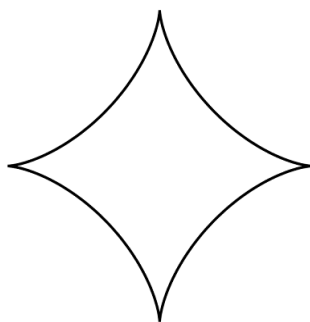


Figure 1.1.2 : L'astroïde

Remarque 1.1.1 Pour trouver une paramétrisation d'une courbe plane donnée par son équation cartésienne, il existe certaines méthodes utilisées, parmi ces méthodes "la méth-

ode classique " qui est sous la forme suivante: on pose $y = tx$ et on recherche les points d'intersection entre la droite d'équation $y = tx$ et notre courbe.

Exemple 1.1.2 Soit (C) une courbe donnée par l'équation cartésienne: $y^2 = x^3$, on pose: $y = tx$, alors $y^2 = t^2x^2$, cela signifie que $x = t^2$ et en la remplaçant dans l'expression de y , on obtient $y = t^3$, alors $\alpha(t) = (t^2, t^3)$. Cette courbe est représentée par la figure (1.1.3).

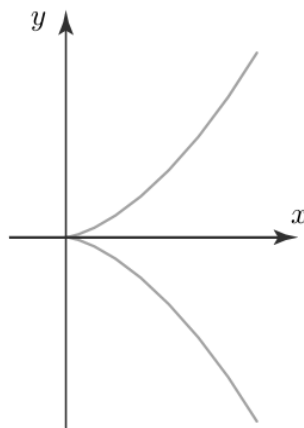


Figure 1.1.3 : Cubique cuspidale

1.1.2 La courbe régulière

Une courbe lisse paramétrisée est dite régulière si elle ne possède pas de point singulier, autrement dit, si $\alpha'(t) \neq 0$. $\forall t \in I$ où $\alpha'(t) = (x'(t), y'(t))$.

Notons que le point $t = 0$ dans l'exemple (1.1.2) est un point singulier et que le cercle est une courbe régulière parce que $\alpha'(t) = (-R \sin t, R \cos t) \neq 0 \forall t \in [0, 2\pi]$.

1.1.3 Les courbes équivalentes

Soit $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}^2$ deux courbes paramétrées: on dit que α et β sont équivalentes s'il existe un homomorphisme $\varphi : I \rightarrow J$ tel que $\alpha = \beta \circ \varphi$.

Exemple 1.1.3 Soit $I =]-\pi, \pi[$ et $\alpha(t) = (\cos t, \sin t)$, la courbe équivalente de α est β où

$$\beta(u) = \left(\frac{1-u^2}{1+u^2}, \frac{2u}{1+u^2} \right),$$

avec $J = \mathbb{R}$, l'application φ de $J = \mathbb{R}$ dans $I =]-\pi, +\pi[$, est définie par: $\varphi(t) = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$.

1.2 Longueur d'arc

La mesure de la longueur d'une courbe consiste à approcher cette longueur par la longueur d'une ligne polygonale dont les sommets sont sur la courbe. La longueur de la ligne polygonale est clairement inférieure à celle de la courbe, mais on imagine bien que si on rajoute des sommets en diminuant la distance entre deux sommets consécutifs, la longueur de la ligne polygonale va tendre vers la longueur de la courbe. La définition de la longueur d'une courbe repose sur cette idée. La figure (1.2.1) illustre bien la définition de la longueur d'un arc.

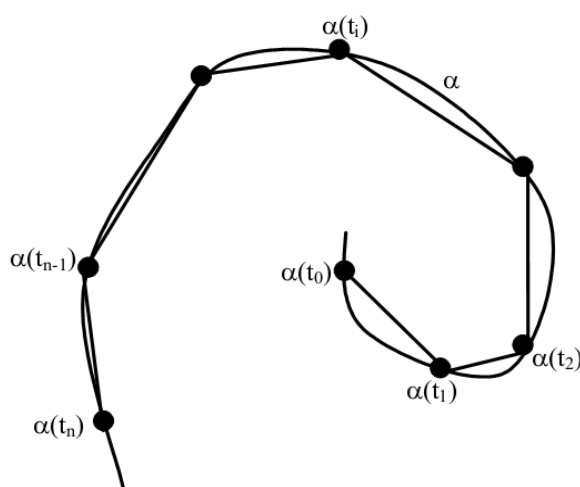


Figure 1.2.1 : Discretisation de la longueur de l'arc

Définition 1.2.1 La longueur d'une courbe paramétrée $\alpha: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ est donnée par

$$l(\alpha) = \sup_{a=t_0 < \dots < t_n = b} \sum_{i=1}^n \left\| \overrightarrow{\alpha(t_{i-1}) \alpha(t_i)} \right\|,$$

où le supremum est pris sur toutes les subdivisions $a = t_0 < \dots < t_n = b$ de l'intervalle $[a, b]$, n étant quelconque. De plus, si $l(\alpha)$ est finie, on dit que la courbe α est rectifiable.

Remarque 1.2.1 La longueur ne dépend pas de la paramétrisation. La définition précédente est géométrique et correspond à l'intuition que l'on peut avoir sur la longueur. Ceci dit, elle n'est pas forcément pratique pour effectuer des calculs. Le théorème suivant exprime la longueur d'une courbe paramétrée par une formule intégrale.

Théorème 1.2.1 Soit $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée, alors α est rectifiable et on a :

$$l(\alpha) = \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt.$$

Démonstration. [2] ■

Exemple 1.2.1 Soit $\alpha(t) = (t, f(t))$ où $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$, avec f dérivable sur $[a, b]$ alors

$$l(\alpha) = \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{1^2 + f'^2(t)} dt.$$

Exemple 1.2.2 Soit $\alpha(t) = (R \cos t, R \sin t)$, donc la longueur d'arc du cercle est

$$l(\alpha) = \int_0^{2\pi} \|\alpha'(t)\| dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2 \sin^2 t + R^2 \cos^2 t} dt = \int_0^{2\pi} R dt = 2\pi R.$$

Théorème 1.2.2 Toute courbe régulière admet une reparamétrisation par sa longueur d'arc.

Démonstration. On définit la fonction de la longueur d'arc par :

$$s(t) = \int_a^t \|\alpha'(u)\| du : I \rightarrow J \text{ (avec } J \text{ un intervalle ouvert de } \mathbb{R}).$$

La dérivée $s'(t) = \|\alpha'(t)\|$ est strictement positive pour tout $t \in I$ (c'est ici que l'hypothèse de régularité est utilisée) alors $s(t)$ est une fonction croissante et selon la définition de la norme on trouve que $s(t)$ est continue sur I ,

donc $s(t)$ admet une fonction inverse $t = t(s) : J \rightarrow I$, telle que $t'(s) = \frac{1}{s'(t)}$. Si on pose $\beta(s) = \alpha \circ t = \alpha(t(s)) : J \rightarrow \mathbb{R}^2$ alors

$$\beta'(s) = \alpha'(t(s)) t'(s) = \frac{\alpha'(t(s))}{s'(t)} = \frac{\alpha'(t(s))}{\|\alpha'(t(s))\|}, \text{ alors } \|\beta'(s)\| = 1,$$

$\beta(s)$ est une courbe paramétrée qui a exactement le même support géométrique que $\alpha(s)$. On dit alors que $\beta(s)$ est une reparamétrisation de α par la longueur d'arc, (appelée aussi la paramétrisation normale). ■

Exemple 1.2.3 On considère la courbe paramétrée $\alpha :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par :

$$\alpha(t) = \left(t, \sqrt{1-t^2}\right)$$

on a :

$$\|\alpha'(t)\| = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}},$$

alors $s(t) = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du = \arcsin(t)$ et la fonction inverse de $s(t)$ est $t(s) = \sin(s)$, donc la paramétrisation par la longueur d'arc, est donnée par

$$\beta(s) = \alpha(\sin(s)) = (\sin s, \sqrt{1 - \sin^2 s}) = (\sin(s), \cos(s)) \text{ où } \beta : \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[\longrightarrow \mathbb{R}^2.$$

On remarque que cela correspond à une paramétrisation d'un quart du cercle dont le rayon vaut 1, entre les points de coordonnées $(0, 1)$ et $(1, 0)$. Le paramètre s correspond à l'angle entre $\overrightarrow{0\alpha(s)}$ et le vecteur de coordonnées $(0, 1)$.

Théorème 1.2.3 Soit $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée de classe C . Alors on a :

la paramétrisation α est normale si et seulement si $\|\alpha'(s)\| = 1$, pour tout $s \in I$.

Démonstration. Si la paramétrisation est normale, alors l'abscisse curviligne à partir du point t_0 de α vérifie pour tout $t \in I$: $s_{t_0}(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(u)\| du = t - t_0$ en dérivant, cela donne pour tout $t \in I$: $s'_{t_0}(t) = \|\alpha'(t)\| = 1$. Réciproquement, si pour tout $s \in I$ on a $\|\alpha'(s)\| = 1$, alors pour $[t_1, t_2] \subset I$: $l(\alpha_{[t_1, t_2]}) = \int_{t_1}^{t_2} \|\alpha'(s)\| ds = t_2 - t_1$. ■

1.3 Repère de Serret-Frenet

1.3.1 Le vecteur tangent et le vecteur normal

Définition 1.3.1 Soit $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée par la fonction de longueur d'arc, on suppose que α est régulière telle que $\alpha(s) = (x(s), y(s))$, il existe un seul vecteur unitaire $T(s)$ appelé le vecteur tangent de la courbe α au point $\alpha(s)$ qui s'exprime comme suit : $T(s) = \alpha'(s) = (x'(s), y'(s))$ et $\|T'(s)\| = \|\alpha'(s)\| = 1$; (cela signifie que $\|T(s)\|^2 = 1$) et on définit le vecteur normal $N(s)$ (appelé aussi le normal principal) comme un vecteur obtenu par rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ à partir de $T(s)$, tel que (T, N) soit une base directe de $\mathbb{R}^2$ où $N(s) = (-y'(s), x'(s))$.

Remarque 1.3.1 Si α est une courbe paramétrée par une représentation quelconque, on trouve que :

$$T(s(t)) = \frac{d\alpha(t)}{ds(t)} = \frac{d\alpha(t)}{ds(t)} \cdot \frac{dt}{dt} = \frac{1}{\|\alpha'(t)\|} \cdot \frac{d\alpha(t)}{dt}$$

alors

$$T(t) = \left(\frac{x'(t)}{\|\alpha'(t)\|}, \frac{y'(t)}{\|\alpha'(t)\|} \right) , \quad N(t) = \left(\frac{-y'(t)}{\|\alpha'(t)\|}, \frac{x'(t)}{\|\alpha'(t)\|} \right)$$

Exemple 1.3.1 Soit $\alpha(t) = (t, cht)$, on a: $\|\alpha'(t)\| = cht$, donc

$$T(t) = \left(\frac{1}{cht}, \frac{sht}{cht} \right) , \quad N(t) = \left(\frac{-sht}{cht}, \frac{1}{cht} \right)$$

1.3.2 Repère de Serret-Frenet

On définit tout d'abord le repère de Serret-Frenet. Il s'agit d'un repère orthonormé qui varie le long d'une courbe paramétrée.

Définition 1.3.2 Soit $\alpha : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée régulière, le repère de Serret-Frenet de α au point $\alpha(t)$ est le repère orthonormé: $(\alpha(t), T(t), N(t))$, où $T(t) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}$ et $(T(t), N(t))$ est une base orthonormée directe du plan affine. On appelle aussi le couple $(T(t), N(t))$ le dièdre de Frenet montré sur la figure ci-contre (1.3.1).

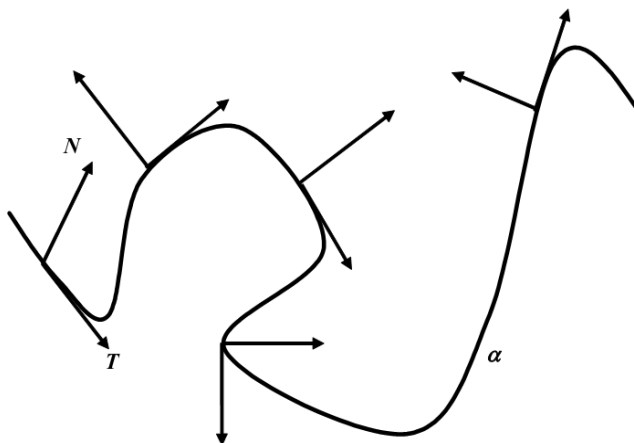


Figure 1.3.1 : Le dièdre de Frenet

Remarque 1.3.2 La droite tangente à la courbe α au point $\alpha(t)$ ne dépend pas de la paramétrisation. Par contre, le vecteur $T(t)$ en dépend: si on change le sens de parcours de la courbe, alors ce vecteur sera remplacé par son opposé. Le repère de Serret-Frenet dépend ainsi du sens de parcours de la paramétrisation ainsi que de l'orientation du plan affine.

1.4 La courbure algébrique

On suppose maintenant que $\mathbb{R}^2$ est un plan (affine euclidien) orienté.

Soit $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée par la longueur d'arc. Le vecteur tangent au point défini par s est un vecteur unitaire, noté $T(s)$. Soit $N(s)$ l'unique vecteur unitaire tel que (T, N) soit une base orthonormale directe (N est un vecteur normal).

En dérivant par rapport à s la relation $\|T(s)\|^2 = 1$, on obtient $T'(s) \cdot T(s) = 0$, on voit que $T'(s)$ est perpendiculaire à $T(s)$, c'est donc un vecteur colinéaire à $N(s)$. Il existe alors un scalaire tel que $T'(s) = K(s) \cdot N(s)$. En multipliant scalairement par N , on obtient:

$$K(s) = T'(s) \cdot N(s),$$

on appelle $K(s)$ la courbure algébrique de la courbe au point de paramètre s . Son signe dépend du choix de l'orientation du plan et de celle donnée sur la courbe par le paramètre s ; ("." signifie que le produit scalaire).

Exemple 1.4.1 Soit $\alpha(t) = (R \cos t, R \sin t)$, pour $t \in [0, 2\pi]$. La longueur du cercle de rayon R paramétré s'écrit

$$s(t) = \int_0^t \|\alpha'(t)\| dt = Rt,$$

soit encore $t = \frac{s}{R}$, donc $\alpha(s) = \left(R \cos \frac{s}{R}, R \sin \frac{s}{R}\right)$. On remarque que cette paramétrisation est normale car pour tout s , on trouve que $\|\alpha'(s)\| = 1$,

on a:

$$\begin{aligned} T(s) &= \left(-\sin \frac{s}{R}, \cos \frac{s}{R}\right) \\ N(s) &= \left(-\cos \frac{s}{R}, -\sin \frac{s}{R}\right) \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} K(s) &= T'(s) \cdot N(s) \\ &= \left(\frac{-1}{R} \cos \frac{s}{R}, \frac{-1}{R} \sin \frac{s}{R}\right) \cdot \left(-\cos \frac{s}{R}, -\sin \frac{s}{R}\right) \\ &= \frac{1}{R} \left(\cos^2 \frac{s}{R} + \sin^2 \frac{s}{R}\right) \\ &= \frac{1}{R}. \end{aligned}$$

La courbure est constante et égale à l'inverse du rayon.

1.5 Interprétation géométrique

Proposition 1.5.1 Soit $\alpha(s) : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe plane paramétrée par sa longueur d'arc, on sait qu'il existe une fonction différentiable $\theta : I \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $\theta(s)$ soit égale à une mesure de l'angle d'orientation $\left(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{T(s)}\right)$, alors

$$K(s) = \theta'(s).$$

Démonstration. On pose:

$$T = (\cos \theta(s), \sin \theta(s))$$

alors

$$N(s) = (-\sin \theta(s), \cos \theta(s))$$

en dérivant $T(s)$, on obtient

$$T' = \theta'(-\sin \theta(s), \cos \theta(s))$$

donc

$$k(s) = T'(s) \cdot N(s) = \theta'(s),$$

plus précisément θ est l'angle entre les deux lignes de la tangente de la courbe au point M_0 et M_1 , et la longueur d'arc entre M_0 et M_1 est égale à Δs comme on le constate sur la figure (1.5.1).

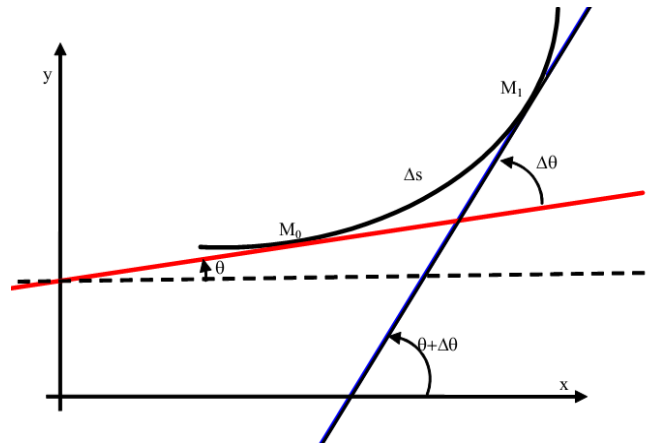


Figure 1.5.1 : Interprétation géométrique de la courbure

La courbure est la limite du rapport de la variation de l'angle θ à la variation de la longueur d'arc lorsque M_1 se rapproche de M_0 , c'est à dire $K(s) = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta s}$.

Autrement dit la courbure est le changement d'écartement de l'angle entre la tangente et la courbe α . ■

Théorème 1.5.1 (*Théorème fondamental des courbes planes*).

Soit $k_0 : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable définie sur un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$, alors il existe une courbe plane $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ paramétrée par sa longueur d'arc telle que $k_\alpha(s) = k_0(s)$ pour tout $s \in I$, où k_α est la fonction de courbure de α .

Démonstration. On définit la fonction $\theta : I \longrightarrow \mathbb{R}$ par $\theta(s) = \int_{s_0}^s k_0(u) du$, où $s_0 \in I$ est arbitraire alors θ est différentiable et à partir de la proposition ci-dessus elle doit être constante. L'angle que fait la tangente de la courbe que l'on veut construire se fait avec une direction fixe. C'est pour ça on définit $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ par

$$\alpha(s) = \left(\int_{s_1}^s \cos \theta(u) du, \int_{s_2}^s \sin \theta(u) du \right),$$

alors

$$\alpha'(s) = (\cos \theta(s), \sin \theta(s)),$$

ainsi $\|\alpha'(s)\| = 1$ pour chaque $s \in I$, donc α est une courbe paramétrée par sa longueur d'arc et

$$T(s) = (\cos \theta(s), \sin \theta(s)) \quad , \quad N(s) = (-\sin \theta(s), \cos \theta(s))$$

d'autre part on a:

$$T'(s) = (-\theta'(s) \sin \theta(s), \theta'(s) \cos \theta(s))$$

et par la définition de la courbure et la fonction θ , on trouve que:

$$k_\alpha(s) = \langle T'(s), N(s) \rangle = \theta'(s) = k_0(s)$$

d'où le résultat. ■

Théorème 1.5.2 Si $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ est une courbe régulière pas nécessairement paramétrée par sa longueur d'arc, alors on a

$$K(t) = \frac{x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)}{(x'^2(t) + y'^2(t))^{\frac{3}{2}}} \text{ tel que } \alpha(t) = (x(t), y(t)).$$

Démonstration. On a:

$$T(t) = \frac{1}{\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}} (x'(t), y'(t)),$$

alors

$$\begin{aligned} T'(t) &= \frac{-x'(t)x''(t) - y'(t)y''(t)}{(x'^2(t) + y'^2(t))^{\frac{3}{2}}} (x'(t), y'(t)) + \frac{1}{\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}} (x''(t), y''(t)) \\ &= \frac{1}{(x'^2(t) + y'^2(t))^{\frac{3}{2}}} \left(-x'(t)y'(t)y''(t) + x''(t)y'^2(t), -x'(t)x''(t)y'(t) + y''(t)x'^2(t) \right), \end{aligned}$$

d'autre part, on a:

$$N(t) = \frac{1}{\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}} (-y'(t), x'(t))$$

donc

$$\begin{aligned} K(t) &= \frac{1}{\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}} \frac{1}{(x'^2(t) + y'^2(t))^{\frac{3}{2}}} \times \\ &\quad \left(x'(t)y'^2(t)y''(t) - x''(t)y'^3(t) - x'^2(t)x''(t)y'(t) + x'^3(t)y''(t) \right) \\ &= \frac{1}{(x'^2(t) + y'^2(t))^{\frac{5}{2}}} \left(x'^2(t) + y'^2(t) \right) \cdot (x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)) \\ &= \frac{x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)}{(x'^2(t) + y'^2(t))^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

■

Théorème 1.5.3 Soit $\alpha(s)$ une courbe paramétrée régulière, on dit que α est une droite affine si et seulement si $K(s) = 0$.

Démonstration. On suppose que α est une droite affine alors sa paramétrisation est:

$$\alpha(s) = as + b \forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$$

donc $\alpha'(s) = T(s) = a \implies T'(s) = 0 = K(s)N(s)$, alors $K(s) = 0$. Inversement, on suppose que $K(s) = 0$ alors $T'(s) = 0 \implies T(s) = a$ avec a constante où $|a| = 1$,

$$\alpha'(s) = T(s) = a,$$

nous pouvons l'intégrer pour obtenir $\alpha(s) = as + b$, donc α est une droite affine. ■

1.6 Formules de Serret-Frenet

Le repère de Serret-Frenet est défini en chaque point d'une courbe paramétrée régulière. Les formules de Serret-Frenet expriment la façon dont ce repère bouge le long de la courbe. Plus précisément, elles donnent les dérivées de ce repère dans la base de Serret-Frenet.

Proposition 1.6.1 (*Formules de Serret-Frenet*). Soit $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée normale régulière. Alors pour tout $s \in I$ on a :

$$\begin{cases} T'(s) = K(s).N(s) \\ N'(s) = -K(s).T(s) \end{cases}$$

Démonstration. La première formule a été déjà démontrée. Le vecteur $N(s)$ étant unitaire, on a :

$$\forall s \in I \quad N(s).N(s) = 1.$$

En dérivant, on obtient

$$\forall s \in I \quad N'(s).N(s) = 0.$$

Le vecteur $N'(s)$ est donc colinéaire à $T'(s)$. Par ailleurs, on a :

$$\forall s \in I \quad T(s).N(s) = 0.$$

En dérivant, on obtient :

$$T'(s).N(s) + T(s).N'(s) = 0,$$

donc

$$N'(s) = -K(s).T(s)$$

■

1.7 Le cercle osculateur

Par analogie avec le rayon d'un cercle, on introduit, quand $K(s) \neq 0$, le rayon de courbure $\rho(s)$ défini par l'égalité $\rho(s) = \frac{1}{K(s)}$ et le centre de courbure $C(s)$ défini par : $C(s) = \alpha(s) + \rho(s)N(s)$.

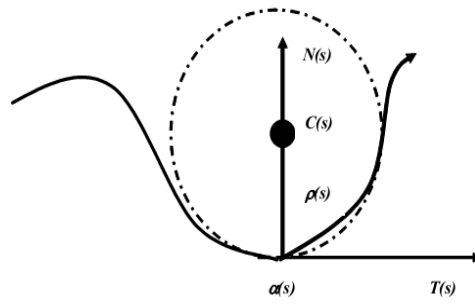


Figure 1.7.1 : Le cercle osculateur

Le cercle de centre $C(s)$ et de rayon $|\rho(s)|$, montré sur la figure (1.7.1), est dit cercle osculateur, c'est le cercle qui approche le mieux la courbe en $\alpha(s)$ en un sens très précis.

Remarque 1.7.1 En un point de paramètre s , si la courbure $K(s)$ est strictement positive, les vecteurs $N(s)$, $T'(s)$ sont de même sens et le vecteur $N(s)$ pointe vers le centre de courbure. Si la courbure est négative, alors $N(s) = \frac{1}{K(s).T'(s)}$ pointe dans la direction opposée au centre de courbure.

Chapitre 2

Les courbes gauches (dans $\mathbb{R}^3$)

2.1 Définition

On appelle courbe paramétrée dans l'espace ($\mathbb{R}^3$) chaque application

$$\begin{aligned}\alpha & : I \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ t & \longrightarrow \alpha(t) = (x(t), y(t), z(t)).\end{aligned}$$

Exemple 2.1.1 *La droite affine: elle se représente sous la forme*

$$\alpha(t) = (a_1t + b_1, a_2t + b_2, a_3t + b_3)$$

Cette droite comme l'indique la figure (2.1.1), passe par le point $p = (b_1, b_2, b_3)$ dans la direction du vecteur $v = (a_1, a_2, a_3)$.

Exemple 2.1.2 *l'hélice: On considère la courbe hélicienne par:*

$$\alpha(t) = (a \cos t, a \sin t, bt) \forall t \in \mathbb{R} \text{ et pour } a, b \in \mathbb{R}^*$$

On peut facilement obtenir une hélice: il suffit de tracer sur un rectangle de papier une droite, puis d'enrouler ce rectangle sur lui-même de façon à former un cylindre. La figure (2.1.2) donne un aperçu sur une telle courbe.

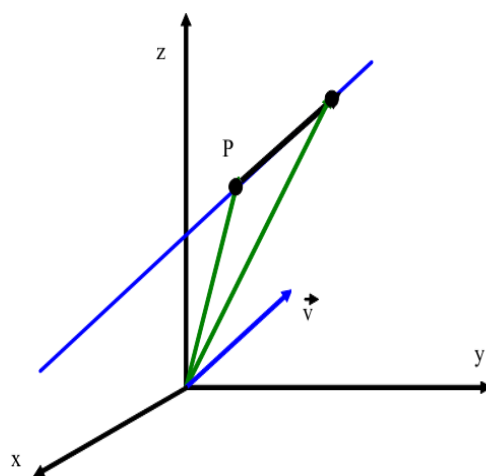


Figure 2.1.1 : La droite affine

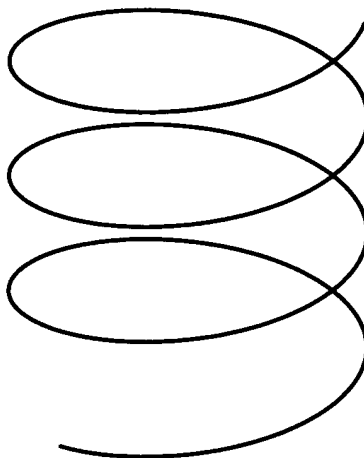


Figure 2.1.2 : L'hélice

Remarque 2.1.1 Comme pour les courbes planes, on a les définitions suivantes:

1) Une courbe gauche paramétrée est dite régulière si et seulement si:

$$\alpha'(t) \neq 0, \forall t \in I \text{ où } \alpha'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t)).$$

2) La longueur d'arc de la courbe α est:

$$l(\alpha) = \int_I \|\alpha'(t)\| dt = \int_I \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} dt.$$

3) La fonction de longueur d'arc est:

$$s : t \longrightarrow s(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(u)\| du = \int_{t_0}^t \sqrt{x'^2(u) + y'^2(u) + z'^2(u)} du.$$

2.2 Le vecteur tangent

On supposera que les courbes paramétrées sont birégulières, c'est à dire que $\alpha'(t)$ et $\alpha''(t)$ sont linéairement indépendants en tout point.

Comme pour les courbes planes, si la courbe est paramétrée par sa longueur d'arc, le vecteur tangent unitaire est défini par:

$$T(s) = \alpha'(s),$$

et si la courbe est paramétrée par une représentation quelconque, alors

$$T(t) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}.$$

2.3 Le vecteur normal

Le vecteur normal unitaire (appelé aussi vecteur normal principal) est défini par la relation suivante:

$$N(s) = \frac{T'(s)}{\|T'(s)\|}.$$

Exemple 2.3.1 Soit $\alpha(t) = \left(\frac{\sin t}{\sqrt{2}}, \frac{\sin t}{\sqrt{2}}, \cos t\right)$ une courbe paramétrée, on a

$$\alpha'(t) = \left(\frac{\cos t}{\sqrt{2}}, \frac{\cos t}{\sqrt{2}}, -\sin t\right),$$

et $\|\alpha'(t)\| = 1$, donc

$$T(t) = \left(\frac{\cos t}{\sqrt{2}}, \frac{\cos t}{\sqrt{2}}, -\sin t \right),$$

en dérivant $T(t)$ on obtient:

$$T'(t) = \left(\frac{-\sin t}{\sqrt{2}}, \frac{-\sin t}{\sqrt{2}}, -\cos t \right),$$

et on a $\|T'(t)\| = 1$, alors

$$N(t) = \left(\frac{-\sin t}{\sqrt{2}}, \frac{-\sin t}{\sqrt{2}}, -\cos t \right).$$

2.4 La Courbure

Dans le cas des courbes planes, le signe de la courbure algébrique est lié au sens de parcours de la courbe et à l'orientation du plan. Pour une courbe gauche, il n'est plus possible d'avoir un signe de courbure cohérent: intuitivement, quand on se promène sur la courbe, on ne peut pas de manière naturelle dire où est celle qui est droite, et où est celle qui est gauche. On ne définit donc pas de courbure algébrique, mais uniquement une courbure (qui est toujours positive).

Définition 2.4.1 Soit $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ une courbe paramétrée normale régulière. La courbure de α au point $\alpha(s)$ est:

$$K(s) = \|T'(s)\|.$$

Exemple 2.4.1 Soit $\alpha(s) = \left(\frac{4}{5} \cos s, 1 - \sin s, \frac{-3}{5} \cos s \right)$, une courbe paramétrée normale pour $s \in [0, 2\pi]$, la dérivée de α est $\alpha'(s) = \left(\frac{-4}{5} \sin s, -\cos s, \frac{3}{5} \sin s \right)$, et $\|\alpha'(s)\| = 1$, alors $T(s) = \left(\frac{-4}{5} \sin s, -\cos s, \frac{3}{5} \sin s \right)$, et sa dérivée est

$$T'(s) = \left(\frac{-4}{5} \cos s, \sin s, \frac{3}{5} \cos s \right),$$

d'où

$$K(s) = 1.$$

Remarque 2.4.1 On a: $K(s) = \|T'(s)\|$ alors

$$\begin{aligned} K(s) &= \left\| \frac{dT}{ds} \right\| \\ &= \left\| \frac{dT}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} \right\| \\ &= \frac{\|T'(t)\|}{\|\alpha'(t)\|}, \end{aligned}$$

la dernière relation exprime la courbure d'une courbe α paramétrée par une représentation quelconque.

Exemple 2.4.2 Soit $\alpha(t) = (1+t, -1+5t, 1+7t)$, on a $\alpha'(t) = (1, 5, 7)$, $\|\alpha'(t)\| = \sqrt{75}$, alors $T(t) = \left(\frac{1}{\sqrt{75}}, \frac{5}{\sqrt{75}}, \frac{7}{\sqrt{75}}\right)$, en dérivant $T(t)$ on obtient:

$$T'(t) = (0, 0, 0),$$

donc

$$K(t) = 0.$$

2.5 Binormale et repère de Serret-Frenet

Comme dans le cas des courbes planes, le repère de Serret-Frenet est un repère orthonormé qui varie le long d'une courbe paramétrée. Le vecteur $T(s)$ est unitaire tangent à la courbe, la normale principale $N(s)$ est orthogonale à $T(s)$. Il est naturel de compléter cela en une base orthonormée par le choix du vecteur suivant:

$$B(s) = T(s) \wedge N(s).$$

2.5.1 Définition

Soit $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ une courbe régulière paramétrée et $\alpha(s)$ un point birégulier. La binormale à α au point $\alpha(s)$ est le vecteur:

$$B(s) = T(s) \wedge N(s).$$

2.5.2 Rappel sur le produit vectoriel

Nous rappelons que pour $u = (u_1, u_2, u_3)$ et $v = (v_1, v_2, v_3)$ dans $\mathbb{R}^3$, nous définissons leur vecteur produit $u \wedge v \in \mathbb{R}^3$ par:

$$u \wedge v = (u_2 v_3 - u_3 v_2, u_3 v_1 - u_1 v_3, u_1 v_2 - u_2 v_1).$$

Remarque 2.5.1 *Symboliquement, nous pouvons écrire cette définition comme:*

$$u \wedge v = \det \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ e_1 & e_2 & e_3 \end{pmatrix}$$

où e_1, e_2, e_3 est la base standard de $\mathbb{R}^3$. Ce que cela signifie est que nous obtenons le bon résultat si nous utilisons la règle de Cramer pour développer ce déterminant en utilisant les mineurs de la troisième ligne.

Exemple 2.5.1 Soit $\alpha(t) = (\frac{4}{5} \cos t, 1 - \sin t, -\frac{3}{5} \cos t)$, alors

$$\|\alpha'(t)\| = \sqrt{\frac{16}{25} \sin^2 t + \cos^2 t + \frac{9}{25} \sin^2 t} = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} = 1,$$

d'autre part

$$T(t) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} = \left(-\frac{4}{5} \sin t, -\cos t, \frac{3}{5} \sin t \right),$$

alors

$$T'(t) = \left(-\frac{4}{5} \cos t, \sin t, \frac{3}{5} \cos t \right) \text{ et } \|T'(t)\| = 1,$$

donc

$$N(t) = \frac{T'(t)}{\|T'(t)\|} = \left(-\frac{4}{5} \cos t, \sin t, \frac{3}{5} \cos t \right),$$

on trouve finalement que:

$$B(t) = T(t) \wedge N(t) = \det \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} \sin t & -\cos t & \frac{3}{5} \sin t \\ -\frac{4}{5} \cos t & \sin t & \frac{3}{5} \cos t \\ e_1 & e_2 & e_3 \end{pmatrix} = \left(-\frac{3}{5}, 0, -\frac{4}{5} \right).$$

2.5.3 Définition

Le repère mobile de Serret-Frenet de α au point $\alpha(s)$ est le repère orthonormé direct :

$$(\alpha(s), T(s), N(s), B(s)).$$

Le trièdre orthonormal direct constitué des trois vecteurs $T(s), N(s), B(s)$ est appelé trièdre de Serret-Frenet de α au point $\alpha(s)$.

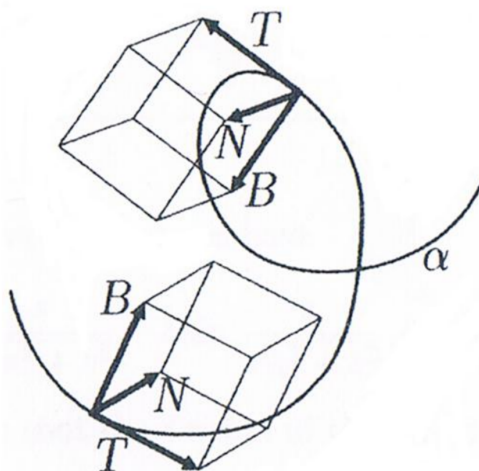


Figure 2.5.1 : Le trièdre de Serret-Frenet

2.6 Torsion d'une courbe

On va maintenant étudier la torsion d'une courbe, autrement dit chercher à savoir comment "tourne" le repère de Serret-Frenet autour de la droite tangente à la courbe. Pour mesurer cela, on a besoin de la dérivée du vecteur binormal B , comme B fait intervenir la dérivée seconde de la paramétrisation, on considère ici une courbe $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ paramétrée normale et $\alpha(s)$ un point birégulier.

Proposition 2.6.1 *Le vecteur $B'(s)$ est colinéaire à $N(s)$. En particulier, il existe une application continue $\tau : I \longrightarrow \mathbb{R}$ qui vérifie*

$$\forall s \in I \quad B'(s) = \tau(s) \cdot N(s).$$

Démonstration. Pour tout $s \in I$ on a $B(s) \cdot B(s) = \|B(s)\|^2 = 1$. En dérivant, on a:

$$\forall s \in I \quad B'(s) \cdot B(s) = 0.$$

De même, en dérivant $B(s) \cdot T(s) = 0$, on a:

$$\forall s \in I \quad B'(s) \cdot T(s) = B(s) \cdot T'(s) = 0.$$

Le vecteur $B'(s)$ est donc orthogonal à $T(s)$ et $B(s)$. Il est alors colinéaire à $N(s)$ et on pose $\tau(s) = B'(s) \cdot N(s)$. ■

Remarque 2.6.1 D'après la proposition précédente si on fait le produit de N avec les deux membres de l'égalité on obtient $N(s) \cdot B'(s) = \tau(s) \cdot N(s) \cdot N(s)$ tel que $N(s) \cdot N(s) = 1$, alors

$$\tau(s) = B'(s) \cdot N(s).$$

$\tau(s)$ est appelé la torsion de la courbe paramétrée α au point $\alpha(s)$. La torsion mesure comment "tourne" le vecteur $B(s)$.

Théorème 2.6.1 Soit $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ une courbe paramétrée régulière dont tous les points sont biréguliers. Alors

la courbe α est plane si et seulement si $\tau(s) = 0$, pour tout $t \in I$.

Démonstration. On suppose que α est une courbe plane (paramétrée par sa longueur d'arc), c'est à dire que tous les points de la courbe α appartiennent au même plan (P) , et soit n un vecteur constant orthogonal au plan (P) , alors (P) est défini par la relation

$$(\alpha(s) - \alpha(0)) \cdot n = 0 \text{ pour tout } s \in I,$$

en dérivant la dernière relation, on obtient:

$$\begin{aligned} (\alpha(s) - \alpha(0) \cdot n)' &= (\alpha(s) - \alpha(0))' \cdot n + (\alpha(s) - \alpha(0)) \cdot n' \\ &= \alpha'(s) \cdot n = 0, \end{aligned}$$

on sait que: $\alpha'(s) = T(s)$, alors $T(s) \cdot n = 0$. Cela signifie que

$$T \perp n \tag{2.6.1}$$

en dérivant la relation $\alpha'(s) = T(s)$, on obtient $\alpha''(s) = T'(s) = K(s) \cdot N(s)$. Cela signifie que:

$$N \perp n \quad (2.6.2)$$

de (2.6.1) et (2.6.2), on trouve que $B(s)$ est colinéaire à n , c'est à dire que:

$$B(s) = \pm \frac{n}{\|n\|} = \text{constant},$$

alors $B'(s) = 0$, donc $\tau(s) = 0$.

Inversement, on suppose que:

$$\tau(s) = 0 \implies B'(s) = 0,$$

donc $B(s) = \text{constant}$. Soit (P) le plan qui inclut $\alpha(0)$ et orthogonal à B , on montre que:

$$(\alpha(s) - \alpha(0) \cdot B(s)) = \text{constant},$$

on a:

$$\begin{aligned} (\alpha(s) - \alpha(0) \cdot B(s))' &= \alpha'(s) \cdot B(s) \\ &= T(s) \cdot B(s) \\ &= 0, \end{aligned}$$

alors

$$(\alpha(s) - \alpha(0) \cdot B(s)) = \text{constant},$$

pour $s = 0$

$(\alpha(0) - \alpha(0) \cdot B(s)) = 0$, alors $\forall s \in I : (\alpha(s) - \alpha(0) \cdot B(s)) = 0$, c'est à dire que $\alpha(s) \in (P)$.

Donc α est une courbe plane. ■

2.6.1 Formules de Serret-Frenet

Comme pour les courbes planes, en chaque point d'une courbe gauche paramétrée régulière, on a un repère de Serret. Ce repère se déplace avec le paramètre de la courbe. Les formules de Serret-Frenet expriment justement la dérivée de ce repère.

Proposition 2.6.2 (Formules de Serret-Frenet). Soit $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ une courbe paramétrée normale régulière et $\alpha(s)$ un point birégulier. Alors on a :

$$\begin{cases} T'(s) = K(s) \cdot N(s) \\ N'(s) = -K(s) \cdot T(s) - \tau(s) \cdot B(s) \\ B'(s) = \tau(s) \cdot N(s) \end{cases} \quad (2.6.3)$$

Démonstration. Il ne reste que la deuxième formule à montrer. Pour cela, on va calculer les coordonnées de $N'(s)$ dans la base de Serret-Frenet. Pour tout $s \in I$, on a $N(s) \cdot N(s) = 1$. En dérivant cette dernière nous obtenons :

$$N'(s) \cdot N(s) = 0.$$

En dérivant $B(s) \cdot N(s) = 0$, nous obtenons :

$$N'(s) \cdot B(s) = -N(s) \cdot B'(s) = -N(s) \cdot (\tau(s) \cdot N(s)) = -\tau(s).$$

De même, en dérivant $N(s) \cdot T(s) = 0$, on a :

$$N'(s) \cdot T(s) = -N(s) \cdot T'(s) = -N(s) \cdot (K(s) \cdot N(s)) = -K(s),$$

alors $N'(s) = -K(s) \cdot T(s) - \tau(s) \cdot B(s)$. ■

Remarque 2.6.2 Les Formules de Serret-Frenet (2.6.3) peuvent également être écrites sous forme matricielle de la façon suivante :

$$\begin{bmatrix} T(s) \\ N(s) \\ B(s) \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & K(s) & 0 \\ -K(s) & 0 & -\tau(s) \\ 0 & \tau(s) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T(s) \\ N(s) \\ B(s) \end{bmatrix}$$

Remarque 2.6.3 Si la courbe α est paramétrée par une représentation quelconque, les formules de Serret-Frenet (2.1.1) sont données par :

$$\begin{cases} T'(t) = K(t) v N(t) \\ N'(t) = -K(t) v T(t) - \tau(t) v B(t) \\ B'(t) = \tau(t) v N(t) \end{cases}$$

telle que $v = \|\alpha'(t)\|$.

Lemme 2.6.1

$$\alpha'(t) = vT(t) \text{ et } \alpha''(t) = \frac{dv}{dt}T(t) + K(t)v^2N(t)$$

Démonstration. On a $T(t) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} = \frac{\alpha'(t)}{v}$, alors $\alpha'(t) = vT(t)$, tandis que le deuxième est

$$\begin{aligned} \alpha''(t) &= \frac{dv}{dt}T(t) + v(t)T'(t) \\ &= \frac{dv}{dt}T(t) + v(t)K(t)v(t)N(t) \\ &= \frac{dv}{dt}T(t) + K(t)v^2N(t). \end{aligned}$$

■

Théorème 2.6.2 Si $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ est une courbe régulière pas forcément paramétrée par la longueur d'arc, alors

$$K(t) = \frac{\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|}{v^3} \quad (2.6.4)$$

$$B(t) = \frac{\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)}{\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|} \quad (2.6.5)$$

$$\tau(t) = -\frac{\langle \alpha'(t) \wedge \alpha''(t), \alpha'''(t) \rangle}{\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|^2} \quad (2.6.6)$$

telle que $v = \|\alpha'(t)\|$.

Démonstration. Pour démontrer (2.6.4), nous utilisons les formules du lemme pour obtenir

$$\begin{aligned} \alpha'(t) \wedge \alpha''(t) &= (vT(t)) \wedge \left(\frac{dv}{dt}T(t) + K(t)v^2N(t) \right) \\ &= v \frac{dv}{dt}T(t) \wedge T(t) + K(t)v^3T(t) \wedge N(t) \\ &= 0 + K(t)v^3B(t), \end{aligned}$$

d'où $\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\| = K(t)v^3$, on trouve finalement:

$$K(t) = \frac{\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|}{v^3}.$$

Pour (2.6.5), on a $\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\| = K(t).v^3$, et aussi $\alpha'(t) \wedge \alpha''(t) = K(t)v^3 B(t)$, alors

$$\alpha'(t) \wedge \alpha''(t) = \|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\| B(t).$$

on trouve finalement

$$B(t) = \frac{\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)}{\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|}.$$

Pour (2.6.6), nous prenons la troisième dérivée

$$\begin{aligned} \alpha'''(t) &= \left(\frac{dv}{dt} T(t) + K(t)v^2 N(t) \right)' \\ &= \frac{dv^2}{dt^2} T(t) + \frac{dv}{dt} T'(t) + \frac{dk}{dt} v^2 N(t) + 2K(t)v \frac{dv}{dt} N(t) + K(t)v^2 N'(t), \end{aligned}$$

et en multipliant scalairement par $B(t)$, on obtient

$$\begin{aligned} B(t). \alpha'''(t) &= \frac{\langle \alpha'(t) \wedge \alpha''(t), \alpha'''(t) \rangle}{\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|} \\ &= -\tau(t).K(t).v^3 \\ &= -\tau(t). \|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|, \end{aligned}$$

on trouve finalement

$$\tau(t) = -\frac{\langle \alpha'(t) \wedge \alpha''(t), \alpha'''(t) \rangle}{\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|^2}.$$

■

Exemple 2.6.1 Soit $\alpha(t) = (e^t, e^{-t}, t\sqrt{2})$, on a $\alpha'(t) = (e^t, -e^{-t}, \sqrt{2})$ et $\alpha''(t) = (e^t, e^{-t}, 0)$

donc

$$\alpha'(t) \wedge \alpha''(t) = \det \begin{pmatrix} e^t & -e^{-t} & \sqrt{2} \\ e^t & e^{-t} & 0 \\ e_1 & e_2 & e_3 \end{pmatrix} = (-\sqrt{2}e^{-t}, \sqrt{2}e^t, 2),$$

d'autre part on trouve que

$$\|\alpha'(t)\| = \sqrt{e^{2t} + e^{-2t} + 2} = e^t + e^{-t} = 2cht,$$

et

$$\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\| = \sqrt{2e^{-2t} + 2e^{2t} + 4} = 2\sqrt{2}cht,$$

donc

$$K(t) = \frac{\sqrt{2}}{4ch^2t}, \quad B(t) = \left(\frac{-e^{-t}}{2cht}, \frac{e^t}{2cht}, \frac{1}{\sqrt{2}cht} \right),$$

et on a $\alpha'''(t) = (e^t, -e^{-t}, 0)$, donc $(\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)) \cdot \alpha'''(t) = -2\sqrt{2}$, alors

$$\tau(t) = \frac{\sqrt{2}}{4ch^2t}.$$

2.7 Les plans associés à une courbe gauche

Pour chaque courbe paramétrée dans $\mathbb{R}^3$, il existe trois plans associés:

2.7.1 Plan tangent(osculateur)

Soit $t_0 \in I$, le plan tangent à la courbe α au point $\alpha(t_0)$ est le plan qui contient que $\alpha(t_0)$ et perpendiculaire à B . L'équation de ce plan est donnée par la relation suivante

$$(\alpha(t) - \alpha(t_0)) \cdot B(t_0) = 0,$$

il est engendré par N et T .

2.7.2 Plan normal

Le plan normal sur α au point $\alpha(t_0)$, est le plan qui passe par $\alpha(t_0)$ et perpendiculaire à T . Son équation est donnée par:

$$(\alpha(t) - \alpha(t_0)) \cdot T(t_0) = 0,$$

il est engendré par N et B .

2.7.3 Plan rectifiant

Le plan rectifiant de la courbe α au point $\alpha(t_0)$, est celui qui comprend $\alpha(t_0)$ et normal sur N . Son équation est donnée par:

$$(\alpha(t) - \alpha(t_0)) \cdot N(t_0) = 0,$$

il est engendré par B et T , (figure 2.7.1).

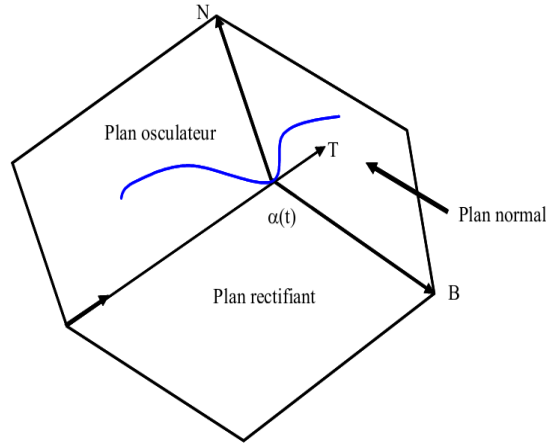


Figure 2.7.1 : Construction du trièdre associé à un point d'une courbe gauche dans l'espace

Exemple 2.7.1 Soit α une courbe paramétrée régulière pas forcément paramétrée par sa longueur d'arc telle que $\alpha(t) = (1+t, -t^3, 1+t^3)$. On va donner le plan osculateur, normal et rectifiant de la courbe α en point $\alpha(1)$:

1)- le plan osculateur: on a $\alpha(1) = (2, -1, 2)$, en dérivant $\alpha(t)$ pour obtenir $\alpha'(t) = (1, -3t^2, 3t^2)$, donc $\alpha'(1) = (1, -3, 3)$ en dérivant $\alpha'(t)$, on obtient

$$\alpha''(t) = (0, -6t, 6t),$$

donc $\alpha''(1) = (0, -6, 6)$, alors

$$\alpha'(t) \wedge \alpha''(t) = \det \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 0 & -6 & 6 \\ e_1 & e_2 & e_3 \end{pmatrix} = (0, -6, -6),$$

et on a aussi $\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\| = 6\sqrt{2}$, donc

$$\begin{aligned} B(t) &= \frac{\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)}{\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|} \\ &= \frac{1}{6\sqrt{2}} (0, -6, -6) \\ &= \left(0, \frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right). \end{aligned}$$

et en multipliant $(\alpha(t) - \alpha(1))$ scalairement par $B(1)$, on obtient:

$$\begin{aligned} (\alpha(t) - \alpha(1)) \cdot B(1) &= 0 \dots (*) \\ (*) &\Rightarrow (x-2, y+1, z-2) \cdot \left(0, \frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right) = 0 \\ &\Rightarrow \frac{-1}{\sqrt{2}}(y+1) + \frac{-1}{\sqrt{2}}(z-2) = 0 \\ &\Rightarrow y+z-1=0, \end{aligned}$$

alors l'équation du plan osculateur est donnée par:

$$y+z-1=0.$$

2)-le plan normal: on a $\|\alpha'(t)\| = \sqrt{1+18t^4}$, alors

$$T(t) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} = \frac{1}{\sqrt{1+18t^4}} (1, -3t^2, 3t^2),$$

donc $T(1) = \frac{1}{\sqrt{19}} (1, -3, 3)$, et en multipliant $(\alpha(t) - \alpha(1))$ scalairement par $T(1)$ on obtient:

$$\begin{aligned} (\alpha(t) - \alpha(1)) \cdot T(1) &= 0 \dots (**) \\ (**) &\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{19}} (x-2, y+1, z-2) \cdot (1, -3, 3) = 0 \\ &\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{19}} (x-2-3y-3+3z-6) = 0 \\ &\Rightarrow x-3y+3z-11=0, \end{aligned}$$

alors l'équation du plan normal est donnée par:

$$x-3y+3z-11=0.$$

3)- le plan rectifiant:

on a:

$$\begin{aligned} T'(t) &= \frac{1}{(1+18t^4)^{\frac{3}{2}}} (-36t^3, -6t, 6t) \\ \|T'(t)\| &= \frac{6}{(1+18t^4)^{\frac{3}{2}}} \sqrt{36t^6+2t^2} \\ N(t) &= \frac{T'(t)}{\|T'(t)\|} = \frac{1}{\sqrt{36t^6+2t^2}} (-6t^3, -t, t), \end{aligned}$$

en multipliant $(\alpha(t) - \alpha(1))$ scalairement par $N(1)$ on obtient:

$$\begin{aligned} (\alpha(t) - \alpha(1)) \cdot N(1) &= 0 \dots (***) \\ (***) &\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{38}} (x - 2, y + 1, z - 2) \cdot (-6, -1, 1) = 0 \\ &\Rightarrow -6x - y + z + 9 = 0, \end{aligned}$$

alors l'équation de plan rectifiant est donnée par:

$$-6x - y + z + 9 = 0.$$

2.8 Théorème fondamental des courbes gauches

Le théorème suivant permet de déterminer à isométrie près une courbe en ayant que la courbure et la torsion.

Théorème 2.8.1 *Etant donné $K(s) > 0$ et $\tau(s), s \in I$, deux fonctions différentiables, il existe une courbe régulière $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ telle que l est la longueur d'arc, $K(s)$ la courbure et $\tau(s)$ la torsion de α .*

Démonstration. La démonstration de l'existence fait intervenir le théorème d'existence et d'unicité des équations différentielles ordinaires, donc nous ne montrerons que l'unicité. En effet, on suppose qu'il existe deux courbes $\alpha, \tilde{\alpha}$ avec leurs éléments T, N, B et $\tilde{T}, \tilde{N}, \tilde{B}$ respectivement. Avec les conditions initiales:

$$\begin{aligned} T(s_0) &= \tilde{T}(s_0), \\ N(s_0) &= \tilde{N}(s_0), \\ B(s_0) &= \tilde{B}(s_0). \end{aligned}$$

Pour tout $s \in I$, on définit une fonction f par:

$$f(s) = \frac{1}{2} \frac{d}{ds} \left(\|T - \tilde{T}\|^2 + \|N - \tilde{N}\|^2 + \|B - \tilde{B}\|^2 \right),$$

en dérivant, on obtient:

$$\begin{aligned}
 f'(s) &= (T - \tilde{T}.T' - \tilde{T}' + N - \tilde{N}.N' - \tilde{N}' + B - \tilde{B}.B' - \tilde{B}') \\
 &= \left(T - \tilde{T}.KN - K.\tilde{N} + N - \tilde{N}.(-K.T - \tau.B) - K.\tilde{T} - \tau.\tilde{B} + B - \tilde{B}.\tau N - \tau.\tilde{N} \right) \\
 &= K \left(T - \tilde{T}.N - \tilde{N} \right) - K \left(N - \tilde{N}.T - \tilde{T} \right) - \tau \left(N - \tilde{N}.B - \tilde{B} \right) + \tau \left(B - \tilde{B}.N - \tilde{N} \right) \\
 &= 0; \forall s \in I.
 \end{aligned}$$

donc $f(s) = \text{constant}$, pour $s = 0$, on a $f(s_0) = 0$, donc $\forall s \in I$ $f(s) = 0$. Finalement,
 $\alpha(s) = \tilde{\alpha}(s); \forall s \in I.$ ■

Chapitre 3

Applications

3.1 L'hélice circulaire

On définit l'hélice circulaire par:

$$\alpha(t) = (a \cos t, a \sin t, bt) \forall t \in \mathbb{R} \text{ et pour } a \in \mathbb{R}_+^*.$$

En effet, on remarque, selon la figure (3.1.1) que cette courbe est tracée sur un cylindre de rayon a et que la courbe "monte" sur le cylindre avec une vitesse $\sqrt{a^2 + b^2}$. Le paramètre t mesure l'angle entre la droite portant l'axe x et la droite passant par l'origine O et la projection de $\alpha(t)$ sur le plan xy qui a pour équation $y = \delta x$.

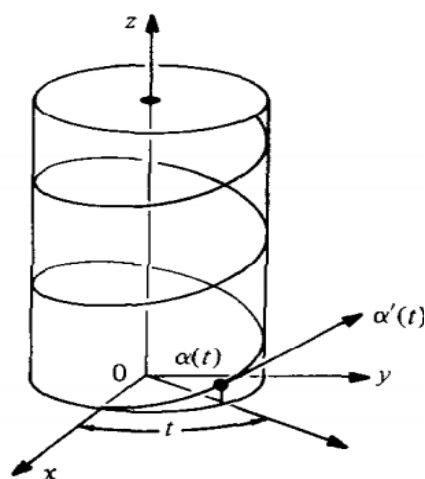


Figure 3.1.1 : L'hélice circulaire

3.1.1 La longueur d'arc

On a $\alpha'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t)) = (-a \sin t, a \cos t, b)$,

alors

$$L(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} \|\alpha'(t)\| = \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{a^2 \sin^2 u + a^2 \cos^2 u + b^2} du = +\infty.$$

Cette courbe paramétrée a une longueur infinie. Mais si on restreint l'intervalle du paramètre t , on peut obtenir des courbes avec une longueur finie:

$$L(\alpha|_{[0, 2\pi]}) = 2\pi\sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{et} \quad L(\alpha|_{[0, 4\pi]}) = \sqrt{4\pi a^2 + b^2}.$$

Remarque 3.1.1 *L'hélice circulaire est une courbe régulière parce que*

$$\alpha'(t) = (-a \sin t, a \cos t, b) \neq 0; \forall t \in \mathbb{R}.$$

3.1.2 La fonction de longueur d'arc

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{a^2 \sin^2 u + a^2 \cos^2 u + b^2} du = t\sqrt{a^2 + b^2}.$$

3.1.3 La paramétrisation normale

On a la fonction inverse de $s(t)$ qui est $t(s) = \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, alors la paramétrisation normale de α est:

$$\alpha(s) = \left(a \cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, a \sin \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{bs}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right).$$

3.1.4 Le repère mobile de Serret-Frenet

Le vecteur tangent

$$T(s) = \alpha'(s) = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \left(-a \sin \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, a \cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, b \right).$$

Le vecteur normal

On a:

$$T'(s) = \frac{-a}{a^2 + b^2} \left(\cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \sin \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, 0 \right),$$

alors

$$N(s) = \frac{T'(s)}{\|T'(s)\|} = \frac{-a}{|a|} \left(\cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \sin \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, 0 \right).$$

La binormale

$$\begin{aligned}
B(s) &= T(s) \wedge N(s) \\
&= \det \begin{pmatrix} \frac{-a}{\sqrt{a^2+b^2}} \sin \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}} & \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \cos \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}} & \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \frac{-a}{|a|} \cos \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}} & \frac{-a}{|a|} \sin \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}} & 0 \\ e_1 & e_2 & e_3 \end{pmatrix} \\
&= \frac{-a}{|a| \sqrt{(a^2+b^2)}} \left(-b \sin \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, b \cos \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, 0 \right).
\end{aligned}$$

3.1.5 La courbure

La courbure de l'hélice circulaire est donnée par:

$$K(s) = \|T'(s)\| = \frac{|a|}{a^2 + b^2}, \quad (3.1.1)$$

qui est une constante non nulle.

3.1.6 La torsion

On a:

$$\begin{aligned}
B'(s) &= \frac{-a}{|a|(a^2+b^2)} \left(-b \cos \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, -b \sin \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, 0 \right) \\
&= \frac{-b}{a^2+b^2} N(s),
\end{aligned}$$

alors

$$\tau(s) = B'(s) \cdot N(s) = \frac{-b}{a^2 + b^2}. \quad (3.1.2)$$

qui est également constant.

Théorème 3.1.1 *On dit que α est une hélice circulaire si et seulement si la courbure et la torsion sont constantes.*

Démonstration. On suppose que α est une hélice circulaire alors la courbure et la torsion sont constantes d'après (3.1.1) et (3.1.2).

Nous utilisons maintenant les équations de Frenet (2.6.3) pour démontrer la réciproque du théorème, nous avons:

$$\frac{dT}{ds}(s) = KN(s), \quad \frac{d^2}{ds^2}T(s) = K \frac{dN}{ds}(s) = -K(KT(s) + \tau B(s)),$$

donc

$$\begin{aligned} \frac{d^3}{ds^3}T(s) &= -K \left(K \frac{dT}{ds}(s) + \tau \frac{dB}{ds}(s) \right) = -K^2 \frac{dT}{ds}(s) - \tau^2 KN(s) \\ \frac{d^2}{ds^2} \frac{dT}{ds}(s) + (K^2 + \tau^2) \frac{dT}{ds}(s) &= 0. \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

On en déduit que si on pose $\lambda = \sqrt{K^2 + \tau^2}$, l'équation différentielle (3.1.3) admet une solution sous la forme:

$$\frac{dT}{ds}(s) = c \cos(\lambda(s - s_0)) + d \sin(\lambda(s - s_0)),$$

en dérivant, on obtient:

$$\frac{dT^2}{ds^2}(s) = -c\lambda \sin(\lambda(s - s_0)) + \lambda d \cos(\lambda(s - s_0)),$$

pour $s = s_0$, on trouve que:

$$c = \frac{dT}{ds}(s_0), \quad d = \frac{\frac{dT^2}{ds^2}(s_0)}{\lambda}$$

alors

$$\frac{dT}{ds}(s) = \cos(\lambda(s - s_0)) \frac{dT}{ds}(s_0) + \frac{\sin(\lambda(s - s_0))}{\lambda} \frac{dT^2}{ds^2}(s_0),$$

compte tenu des relations précédentes:

$$\frac{dT}{ds}(s) = \cos(\lambda(s - s_0)) KN_0 - \frac{\sin(\lambda(s - s_0))}{\lambda} (K^2 T_0 + K\tau B_0),$$

et en intégrant:

$$T(s) = T_0 + \frac{\sin(\lambda(s - s_0))}{\lambda} KN_0 - \frac{1 - \cos(\lambda(s - s_0))}{\lambda^2} (K^2 T_0 + K\tau B_0),$$

et en intégrant encore une fois:

$$\begin{aligned} \alpha(s) &= \alpha(s_0) + (s - s_0) \left[T_0 - \frac{1}{\lambda^2} (K^2 T_0 + K\tau B_0) \right] \\ &\quad + \frac{1 - \cos(\lambda(s - s_0))}{\lambda^2} KN_0 + \frac{\sin(\lambda(s - s_0))}{\lambda^3} (K^2 T_0 + K\tau B_0). \end{aligned}$$

Alors α est une hélice circulaire. ■

3.2 La fenêtre de Viviani

La fenêtre de Viviani est une courbe gauche paramétrée, et une courbe fermée, définie comme l'intersection d'une sphère et d'un cylindre circulaire de rayon moitié de celui de la sphère, et passant par le centre de la sphère comme illustrée sur la figure (3.2.1) ci-contre.

Vincenzo Viviani proposa en 1692 le problème d'architecture suivant: il s'agissait de percer une coupole hémisphérique de quatre fenêtres de telle façon que la surface restante de la coupole soit quarrable. John Wallis, Gottfried Wilhelm Leibniz et Jean Bernoulli étudièrent naturellement le cas simple de fenêtres circulaires, et étudièrent également la courbe intersection du cylindre et de l'hémisphère, donnant à cette courbe le nom de fenêtre de Viviani.

L'architecte Paul Andreu a dessiné le dôme du Musée maritime d'Osaka, en disposant les armatures selon un réseau de courbes de Viviani parallèles.

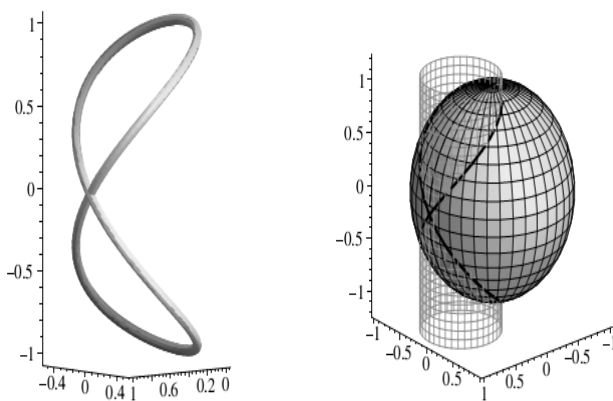


Figure 3.2.1 : La fenêtre de Viviani

On donne le système d'équations cartésiennes de fenêtre de Viviani par:

$$\begin{cases} (x - R)^2 + y^2 = R^2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4R^2 \end{cases}$$

tels que R et $(R, 0)$ sont: le rayon et le centre de cylindre circulaire respectivement.

3.2.1 La représentation paramétrique

$$\alpha(t) = (R(1 + \cos t), R \sin t, 2R \sin \frac{t}{2}), \text{ pour } t \in [-2\pi, 2\pi].$$

3.2.2 La longueur d'arc

On a $\alpha'(t) = (-R \sin t, R \cos t, R \cos \frac{t}{2})$

donc

$$\begin{aligned}\|\alpha'(t)\| &= \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} \\ &= \sqrt{R^2 \sin^2 t + R^2 \cos^2 t + R^2 \cos^2 \frac{t}{2}} \\ &= R \sqrt{1 + \cos^2 \frac{t}{2}},\end{aligned}$$

alors

$$l(\alpha) = \int_{-2\pi}^{2\pi} R \sqrt{1 + \cos^2 \frac{t}{2}} dt,$$

pour calculer cette longueur d'arc, on doit définir la fonction intégrale elliptique du deuxième espèce qui est donnée par:

$$E(x, k) = \int_0^x \sqrt{1 - k^2 \sin^2 t} dt$$

on a:

$$l(\alpha) = \int_{-2\pi}^{2\pi} R \sqrt{1 + \cos^2 \frac{t}{2}} dt$$

on pose $x = \frac{t}{2}$

$$\begin{aligned}l(\alpha) &= 2R \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{1 + \cos^2 x} dx \\ &= 4R \int_0^{\pi} \sqrt{1 + \cos^2 x} dx \\ &= 4\sqrt{2}R.E(\pi, \sqrt{\frac{1}{2}}).\end{aligned}$$

On a aussi, $E(\pi, \sqrt{\frac{1}{2}}) = 2E(\frac{\pi}{2}, \sqrt{\frac{1}{2}}) = 2E(\sqrt{\frac{1}{2}})$, donc

$$l(\alpha) = 4\sqrt{2}R.E(\pi, \sqrt{\frac{1}{2}}) = 8\sqrt{2}R.E(\sqrt{\frac{1}{2}}).$$

3.2.3 Le repère mobile de Serret-Frenet

Le vecteur tangent

On a:

$$T(t) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}$$

$$\alpha'(t) = R(-\sin t, \cos t, \cos \frac{t}{2})$$

$$\|\alpha'(t)\| = R(1 + \cos^2 \frac{t}{2})^{\frac{1}{2}}$$

et comme $\cos t = 2 \cos^2 \frac{t}{2} - 1$, on obtient:

$$\|\alpha'(t)\| = \frac{R}{\sqrt{2}}(3 + \cos t)^{\frac{1}{2}}$$

alors

$$T(t) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} = \frac{\sqrt{2}(-\sin t, \cos t, \cos \frac{t}{2})}{(3 + \cos t)^{\frac{1}{2}}}.$$

La binormale

Pour calculer le binormale on utilise la formule:

$$B(t) = \frac{\alpha' \wedge \alpha''}{\|\alpha' \wedge \alpha''\|},$$

on a:

$$\alpha'(t) = R(-\sin t, \cos t, \cos \frac{t}{2}),$$

$$\alpha''(t) = R(-\cos t, -\sin t, -\frac{1}{2} \sin \frac{t}{2}),$$

$$\begin{aligned} \alpha'(t) \wedge \alpha''(t) &= R^2(-\frac{1}{2} \cos t \sin \frac{t}{2} + \sin t \cos \frac{t}{2}, -\frac{1}{2} \sin t \sin \frac{t}{2} - \cos t \cos \frac{t}{2}, 1) \\ &= R^2(\sin \frac{t}{2}(1 + \frac{1}{2} \cos t), -\cos \frac{t}{2}(1 - \sin^2 \frac{t}{2}), 1) \\ &= R^2(\sin \frac{t}{2}(1 + \frac{1}{2} \cos t), -\cos^3 \frac{t}{2}, 1), \end{aligned}$$

maintenant on calcule la norme du dernier vecteur:

$$\begin{aligned}
 \|\alpha' \wedge \alpha''\| &= (\sin^2 \frac{t}{2} (\frac{1}{2} + \cos^2 \frac{t}{2})^2 + \cos^6 \frac{t}{2} + 1)^{\frac{1}{2}} \\
 &= R^2 (\sin^2 \frac{t}{2} (\frac{1}{4} + \cos^2 \frac{t}{2} + \cos^4 \frac{t}{2}) + \cos^6 \frac{t}{2} + 1)^{\frac{1}{2}} \\
 &= R^2 (\cos^4 \frac{t}{2} (\sin^2 \frac{t}{2} + \cos^2 \frac{t}{2}) + \sin^2 \frac{t}{2} \cos^2 \frac{t}{2} + \sin^2 \frac{t}{2} + 1)^{\frac{1}{2}} \\
 &= R^2 (\cos^2 \frac{t}{2} (\sin^2 \frac{t}{2} + \cos^2 \frac{t}{2}) + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{t}{2} + 1)^{\frac{1}{2}} \\
 &= R^2 (\frac{3}{4} \cos^2 \frac{t}{2} + 2)^{\frac{1}{2}} \\
 &= R^2 (\frac{3}{4} \cos^2 \frac{t}{2} + \frac{5}{4})^{\frac{1}{2}} \\
 &= \frac{R^2}{2} (3 \cos^2 \frac{t}{2} + 5)^{\frac{1}{2}},
 \end{aligned}$$

on utilise le fait que $\cos t = 2 \cos^2 \frac{t}{2} - 1$, on obtient:

$$\begin{aligned}
 \|\alpha' \wedge \alpha''\| &= \frac{R^2}{2\sqrt{2}} (3(\cos t + 1) + 10)^{\frac{1}{2}} \\
 &= \frac{R^2}{2\sqrt{2}} (3 \cos t + 13)^{\frac{1}{2}}
 \end{aligned}$$

donc

$$B(t) = \frac{2\sqrt{2}(R^2(\sin \frac{t}{2}(1 + \frac{1}{2} \cos t), -\cos^3 \frac{t}{2}, 1)}{R^2(3 \cos t + 13)^{\frac{1}{2}}}.$$

3.2.4 La courbure

On a:

$$k(t) = \frac{\|\alpha' \wedge \alpha''\|}{\|\alpha'(t)\|^3},$$

en effet:

$$\|\alpha'(t)\| = \frac{R}{\sqrt{2}} (3 + \cos t)^{\frac{1}{2}},$$

donc

$$k(t) = \frac{\sqrt{3 \cos t + 13}}{a(3 + \cos t)^{\frac{3}{2}}}.$$

3.2.5 La torsion

On a:

$$\tau = -\frac{\langle \alpha' \wedge \alpha'', \alpha''' \rangle}{\|\alpha' \wedge \alpha''\|^2},$$

$$\alpha'''(t) = R(\sin t, -\cos t, -\frac{1}{4} \cos \frac{t}{2}),$$

$$\begin{aligned} \langle \alpha' \wedge \alpha'', \alpha''' \rangle &= (\sin t \sin \frac{t}{2} (\frac{1}{2} + \cos^2 \frac{t}{2}) + \cos t \cos^3 \frac{t}{2} - \frac{1}{4} \cos \frac{t}{2}) \\ &= R^3 (\cos^3 \frac{t}{2} \sin^2 \frac{t}{2} + \cos \frac{t}{2} \sin^2 \frac{t}{2} + \cos^3 \frac{t}{2} \cos t - \frac{1}{4} \cos \frac{t}{2}) \\ &= R^3 (\cos^3 \frac{t}{2} (2 \sin^2 \frac{t}{2} + \cos t) + \cos \frac{t}{2} (\sin^2 \frac{t}{2} - \frac{1}{4})), \end{aligned}$$

et comme $2 \sin^2 \frac{t}{2} + \cos t = 1$, on obtient:

$$\begin{aligned} \langle \alpha' \wedge \alpha'', \alpha''' \rangle &= (\cos \frac{t}{2} (\sin^2 \frac{t}{2} + \cos^2 \frac{t}{2} - \frac{1}{4})) \\ &= \frac{R^3}{4} (3 \cos \frac{t}{2}), \end{aligned}$$

donc

$$\tau = -\frac{6 \cos \frac{t}{2}}{R(13 + 3 \cos t)}.$$

3.3 La cubique gauche

La cubique gauche est définie par la paramétrisation suivante:

$$\alpha(t) = \left(t, \frac{t^2}{2}, \frac{t^3}{3} \right) \quad t \in \mathbb{R}$$

3.3.1 La longueur d'arc

On a:

$$\alpha'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t)) = (1, t, t^2),$$

alors

$$l(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{\|\alpha'(t)\|^2} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{1 + t^2 + t^4} dt.$$

Cette courbe paramétrée a une longueur infinie.

3.3.2 Le repère mobile de Serret-Frenet

Le vecteur tangent

$$T(t) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2+t^4}} (1, t, t^2).$$

Le vecteur normal

On a:

$$T'(t) = \frac{1}{(1+t^2+t^4)^{\frac{3}{2}}} (-2t^3 - t, 1 - t^4, 2t - t^3),$$

alors

$$\|T'(t)\| = \sqrt{\frac{1}{(1+t^2+t^4)^3} (1 + 5t^2 - 2t^4 + 5t^6 + t^8)},$$

donc

$$N(t) = \frac{T'(t)}{\|T'(t)\|} = \frac{1}{\sqrt{1 + 5t^2 - 2t^4 + 5t^6 + t^8}} (-2t^3 - t, 1 - t^4, 2t - t^3).$$

La binormale

On a:

$$\alpha' \wedge \alpha'' = \det \begin{pmatrix} 1 & t & t^2 \\ 0 & 1 & 2t \\ e_1 & e_2 & e_3 \end{pmatrix} = (t^2, -2t, 1),$$

alors

$$\|\alpha' \wedge \alpha''\| = \sqrt{1 + 4t^2 + t^4},$$

donc

$$B(t) = \frac{\alpha' \wedge \alpha''}{\|\alpha' \wedge \alpha''\|} = \frac{1}{\sqrt{1 + 4t^2 + t^4}} (t^2, -2t, 1).$$

3.3.3 La courbure et la torsion

On a:

$$K(t) = \frac{\|\alpha' \wedge \alpha''\|}{v^3} = \frac{\sqrt{1 + 4t^2 + t^4}}{(1 + t^2 + t^4)^{\frac{3}{2}}}.$$

Pour calculer la torsion, en dérivant $\alpha''(t)$, on trouve que:

$$\alpha'''(t) = (0, 0, 2),$$

alors

$$\langle \alpha' \wedge \alpha'', \alpha''' \rangle = 2,$$

donc

$$\tau(t) = -\frac{\langle \alpha'(t) \wedge \alpha''(t), \alpha'''(t) \rangle}{\|\alpha' \wedge \alpha''\|^2} = -\frac{2}{1 + 4t^2 + t^4}.$$

Conclusion générale

La géométrie contemporaine est devenue par ses aspects analytique et algébrique l'une des disciplines incontournable et indispensable dans le développement de plusieurs autres disciplines dans le monde moderne.

Dès les premiers temps de la naissance de la géométrie, la géométrie différentielle, qui fait partie intégrante de la géométrie analytique, a trouvé sa place dans l'analyse des courbes et des surfaces telles que le calcul des longueurs des courbes planes ou dans l'espace et également le calcul des surfaces des objets de différentes formes.

Dans ce mémoire, nous avons essayé d'apporter aux mains des futurs étudiants se prêtant à se former en géométrie contemporaine, un exposé concis groupant l'essentiel du calcul des longueurs des courbes et de surfaces de certains objets rencontrés dans la vie quotidienne. En particulier nous nous intéressons à l'étude de la géométrie différentielle des courbes dites « gauches » tout en lui attribuant l'aspect pratique.

En premier lieu, nous rappelons les hypothèses de base de la théorie de la géométrie différentielle puis nous présentons quelques propriétés importantes des courbes planes.

Le deuxième point a fait l'objet de la géométrie des courbes « gauches » qui est le centre d'intérêt de notre mémoire. En particulier nous avons mis l'accent sur le calcul de la courbure et la longueur de l'arc d'une courbe aussi bien plane que dans l'espace. Nous avons également dans ce deuxième point, envisagé les formules de Serret-Frenet et le calcul des vecteurs tangents et les vecteurs normaux et binormaux aux courbes « gauches ».

En perspective, nous souhaitons continuer à aborder ce sujet d'extrême importance par ses diverses applications dans de nombreuses disciplines scientifiques contemporaines de la vie quotidienne, qu'est la géométrie des courbes et des surfaces.

Bibliographie

- [1] **Alami Idrissi, Ali El Hajji Saïd, Hakam Samir**, Courbes paramétrées, Département de Mathématiques et Informatique, Université Mohammed V, Maroc 2005-2006.
- [2] **Boris Thibert**, Courbes et surfaces, Licence Sciences et Technologies 2e année Mathématiques, Informatique et Mathématiques Appliquées, Université Joseph Fourier, Grenoble I France.
- [3] **Crotti.P**, Courbes régulières, Université de Fribourg Suisse, 2008.
- [4] **H.A.S.Nasser**, Géométrie différentielle, Elrochd, 2008. (version arabe).
- [5] **J.Opera**, Differential geometry and its applications, Prentice-Hall, Upper Saddle River, New Jersey 07458.1997.
- [6] **M.Audin**, Géométrie, EDP Sciences, 2006.
- [7] **R.S.Palais**, A Modern Course on Curves and Surfaces, 341(1): 2008, 416-420.
- [8] **S.Montiel and A.Ros**, Curves and Surfaces, Graduate studies in mathematics.vol69. AMS, RSME 2006.
- [9] **T.Shifrin**, Differential geometry: A First Course in Curves and Surfaces Preliminary Version, Spring 2012.
- [10] **V.A.Toponogov**, Differential Geometry of Curves and Surfaces. Birkhäuser. Boston. Basel. Berlin. 2006 Birkhäuser Boston.

Résumé

Dans ce travail nous avons étudié la géométrie différentielle des courbes gauches paramétrées et étudié également leurs propriétés et leurs caractéristiques les plus importantes à savoir : la courbure, la torsion, les plans associés des courbes gauche, la longueur d'arc et le repère mobile de Frenet. Enfin nous avons mis en guise d'application de notre étude quelques exemples sur ces courbes permettant au lecteur de voir l'intérêt de l'étude de ce genre de courbes en géométrie.

Mots-clés: géométrie différentielle - courbe gauche – courbure – torsion - fonction de la longueur d'un arc.

Abstract

In this work we studied the differential geometry of space curves parameterized and also studied their properties and know the most important features: curvature, torsion, associated plans left curves, arc length and the moving frame of Frenet. Finally we set as an application of our studies some examples of these curves allowing the reader to see the interest in the study of such curves in geometry.

Key-words: differential geometry – space curves (in $\mathbb{R}^3$) - curvature - torsion - arc length function.

المخلص

في هذا العمل قمنا بدراسة الهندسة التفاضلية لنوع من المنحنيات الفضائية المسماة بالمنحنيات اليسرى (الجنفاء) الوسيطية، كما درسنا خصائصها وتطرقنا الى أهم السمات التي تتمتع بها من ذلك: الانحناء، الالتواء، المستويات المصاحبة لهذا النوع من المنحنيات، طول القوس ومعلم "فرينيه" المتحرك. أخيرا قدمنا كتطبيق لهذه الدراسة بعض الأمثلة من هذه المنحنيات حتى يتسنى للقارئ إدراك أهمية دراسة مثل هذه المنحنيات في الهندسة.

الكلمات المفتاحية: الهندسة التفاضلية- منحنيات قوش- الانحناء - اللي- دالة طول القوس.