N° d'ordre :
N° de série :

République Algérienne Démocratique et Populaire

**Ministère de l'Enseignement Superieur
et de la Recherche Scientifique**

**UNIVERSITÉ ECHAHID HAMMA LAKHDAR
EL OUED**

FACULTÉ DES SCIENCES ET DE TECHNOLOGIE

Mémoire de fin d'étude

LICENCE ACADEMIQUE

Domaine: Mathématiques et Informatique
Filière: Mathématiques
Spécialité: Modélisation mathématiques & simulation numérique

Thème

Polynômes orthogonaux et leurs applications en analyse numérique

Présenté par: DAOUDI Chahra Zad
FREDJ Ilhadda
HECHIFA Amale
Sous la supervision de :

MAA.DOUDI Nadjet

Année universitaire 2014 – 2015

Remerciements

Nous remercions dieu le tout puissant qui nous a donne l'éffort physique et mental l'accomplir de ce travail.

Nous remercions les chers parents qui nous ont donné la volonté pour la réussite dans notre vie.

Ce travail à été réalisé sous l'encadrement de professeur "DOUDI NADJET ", à l'université d' El-Oued, a qui nous voudrons exprimer nos profonde gratitude pour leurs disponibilités, leurs aides et leurs conseils pour réaliser ce travail.

Nous adressons également nos remerciements, à tous nos enseignants, pour leurs aides inestimables, qui nous ont donné let bases de la science. Ainsi qu'à tous les professeurs de l'université d'El-oued .

Nous tenons a remercie tous les étudiants de la promotion 2014/2015 de Math de l'université d'El-oued .

Notations générales

X	Ensemble non vide.
$\mathbb{R}$	Ensemble des nombres réelles.
$\mathbb{R}_+$	Ensemble des nombres réelles positifs.
$\mathbb{N}$	Ensemble des nombres entiers naturels.
$\mathbb{C}$	Ensemble des nombres complexe.
$\mathbb{Z}$	Ensemble des nombres entiers.
$C^n([a,b])$	Espace des fonctions contiument dérivables d'ordre n sur $[a,b]$.
max	Le maximum.
min	Le minimum.
$\sum\limits_{i=0}^{n}$	La somme fini.
$\sum$	La somme infini.
$E(x)$	La partie exacte de x.
$\int\limits_a^b$	L'integrale de a à b.
$\prod\limits_{1\leq i\leq p}$	Produit fini.
$\mathrm{Re}(x)$	La partie réel du nombre complexe x.
C_n^k	$n!/k!(n-k)!$.
$\frac{d^n}{dx^n}$	La dérivée d'ordre n par raport x.
$n!$	$n\times(n-1)\times(n-2)\times ...1$.
J	La déterminant de la matrice $\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix}$.
$\mid . \mid$	La valeur absolue.
p_n	ensemble des polynômes de degré n.

Table des matières

Introduction générale

Depuis long temps, les mathématiques étaient strictes et objectives, pour cela, elles sont une ressource principale pour les sciences.

Aujourd'hui avec les progrès elles viennent toujours des nouveaux thèmes pour résoudre les problèmes posés tel que l'analyse numérique que nous aide de résoudre beaucoup des problèmes.

Dans notre étude, nous étudierons des importantes polynômes du domaine d'analyse numérique ce sont les polynômes orthogonaux que sont l'une des outils les plus importante dans les mathématique pour étude et résoudre plusieurs des problèmes.

Nous intéressons pour l'étude trois polynômes orthogonaux ce sont les polynômes de Tchebychev, polynômes d'Hermite et polynômes de Legendre et nous donnons quelques ces application en l'analyse numérique.

Nous avons comporté notre mémoire en trois chapitres:

Dans le premier chapitre, nous présentons également généralité sur les polynômes, notion de l'orthogonalité avec la définition des polynômes de Tchebychev, polynômes d'Hermite et polynômes de Legendre et certains définitions dont nous avons besoin dans notre étude.

Dans le deuxième chapitre, nous citerons les propriétés des polynômes de Tchebychev, d'Hermite et de Legendre.

Dans le dernier chapitre, nous donnons quelques applications des ces polynômes comme calcul l'approximation au sens des moindres carrés, calcul d'intégration numérique, calcul de la meilleure approximation et résoudre le problème de Sturm-Liouville.

Chapitre 1

Préliminaires

Ce chapitre est consacré à introduire quelques notions fondamentales, également nous avons donnée une généralité sur les polynômes, notion de l'orthogonalité avec quelques définitions dont nous avons besoin dans notre étude.

1.1 Généralité sur les polynômes

Définition 1.1.1 *: La notation d'un polynôme est $P = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, où les nombres a_k sont les coefficients de P, ce sont des éléments de X et ils sont nuls á partir d'un certain rang.*

1.1.1 Les caractéristiques d'un polynôme

- Un polynôme est nul si et seulement si tous ses coefficients sont nuls.

- Deux polynômes sont égaux si et seulement s'ils ont les mêmes coefficients.

- Le degré du polynôme $P = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ (noté deg P) est, si le polynôme est non nul, le plus grand indice n tel que $a_k \neq 0$, sinon il est égale à $+\infty$.

- La valuation du polynôme $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ (noté val P) est, si le polynôme est non nul, le plus petit indice m tel que $a_m \neq 0$, sinon elle est égale á $-\infty$.

- Le coefficient dominant d'un polynôme non nul est le coefficient dont l'indice est égale au degré du polynôme.

- Un polynôme est unitaire ou normalisé si et seulement si son coefficient dominant est égale à 1.

- Le degré et la valuation vérifient les propriétés suivantes pour tous polynômes P et Q

$$\deg(P+Q) \leq \sup\{\deg P, \deg Q\}$$

$$\deg(P \times Q) = \deg P + \deg Q$$

$$\deg(\lambda.P) = \deg\ P \text{ si } \lambda \neq 0$$

$$\text{val}\ (P+Q) \geq \inf\{\text{val}\ P, \text{val}\ Q\}$$

$$\text{val}\ (P \times Q) = \text{val}\ P + \text{val}\ Q$$

$$\text{val}\ (\lambda.P) = \text{val}\ P \text{ si } \lambda \neq 0$$

[8].

1.2 Définitions générales

Définition 1.2.1 *: Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. On appelle produit scalaire sur E toute forme bilinéaire symétrique et définie positive c'est-à-dire:*

1. $\forall f,\ g,\ h \in E,\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}\ \langle \alpha f + \beta g, h\rangle = \alpha\langle f, h\rangle + \beta\langle g, h\rangle$.
2. $\forall f,\ g,\ h \in E,\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}\ \langle h, \alpha f + \beta g\rangle = \alpha\langle h, f\rangle + \beta\langle h, g\rangle$.
3. $\forall f,\ g \in E,\ \langle f, g\rangle = \langle g, f\rangle$.
4. $\forall f \in E,\ \langle f, f\rangle = 0 \Longleftrightarrow f = 0$.
5. $\forall f \in E,\ \langle f, f\rangle \geq 0$.

Définition 1.2.2 *: Une norme sur un espace vectoriel X ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) doit vérifier:*

1. $\forall f \in X, \| f\| \geq 0$.
2. $f = 0 \Longleftrightarrow \| f \| = 0$.
3. $\| \alpha f\| = \mid \alpha \mid \|f\|$.
4. $\forall f, g \in X : \| f + g \| \leq \| f \| + \| g \|$.

Définition 1.2.3 *: Soit f et g deux fonctions tel que $(f, g) \in (C^n([a, b]))^2$, la formule de Leibniz de la dérivée n-iéme de la fonction $[(f \times g)^n]$ est*

$$\frac{d^n}{dx^n}[(f \times g)^n] = \sum_{j=0}^{n} C_n^j \frac{d^j}{dx^j} f \times \frac{d^{n-j}}{dx^{n-j}} g. \tag{1.2.1}$$

Définition 1.2.4 *: Etant donnée une suite $(U_n)_{n\geq 0}$, on appellera fonction génératrice exponentielle de la suite $(U_n)_{n\geq 0}$la fonction*

$$f(t) = \sum_{n\geq 0} U_n \frac{t^n}{n!}$$

[*10*].

1.3 Notion de l'orthogonalité

Soit $]a,b[\ \in \mathbb{R}$ borné ou non. Soit un poids $w :]a,b[\to \mathbb{R}^+$ continue. On suppose $\int_a^b |x|^2 w(x)\, dx$ est convergente. Soit $E = C^0(]a,b[)$ muni du produit scalaire

$$\langle f, g \rangle_w = \int_a^b f(x)\, g(x)\, w(x)\, dx,$$

et $\|\ .\ \|_w$ la norme associée.

Définition 1.3.1 *: On dit que les deux fonctions f et g sont orthogonaux relativement à la fonction de poids $w(x)$ sur $(a\ ,b)$ si*

$$\int_a^b f(x)\, g(x)\, w(x)\, dx = 0$$

[*12*].

1.4 Quelques polynômes orthogonaux

1.4.1 Polynômes orthogonaux de Tchebychev

Soit Z un nombre complexe $(Z \in \mathbb{C})$ tel que $|Z| = 1$, alors on peut écrire

$$\begin{aligned} Z &= \cos\theta + i\sin\theta = \exp(i\theta). \\ Z^n &= \exp(in\theta) = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta). \end{aligned} \tag{1.4.1}$$

On a

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}.$$

$$\begin{aligned}
(\cos\theta + i\sin\theta)^n &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k (\cos\theta)^{n-k} (i\sin\theta)^k \\
&= (\cos\theta)^n + iC_n^1 (\cos\theta)^{n-1} (i\sin\theta)^1 - C_n^2 (\cos\theta)^{n-2} (i\sin\theta)^2 \\
&\quad -iC_n^3 (\cos\theta)^{n-3} (i\sin\theta)^3 + C_n^4 (\cos\theta)^{n-4} (i\sin\theta)^4 + ... \qquad (1.4.2)
\end{aligned}$$

la partie réel de (1.4.1) égale à la partie réel de (1.4.2) :

$$\begin{aligned}
\cos n\theta &= (\cos\theta)^n - C_n^2 (\cos\theta)^{n-2} (i\sin\theta)^2 + C_n^4 (\cos\theta)^{n-4} (i\sin\theta)^4 + ... \\
&= (\cos\theta)^n - C_n^2 (\cos\theta)^{n-2} \left(1 - (\cos\theta)^2\right) + C_n^4 (\cos\theta)^{n-4} \left(1 - (\cos\theta)^2\right)^2 + ...
\end{aligned}$$

cette expression représent un polynôme de degré inférieur ou égale à n du variable $x = \cos\theta$, $\theta = \arccos x$ [11].

Définition 1.4.1 *: Soit n un entier naturel. On appelle Polynôme de Tchebychev le polynôme définit sur l'intervalle $[-1, 1]$ par l'expression*

$$T_n(x) = \cos n\theta = \cos(n \ \arccos(x)), \ \theta \in [-\pi, \ \pi].$$

Les polynômes de Tchebychev construirent un ensemble des polynômes orthogonaux relativement à la fonction de poids $w(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, sur l'intervalle $[-1, 1]$, c'est-à-dire

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \ T_n(x) \ T_m(x) \ dx = 0, \ (n \neq m).$$

1.4.2 Polynômes orthogonaux de Legendre

Le polynôme de Legendre d'ordre n prendre par la formule de Rodrigués la forme suivante

$$L_n(x) = \frac{1}{n!2^n} \frac{d^n}{dx^n} \left[\left(x^2 - 1\right)^n \right].$$

Cet polynôme est défini aussi à l'aide de la formule de Leibniz par$\blacksquare$

$$L_n(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{j=0}^{n} \left(C_n^j\right)^2 (x-1)^{n-j} (x+1)^j.$$

Et il s'ensuit que $L_n(1) = 1$.

Les polynômes de Legendre sont des polynômes orthogonaux relativement à la fonction de poids $w(x) = 1$, sur l'intervalle $[-1, 1]$, c'est-à-dire

$$\int_{-1}^{1} L_n(x)\ L_m(x) = 0, \ \ (n \neq m) \tag{1.4.3}$$

[9].

1.4.3 Polynômes orthogonaux d'Hermite

Posons $\phi(x) = \exp(-x^2)$ et constatons que pour tout entier $n \geq 0$ la dérivée n-iéme de $\phi(x)$ est de la forme

$$\frac{d^n}{dx^n}\phi(x) = (-1)^n H_n(x)\,\phi(x), \tag{1.4.4}$$

c'est-à-dire

$$H_n(x) = (-1)^n \exp\left(x^2\right) \frac{d^n}{dx^n} \exp\left(-x^2\right).$$

$H_n(x)$ est un polynôme de dégre n s'appelle polynôme d'Hermite oú cette formule est la formule de Rodrigués.

Cet polynôme est défini aussi à l'aide de la formulation explicite sous la forme

$$H_n(x) = n! \sum_{k=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} \frac{(-1)^k (2x)^{n-2k}}{k!\,(n-2k)!}.$$

Les polynômes d'Hermite forment un système orthogonale relativement à la fonction de poids $w(x) = \exp(-x^2)$ sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_n(x)\ H_m(x) \exp\left(-x^2\right) = 0, \ \ (n \neq m).$$

Chapitre 2

Propriétés des polynômes orthogonaux

Selon, les notions que nous avons présenté au premier chapitre, nous essayerons ici à expliquer les propriétés des polynômes de Legendre, Tchebychev et Hermite comme l'orthogonalité, la relation du récurrence, avec autres propriétés fondamentales.

2.1 Relation de réccurence

Proposition 2.1.1 *: Soit $(P_i)_{i\geq 1}$ une famille de polynômes orthogonaux, alors il existe une relation de récurrence entre P_{n+1}, P_n et P_{n-1}, c'est-à-dire il existe des réels a_n, b_n et c_n, tels que*

$$\forall n \in \mathbb{N}^{\star},\ P_{n+1} = (a_n\ X + b_n)\, P_n + c_n P_{n-1}. \tag{2.1.1}$$

Preuve. La famille $(XP_n,\ P_n,\ P_{n-1}, ...,\ P_0)$ est une famille des polynômes ont degré échelonné donc c'est une famille libre de $\mathbb{R}_{n+1}[X]$ comportant $n+2$ vecteurs. On en déduit que cette famille est une base de $\mathbb{R}_{n+1}[X]$, il existe donc des réels a_n, b_n, c_n et α_i pour $0 \leq i \leq n-2$, tels que

$$P_{n+1} = a_n X P_n + b_n P_n + c_n P_{n-1} + \sum_{i=1}^{n-2} \alpha_i P_i.$$

On utilise l'orthogonalité de la famille $(P_i)_{i\geq 0}$

$$\forall\ 0 \leq i \leq n-2,\ \ < P_{n+1}, P_i >_w = a_n < XP_n, P_i >_w + \alpha_i \parallel P_i \parallel_w^2 = 0,$$

or d'aprés l'expression du produit scalaire $< XP_n \ , P_i >_w = < P_n \ , XP_i >_w$ et comme $XP_i \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, on a $< XP_n, P_i >_w = 0$. Donc

$$\forall\ 0 \leq i \leq n-2,\ \ \alpha_i = 0$$

■

2.2 Existence des racines réelles

Proposition 2.2.1 *: Soit $(P_i)_{i \geq 1}$une famille des polynômes orthogonaux, alors tout polynôme P_n, $n \geq 1$, admet n racines distinctes, toutes réelles et situées à l'intérieur de l'intervalle d'intégration.*

Preuve. Comme $\langle P_n \ , 1 \rangle_w = 0$ le polynôme P_n admet au moins une racine réelle avec changement de signe. Soit $a_1, ..., a_p$ les racines réelles de P_n avec changement de signe, alors

$$P_n(x) = \prod_{1 \leq i \leq p} (x - a_i)\, Q(x), \tag{2.2.1}$$

et Q est un polynôme de signe constant. On pose $R = \prod\limits_{1 \leq i \leq p} (x - a_i)$. On montre que $p = n$ en raisonnant par l'absurde, c'est-à-dire on suppose que $p < n$, alors $< P_n, R >_w = 0$ car $\deg R = p < n$.

L'application : $x \to (P_n \cdot R)$ est continue sur $[a, b]$, de signe constant et d'intégrale nulle, c'est donc l'application nulle sur $[a, b]$.

Comme il s'agit d'un polynôme, c'est le polynôme nul: on aboutit à une contraduction car $\deg (P_n \cdot R) = n + p \geq 1$. Donc $p = n$. ■

2.3 Propriétés du polynôme de Tchebychev

2.3.1 Existence et unicité du polynôme de Tchebychev

Unicité

Supposons que T_n et $T_n^\star$ conviennent. Alors $(T_n - T_n^\star)(\cos\theta) = 0$.

Lorsque θ décrit $\mathbb{R}$, $\cos\theta$ décrit $[-1, 1]$, donc tout réel $x \in [-1, 1]$ est racine de $(T_n - T_n^\star)$.

Comme $[-1, 1]$ est infini, alors $T_n - T_n^\star$ est nul, c'est-à-dire $T_n = T_n^\star$.

Existence

Soient n un entier naturel et θ un réel

$$\begin{aligned}
\cos(n\theta) &= \operatorname{Re}(\exp in\theta) = \operatorname{Re}\left((\cos\theta + i\sin\theta)^n\right) = \operatorname{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k (\cos\theta)^{n-k} (i\sin\theta)^k\right) \\
&= \sum_{p=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} (-1)^p C_n^{2P} (\cos\theta)^{n-2p} (\sin\theta)^{2p} \\
&= \sum_{p=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} (-1)^p C_n^{2P} (\cos\theta)^{n-2p} \left(1-\cos^2\theta\right)^p,
\end{aligned}$$

et le polynôme $\sum_{p=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} (-1)^p C_n^{2P} X^{n-2p} (1-X^2)^p$ convient

$$\forall n \in \mathbb{N}, T_n(X) = \sum_{p=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} (-1)^p C_n^{2P} X^{n-2p} \left(1-X^2\right)^p$$

[6].

2.3.2 Fonction génératrice des polynômes de Tchebychev

La fonction génératrice des polynômes de Tchebychev est donnée par la formule

$$f(t) = \frac{1-tx}{1-2xt+t^2}.$$

2.3.3 Orthogonalité des polynômes de Tchebychev

On a

$$\cos(n\theta + m\theta) + \cos(n\theta - m\theta) = 2\cos(n\theta)\cos(m\theta),$$

par l'intégration nous trouvons

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} \cos(n\theta)\cos(m\theta)\,d\theta &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \cos((n+m)\theta)d\theta + \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \cos((n-m)\theta)d\theta \\
&= \begin{cases} \frac{\pi}{2} & si \quad n = m \neq 0 \\ \pi & si \quad n = m = 0 \\ 0 & si \quad n \neq m \end{cases}
\end{aligned}$$

On pose $x = \cos\theta$. Donc, $dx = -\sin\theta d\theta \Longrightarrow -dx = \sin\theta d\theta = \sqrt{1-(\cos\theta)^2}d\theta$
$\Longrightarrow d\theta = -\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.
Alors si $n \neq m$

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} \cos(n\theta)\cos(m\theta)\,d\theta &= -\int_1^{-1} T_n(x)T_m(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_{-1}^{1} T_n(x)T_m(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= 0.\end{aligned}$$

Enfin, les polynômes du Tchebychev forment un ensemble orthogonaux relativement à la fonction de poids $w(x) = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ sur l'intervalle $[-1,1]$ [11].

2.3.4 Relation de réccurence enter les polynômes de Tchebychev T_{n+1}, T_n et T_{n-1}

On a

$$T_0(x) = \cos((0)\theta) = \cos(0) = 1.$$

$$T_1(x) = \cos(\theta) = \cos(\arccos(x)) = x.$$

Pour calculer $T_2, T_3, T_4, ...$, on utilise la relation trigonométrique suivante

$$\forall\theta \in \mathbb{R}, \forall(n\ ,m) \in \mathbb{N}^2,\ \cos(n\theta + m\theta) + \cos(n\theta - m\theta) = 2\cos(n\theta)\cos(m\theta).$$

Pour $m = 1$ et $n \in \mathbb{N}$ la relation trigonométrique devient

$$\cos((n+1)\theta) + \cos((n-1)\theta) = 2\cos\theta\cos(n\theta),$$

c'est-à-dire

$$T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = 2xT_n(x). \tag{2.3.1}$$

Cette relation de réccurence permet de calculer $T_2, T_3, T_4, ...$ [11].

Exemple 2.3.1 *: Si* $n = 1$

$$T_2(x) + T_0(x) = 2xT_1(x) = 2x^2$$

$$T_2(x) = 2x^2 - 1.$$

Si $n = 2$

$$\begin{aligned}T_3(x) &= 2xT_2(x) - T_1(x) = 2x\left(2x^2 - 1\right) - x \\ T_3(x) &= 4x^3 - 3x.\end{aligned}$$

2.3.5 Equation différentielle vérifiée par les polynômes de Tchebychev

Soit $n \in \mathbb{N}$, en dérivant l'égalité $T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$, on obtient

$$\forall\theta \in \mathbb{R},\ \ (-\sin\theta)\, T_n'(\cos\theta) = -n\sin(n\theta),$$

puis en redérivant

$$\forall\theta \in \mathbb{R},\ \ (-\cos\theta)\, T_n'(\cos\theta) + \sin^2\theta T_n''(\cos\theta) = -n^2\cos(n\theta) = -n^2 T_n(\cos\theta),$$

on encore

$$\forall x \in [-1,1],\ \ (-x)\, T_n'(x) + \left(1-x^2\right) T_n''(x) = -n^2 T_n(x),$$

ainsi, puisque l'intervalle $[-1,1]$ est infini, alors

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ \left(1-X^2\right) T_n'' - XT_n' + n^2 T_n = 0.$$

Enfin, il est possible de définir les polynômes de Tchebychev par une équation différentielle pour tout entier n, oú T_n est une solution de l'équation différentielle

$$\left(1-x^2\right) P'' - xP' + n^2 P = 0$$

[6].

2.3.6 Degré et coefficient dominant de T_n

Proposition 2.3.1 *: Le polynôme de Tchebychev est de degré n, et son coefficient dominant est égale à 2^{n-1} si $n \in \mathbb{N}^\star$, c'est-à-dire*

$$T_n(x) = 2^{n-1}x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0, \qquad (a_{n-1}, ..., a_1, a_0) \in \mathbb{R}^n.$$

Preuve. Montrons par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ \ \deg(T_n(x)) = n \ \text{ et } \operatorname{dom}(T_n(x)) = 2^{n-1}.$$

1. On a déjà $\deg T_1(x) = 1$, $\deg T_2(x) = 2$, le résultat est donc vrai pour $n = 1$ et $n = 2$.

Soit $n \geq 1$, supposons que

$$\deg\left(T_n\left(x\right)\right) = n \text{ et } \deg\left(T_{n+1}\left(x\right)\right) = n+1,$$

alors,

$$\deg\left(T_{n+2}\left(x\right)\right) = \deg\left(2xT_{n+1}\left(x\right) - T_n\left(x\right)\right) = \deg\left(xT_{n+1}\left(x\right)\right) = 1+n+1 = n+2.$$

Le résultat est démontré par récurrence.

$$T_0\left(x\right) = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^\star \deg\left(T_n\left(x\right)\right) = n.$$

2. On a déjà $\mathrm{dom}(T_1\left(x\right)) = 1 = 2^{1-1}$ et $\mathrm{dom}(T_2\left(x\right)) = 2 = 2^{2-1}$, le résultat est donc vrai pour $n = 1$ et $n = 2$.

Soit $n \geq 1$, supposons que

$$\mathrm{dom}(T_n\left(x\right)) = 2^{n-1} \text{ et } \mathrm{dom}(T_{n+1}\left(x\right)) = 2^n,$$

alors,

$$\mathrm{dom}(T_{n+2}\left(x\right)) = \mathrm{dom}\left(2xT_{n+1}\left(x\right)\right) = 2 \times 2^n = 2^{n+1}.$$

Le résultat est démontré par récurrence. $T_0\left(x\right) = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^\star$

$$dom(T_n\left(x\right)) = 2^{n-1}$$

[6]. ■

2.3.7 Parité de T_n

Le polynôme de Tchebychev est un polynôme paire ou impaire selon la parité de n , c'est -à-dire, si n est pair alors T_n est paire et si n est impair alors T_n est impair.

Preuve. $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} T_n\left(-X\right) &= \sum_{p=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} \left(-1\right)^p C_n^{2P} (-X)^{n-2p} (1-(-X)^2)^p \\ &= \left(-1\right)^n \sum_{p=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} \left(-1\right)^p C_n^{2P} X^{n-2p} \left(1-X^2\right)^p = \left(-1\right)^n T_n\left(X\right). \end{aligned}$$

On peut aussi écrire pour tout réel θ

$$T_n(-\cos\theta) = T_n(\cos(\theta+\pi)) = \cos(n\theta + n\pi) = (-1)^n T_n(\cos\theta)$$

Donc, pour tout réel $x \in [-1,1]$, $T_n(-x) = (-1)^n T_n(x)$. Puisque l'intervalle $[-1,1]$ est infini, les polynômes $T_n(-x)$ et $(-1)^n T_n(x)$ sont égaux.

On peut encore utiliser la relation de récurrence (2.3.1).

Tout d'abord, $T_0(-x) = (-1)^0 T_0(x)$ et $T_1(-x) = (-1)^1 T_1(x)$.

Ensuite, si pour $n \geq 0$,

$$T_n(-x) = (-1)^n T_n(x) \text{ et } T_{n+1}(-x) = (-1)^{n+1} T_{n+1}(x),$$

alors,

$$\begin{aligned} T_{n+2}(-x) &= 2(-x)T_{n+1}(-x) - T_n(-x) \\ &= 2(-1)^{n+2} xT_{n+1}(x) - (-1)^n T_n(x) \\ &= (-1)^{n+2}(2x\ T_{n+1}(x) - T_n(x)) \\ &= (-1)^{n+2} T_{n+2}(x). \end{aligned}$$

Donc, pour tout naturel n, T_n a la parité de n [6]. ■

2.3.8 Racines de T_n

On a

$$T_n(x) = 0 \Longleftrightarrow \cos(n\theta) = 0 \Longleftrightarrow n\theta = (2k+1)\frac{\pi}{2} \Longleftrightarrow \theta = (2k+1)\frac{\pi}{2n},$$

c'est-à-dire

$$x = \cos\left((2k+1)\frac{\pi}{2n}\right), \forall n \in \mathbb{N}^\star \text{ et } k = 0,\ 1, ...,\ n-1.$$

Donc, Les racines de T_n sont

$$x_{n,k} = \cos\left((2k+1)\frac{\pi}{2n}\right),\ \forall n \in \mathbb{N}^\star \text{ et } k = 0, 1, ...,\ n-1.$$

2.3.9 Valeurs des polynômes de Tchebychev en zéro

On a, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} T_{2n+1}(0) &= \cos((2n+1)\arccos 0) = \cos\left[(2n+1)\ \ (2k+1)\frac{\pi}{2}\right] \\ &= \cos\left[(4nk+2k+2n+1)\frac{\pi}{2}\right] = \cos\left[(2k'+1)\frac{\pi}{2}\right] = 0,\ \text{où } k,k' \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_{2n}(0) &= \cos(2n\arccos(0)) = \cos\left[2n\ \ (2k+1)\frac{\pi}{2}\right] \\ &= \cos\left[(4nk+2n)\frac{\pi}{2}\right] = \cos\left[(2k')\frac{\pi}{2}\right] = \cos(k'\pi) = (-1)^n,\ \text{où } k,k' \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

De plus, les polynômes de Tchebychev vérifient

$$\begin{aligned} T_n(-1) &= \cos(n\arccos\ (-1)) = \cos[n(2k+1)\pi] = \cos[(2nk+n)\pi] \\ &= \cos(2nk\pi+n\pi) = \cos(2nk\pi)\cdot\cos(n\pi) = \cos(n\pi) = (-1)^n,\ \text{où } k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

$$T_n(1) = \cos(2nk\pi) = 1,\ \text{où } k \in \mathbb{Z}.$$

2.4 Propriétés du polynôme de Legendre

Au début on suppose le polynôme $U_n(x) = (x^2-1)^n$.

2.4.1 Formulation explicite du polynôme de Legendre

Théorème 2.4.1 *: le polynôme de Legendre sous la forme suivante*

$$L_n(x) = \frac{1}{2^n}\sum_{j=0}^{n}\left(C_n^j\right)^2(x-1)^{n-j}(x+1)^j.$$

Preuve. On a

$$L_n(x) = \frac{1}{n!2^n}\frac{d^n}{dx^n}\left[\left(x^2-1\right)^n\right].$$

Par la formule (1.2.1), on obtient

$$\begin{aligned} L_n(x) &= \frac{1}{n!2^n}\frac{d^n}{dx^n}\left[\left(x^2-1\right)^n\right] = \frac{1}{n!2^n}\frac{d^n}{dx^n}\left[(x-1)^n(x+1)^n\right] \\ &= \frac{1}{n!2^n}\sum_{j=0}^{n}C_n^j\frac{d^j}{dx^j}\left[(x-1)^n\right]\times\frac{d^{n-j}}{dx^{n-j}}\left[(x+1)^n\right], \end{aligned} \tag{2.4.1}$$

tels que

$$\frac{d^j}{dx^j}\left[(x-1)^n\right] = n\,(n-1)\,(n-2)\cdots(n-(j-1))\,(x-1)^{n-j} = \frac{n!}{(n-j)!}\,(x-1)^{n-j}$$

$$\frac{d^{n-j}}{dx^{n-j}}\left[(x+1)^n\right] = (n-1)\,(n-2)\cdots(n-(n-j-1))\,(x+1)^j = \frac{n!}{j!}\,(x+1)^j\,.$$

En substituant les deux résultats dans l'expresion (2.4.1), on obtient

$$\begin{aligned} L_n(x) &= \frac{1}{n!2^n}\sum_{j=0}^{n} C_n^j \frac{n!}{(n-j)!}\,(x-1)^{n-j}\,\frac{n!}{j!}\,(x+1)^j \\ &= \frac{1}{2^n}\sum_{j=0}^{n}\left(C_n^j\right)^2 (x-1)^{n-j}\,(x+1)^j\,. \end{aligned}$$

Donc,

$$L_n(x) = \frac{1}{2^n}\sum_{j=0}^{n}\left(C_n^j\right)^2 (x-1)^{n-j}\,(x+1)^j\,.$$

■

Calcul de $L_n(1) = 1$

On a

$$\begin{aligned} \frac{d^n}{dx^n}\left[U_n(x)\right] &= \frac{d^n}{dx^n}\left[\left(x^2-1\right)^n\right] = \frac{d^n}{dx^n}\left[(x-1)^n\,(x+1)^n\right] \\ &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{d^k}{dx^k}\left[(x-1)^n\right]\frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}\left[(x+1)^n\right]. \end{aligned}$$

Dans cette somme, seul le terme d'indice $k=n$, c'est-à-dire

$$C_n^n \frac{d^n}{dx^n}\left[(x-1)^n\right]\frac{d^0}{dx^0}\left[(x+1)^n\right] = n!\,(x+1)^n\,,$$

ne s'annule pas en 1 (tous les autres ont encore $(x-1)$ en facteur).

On en déduit que

$$\frac{d^n}{dx^n}U_n(1) = \left[n!\,(x+1)^n\right]_{x=1} = n!2^n.$$

Alors,

$$L_n(1) = \frac{n!2^n}{n!2^n} = 1.$$

2.4.2 Fonction génératrice des polynômes de Legendre

La fonction génératrice des polynômes de Legendre est donnée par

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2xt + t^2}}.$$

2.4.3 Relation de réccurence entre les polynômes de Legendre L_{n-2}, L_{n-1} et L_n

On a

$$L_0(x) = \frac{1}{(0!)\,(2)^0} \frac{d^0}{dx^0} \left[\left(x^2 - 1\right)^0 \right] = 1.$$

$$L_1(x) = \frac{1}{(1!)\,2} \frac{d}{dx} \left[\left(x^2 - 1\right) \right] = x.$$

On encore

$$\forall n \geq 2,\ b_n L_{n-1} = L_n - a_n x L_{n-1} - c_n L_{n-2}. \tag{2.4.2}$$

On sait que pour tout $n \geq 0$, le polynôme L_n a la parité de n, donc L_n, xL_{n-1} et L_{n-2} ont la parité de n, alors que L_{n-1} a celle de $n-1$ l'égalité (2.4.2) montre donc que $b_n L_{n-1}$ est à la fois paire et impaire, il s'ensuit que $b_n L_{n-1} = 0$ puis $b_n = 0$ car $L_{n-1} \neq 0$.

La relation (2.4.2) donne une égalité enter les termes de plus haut degré de L_n et de L_{n-1}, si on note α_n le coefficient du terme de plus haut degré dans L_n. On obtient, par l'identification:

$$\alpha_n = a_n \alpha_{n-1}.$$

Or pour tout n de $\mathbb{N}$, On a

$$\alpha_n = \frac{(2n)!}{2^n \left(n!\right)^2}.$$

On en déduit

$$a_n = \frac{\alpha_n}{\alpha_{n-1}} = \frac{(2n)!}{2^n \left(n!\right)^2} \frac{2^{n-1} \left(n-1\right)!^2}{(2n-2)!} = \frac{2n-1}{n},\ \forall n \geq 2.$$

On sait que $L_n(1) = 1$, pour tout n de $\mathbb{N}$, l'égalité (2.4.2), en $x = 1$ donne alors, $\forall n \geq 2$, $(a_n + b_n) + c_n = 1$.

Ainsi, pour tout $n \geq 2$, $c_n = 1 - a_n = \frac{1-n}{n}$. Finalement on obtient

$$\forall n \geq 2,\ nL_n = (2n-1)\, xL_{n-1} - (n-1)\, L_{n-2}, \tag{2.4.3}$$

cette relation de réccurence permet de calculer $L_2, L_3, L_4, ...$[7].

Exemple 2.4.1 *:Si* $n = 2$

$$\begin{aligned} 2L_2(x) &= (2(2)-1)\, xL_1(x) - L_0(x) \\ 2L_2(X) &= 3x^2 - 1 \\ L_2(X) &= \frac{1}{2}\left(3x^2-1\right). \end{aligned}$$

Si $n = 3$

$$\begin{aligned} 3L_3(x) &= (2(3)-1)\, x\ L_2(x) - 2L_1(x) \\ 3L_3(X) &= 5x\left(\frac{1}{2}\left(3x^2-1\right)\right) - 2x \\ L_3(X) &= \frac{(5x^3-3x)}{2}. \end{aligned}$$

2.4.4 Orthogonalité des polynômes de Legendre

Proposition 2.4.1 *: La famille des polynômes de Legendre est orthogonal relativement à la fonction de poids* $w(x) = 1$ *sur l'intervalle* $[-1, 1]$

$$\forall i < j : \int_{-1}^{1} \frac{d^i}{dx^i}\left[\left(x^2-1\right)^i\right] \frac{d^j}{dx^j}\left[\left(x^2-1\right)^j\right] dx = 0.$$

Preuve.

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} \frac{d^i}{dx^i}\left[\left(x^2-1\right)^i\right] \frac{d^j}{dx^j}\left[\left(x^2-1\right)^j\right] dx &= -\int_{-1}^{1} \frac{d^{i+1}}{dx^{i+1}}\left[\left(x^2-1\right)^i\right] \frac{d^{j-1}}{dx^{j-1}}\left[\left(x^2-1\right)^j\right] dx \\ &\quad + \left[\frac{d^i}{dx^i}\left[\left(x^2-1\right)^i\right] \frac{d^{j-1}}{dx^{j-1}}\left[\left(x^2-1\right)^j\right]\right]_{-1}^{1} \quad (2.4.4) \end{aligned}$$

Puisque

$$\left[\frac{d^i}{dx^i}\left[\left(x^2-1\right)^i\right] \frac{d^{j-1}}{dx^{j-1}}\left[\left(x^2-1\right)^j\right]\right]_{-1}^{1} = 0 \ \text{car}\ \forall k \in (0, 1, ..., j-1), \frac{d^k}{dx^k}\left[\left(x^2-1\right)^j\right]_{-1}^{1} = 0,$$

alors, la relation (2.4.4) *devient*

$$\int_{-1}^{1} \frac{d^i}{dx^i}\left[\left(x^2-1\right)^i\right] \frac{d^j}{dx^j}\left[\left(x^2-1\right)^j\right] dx = -\int_{-1}^{1} \frac{d^{i+1}}{dx^{i+1}}\left[\left(x^2-1\right)^i\right] \frac{d^{j-1}}{dx^{j-1}}\left[\left(x^2-1\right)^j\right] dx.$$

Aprés l'intégration j fois, on obtient

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \frac{d^i}{dx^i}\left[\left(x^2-1\right)^i\right]\frac{d^j}{dx^j}\left[\left(x^2-1\right)^j\right]dx &= (-1)^j\int_{-1}^{1}\frac{d^{i+j}}{dx^{i+j}}\left[\left(x^2-1\right)^i\right]\frac{d^0}{dx^0}\left[\left(x^2-1\right)^j\right]dx \\
&\quad + \left[\frac{d^{i+j-1}}{d^{i+j-1}}\left[\left(x^2-1\right)^i\right]\frac{d^0}{dx^0}\left[\left(x^2-1\right)^j\right]\right]_{-1}^{1} \\
&= (-1)^j\int_{-1}^{1}\frac{d^{i+j}}{dx^{i+j}}\left[\left(x^2-1\right)^i\right]\left(x^2-1\right)^j .
\end{aligned}$$

Puisque

$$\frac{d^{i+j}}{dx^{i+j}}\left[\left(x^2-1\right)^i\right]=0 \ car\ \frac{d^{i+j}}{dx^{i+j}}\left[\left(x^2-1\right)^i\right]=0,\ \ si\ i<j,$$

alors,

$$\int_{-1}^{1}\frac{d^i}{dx^i}\left[\left(x^2-1\right)^i\right]\frac{d^j}{dx^j}\left[\left(x^2-1\right)^j\right]dx=0.$$

[9]. ■

Remarque 2.4.1 *:Par la relation de réccurence* (2.4.3)*, si $i=j$ on obtient*

$$(n+1)\int_{-1}^{1}L_{n+1}(x)\,L_{n-1}(x)\,dx-(2n+1)\int_{-1}^{1}x\ L_n(x)L_{n-1}(x)\,dx+n\int_{-1}^{1}L_{n-1}^2(x)\,dx=0 \tag{2.4.5}$$

$$(n+1)\int_{-1}^{1}L_{n+1}(x)\,L_n(x)dx-(2n+1)\int_{-1}^{1}xL_n^2(x)dx+n\int_{-1}^{1}L_{n-1}(x)\,L_n(x)dx=0 \tag{2.4.6}$$

$$(n+1)\int_{-1}^{1}L_{n+1}^2(x)\,dx-(2n+1)\int_{-1}^{1}x\ L_n(x)L_{n+1}(x)\,dx+n\int_{-1}^{1}L_{n-1}(x)\,L_{n+1}(x)\,dx=0. \tag{2.4.7}$$

Puisque

$$\int_{-1}^{1}L_{n+1}(x)\,L_{n-1}(x)\,dx=0,\quad \int_{-1}^{1}L_{n+1}(x)\,L_n(x)dx=0,$$

$$\int_{-1}^{1}L_{n-1}(x)\,L_n(x)dx=0\ et\int_{-1}^{1}L_{n-1}(x)\,L_{n+1}(x)\,dx=0,$$

alors de (2.4.5)*, on déduit*

$$-(2n+1)\int_{-1}^{1}x\ L_n(x)L_{n-1}(x)\,dx+n\int_{-1}^{1}L_{n-1}^2(x)\,dx=0,$$

et de (2.4.7) *,on déduit*

$$n\int_{-1}^{1}L_n^2(x)\,dx-(2n-1)\int_{-1}^{1}x\ L_{n-1}(x)L_n(x)\,dx=0.$$

Ainsi,

$$\int_{-1}^{1} L_n^2(x)\,dx = \frac{(2n-1)}{(2n+1)} \int_{-1}^{1} L_{n-1}^2(x)\,dx = 0.$$

Par réccurence, il vient

$$\int_{-1}^{1} L_n^2(x)\,dx = \frac{1}{(2n+1)} \int_{-1}^{1} L_0^2(x)\,dx = \frac{2}{(2n+1)}.$$

2.4.5 Parité de L_n

Immédiat car U_n est un polynôme pair, ce qui induit que L_n, qui est le polynôme dérivé n fois de U_n, est un polynôme de même parité que n [9].

2.4.6 Equation différentielle vérifiée par les polynômes de Legendre

On a

$$U_n'(x) = 2nx\left(x^2-1\right)^{n-1}$$

aprés la multiplication par (x^2-1), on obtient

$$\left(x^2-1\right) U_n'(x) = 2nxU_n(x) \tag{2.4.8}$$

(égalité valable sur $\mathbb{R}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$).

On dérive l'égalité (2.4.8) membre à membre $n+1$ fois, avec la formule de Leibniz, On trouve

$$\begin{aligned}
&\left(x^2-1\right) \frac{d^{n+2}}{dx^{n+2}}\left[U_n(x)\right] + (n+1)(2x)\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\left[U_n(x)\right] + \frac{n(n+1)}{2}(2)\frac{d^n}{dx^n}\left[U_n(x)\right] \\
= \;& 2n\left[x\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\left[U_n(x)\right] + (n+1)\frac{d^n}{dx^n}\left[U_n(x)\right]\right],
\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\left(x^2-1\right)\left[\frac{d^n}{dx^n}\left[U_n(x)\right]\right]'' + 2x\left[\frac{d^n}{dx^n}\left[U_n(x)\right]\right]' - n(n+1)\frac{d^n}{dx^n}\left[U_n(x)\right] = 0,$$

ce que donne bien, aprés la multiplication par $\dfrac{1}{n!2^n}$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \;\; \left(1-x^2\right) L_n''(x) - 2xL_n'(x) + n(n+1)L_n(x) = 0.$$

Alors, il est possible de définir les polynômes de Legendre par une équation différentielle pour tout entier n, oú L_n est une solution d'équation différentielle

$$\left(1-x^2\right)P^{''}-2xP^{'}+n\ \ (n+1)\,P=0.$$

2.4.7 Degré et coefficient dominant de L_n

Proposition 2.4.2 : *Le polynôme de Legendre est de degré n, pour tout $n\in\mathbb{N}$, et son coefficient du terme de plus haut degré est $\dfrac{(2n)!}{2^n\,(n!)^2}$, c'est-à-dire*

$$L_n\,(x)=\frac{(2n)!}{2^n\,(n!)^2}x^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_0. \qquad\qquad (a_{n-1},...,a_1,a_0)\in\mathbb{R}^n$$

Preuve. 1. Puisque $L_n\,(x)=\dfrac{d^n}{dx^n}\,[U_n\,(x)]$, alors Le polynôme de Legendre est la dérivé n-ième d'un polynôme de degré $2n$, donc L_n est un polynôme de degré n.

2. Le coefficient de plus haut degré de $\left[\dfrac{d^n}{dx^n}\,[U_n\,(x)]\right]=\dfrac{d^n}{dx^n}\left[\left(x^2-1\right)^n\right]$ s'obtient en dérivant n fois le terme de plus haut degré de $\left(x^2-1\right)^n$, c'est-à-dire x^{2n}.

Or $\dfrac{d^n}{dx^n}\left[x^{2n}\right]=\dfrac{(2n)!}{n!}x^n$.

Donc, le terme de plus haut degré de L_n est $\dfrac{1}{n!2^n}\dfrac{(2n)!}{n!}x^n$, c'est-à-dire $\dfrac{(2n)!}{2^n\,(n!)^2}x^n$ [7].

■

2.4.8 Les valeurs des polynôme de Legendre en zéro

On sait que

$$\forall n\geq 2,\ nL_n\,(x)=(2n-1)\,xL_{n-1}\,(x)-(n-1)\,L_{n-2}\,(x)$$

Si $x=0$, on obtient

$$nL_n\,(0)=-\,(n-1)\,L_{n-2}\,(0)\,,$$

c'est-dire

$$(n+1)\,L_{n+1}\,(0)=-nL_{n-1}\,(0)\,,$$

on en déduit pour tout entier n

$$L_{2n+2}\,(0)=-\frac{2n+1}{2n+2}L_{2n}\,(0)\,,$$

puis, par récurrence,

$$L_{2n}(0) = (-1)^n \frac{1 \times 3 \cdots (2n-1)}{2 \times 4 \cdots (2n)}.$$

2.5 Propriétés du polynôme d'Hermite

2.5.1 Fonction génératrice des polynômes d'Hermite

La fonction $\phi(x)$ est une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ pour tout entier, donc sa série de Taylor au point x la représente partout, par conséquent

$$\phi\ (x+h) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^n}{dx^n}[\phi(x)] \frac{h^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n H_n(x) \exp\left(-x^2\right) \frac{h^n}{n!},$$

pour tout h, en particulier, pour $h = -t$, on a

$$\exp\left(-(x-t)^2\right) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} H_n(x)\right) \exp\left(-x^2\right),$$

aprés la multiplication par $\exp(x^2)$, on obtient la fonction génératrice des polynômes d'Hermite

$$G(x,t) = \exp\left(2tx - t^2\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} H_n(x),$$

2.5.2 Formulation explicite du polynôme d'Hermite

On a

$$G(x,t) = \exp\left(2tx - t^2\right) = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{t^n}{n!},$$

et d'autre part,

$$\begin{aligned} G(x,t) &= \exp(2tx)\exp\left(-t^2\right) = \sum_{j\geq 0}\sum_{k\geq 0} \frac{\left(-t^2\right)^j}{j!} \frac{(2xt)^k}{k!} = \sum_{j\geq 0}\sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^j (2x)^k t^{2j+k}}{j!k!} \\ &= \sum_{n\geq 0}\sum_{2j+k=n} \frac{(-1)^j (2x)^k t^n}{j!k!} = \sum_{n\geq 0}\left(\sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j (2x)^{n-2j}}{j!(n-2j)!}\right) t^n. \end{aligned}$$

Finalement, on peut écrire le polynôme d'Hermite sous la forme suivant

$$H_n(x) = n! \sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j (2x)^{n-2j}}{j!(n-2j)!}.$$

2.5.3 Relations de récurrence entre les polynômes d'Hermite

On a

$$H_0(x) = \exp\left(x^2\right) \frac{d^0}{dx^0} \exp\left(-x^2\right) = 1,$$

et

$$H_1(x) = (-1) \exp\left(x^2\right) \frac{d}{dx} \left[\exp\left(-x^2\right)\right] = 2x.$$

Relations de récurrence entre H_{n-1} et H'_n

On a

$$\frac{dG(x,t)}{dx} = 2t \exp\left(2tx - t^2\right) = \sum_{n\geq 0} \frac{t^n}{n!} H'_n(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{t^n}{n!} H'_n(x),$$

et d'autre part,

$$2t \exp\left(2tx - t^2\right) = \sum_{n\geq 0} \frac{2t^{n+1}}{n!} H_n(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{2t^n}{(n-1)!} H_{n-1}(x),$$

c'est-à-dire

$$\sum_{n\geq 1} \frac{t^n}{n!} H'_n(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{2t^n}{(n-1)!} H_{n-1}(x),$$

ainsi, en identifiant les termes en t^n on obtient

$$2nH_{n-1}(x) = H'_n(x).$$

Relation de récurrence entre les trois polynômes H_{n+1} , H_n et H_{n-1}

On a

$$\frac{dG(x,t)}{dt} = 2\ (x-t) \exp\left(2tx - t^2\right) = \sum_{n\geq 0} \frac{nt^{n-1}}{n!} H_n(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{nt^{n-1}}{n!} H_n(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{t^n}{n!} H_{n+1}(x),$$

et d'autre part,

$$\begin{aligned} 2\ (x-t) \exp\left(2tx - t^2\right) &= \sum_{n\geq 0} \frac{2xt^n}{n!} H_n(x) - \sum_{n\geq 1} \frac{2t^{n+1}}{n!} H_n(x) \\ &= \sum_{n\geq 0} \frac{2xt^n}{n!} H_n(x) - \sum_{n\geq 1} \frac{2t^n}{(n-1)!} H_{n-1}(x), \end{aligned}$$

alors,

$$\sum_{n\geq 0}\frac{t^n}{n!}H_{n+1}(x)=\sum_{n\geq 0}\frac{2xt^n}{n!}H_n(x)-\sum_{n\geq 1}\frac{2t^n}{(n-1)!}H_{n-1}(x).$$

Donc,

$$H_{n+1}(x)=2xH_n(x)-2nH_{n-1}(x), \tag{2.5.1}$$

cette expression permet de calculer le terme $H_2, H_3, ...$ [9].

Exemple 2.5.1 *: Pour* $n=1$

$$\begin{aligned} H_2(x) &= 2xH_1(x)-2H_0(x) \\ &= 2x^2-2. \end{aligned}$$

Pour $n=2$

$$\begin{aligned} H_3(x) &= 2xH_2(x)-4H_1(x) \\ &= 4x^3-8x. \end{aligned}$$

2.5.4 Orthogonalité des polynômes d'Hermite

On a

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} G(x,w)\,G(x,t)\exp\left(-x^2\right)dx &= \int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(2xw-w^2+2xt-t^2-x^2\right)dx \qquad (2.5.2) \\ &= \exp(2wt)\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-(x-w-t)^2\right)dx \\ &= \exp(2wt)\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-u^2\right)du \text{ avec } u=(x-w-t). \end{aligned}$$

On pose

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-u^2\right)du=2\int_{0}^{+\infty}\exp\left(-u^2\right)du\Longrightarrow I^2=4\int_{0}^{+\infty}\int_{0}^{+\infty}\exp\left(-\left(u^2+v^2\right)\right)dudv.$$

On pose

$$\left\{\begin{aligned} u &= r\cos\theta \\ v &= r\sin\theta \\ |J| &= r \end{aligned}\right.$$

Alors,

$$\begin{aligned} I^2 &= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \lim_{a\to+\infty} \int_0^a r\exp\left(-r^2\right)drd\theta = -2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \lim_{a\to+\infty}\left[\exp\left(-r^2\right)\right]_0^a d\theta \\ &= -2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (-1)\,d\theta = \pi. \end{aligned}$$

Donc,

$$I = \sqrt{\pi}.$$

D'aprés la substitution du résultat dans l'équation (2.5.2) , on obtient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} G(x,w)\,G(x,t)\exp\left(-x^2\right)dx = \sqrt{\pi}\exp(2wt)\,,$$

c'est-à-dire,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{m\geq 0}\frac{t^m}{m!}H_m(x)\sum_{n\geq 0}\frac{w^n}{n!}H_n(x)\exp\left(-x^2\right)dx = \sqrt{\pi}\exp(2wt)\,,$$

ainsi,

$$\begin{aligned} \sum_{n\geq 0}\left(\sum_{m\geq 0}\frac{t^m}{n!m!}\int_{-\infty}^{+\infty} H_n(x)\,H_m(x)\exp\left(-x^2\right)dx\right)w^n &= \sqrt{\pi}\exp(2wt)\,dx \\ &= \sqrt{\pi}\sum_{n\geq 0}\left(\frac{2^n}{n!}t^n\right)w^n, \end{aligned}$$

en poursuivant,

$$\sum_{m\geq 0}\frac{t^m}{m!}\int_{-\infty}^{+\infty} H_n(x)\,H_m(x)\exp\left(-x^2\right)dx = \sqrt{\pi}2^n t^n,$$

donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_n(x)\,H_m(x)\exp\left(-x^2\right)dx = 0, \text{si } n\neq m,$$

c'est-à-dire, la famille des polynômes d'Hermite est orthogonal relativement à la fonction de poids $w(x) = \exp(-x^2)$ sur $\mathbb{R}$ [9].

Remarque 2.5.1 *:Si* $n = m$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_n^2(x)\exp\left(-x^2\right)dx = \sqrt{\pi}2^n n!,$$

car, par multiplication de l'égalité (2.5.1) *par* $H_n(x)$, *on déduit*

$$H_n^2(x) - 2xH_{n-1}(x)H_n(x) + 2(n-1)H_{n-2}(x)H_n(x) = 0,\ n \geq 2,$$

et par multiplication de l'égalité (2.5.1) *par* $H_{n-1}(x)$, *on déduit*

$$H_{n+1}(x)H_{n-1}(x) - 2xH_n(x)H_{n-1}(x) + 2nH_{n-1}^2(x) = 0,\ n \geq 2,$$

alors,

$$H_n^2(x) + 2(n-1)H_{n-2}(x)H_n(x) = H_{n+1}(x)H_{n-1}(x) + 2nH_{n-1}^2(x). \tag{2.5.3}$$

Par multiplication (2.5.3) *par* $\exp(-x^2)$, *on trouve*

$$\begin{aligned} & H_n^2(x)\exp\left(-x^2\right) + 2(n-1)\exp\left(-x^2\right)H_{n-2}(x)H_n(x) \\ & - \exp\left(-x^2\right)H_{n+1}(x)H_{n-1}(x) - 2n\exp\left(-x^2\right)H_{n-1}^2(x) \\ = \ & 0, \end{aligned}$$

par l'integration

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-x^2\right)H_n^2(x)\,dx + 2(n-1)\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-x^2\right)H_{n-2}(x)H_n(x)\,dx \\ & - \int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-x^2\right)H_{n+1}(x)H_{n-1}(x)\,dx - 2n\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-x^2\right)H_{n-1}^2(x)\,dx \\ = \ & 0, \end{aligned}$$

en raison de l'orthogonalité

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-x^2\right)H_{n-2}(x)H_n(x)\,dx = 0 \ \text{ et } \int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-x^2\right)H_{n+1}(x)H_{n-1}(x)\,dx = 0,$$

donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-x^2\right)H_n^2(x)\,dx = 2n\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-x^2\right)H_{n-1}^2(x)\,dx,$$

par l'application cette formule $n-1$ *fois , on obtient*

$$\int_{-\infty}^{+\infty}H_n^2(x)\exp\left(-x^2\right) = 2^{n-1}n!\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-x^2\right)H_1^2(x)\,dx = 2^{n-1}n!\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-x^2\right)(2x)^2\,dx \tag{2.5.4}$$

On a

$$\begin{aligned} 4\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-x^2\right)(x)^2 dx &= 4\int_{-\infty}^{+\infty} x\exp\left(-x^2\right) x dx = 4\lim_{a\to\infty}\left[-\frac{1}{2}x\exp\left(-x^2\right)\right]_{-a}^{a} + 2\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-x^2\right) \\ &= 2\sqrt{\pi}. \end{aligned}$$

On remplace cet résultat dans (2.5.4) , *on obtient*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_n^2(x)\exp\left(-x^2\right) dx = \sqrt{\pi}2^n n! \quad [1].$$

2.5.5 Equation différentielle vérifiée par les polynômes d'Hermite

Pour $n \geq 1$, on sait que

$$H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x) = 0,$$

d'autre part, on a

$$2nH_{n-1}(x) = H_n'(x),$$

alors

$$H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + H_n'(x) = 0.$$

Par la dérivation par rapport à x, on obtient

$$H_{n+1}'(x) - 2xH_n'(x) - 2H_n(x) + H_n''(x) = 0,$$

alors,

$$H_n''(x) - 2xH_n'(x) + 2nH_n(x) = 0 \ x \in \mathbb{R}.$$

Donc, il est possible de définir les polynômes d'Hermite par une équation différentielle pour tout entier n, oú H_n est une solution d'équation différentielle

$$P'' - 2xP' + 2nP = 0$$

[9].

2.5.6 Degré et coefficient dominant d'Hermite

Proposition 2.5.1 *: Les polynômes d'Hermite sont de degré n, et Pour tout $n \in \mathbb{N}$, son coefficient du terme de plus haut degré est 2^n, c'est-à-dire:*

$$H_n(x) = 2^n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0. \qquad (a_{n-1}, ..., a_1, a_0) \in \mathbb{R}^n.$$

2.5.7 Parité de H_n

Puisque la dérivée n-iéme de $[\exp(-x^2)]$ est ni pair et ni impair, alors le polynôme d'Hermite est un polynôme ni pair et ni impair

2.5.8 Les valeurs des polynôme d'Hermite en zéro

On a

$$G(x,t) = \exp\left(2tx - t^2\right) = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{t^n}{n!},$$

pour $x = 0$, on obtient,

$$\exp\left(-t^2\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(0)}{n!} t^n \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} t^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(0)}{n!} t^n.$$

Donc,

$$H_{n+1}(0) = 0 \text{ et } H_{2n}(0) = (-1)^n \frac{(2n)!}{n!}, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Chapitre 3

Quelques applications des polynômes orthogonaux

Dans ce chapitre, nous présentons quelques applications fondamentales des polynômes de Legendre, Tchebychev et Hermite comme calcul l'approximation au sens des moindres carrés, calcul d'intégration numérique,...

3.1 Meilleure Approximation

Définition 3.1.1 *: Soit V un espace vectoriel muni d'une norme $\|.\|$ et on considère un sous-espace $U \subset V$ de dimension finie. On dit que $p_n \in U$ réalise la meilleure approximation de $f \in V$ si*

$$\| p_n - f\| = \min_{u \in U} \| u - f\|$$

[2].

Théorème 3.1.1 *: La meilleure approximation de f par un polynôme de degré au plus égal à n est réalisée par le choix suivant des points d'interpolation :*

$$x_i = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}\zeta_i \quad (i = 0, 1, ..., n),$$

où $\zeta_0, \zeta_1, ...\zeta_n$ sont les zéros du polynôme de Tchebychev de degré $n+1$ à savoir

$$\zeta_i = \cos \frac{(2i+1)\pi}{2(n+1)} \qquad (i = 0, 1, ..., n) \quad .$$

[12]

Théorème 3.1.2 *: Les polynômes de Tchebychev* $T_n^*(x) = \dfrac{T_n(x)}{2^{n-1}}$ *de degré inferieur ou égale à* n *représente la meilleure approximation de la fonction nulle sur l'intervalle* $[0,1]$.

Preuve. On a

$$\begin{aligned} \|T_n^*(x) - 0\| &= \min_{R_n \in P_n} \|R_n - 0\| \\ \|T_n^*(x)\| &= \min_{R_n \in P_n} \|R_n\| \\ &= \|\frac{T_n(x)}{2^{n-1}}\| = \frac{1}{2^{n-1}}\|T_n(x)\| = \frac{1}{2^{n-1}}. \end{aligned}$$

Car $\|T_n(x)\| = \max\limits_{x\in(0.1)} | T_n(x) |= 1.$

Par l'absurde, suposons que $T_n(x)$ n'est pas la meilleure approximation de la fonction nulle sur l'intervalle $(0,1)$.

Alors, on peut trouver un polynômes $R_n \in P_n$ tel que $\| R_n \| \leq \| T_n^*(x) \|$. Donc $\| T_n^*(x) \| \neq \max\limits_{R_n \in P_n} \|R_n\|$, posons

$$q = T_n^* - R_n$$

q est un polynôme de degré inferieur ou égale à $n-1$.

On considére les points x_0, $x_1, ..., x_n$ ou T_n prender les valeurs $-1, +1...$, c'est-à-dire T_n^* prender les valeurs $-\frac{1}{2^{n-1}}, +\frac{1}{2^{n-1}}, ...$, donc

$$\begin{aligned} q(x) &= T_n^*(x) - R_n(x) \\ q(x_0) &= -\frac{1}{2^{n-1}} - R_n(x) \\ q(x_1) &= \frac{1}{2^{n-1}} - R_n(x) \\ &\ldots \\ &\ldots \end{aligned}$$

Mais $\| R_n \| \leq \| T_n^*(x) \|$ .Alors $q(x_1) < 0$, $q(x_2) > 0, \ldots$

Alors, le polynôme q admet n racines c'est une contradiction car q est de degré $n-1$. ■

3.2 Intégration numérique

3.2.1 Méthodes de Gauss

Les méthodes de Gauss sont les méthodes les plus répandues et les plus précises, car l'intégration est exacte pour tout polynôme de degré inférieur ou égal à $2n+1$. Soit (Ψ_n) une famille de polynômes orthogonaux pour la fonction de poids $w(x)$ sur l'intervalle $[a,b]$. Cherchons à exprimer l'intégrale $\int\limits_a^b f(x)\,w(x)\,dx$. Écrivons la fonction f en utilisant la formule de Lagrange

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} L_i(x)\,f(x_i) + \prod_{i=0}^{n} \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!},\ \text{avec } c \in [a,b]$$

et

$$L_i(x) = \prod_{\substack{0\leq j\leq n \\ i\neq j}} \left(\frac{x-x_j}{x_i-x_j}\right).$$

Si (Ψ_n) est une base de polynômes orthogonaux pour la fonction de poids $w(x)$, on a

$$\int\limits_a^b \Psi_n \Psi_m w(x)\,dx = 0,\ \text{si } n \neq m.$$

Développons sur cette base le produit

$$\prod_{i=0}^{n} (x-x_i) = \sum_{i=0}^{n+1} a_i \Psi_i(x),$$

et si f est un polynôme de degré $(2n+1)$, notons

$$Q_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x)}{(n+1)!} = \sum_{i=0}^{n} b_i \Psi_n(x).$$

Le reste s'exprime par

$$R_n(x) = \prod_{i=0}^{n} (x-x_i)\,\frac{f^{(n+1)}(x)}{n+1} = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} a_i b_j \Psi_i(x)\,\Psi_j(x) + a_{n+1} \sum_{i=0}^{n} b_i \Psi_i(x)\,\Psi_{n+1}(x),$$

d'où en intégrant

$$\int\limits_a^b f(x)\,w(x)\,dx = \int\limits_a^b \sum_{i=0}^{n} L_i(x)\,f(x_i)\,w(x)\,dx + \int\limits_a^b R_n(x)\,w(x)\,dx + \varepsilon,$$

soit en vertu de l'orthogonalité des polynômes

$$\int_a^b R_n(x)\, w(x)\, dx = \sum_{i=0}^{n} a_i b_i \int_a^b \Psi_i^2(x)\, w(x)\,.$$

En choisissant les points (x_i) de la subdivision comme les $(n+1)$ racines du polynôme de degré $n+1$, on impose $a_i = 0$, pour $i = 0, 1, \ldots, n$ et $a_{n+1} \neq 0$, c'est-à-dire

$$\prod_{i=0}^{n} (x - x_i) = \sum_{i=0}^{n+1} a_i \Psi_i(x) = a_{n+1} \Psi_{n+1}(x)\,,$$

d'où

$$\int_a^b R_n(x)\, w(x)\, dx = 0.$$

Par conséquent, la méthode de Gauss appliquée à une fonction f conduit à une approximation de la forme

$$\int_a^b f(x)\, w(x)\, dx = \sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i) + \varepsilon,$$

avec

$$w_i = \int_a^b L_i(x)\, w(x)\, dx.$$

L'erreur est de la forme $\varepsilon = \varepsilon_n f^{(2n+2)}(c)$ où ε_n dépend du choix des polynômes orthogonaux (Ψ_n) [5].

3.2.2 Intégration de Gauss-Legendre

Lorsque la famille de polynômes orthogonaux est la famille des polynômes de Legendre relative à la fonction de poids $w(x) = 1$ sur l'intervalle $[-1, 1]$, l'intégrale est approchée par la formule

$$\int_{-1}^{1} f(x)\, dx = \sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i) + \varepsilon,$$

où les nombres w_i sont donnés par

$$w_i = \int_{-1}^{1} \prod_{\substack{0 \leq j \leq n \\ i \neq j}} \left(\frac{x - x_j}{x_i - x_j} \right) dx,$$

et les x_i sont les racines du polynôme de Legendre P_{n+1}. L'erreur s'exprime

$$\varepsilon = \frac{2^{2n+3}[(n+1)!]^4}{(2n+3)[(2n+2)!]^3} f^{(2n+2)}(c), \text{ avec } c \in [-1, 1]$$

[5].

Exemple 3.2.1 *: Pour $n = 1$, la relation de récurrence définissant les polynômes de Legendre donne $P_2(X) = \dfrac{(3X^2 - 1)}{2}$. Ce polynôme admet deux racines $x_0 = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ et $x_1 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ définissant la subdivision de l'intervalle de base.*

Les valeurs w_i s'en déduisent. La première valeur se calcule par

$$w_0 = \int_{-1}^{1} \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} dx = \int_{-1}^{1} \frac{-x + 1/\sqrt{3}}{2/\sqrt{3}} dx = 1,$$

et de la même manière, on montre que $w_1 = 1$. L'intégrale se réduit à

$$\int_{-1}^{1} f(x)\, dx = f\left(-1/\sqrt{3}\right) + f\left(1/\sqrt{3}\right).$$

3.2.3 Intégration de Gauss-Tchebychev

On sait que les polynômes de Tchebychev forment une base orthogonale sur$[-1; 1]$ par rapport à la fonction de poids $w(x) = 1/\sqrt{1 - x^2}$.

Les valeurs w_i ont, dans ce cas, une expression analytique générale $w_i = \pi/(n+1)$. Les polynômes de Tchebychev permettent de calculer une approximation de l'intégrale

$$\int_{-1}^{1} f(x) \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} dx \simeq \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i).$$

L'erreur est donnée par

$$\varepsilon = \frac{2\pi}{2^{2n+2}(2n+2)!} f^{(2n+2)}(c), \text{ avec } c \in [-1, 1].$$

Exemple 3.2.2 : *Pour $n = 1$, le polynôme du second degré $T_2(x) = 2x^2 - 1$ admet deux racines $x_0 = 1\diagup\sqrt{2}$ et $x_1 = -1\diagup\sqrt{2}$. Les valeurs $w_0 = w_1 = \pi\diagup 2$ conduisent à l'approximation*

$$\int_{-1}^{1} f(x) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \simeq \frac{\pi}{2} \left(f\left(-1\diagup\sqrt{2}\right) + f\left(1\diagup\sqrt{2}\right) \right).$$

3.2.4 Intégration de Gauss-Hermite

Les polynômes d'Hermite forment une base orthogonale sur l'intervalle $]-\infty, +\infty[$ par rapport à la fonction de poinds $w(x) = \exp(-x^2)$ permettent de calculer une approximation de l'intégrale

$$\int_{-1}^{1} f(x) \exp\left(-x^2\right) dx \simeq \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i).$$

L'erreur est donnée par

$$\varepsilon = \frac{(n+1)!\sqrt{\pi}}{2^{2n+1}(2n+2)!} f^{(2n+2)}(c), \text{ avec } c \in \mathbb{R}$$

[5].

Exemple 3.2.3 : *Pour $n = 1$, le polynôme d'Hermite d'ordre $H_2(x) = 4x^2 - 2$ admet deux racines $x_0 = 1\diagup\sqrt{2}$ et $x_1 = -1\diagup\sqrt{2}$. Les valeurs $w_0 = w_1 = \sqrt{\pi}\diagup 2$ conduisent à l'approximation suivante*

$$\int_{-1}^{1} f(x) \exp\left(-x^2\right) dx \simeq \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left(f\left(-1\diagup\sqrt{2}\right) + f\left(1\diagup\sqrt{2}\right) \right).$$

3.3 Approximation au sens des Moindres Carrés

Théorème 3.3.1 : *Soit $f \in C([a,b])$. Il existe un polynôme p^* de degré au plus égal à n qui réalise un minimum global de la quantité*

$$E(p) = \| f - p \|^2 = < f - p, f - p > = \int_a^b (f(x) - p(x))^2 w(x) dx,$$

ce polynôme s'exprime de la manière suivante dans la base orthogonale $\{\pi_i(x)\}$:

$$p^*(x) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i^* \pi_i(x),$$

où

$$\alpha_i^* = \frac{< f, \pi_i >}{< \pi_i, \pi_i >}$$

[4].

Exemple 3.3.1 *: On utilise le dernier théorème pour calculer l'approximation de l'exponentielle au sens des moindres carrés.*

Recherchons le polynôme p de degré inférieur ou égal à trois qui minimis

$$\int_{-1}^{1} \mid \exp(x) - p(x) \mid^2 dx,$$

utilisons pour cela la base de polynômes de Legendre

$L_0(x) = 1$, $L_1(x) = x$, $L_2(x) = \dfrac{3}{2}\left(x^2 - \frac{1}{3}\right)$, $L_3(x) = \dfrac{5}{2}\left(x^3 - \frac{3}{5}x\right)$.

Calculons alors

$$\begin{aligned}
\langle f, L_0 \rangle &= \textstyle\int_{-1}^{1} \exp x dx = \exp(1) - \exp(-1) \\
\langle f, L_1 \rangle &= \textstyle\int_{-1}^{1} x \exp x dx = 2\exp(-1) \\
\langle f, L_2 \rangle &= \frac{3}{2}\textstyle\int_{-1}^{1} \left(x^2 - \frac{1}{3}\right) \exp x dx = \exp(1) - 7\exp(-1) \\
\langle f, L_3 \rangle &= \frac{5}{2}\textstyle\int_{-1}^{1} \left(x^3 - \frac{3}{5}x\right) \exp x dx = \left(-5\exp(1) + 37\exp(-1)\right).
\end{aligned}$$

On a $\langle L_n, L_n \rangle = \dfrac{2}{2n+1}$,

alors

$$\begin{aligned}
\langle L_0, L_0 \rangle &= \frac{2}{2(0)+1} = 2 \\
\langle L_1, L_1 \rangle &= \frac{2}{2(1)+1} = \frac{2}{3} \\
\langle L_2, L_2 \rangle &= \frac{2}{2(2)+1} = \frac{2}{5} \\
\langle L_3, L_3 \rangle &= \frac{2}{2(3)+1} = \frac{2}{7}.
\end{aligned}$$

Donc, l'expression du polynôme de degré inférieur ou égal à trois qui est la meilleur approximation au sens des moindres carrés de $\exp(x)$ *est*

$$\begin{aligned}
p^*(x) &= \frac{\langle f, L_0\rangle}{\langle L_0, L_0\rangle} L_0(x) + \frac{\langle f, L_1\rangle}{\langle L_1, L_1\rangle} L_1(x) + \frac{\langle f, L_2\rangle}{\langle L_2, L_2\rangle} L_2(x) + \frac{\langle f, L_3\rangle}{\langle L_3, L_3\rangle} L_3(x) \\
&= \frac{\exp(1) - \exp(-1)}{2} + 3\exp(-1)\, x + \frac{15}{4}\left[\exp(1) - 7\exp(-1)\right]\left(x^2 - \frac{1}{2}\right) \\
&\quad + \frac{35}{4}\left(-5\exp(1) + 37\exp(-1)\right)\left(x^3 - \frac{3}{5}x\right) \\
&= \left(\frac{-11\exp(1) + 101\exp(-1)}{8}\right) + \left(\frac{105\exp(1) - 765\exp(-1)}{4}\right) x \\
&\quad + \left(\frac{15\exp(1) - 105\exp(-1)}{4}\right) x^2 + \left(\frac{-175\exp(1) + 1295\exp(-1)}{4}\right) x^3
\end{aligned}$$

[3].

3.4 Problème de Sturm-Liouville

Définition 3.4.1 *: L'équation*

$$Ly(x) = \lambda\omega(x)\, y(x),$$

où L *est un opérateur différentiel du second ordre auto-adjoint et* ω *est une fonction positive sur* $[a, b]$ *(sauf éventuellement en un nombre fini de points où elle peut s'annuler) est appelée équation de Sturm-Liouville*

$$\left[\frac{d}{dx} p(x) \frac{d}{dx}\right] y(x) + \left(q(x) - \lambda\omega(x)\right) y(x) = 0$$

Lorsque pour des conditions aux bords données cette équation admet des solutions y_n *pour des valeurs* λ_n *données,* y_n *est appelée fonction propre et* λ_n *valeur propre.*

3.4.1 Relation enter quelques polynômes orthogonaux et l'équation de Sturm-Liouville

Polynôme de Legendre

On sait que le polynôme de Legendre vérifie l'équation déffirentielle suivante

$$\left(1 - x^2\right) L'' - 2xL' + n\ (n+1)\, L = 0 \qquad x \in [-1, 1],$$

puisque cette équation équivalente à l'équation

$$\left(\left(1-x^2\right)L'\right)' + n\ \ (n+1)\,L = 0 \qquad x \in [-1,1]\,,$$

alors, le polynôme de Legendre est une solution de l'équation de Sturm-Liouville, tels que

$$p\,(x) = \left(1-x^2\right),\ q\,(x) = 0,\ \omega\,(x) = 1 \text{ et } \lambda = n\,(n+1)\,.$$

Polynôme d'Hermite

Les polynômes d'Hermite vérifient l'équation déffirentielle suivante

$$P'' - 2xP' + 2nP = 0 \quad x \in \mathbb{R},$$

par multiplication de cette équation par $\exp\left(-x^2\right)$, on obtient

$$\left(\exp\left(-x^2\right)\right)P'' - 2x\left(\exp\left(-x^2\right)\right)P' + 2n\left(\exp\left(-x^2\right)\right)P = 0 \quad x \in \mathbb{R},$$

puisque cette équation équivalente à l'équation

$$-\left(\exp\left(-x^2\right)P'\right)' = 2n\left(\exp\left(-x^2\right)\right)P,$$

alors, le polynôme d'Hermite est une solution de l'équation de Sturm-Liouville, tels que

$$p\,(x) = \exp\left(-x^2\right),\ q\,(x) = 0,\ \omega\,(x) = \exp\left(-x^2\right) \text{ et } \lambda = 2n.$$

Conclusion générale

Les polynômes orthogonaux est un outil fondamentale pour la résolution de plusieurs problèmes d'analyse théorique ou pratique.

On s'intéresse dans ce travail à étudier quelques polynômes orthogonaux comme le polynôme de Legendre, de Tchebychev et d'Hermite où nous avons devisée notre mémoire en trois chapitre tel que au premier chapitre nous avons présenté une généralité sur les polynômes, notion d'orthogonalité, définitions des polynômes de Legendre, Tchebychev et Hermite avec certains définitions dont nous avons besoin dans notre étude, dans le deuxième chapitre nous avons traité quelques propriétés et théorèmes pour les polynômes orthogonaux indiqués au premier chapitre avec ses preuves. Enfin le troisième chapitre nous avons utilisé les polynômes orthogonaux de Legendre, Tchebychev et Hermite dans quelques applications comme l'approximation au sens de moindres carré, calcul d'intégration numérique et résolution de l'équation de Sturm-Liouville.

Bibliographie

[1] A. Goeke; Hermitesche Polynome Vortrag im Rahmen des Proseminars zur Analysis; 2006.

[2] C. Boulonne; Analyse numérique et approximation; Université des Sciences et Technologies de Lille, U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées.

[3] F. Filbet; Analyse numérique, Algorithme et étude mathèmathique; DUNOD, ISBN 978-2-10-0595103, Paris, 2013.

[4] J. A. Désidéri; Introduction à l'analyse numéruque résumé du cours; INRIA, 7 septembre 2009

[5] J. Franck; Introduction aux méthodes numériques; $2^{iéme}$ édition, Springer, 2005.

[6] J. L. Rouget; http://www.maths-france.fr, 2007.

[7] J. M. Ferrard, http://www.Klubprepa.net.

[8] J. M. Sarlat; Introduction aux polynômes; 8 février 2001.

[9] J. Van Iseghem; Polynômes orthogonaux; Synthèse des présentations de polynômes orthogonaux classiques; Extensions, Publications du Laboratoire d'Analyse Numérique et Optimisation de l'Université des Sciences et Techniques de Lille Flandres Artois, 1988.

[10]

[11] M. S. SAID; Cours licence d'analyse numerique pour le $3^{iéme}$ mathématique; université de Ouargla, 2002.

[12] S. MAZEN; analyse numerique; Ecole Centrale de Nantes Dépt. Info/Math Année universitaire, 2012.

Résume

L'objectif de notre travail est de donner une idée simple sur les polynômes orthogonaux, à partir d'étudier ses propriétés et ses applications en analyse numérique, qui considérer comme un outil très important pour étudier et résoudre des problèmes dans différentes sciences en générale et particulièrement à l'analyse numérique.

Mots – clés: Polynômes de Tchebychev, polynômes d'Hermite, polynômes de Legendre.

ملخص

الهدف من هذا العمل هو إعطاء فكرة مبسطة حول كثيرات الحدود المتعامدة انطلاقا من دراسة مفهومها وبالأخص خصائصها وتطبيقاتها في التحليل العددي باعتبارها أداة هامة في دراسة وإيجاد حلول الكثير من المسائل في مختلف العلوم عامة وفي التحليل العددي خاصة .

الكلمات المفتاحية: كثيرات حدود تشيبيشاف, كثيرات حدود هرميت, كثيرات حدود لجوندر.

Abstract

The aim of this study is to give a simple explanation of perpendicular polynomials with regard to their notion, characteristics and applications in numerical analysis as being a vital toot in studying various issues related to different sciences, and in numerical analysis.

Key words: Tchebychev polynomials, Hermit polynomials, Legendre polynomials.