

N° d'ordre :

N° de série :



République Algérienne Démocratique et Populaire

**Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la
Recherche Scientifique**

**UNIVERSITÉ HAMMA LAKHDAR D'EL OUED
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES**

Mémoire fin d'étude

MASTER ACADEMIQUE

Domaine: Mathématiques et Informatique

Filière: Mathématiques

Spécialité: Mathématiques fondamentales

Thème

**Sur L'Existence et L'Unicité de la
Solution des Équations Différentielles
D'ordre Fractionnaire**

Présenté par: KAIDAR Dalal
SAYADI Sara

Soutenu devant le jury composé de

BELOUL Said	MCB	Président	Univ. d'El-Oued
MEFTAH Safia	MCB	Examineur	Univ. d'El-Oued
NISSE Khadidja	MCB	Encadreur	Univ. d'El-Oued

Année universitaire 2016 – 2017

Remerciements

Nous tenons tout d'abord à remercier **Allah** le tout puissant et miséricordieux, qui nous a donné la force et la patience d'accomplir ce modeste travail.

En second lieu, nous tenons à exprimer ici notre vive gratitude, notre immense respect à notre encadreur le professeur **Nisse Khadidja** pour sa patience, sa disponibilité, ses judicieux conseils, ses hautes qualités morales et scientifiques et d'avoir fait le nécessaire pour faciliter autant que possible tout au long de ce travail.

Nos vifs remerciements vont également aux membres du jury pour l'intérêt qu'ils ont porté à notre recherche en acceptant d'examiner notre travail Et de l'enrichir par leurs propositions.

Un grand merci à **Mr.Akmoum Oussama** pour les conseils concernant la base de données, ils ont grandement facilité notre travail.

Nous remercions nos parents et nos familles pour leurs soutiens moraux et ces encouragements pendant toutes ces années. Nous exprimons également notre reconnaissance envers les amis et collègues qui nous ont apporté leur support moral et intellectuel tout au long de notre démarche.

Enfin, nous tenons à remercier tous ceux qui ont contribué, de près ou de loin, à l'aboutissement de ce mémoire .

Notations

- $L^p([a, b])$ *L'espace des fonctions $p^{\text{ème}}$ intégrables sur $[a, b]$.*
- $L^\infty([a, b])$ *L'espace des fonctions essentiellement bornées sur $[a, b]$.*
- $C(X, Y)$ *L'espace des fonctions continues de X dans Y .*
- $C(I)$ *L'espace des fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$.*
- $\Gamma(\cdot)$ *La fonction Gamma d'Euler.*
- $B(\cdot, \cdot)$ *La fonction Bêta.*
- $E_{\alpha, \beta}(\cdot)$ *La fonction de Mittag-Leffler à deux paramètres.*
- $E_\alpha(\cdot)$ *La fonction de Mittag Leffler à un seul paramètre.*
- I^n *L'intégrale itéré d'ordre entier.*
- D^n *La dérivation d'ordre entier.*
- I_{a+}^α *L'intégrale fractionnaire au sens de Rimann-Liouville d'ordre α à droite.*
- I_{b-}^α *L'intégrale fractionnaire au sens de Rimann-Liouville d'ordre α à gauche.*
- ${}^R D_{a+}^\alpha$ *La dérivée fractionnaire au sens de Rimann-Liouville d'ordre α à droite.*
- ${}^R D_{a-}^\alpha$ *La dérivée fractionnaire au sens de Rimann-Liouville d'ordre α à gauche.*
- ${}^C D_{a+}^\alpha$ *La dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'ordre α à droite .*
- ${}^C D_{b-}^\alpha$ *La dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'ordre α à gauche .*

Table des matières

Remerciements	i
Notations	i
Introduction	1
1 Préliminaires	3
1.1 Espaces des fonctions et quelques propriétés	3
1.1.1 L'espace des fonctions intégrables	3
1.1.2 Espaces des fonctions continues	4
1.2 Fonctions spéciales liées à la dérivation fractionnaire	5
1.2.1 La fonction Gamma	5
1.2.2 La fonction Bêta	7
1.2.3 La fonction de Mittag-Leffler	8
1.3 Quelques théorèmes du point fixe	9
1.3.1 Rappel d'analyse fonctionnelle	9
1.3.2 Le principe de contraction de Banach	10
1.3.3 Le théorème du point fixe de Schauder	11
1.3.4 Le théorème du point fixe de Weissinger	11
2 Calcul fractionnaire et quelques résultats d'existence et d'unicité	12
2.1 Intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville	12
2.1.1 Définitions et exemples	12
2.1.2 Propriétés de l'intégrale fractionnaire	14
2.2 La dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville	16

2.2.1	Définitions et Exemples	16
2.2.2	Propriétés de la dérivation fractionnaire au sens de Rimann-Liouville	18
2.3	La dérivation fractionnaire au sens de Caputo	21
2.3.1	Définitions et Exemples	21
2.3.2	Propriétés de la dérivation fractionnaire au sens de Caputo	23
2.4	Relation entre la dérivée au sens de Rimann-Liouville et celle de Caputo	24
2.5	Equations différentielles fractionnaires de type Caputo dans l'espace des fonctions continues	26
2.5.1	Existence et unicité de la solution locale	27
2.5.2	Existence et unicité de la solution globale dans le cas $0 < \alpha < 1$	35
3	Un résultat d'existence et d'unicité pour une classe d'équations différentielles fractionnaires avec retard	39
3.1	Position du problème et l'équation intégrale équivalente	39
3.2	Le résultat de l'existence et l'unicité	41
3.2.1	Point fixe d'une classe d'opérateurs définis sur un espace de fonctions continues	41
3.2.2	Application à la résolution du problème (Q)	45
3.3	Exemple	47

Introduction

L'une des théories qui peut être considérée bien ancienne que nouvelle et qui gagne actuellement une popularité considérable parmi les chercheurs et les mathématiciens dans la science et en ingénierie est celle du calcul fractionnaire (la généralisation de la dérivation et l'intégration classique à un ordre non entier). De nombreux mathématiciens ont contribué au développement de la théorie du calcul fractionnaire jusqu'à la moitié du siècle passé, citons entre autres Laplace (1812), Fourier (1822), Liouville (1832-1873), Riemann(1847), Grünwald(1867-1872) (Voir [11]).

Ce travail est divisés en trois chapitres.

- Le premier chapitre est consacré aux notions de base et outils fonctionnels utilisés dans ce travail.
- Dans la première partie du deuxième chapitre, nous donnons les notions et les propriétés préliminaires liées aux deux plus importants approches de dérivation fractionnaire : l'approche de Riemann-Liouville et celle de Caputo. Nous exposons dans la deuxième partie, quelques résultats d'existence et d'unicité de la solution pour une classe d'équations différentielles fractionnaires modèle de type Caputo.

Les résultats sont basées sur quelques versions de la théorie du point fixe tels que Banach et Schauder (pour une existence locale) et l'approche des approximations succesives (pour l'extension de la solution).

- Dans le dernier chapitre, nous considérons un problème différentielle fractionnaire de type Caputo avec retard.

Nous prouvons le résultat d'existence et d'unicité de la solution sous une

condition de Lipschitz de rapports non constats. Ceci est en utilisant une norme équivalente permettant d'obtenir l'existence globale directement sans faire appel aux approximations successives ni des versions plus abstrait de la théorème du point fixe autre que celle de Banach non plus. En termine ce chapitre par un exemple illustratif.

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre, on donne quelques définitions et propriétés que nous utilisons dans la suite de ce travail.

1.1 Espaces des fonctions et quelques propriétés

1.1.1 L'espace des fonctions intégrables

Définition 1.1.1 ([11, 12, 2])

Soit $\Omega = [a, b]$ ($-\infty < a < b < +\infty$) un intervalle bornée de $\mathbb{R}$.

Pour $1 \leq p < \infty$, on désigne par $L^p(\Omega)$ l'espace des classes de fonctions réelles et mesurables de puissance $p^{\text{ième}}$ intégrables sur Ω , c'est-à-dire :

$$L^p(\Omega) = \{f : [a, b] \rightarrow \bar{\mathbb{R}} / f \text{ est mesurable et } \int_a^b |f(x)|^p dx < \infty\}. \quad (1.1)$$

Pour $p = \infty$ on désigne par L^∞ l'espace des classes de fonctions réelles, mesurables et bornées presque par tout. C'est-à-dire :

$$L^\infty(\Omega) = \{f : [a, b] \rightarrow \bar{\mathbb{R}} / f \text{ est mesurable et } \exists M \geq 0; |f(x)| \leq M \text{ p.p}\} \quad (1.2)$$

Proposition 1.1.1 ([10, 12])

Soit $\Omega = [a, b]$.

Pour $1 \leq p < \infty$, la fonction qui à tout $f \in L^p(\Omega)$ associe le nombre

$$\|f\|_{L^p} = \|f\|_p = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}. \quad (1.3)$$

est une norme sur $L^p(\Omega)$. Pour $p = \infty$, la fonction qui à tout $f \in L^p(\Omega)$ associe le nombre

$$\|f\|_{L^\infty} = \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} |f(x)| = \inf \{ M \geq 0; |f(x)| \leq M \text{ p.p sur } \Omega \}. \quad (1.4)$$

est une norme sur $L^\infty(\Omega)$.

Théorème 1.1.1 [2] (Fischer-Riesz)

Pour $1 \leq p < \infty$, l'espace $L^p(\Omega)$ muni de la norme (1.3) est un espace de Banach.

Pour $p = \infty$, l'espace $L^\infty(\Omega)$ muni de la norme (1.4) est un espace de Banach.

Théorème 1.1.2 ([11, 12]) (Inégalité de Hölder)

Soit $\Omega = [a, b]$, et soient p et q deux exposants conjugués (i.e. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$).

Si $f \in L^p(\Omega)$, $g \in L^q(\Omega)$, alors, $f.g \in L^1(\Omega)$ et

$$\int_a^b |f(x)g(x)| dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{1/p} \left(\int_a^b |g(x)|^q dx \right)^{1/q}. \quad (1.5)$$

Pour $p = q = 2$, l'inégalité (1.5) devient

$$\int |fg| dt \leq \left(\int |f|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int |g|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (1.6)$$

ce qu'on appelle l'inégalité de Cauchy-schwarz.

1.1.2 Espaces des fonctions continues

Définition 1.1.2 ([11])

Soit $\Omega = [a, b]$ ($-\infty \leq a < b \leq +\infty$) et soit $n \in \mathbb{N}$. On note par $C^n(\Omega)$ l'espace des fonctions réelles n fois continument dérivables sur Ω , muni de la norme

$$\|f\|_{C^n(\Omega)} = \sum_{k=0}^n \sup_{x \in [a, b]} |f^{(k)}(x)|. \quad (1.7)$$

Pour $n = 0$ on note $C^0([a, b])$ par $C([a, b])$ (l'espace des fonctions continues) et on note $\|\cdot\|_{C^0(\Omega)}$ par $\|\cdot\|_\infty$ c'est-à-dire :

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|. \quad (1.8)$$

Théorème 1.1.3 ([11, 4])

L'espace $C^n([a, b])$ muni de la norme (1.7) est un espace de Banach.

1.2 Fonctions spéciales liées à la dérivation fractionnaire

Dans cette section, nous présentons quelques fonctions qui constituent l'un des outils de base dans la théorie du calcul fractionnaire.

1.2.1 La fonction Gamma

La fonction Gamma prolonge naturellement la factoriel aux valeurs non entières à parties réelles positives.

Définition 1.2.1 [6]

Pour $x \in \mathbb{R}$ tel que $x > 0$ la fonction Gamma d'Euler est définie par l'intégrale suivante :

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt. \quad (1.9)$$

Remarque 1.2.1

L'intégrale (1.9) converge absolument sur le demi-plan réel où x est strictement positive (Voir [6]).

Propriétés de la fonction Gamma

Quelques propriétés de la fonction $\Gamma(x)$ sont données par le théorème suivant :

Théorème 1.2.1 [6]

La fonction Gamma vérifie les propriétés suivantes :

1 Pour tout $x \in \mathbb{R}$ avec $x > 0$:

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x). \quad (1.10)$$

En particulier, pour $n \in \mathbb{N}$

$$\Gamma(n+1) = n!. \quad (1.11)$$

2 $\Gamma(x)$ est une fonction monotone et strictement décroissante pour $0 < x \leq 1$ et monotone et strictement croissante pour $x \geq 2$, donc, elle est convexe pour $x \in [0, +\infty[$

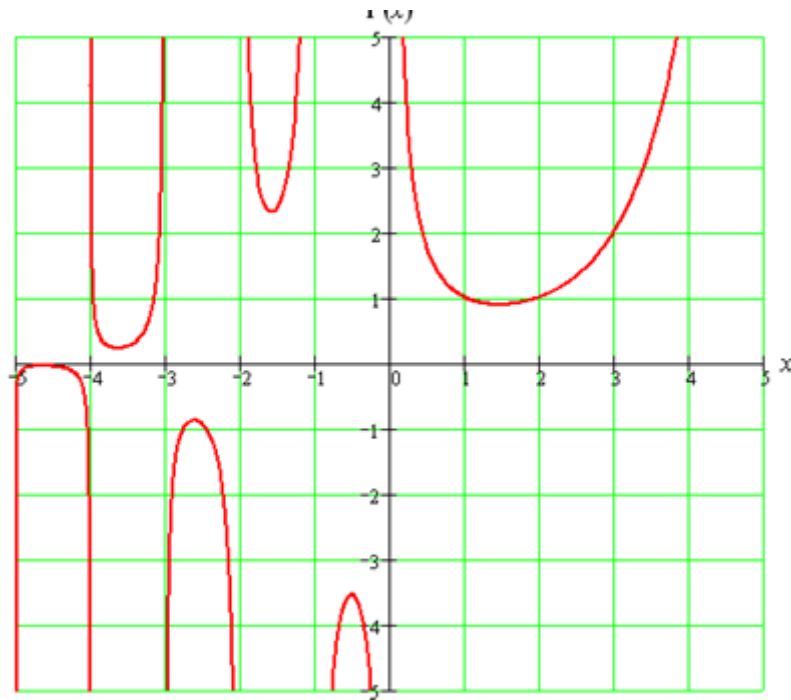


FIGURE 1.1 – le graphe de la fonction Gamma

Exemple 1.2.1 [6]

1 : $\Gamma(0^+) = +\infty$,

$$2 : \Gamma(1) = \Gamma(2) = 1,$$

$$3 : \Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi},$$

$$4 : \Gamma(n + \frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^n} (2n - 1)!!, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

1.2.2 La fonction Bêta

Définition 1.2.2 [6]

Pour $z, w \in \mathbb{R}$ tels que $z > 0$ et $w > 0$, la fonction Bêta est la fonction définie par :

$$B(z, w) = \int_0^1 t^{z-1} (1-t)^{w-1} dt. \quad (1.12)$$

Remarque 1.2.2

La relation entre la fonction Bêta d'Euler et Gamma d'Euler est donnée par :

$$B(z, w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}, \quad (z > 0, w > 0). \quad (1.13)$$

Propriétés

Voici quelques propriétés de la fonction Bêta :

1 La fonction Bêta peut aussi être définie par

$$B(z, w) = 2 \int_0^{\pi/2} \sin^{2z-1}(\theta) \cos^{2w-1}(\theta) d\theta.$$

2 Bêta est une fonction symétrique :

$$B(z, w) = B(w, z).$$

3 Dérivation :

$$\frac{\partial}{\partial z} B(z, w) = B(z, w) \left(\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} - \frac{\Gamma'(z+w)}{\Gamma(z+w)} \right). \quad (1.14)$$

1.2.3 La fonction de Mittag-Leffler

La fonction de Mittag-Leffler prolonge naturellement l'exponentielle usuelle.

Définition 1.2.3 ([4])

Pour $x \in \mathbb{R}$ et $\alpha > 0$, on appelle fonction de Mittag-Leffler la fonction définie par

$$E_\alpha(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}. \quad (1.15)$$

On remarque que E_1 est l'exponentielle usuelle :

$$E_1(x) = \exp(x).$$

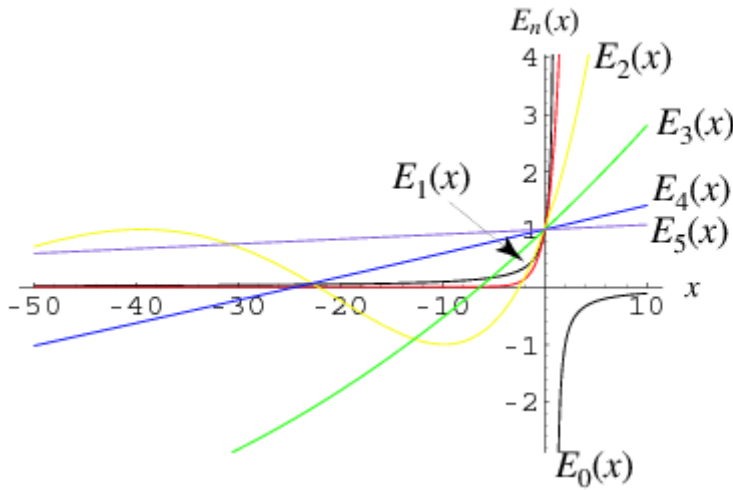


FIGURE 1.2 – le graphe de la fonction de Mittag Leffler

Comme on a déjà mentionner que la fonction de Mittag-Leffler généralisée (à deux paramètres) joue également un rôle très important dans la théorie du calcul fractionnaire. Cette fonction pour $x \in \mathbb{R}$ et $\alpha, \beta > 0$ est définie par :

$$E_{\alpha, \beta}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(k\alpha + \beta)}. \quad (1.16)$$

Remarque 1.2.3

La série qui figure dans (1.16) est convergente pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $\alpha, \beta > 0$, (Voir [10], Theorem 4.1), ce qui rend la fonction $E_{\alpha, \beta}(x)$ (en particulier $E_\alpha(x)$) bien définie.

Exemple 1.2.2

Voici les fonctions de Mittag-Leffler pour quelques valeurs spéciales de α et β .

$$E_{1,1}(x) = e^x,$$

$$E_{2,1}(x^2) = \cosh(x),$$

$$E_{2,2}(x^2) = \frac{\sinh(x)}{x},$$

$$E_{\alpha,1}(x) = E_\alpha(x).$$

1.3 Quelques théorèmes du point fixe

La résolution des équations différentielles fractionnaires est fondée sur la théorie du point fixe. Avant de présenter quelques versions de cette théorie, on a besoin de donner certaines définitions liées à l'analyse fonctionnelle.

1.3.1 Rappel d'analyse fonctionnelle

On considère dans tout ce qui suit X et Y des espaces de Banach munis de la norme $\|\cdot\|_X$ et $\|\cdot\|_Y$ respectivement.

On désigne par $C(X, Y)$ l'espace des fonctions continues de X dans Y muni de la norme uniforme :

$$\forall f \in C(X, Y) : \quad \|f\|_\infty = \sup_{x \in X} \|f(x)\|_Y. \quad (1.17)$$

Définition 1.3.1 ([4])

Soit M un sous-ensemble de $C(X, Y)$.

- On dit que M est équicontinue en $u \in X$ si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tels que pour tout $f \in M$ et tout $v \in X$:

Si

$$\|u - v\|_X < \eta$$

on a

$$\|f(u) - f(v)\|_Y < \varepsilon$$

-
- On dit que M est équicontinue sur X , si M est équicontinue en tout $u \in X$.

Cas particulier, si $X = [a, b]$, $Y = \mathbb{R}$ muni de la norme usuelle (1.8), un sous ensemble M de $C([a, b])$ est équicontinu si :

Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $f \in M$ et tout $x, x^* \in [a, b]$

$$\text{si } |x - x^*| < \delta \quad \text{on a} \quad |f(x) - f(x^*)| < \varepsilon.$$

Définition 1.3.2 ([4])

Un sous ensemble M de $C([a, b])$ muni de la norme usuelle (1.8) est uniformément bornée s'il existe une constante $C > 0$ tel que :

$$\|f(x)\|_{\infty} \leq C \text{ pour tout } f \in M ;$$

Le théorème suivant donne une caractérisation des parties relativement compactes dans l'espace $C([a, b])$ muni de la norme (1.8).

Théorème 1.3.1 ([11, 4]) (Arzelà-Ascoli)

Soit F un sous ensemble de $C([a, b])$ muni de la norme de sup ; alors, F est relativement compacte dans $C([a, b])$ si les conditions suivantes sont vérifiées :

- L'ensemble F est uniformément borné.
- F est équicontinu.

1.3.2 Le principe de contraction de Banach

Le résultat suivant (dû à Banach) est le principe de base dans la théorie du point fixe.

Théorème 1.3.2 ([4]) (de Banach)

Soient X un espace de Banach muni de la norme $\|\cdot\|_X$, et $A : X \rightarrow X$ un opérateur contractant c-à-d :

$$\exists 0 \leq k < 1 : \quad \|Ax - Ay\|_X \leq k\|x - y\|_X, \quad \forall x, y \in X. \quad (1.18)$$

Alors, A admet un point fixe unique, i.e

$$\exists ! u \in X \text{ tel que } Au = u.$$

1.3.3 Le théorème du point fixe de Schauder

Le théorème du point fixe suivant détermine seulement l'existence d'un point fixe.

Théorème 1.3.3 ([4])(de Schauder)

Soit (E, d) un espace métrique complet, soit U une partie convexe et fermée de E , et soit $T : U \rightarrow U$ une application telle que l'ensemble $\{Tu : u \in U\}$ est relativement compact dans E . Alors, T possède au moins un point fixe.

1.3.4 Le théorème du point fixe de Weissinger

Le théorème suivant (donné par [10]) est une généralisation du Théorème 1.3.2 (Voir Remarque 1.3.1).

Théorème 1.3.4 ([4])(de Weissinger)

Soit (U, d) un espace métrique non vide et complet et soit $\alpha_j \geq 0$ pour tout $j \in \mathbb{N}$ tels que $\sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j$ converge. De plus soit $A : U \rightarrow U$ un opérateur satisfaisant l'inégalité :

$$d(A^j u, A^j v) \leq \alpha_j d(u, v). \quad (1.19)$$

Pour tout $j \in \mathbb{N}$ et tout $u, v \in U$. Alors, A admet un point fixe unique u^ et pour tout $u_0 \in U$ la suite $(A^j u_0)_{j=0}^{\infty}$ converge vers ce point fixe.*

Remarque 1.3.1

Sous les hypothèses du Théorème 1.3.4, on peut vérifier facilement par récurrence que pour tout $j \in \mathbb{N}$, on a :

$$\|A^j u - A^j v\|_U \leq k^j \|u - v\|_U. \quad (1.20)$$

Donc (1.19) est vérifié avec $\alpha_j = k^j$, de plus $\sum_{j=0}^{\infty} k^j$ est convergente puisque $0 \leq k < 1$.

Chapitre 2

Calcul fractionnaire et quelques résultats d'existence et d'unicité

Le calcul fractionnaire est fondé sur la généralisation de l'intégration et la dérivation classique (d'ordre entier) à un ordre non entier. Il y a plusieurs types de dérivation fractionnaire et parmi les plus importants nous citons l'approche de Riemann-Liouville et celle de Caputo. La présentation des notions et les importantes propriétés liées à ces deux approches sera l'objectif de la première partie de ce chapitre.

Nous donnons ensuite, quelques résultats d'existence et d'unicité de la solution pour des équations d'ordre fractionnaire de type Caputo.

2.1 Intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville

2.1.1 Définitions et exemples

Définition 2.1.1 [11, 10, 4]

Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre α (à gauche) d'une fonction f est définie par :

$$I_{a+}^{\alpha} f(t) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds. \quad (-\infty \leq a < t < \infty) \quad (2.1)$$

Pour vue que le coté de droite dans (2.1) existe presque par tout.

Remarque 2.1.1

Pour $\alpha = 0$, l'équation (2.1) devient :

$$I_a^0 := I \text{ est l'opérateur identité.}$$

Définition 2.1.2 ([11])

Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre α (à droite) d'une fonction f est définie par :

$$I_b^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^b (s-t)^{(\alpha-1)} f(s) ds \quad b \in]-\infty, +\infty[. \quad (2.2)$$

pour vue que le coté de droite dans (2.2) existe presque par tout.

Exemple 2.1.1

Considérons la fonction $f(x) = (x-a)^\beta$. Alors

$$I_a^\alpha (x-a)^\beta = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} (t-a)^\beta dt.$$

Pour évaluer cette intégrale on pose le changement de variable $t = a + (x-a)\tau$, qui donne

$$I_a^\alpha (x-a)^\beta = \frac{(x-a)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-\tau)^{\alpha-1} \tau^\beta d\tau \quad (2.3)$$

Vûe la relation (1.12), on a

$$I_a^\alpha (x-a)^\beta = \frac{B(\alpha, \beta+1)}{\Gamma(\alpha)} (x-a)^{\alpha+\beta} \quad (2.4)$$

en utilisant (1.13), on arrive à

$$I_a^\alpha (x-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1+\alpha)} (x-a)^{\beta+\alpha} \quad (2.5)$$

on voit bien que c'est une généralisation du cas $\alpha = 1$ où on a

$$\begin{aligned} I_a^1 (x-a)^\beta &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+2)} (x-a)^{\beta+1} \\ &= \frac{(x-a)^{\beta+1}}{\beta+1}. \end{aligned}$$

Ceci est en tenant compte de la relation (1.10).

Remarque 2.1.2 ([4])

Quand $\alpha > 1$ il est evident que $I^\alpha f(t)$ existe pour tout $t \in [0, T]$ car l'intégrand est le produit d'une fonction intégrable f et une fonction continue $(x - \cdot)^{\alpha-1}$. Mais si $0 < \alpha < 1$ l'intégrale existe presque pour tout $t \in [0, T]$. (Voir Théorème 2.1.1, [4])

2.1.2 Propriétés de l'intégrale fractionnaire

Théorème 2.1.1 ([4])

Si $f \in L^1([a, b])$ et $\alpha > 0$, alors, $I_a^\alpha f(t)$ existe presque par tout et on a

$$I_a^\alpha f \in L^1([a, b]). \quad (2.6)$$

Preuve.

Soit $f \in L^1([a, b])$, on a :

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(t-s) \varphi_2(s) ds$$

avec

$$\varphi_1(u) = \begin{cases} \frac{u^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} , & \text{pour } 0 < u \leq b-a , \\ 0 , & \text{pour } u \in \mathbb{R} \setminus (0, b-a). \end{cases}$$

et

$$\varphi_2(u) = \begin{cases} f(u) , & a < u \leq b, \\ 0 , & \mathbb{R} \setminus [a, b]. \end{cases}$$

Par construction, $\varphi_j \in L^1(\mathbb{R})$ pour $j = 1, 2$, et on a : $I_a^\alpha f \in L^1([a, b])$. ■

Théorème 2.1.2 ([4, 10]) (La propriété de semi-groupe)

Soit $\alpha, \beta > 0$, alors pour toute fonction $f \in L^1([a, b])$, la relation :

$$I_a^\alpha [I_a^\beta f(t)] = I_a^{\alpha+\beta} f(t) = I_a^\beta [I_a^\alpha f(t)]. \quad (2.7)$$

est vraie pour presque tout $t \in [a, b]$.

Preuve.

$$I_{a+}^{\alpha}[I_{a+}^{\beta}f(t)] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} \int_a^s (s-\tau)^{\beta-1} f(\tau) d\tau ds. \quad (2.8)$$

Où $f \in L^1([a, b])$

D'après le Théorème (2.1.1) les intégrales existent et par le théorème de Fubini on obtient

$$\begin{aligned} I_{a+}^{\alpha}[I_{a+}^{\beta}f(t)] &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t \int_{\tau}^t (t-s)^{\alpha-1} (s-\tau)^{\beta-1} f(\tau) ds d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t f(\tau) \int_{\tau}^t (t-s)^{\alpha-1} (s-\tau)^{\beta-1} ds d\tau. \end{aligned}$$

En utilisant le changement de variable $s = \tau + u(t - \tau)$, on obtient

$$\begin{aligned} I_{a+}^{\alpha}[I_{a+}^{\beta}f(t)] &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t f(\tau) (t-\tau)^{\alpha+\beta-1} d\tau \int_0^1 (1-u)^{\alpha-1} u^{\beta-1} du \\ &= \frac{B(\alpha, \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t f(\tau) (t-\tau)^{\alpha+\beta-1} d\tau. \end{aligned}$$

D'après la relation (1.13) on trouve

$$\begin{aligned} I_a^{\alpha}[I_a^{\beta}f(t)] &= \frac{1}{\Gamma(\alpha + \beta)} \int_a^t f(\tau) (t-\tau)^{\alpha+\beta-1} d\tau \\ &= I^{\alpha+\beta}f(t). \end{aligned}$$

De même manière si on substitue α par β on trouve

$$I_a^{\beta}[I_a^{\alpha}f(t)] = I^{\alpha+\beta}f(t)$$

est vraie Presque pour tout $t \in [a, b]$, où B désigne la fonction Bêta . ■

Remarque 2.1.3 (Voir ([10]))

Si $f \in C([a, b])$ ou $\alpha + \beta \geq 1$, la relation (2.7) est vraie pour tout $t \in [a, b]$.

Lemme 2.1.1 ([11])

Pour toute fonction $f \in C([a, b])$, l'intégrale fractionnaire possède la propriété de la linéarité .i.e.

$$I^\alpha(\lambda f(t) + g(t)) = \lambda I^\alpha f(t) + I^\alpha g(t) \quad \alpha \in \mathbb{R}_+, \lambda \in \mathbb{C}. \quad (2.9)$$

Preuve.

$$\begin{aligned} I_a^\alpha[\lambda f(t) + g(t)] &:= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} [\lambda f(s) + g(s)] ds, \\ &= \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} g(s) ds, \\ &= \lambda I_a^\alpha f(t) + I_a^\alpha g(t). \end{aligned}$$

■

2.2 La dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

2.2.1 Définitions et Exemples

Définition 2.2.1 [11, 10, 4]

Soit f une fonction intégrable sur $[a, b]$, alors pour $\alpha \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}^*$ tels que $n - 1 \leq \alpha \leq n$. La dérivée fractionnaire d'ordre α d'une fonction f au sens de Riemann-Liouville à gauche et à droite est définie par :

$${}^R D_{a+}^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau. \quad (2.10)$$

et

$${}^R D_{b-}^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(-\frac{d^n}{dt^n}\right) \int_t^b (\tau-t)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau. \quad (2.11)$$

respectivement.

Remarque 2.2.1

On tenant compte de la définition (2.1), on a :

$${}^R D_{a+}^{\alpha} f(t) = D^n (I_{a+}^{n-\alpha} f(t)), \quad (2.12)$$

et

$${}^R D_{b-}^{\alpha} f(t) = (-D)^n (I_{b-}^{n-\alpha} f(t)). \quad (2.13)$$

En particulier pour $0 < \alpha < 1$, les égalités (2.12) et (2.13) deviennent :

$${}^R D_{a+}^{\alpha} f(t) = D^1 (I_{a+}^{1-\alpha} f(t)), \quad (2.14)$$

et

$${}^R D_{b-}^{\alpha} f(t) = -D^1 (I_{b-}^{1-\alpha} f(t)). \quad (2.15)$$

respectivement.

Où $D^n = \frac{d^n}{dt^n}$ est l'opérateur de dérivation classique (d'ordre entier).

Exemple 2.2.1

1- La dérivée de $f(t) = (t - a)^{\beta}$ au sens de Riemann-Liouville

Soit α non entier et $0 \leq n - 1 < \alpha < n$ et $\beta > -1$, alors on a :

$${}^R D^{\alpha} (t - a)^{\beta} = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int (t - \tau)^{n-\alpha-1} (\tau - a)^{\beta} d\tau. \quad (2.16)$$

En faisant le changement de variable $\tau = a + s(t - a)$, on aura :

$$\begin{aligned}
{}^R D^\alpha (t-a)^\beta &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} (t-a)^{n+\beta-\alpha} \int_a^t (1-s)^{n-\alpha-1} s^\beta ds \\
&= \frac{\Gamma(n+\beta-\alpha+1) B(n-\alpha, \beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)} (t-a)^{\beta-\alpha} \\
&= \frac{\Gamma(n+\beta-\alpha+1) \Gamma(n-\alpha) \Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha) \Gamma(\beta-\alpha+1) \Gamma(n+\beta-\alpha+1)} (t-a)^{\beta-\alpha} \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} (t-a)^{\beta-\alpha}.
\end{aligned}$$

Alors,

$${}^R D^\alpha (t-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} (t-a)^{\beta-\alpha} \quad (2.17)$$

pour $\alpha = 0.5$ et $\beta = 0.5$ on a :

$${}^R D^{0.5} t^{0.5} = \frac{\Gamma(1.5)}{\Gamma(1)} = \Gamma(1.5). \quad (2.18)$$

2- La dérivée non entière d'une fonction constante au sens de Riemann-Liouville

En générale la dérivée non entière d'une fonction constante au sens de Riemann-Liouville n'est pas nulle ni constante, mais on a

$${}^R D^\alpha C = \frac{C}{\Gamma(1-\alpha)} (t-a)^{-\alpha}. \quad (2.19)$$

Pour la démonstration il suffit de prendre $\beta = 0$ dans (2.17).

2.2.2 Propriétés de la dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Théorème 2.2.1 ([11])

Soient f et g deux fonctions dont les dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville

existent, pour λ et $\mu \in \mathbb{R}$, alors : ${}^R D^\alpha(\lambda f + \mu g)$ existe, et on a :

$${}^R D^\alpha(\lambda f + \mu g)(t) = \lambda {}^R D^\alpha f(t) + \mu {}^R D^\alpha g(t) \quad (2.20)$$

Preuve.

Pour la démonstration on va utiliser la linéarité de l'intégrale fractionnaire (2.9) et la linéarité de la dérivation classique (D^n).

$$\begin{aligned} {}^R D^\alpha(\lambda f + \mu g)(t) &:= D^n I^{n-\alpha}(\lambda f + \mu g)(t) \\ &= D^n(\lambda I^{n-\alpha} f(t) + \mu I^{n-\alpha} g(t)) \\ &= \lambda D^n I^{n-\alpha} f(t) + \mu D^n I^{n-\alpha} g(t) \\ &= \lambda {}^R D^\alpha f(t) + \mu {}^R D^\alpha g(t). \end{aligned}$$

■

Lemme 2.2.1 ([4])

Soit $n = [\alpha] + 1$ et f une fonction vérifiant ${}^R D^\alpha f = 0$. Alors,

$$f(t) = \sum_{j=0}^{n-1} c_j \frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j+1+\alpha-n)} (t-a)^{j+\alpha-n}. \quad (2.21)$$

Où les c_j sont des constantes quelconques.

Preuve. d'après la définition (2.12) on a

$$({}^R D_a^\alpha f)(t) = D^n[I^{n-\alpha} f](t) = 0$$

Alors, on a d'abord

$$[I^{n-\alpha} f](t) = \sum_{j=0}^{n-1} c_j (t-a)^j.$$

et par l'application de I_a^α on obtient

$$[I^n f](t) = \sum_{j=0}^{n-1} c_j I^\alpha[(t-a)^j].$$

En tenant compte de la relation (2.5), on aura

$$[I^n f](t) = \sum_{j=0}^{n-1} c_j \frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j+1+\alpha)} (t-a)^{j+\alpha}$$

Ensuite en utilisant la dérivation classique et le fait que

$$D^n(t-a)^\lambda = \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+1-n)} (t-a)^{\lambda-n}$$

on trouve

$$f(t) = \sum_{j=0}^{n-1} c_j \frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j+1+\alpha-n)} (t-a)^{j+\alpha-n}.$$

■

Théorème 2.2.2 ([4])

Soient $\alpha, \beta > 0$ et $n = [\alpha] + 1$, $m = [\beta] + 1$ tel que $(n, m \in \mathbb{N}^*)$, alors, :

1) Si $\alpha > \beta > 0$, alors pour $f \in L^1([a, b])$ l'égalité :

$${}^R D^\beta(I^\alpha f)(t) = I^{\alpha-\beta} f(t). \quad (2.22)$$

est vrai presque par tout sur $[a, b]$.

2) S'il exist une fonction $\varphi \in L^1([a, b])$ tel que $f = I^\alpha \varphi$ alors :

$$I^\alpha({}^R D^\alpha f(t)) = f(t). \quad (2.23)$$

est vrai presque pour tout $t \in [a, b]$.

Preuve.

1) Pour $\alpha > \beta > 0$, alors $n \geq m$, on a :

$$\begin{aligned} {}^R D^\beta(I^\alpha f)(t) &= D^n I^{n-\beta}(I^\alpha f)(t) \\ &= D^n(I^{n+\alpha-\beta} f)(t) \\ &= D^n I^n(I^{\alpha-\beta} f)(t) \end{aligned}$$

d'où

$${}^R D^\beta (I^\alpha f)(t) = I^{\alpha-\beta} f(t). \quad (2.24)$$

2) Si on substitue β par α dans (2.24), on obtient

$$I^\alpha ({}^R D^\alpha f(t)) = I^\alpha ({}^R D^\alpha I^\alpha \varphi(t)) = I^\alpha \varphi(t) = f(t).$$

■

Proposition 2.2.1

La dérivation fractionnaire et la dérivation classique (d'ordre entière) ne commutent que si : $f^{(k)}(a) = 0$ pour tout $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$.

$$\frac{d^n}{dt^n} ({}^R D^\alpha f(t)) = {}^R D^{n+\alpha} f(t), \quad (2.25)$$

mais

$${}^R D^\alpha \left(\frac{d^n}{dt^n} f(t) \right) = {}^R D^{n+\alpha} f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-\alpha-n}}{\Gamma(k-\alpha-n+1)}. \quad (2.26)$$

2.3 La dérivation fractionnaire au sens de Caputo

2.3.1 Définitions et Exemples

Définition 2.3.1 [11, 10, 4]

Soit $\alpha > 0$ avec $n-1 < \alpha < n$, ($n \in \mathbb{N}^*$) et f une fonction telle que $\frac{d^n}{dt^n} f \in L_1([a, b])$.

La dérivée fractionnaire d'ordre α de f au sens de Caputo à gauche et à droite sont définies par

$${}^c D_{a+}^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau) d\tau, \quad (2.27)$$

et

$${}^c D_{b-}^\alpha f(t) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \int_t^b (\tau-t)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau) d\tau. \quad (2.28)$$

respectivement.

Remarque 2.3.1

On tenant compte de la définition (2.1), on a :

$${}^C D_{a+}^{\alpha} f(t) := (I_{a+}^{n-\alpha} D^n f)(t), \quad (2.29)$$

et

$${}^C D_{b-}^{\alpha} f(t) := (-1)^n (I_{b-}^{n-\alpha} D^n f)(t). \quad (2.30)$$

En particulier, si $0 < \alpha < 1$ on a

$${}^C D_{a+}^{\alpha} f(t) := (I_{a+}^{1-\alpha} D^1 f)(t), \quad (2.31)$$

et

$${}^C D_{b-}^{\alpha} f(t) := (-1)(I_{b-}^{1-\alpha} D^1 f)(t), \quad (2.32)$$

où

$$D^n = \frac{d^n}{dt^n}$$

.

Exemple 2.3.1

1. **La dérivée d'une fonction constante au sens de Caputo.**

La dérivée d'une fonction constante au sens de Caputo est nulle

$${}^C D^{\alpha} C := 0. \quad (2.33)$$

2. **La dérivée de $f(t) = (t - a)^{\beta}$ au sens de Caputo.**

Soit α un entier et $0 \leq n - 1 < \alpha < n$ avec $\beta > n - 1$, alors, on a

$$f^{(n)}(t) = \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta - n + 1)} (t - a)^{\beta - n}, \quad (2.34)$$

d'où

$${}^C D^{\alpha} (t - a)^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(n - \alpha) \Gamma(\beta - n + 1)} \int_a^t (t - \tau)^{n - \alpha - 1} (\tau - a)^{\beta - n} d\tau, \quad (2.35)$$

En effectuant le changement de variable $\tau = a + s(t - a)$, on obtient

$$\begin{aligned}
{}^C D^\alpha (t - a)^\beta &= \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(n - \alpha)\Gamma(\beta - n + 1)} \int_a^t (t - \tau)^{n - \alpha - 1} (\tau - a)^{\beta - n} d\tau \\
&= \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(n - \alpha)\Gamma(\beta - n + 1)} (t - a)^{\beta - \alpha} \int_a^1 (1 - s)^{n - \alpha - 1} s^{\beta - n} ds \\
&= \frac{\Gamma(\beta + 1)B(n - \alpha, \beta - n + 1)}{\Gamma(n - \alpha)\Gamma(\beta - n + 1)} (t - a)^{\beta - \alpha} \\
&= \frac{\Gamma(\beta + 1)\Gamma(n - \alpha)\Gamma(\beta - n + 1)}{\Gamma(n - \alpha)\Gamma(\beta - n + 1)\Gamma(\beta - \alpha + 1)} (t - a)^{\beta - \alpha} \\
&= \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta - \alpha + 1)} (t - a)^{\beta - \alpha}
\end{aligned}$$

2.3.2 Propriétés de la dérivation fractionnaire au sens de Caputo

Théorème 2.3.1 [11, 10, 4])

Soit $\alpha > 0$ et $n = [\alpha] + 1$ tel que $n \in \mathbb{N}^*$ alors, les égalités suivantes

1 :

$${}^C D^\alpha I_a^\alpha f = f. \quad (2.36)$$

2 :

$$I_a^\alpha ({}^C D^\alpha f(t)) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t - a)^k}{k!}. \quad (2.37)$$

sont vrais presque pour tout $t \in [a, b]$.

Preuve.

1 : Par (2.29) et l'utilisation de la propriété de semi-groupe (2.7), on trouve

$$\left({}^C D^\alpha I_a^\alpha f\right)(t) := \left(I_a^{n-\alpha} D^n I_a^\alpha f\right)(t) = I_a^0 f.$$

2 :

$$\left(I_a^\alpha ({}^C D^\alpha f)\right)(t) := \left(I_a^\alpha I_a^{n-\alpha} D^n\right) f(t),$$

d'après la propriété (2.7), on a

$$\left(I_a^\alpha I_a^{n-\alpha} D^n f\right)(t) = I_a^\alpha I_a^n I_a^{-\alpha} D^n f(t) \quad (2.38)$$

$$(2.39)$$

$$= I_a^n D^n f(t), \quad (2.40)$$

et comme,

$$\left(I_a^n D^n f\right)(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k, \quad (2.41)$$

on trouve

$$I_a^\alpha ({}^C D^\alpha f(t)) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k \quad (2.42)$$

Donc l'opérateur de dérivation de Caputo est un inverse à gauche de l'opérateur d'intégration fractionnaire mais il n'est pas un inverse à droite. ■

Théorème 2.3.2

Soient f et g deux fonctions dont les dérivées fractionnaires de Caputo existent, pour λ et $\mu \in \mathbb{R}$, alors : ${}^C D^\alpha(\lambda f + \mu g)$ existe, et on a :

$${}^C D^\alpha(\lambda f(t) + \mu g(t)) = \lambda {}^C D^\alpha f(t) + \mu {}^C D^\alpha g(t). \quad (2.43)$$

2.4 Relation entre la dérivée au sens de Riemann-Liouville et celle de Caputo

Théorème 2.4.1 [4, 11, 10]

Soit $a > 0$ avec $n-1 < \alpha < n$, ($n \in \mathbb{N}^$), supposons que f est une fonction telle*

que ${}^C D_a^\alpha f(t)$ et ${}^R D_a^\alpha f(t)$ existent, alors,

$${}^C D_a^\alpha f(t) = {}^R D_a^\alpha (f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} f^{(k)}(a)). \quad (2.44)$$

Preuve.

le développement de Taylor en a de la fonction f est

$$\begin{aligned} f(t) &= f(a) + t f'(a) + \frac{t^2}{2!} f''(a) + \cdots + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + R_{n-1}, \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t-a)^k}{\Gamma(k+1)} f^{(k)}(a) + R_{n-1}. \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} R_{n-1} &= \int_a^t \frac{f^{(n)}(\tau)(t-\tau)^{n-1}}{(n-1)!} d\tau, \\ &= \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^t f^{(n)}(\tau)(t-\tau)^{n-1} d\tau, \\ &= I^n f^{(n)}(t). \end{aligned} \quad (2.45)$$

Par l'utilisation de la Propriété de la linéarité de l'opérateur d'intégration fractionnaire de Riemann-Liouville (2.9), on a :

$$\begin{aligned} {}^R D_a^\alpha f(t) &= {}^R D_a^\alpha \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t-a)^k}{\Gamma(k+1)} f^{(k)}(a) + R_{n-1} \right), \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{{}^R D_a^\alpha (t-a)^k}{\Gamma(k+1)} f^{(k)}(a) + {}^R D_a^\alpha R_{n-1}. \end{aligned}$$

D'après (2.45), on trouve

$${}^R D_a^\alpha f(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-\alpha+1)} \frac{(t-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k+1)} f^{(k)}(a) + {}^R D_a^\alpha I^n f^{(n)}(t),$$

en utilisant (2.12) et (2.7), on aura

$${}^R D_a^\alpha f(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} f^{(k)}(a) + I^{n-\alpha} f^{(n)}(t),$$

et par la définition (2.27)

$${}^R D_a^\alpha f(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} f^{(k)}(a) + {}^C D_a^\alpha f(t).$$

C'est à dire

$${}^C D_a^\alpha f(t) = {}^R D_a^\alpha f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} f^{(k)}(a). \quad (2.46)$$

■

Remarque 2.4.1

1) Dans la relation (2.46), si $f^{(k)}(a) = 0$ pour $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$, on déduit que :

$${}^C D_a^\alpha f(t) = {}^R D_a^\alpha f(t).$$

2) La relation (2.44) peut aussi s'écrire sous la forme

$${}^C D_a^\alpha f = {}^R D_a^\alpha \left[f - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right]. \quad (2.47)$$

Ce qui signifie que la dérivation fractionnaire au sens de Caputo n'est autre que la dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville du reste dans le développement de Taylor de f .

2.5 Equations différentielles fractionnaires de type Caputo dans l'espace des fonctions continues

Nous présentons dans cette section quelques résultats d'existence et d'unicité de la solution pour des équations différentielles de type Caputo.

Ces résultats ainsi que d'autre variantes dans des espaces fonctionnels différents (espace des fonctions intégrables, d'espaces avec poids), peuvent être trouvées dans [11, 10].

Nous adaptons dans ce paragraphe et dans tout ce qui suit les notations I^α , ${}^C D^\alpha$ et ${}^R D^\alpha$ au lieu de I_0^α , ${}^C D_0^\alpha$ et ${}^R D_0^\alpha$ respectivement. Le modèle d'équation différentielle

d'ordre fractionnaire $\alpha > 0$ où $\alpha \notin \mathbb{N}$ sur un intervalle fini $[0, T] \subset \mathbb{R}$ est de la forme :

$$\begin{cases} {}^C D^\alpha y(t) = f(t, y(t)) & t \in [0, T], \\ y^k(0) = y_0^{(k)} & k = 0, 1, \dots, n-1. \end{cases} \quad (2.48)$$

Où $n = [\alpha] + 1$.

2.5.1 Existence et unicité de la solution locale

Le lemme suivant fournit l'équivalence entre le problème (2.48) et l'équation intégrale de Volterra correspondante.

Lemme 2.5.1 [11, 4]

Soit $\alpha > 0$ et $f : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

Une fonction $y \in C([0, T])$ est une solution de problème à valeurs initiales (2.48) si et seulement si y est une solution de l'équation intégrale de Volterra de seconde espèce

$$y(t) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{t^j}{j!} y_0^j + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, y(s)) ds. \quad (2.49)$$

Preuve.

Premièrement, on suppose que y est une solution de (2.49). Alors, on peut écrire cette équation sous la forme réduite :

$$y(t) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{t^j}{j!} y_0^j + I^\alpha f(., y(.))(t).$$

tel que

$$I^\alpha f(., y(.))(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, y(s)) ds.$$

Pour $n-1 < \alpha \leq n$, on a

$$y(t) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{t^j}{j!} y_0^j = I^\alpha f(., y(.))(t).$$

En appliquant l'opérateur de différentiation ${}^R D^\alpha$ défini par (2.10) sur les deux cotés de cette relation on aura :

$${}^R D^\alpha(y(t) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{t^j}{j!} y_0^j) = {}^R D^\alpha I^\alpha f(., y(.))(t).$$

Et d'après (2.23), on obtient immédiatement

$${}^C D^\alpha y(t) = f(t, y(t))$$

Maintenant, on montre que l'équation intégrale (2.49) vérifie les conditions initiales. En appliquant l'opérateur D^k , pour $0 \leq k \leq n-1$ fixé sur les deux côté de (2.49), on trouve

$$D^k y(t) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{t^j}{j!} y_0^j + D^k I^\alpha f(., y(.))(t).$$

D'après la propriété de semi-groupe (2.7), on trouve

$$D^k y(t) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{t^j}{j!} y_0^j + D^k I^k I^{\alpha-k} f(., y(.))(t).$$

Comme $D^k(t^j) = 0$ pour $j < k$, et pour $j \geq k$, $D^k(t^j) = \frac{j!}{(j-k)!} t^{j-k}$ alors, si $t = 0$ on a

$$D^k y(0) = \sum_{j=k}^{n-1} D^k \frac{1}{(j-k)!} t^{j-k} y_0^j|_{t=0} + I^{\alpha-k} f(., y(.))(t)|_{t=0}.$$

Comme $\alpha - k \geq 1$, donc, d'après (2.1.2), $I^{\alpha-k} f(., y(.))(t)$ existe pour tout $t \in [0, T]$ et par suite $I^{\alpha-k} f(., y(.))(t)|_{t=0} = 0$, d'où

$$D^k y(0) = y_0^k.$$

On suppose maintenant que $y(t)$ est une solution de (2.48), Donc d'après (2.44) on a

$$f(t, y(t)) = {}^C D^\alpha y(t) = {}^R D^\alpha(y(t) - \sum_{k=0}^{n-1} D^k \frac{t^k}{k!} y_0^k).$$

En utilisant (2.12), on trouve

$$f(t, y(t)) = {}^R D^n I^{n-\alpha}(y(t) - \sum_{k=0}^{n-1} D^k \frac{t^k}{k!} y_0^k). \quad (2.50)$$

En appliquant l'opérateur d'intégration d'ordre n sur les deux côté de (2.50), on trouve

$$I^n f(t, y(t)) = I^{n-\alpha}(y(t) - \sum_{k=0}^{n-1} D^k \frac{t^k}{k!} y_0^k) + q(t)$$

où q est un polynôme de degré inférieur ou égale à $n - 1$. Comme f est continue, donc, $I^n f$ a un zéro d'ordre (au moins) n à l'origine. En outre la différence $y(t) - \sum_{k=0}^{n-1} D^k \frac{t^k}{k!} y_0^k$ a la même propriété par construction.

Donc la fonction $I^{n-\alpha}(y(t) - \sum_{k=0}^{n-1} D^k \frac{t^k}{k!} y_0^k)$ doit avoir un zéro d'ordre n aussi. Par suite le polynôme q a la même propriété mais comme il est de degré qui ne dépasse pas $n - 1$, il en résulte que $q = 0$. Par conséquent

$$I^n f(t, y(t)) = I^{n-\alpha}(y(t) - \sum_{k=0}^{n-1} D^k \frac{t^k}{k!} y_0^k). \quad (2.51)$$

En appliquant l'opérateur de dérivation de Rimann-Liouville ${}^R D^{n-\alpha}$ sur les deux côté de (2.51) on arrive à

$$I^\alpha f(t, y(t)) = y(t) - \sum_{k=0}^{n-1} D^k \frac{t^k}{k!} y_0^k$$

Vû la relation (2.1), on retrouve l'équation intégrale de Volterra (2.49). ■

Pour arriver au résultat d'existence et d'unicité, on pose l'hypothèse suivante :

On suppose que l'hypothèse suivante est satisfaite :

$[H_1]$: Soit $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue tel que G est définit par :

$$G := \{(t, y) : t \in [0, T], |y - \sum_{k=0}^{n-1} x^k y_0^k / k!| \leq K\}. \quad (2.52)$$

Où $K > 0$. de plus f est bornée i.e.

$$M := \sup_{(t,y) \in G} |f(t, y)|$$

Soit U un sous-ensemble de l'espace de Banach $C([0, h])$, défini par :

$$U := \{y \in C([0, h]) : \|y - R(t)\|_\infty \leq K\}. \quad (2.53)$$

Où

$$h := \min\{T, (K\Gamma(\alpha + 1))/M\}^{\frac{1}{\alpha}}. \quad (2.54)$$

Il est clair que U est fermé et convexe muni de la norme de sup (1.8). Et comme $R(t) \in U$ alors U est non vide et par suite U est un espace de Banach.

On définit sur U l'opérateur A suivant :

$$(Ay)(t) := R(t) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, y(s)) ds \quad (2.55)$$

où

$$R(t) := \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!} y_0^{(k)}.$$

Proposition 2.5.1 ([4])

L'opérateur A défini par (2.55) applique l'ensemble U défini par (2.53) dans lui-même.

Preuve.

Notons d'abord que, pour $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq h$,

$$\begin{aligned} |(Ay)(t_1) - (Ay)(t_2)| &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left| \int_0^{t_1} (t_1 - s)^{\alpha-1} f(s, y(s)) ds - \int_0^{t_2} (t_2 - s)^{\alpha-1} f(s, y(s)) ds \right|, \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left| \int_0^{t_1} ((t_1 - s)^{\alpha-1} - (t_2 - s)^{\alpha-1}) f(s, y(s)) ds \right. \\ &\quad \left. + \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)^{\alpha-1} f(s, y(s)) ds \right|, \end{aligned}$$

donc

$$|(Ay)(t_1) - (Ay)(t_2)| \leq \frac{M}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_1} |((t_1 - s)^{\alpha-1} - (t_2 - s)^{\alpha-1})| ds + \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)^{\alpha-1} ds. \quad (2.56)$$

Il est clair que le deuxième terme de droite dans (2.56) vaut $\frac{1}{\alpha}(t_1 - t_2)^\alpha$.

Pour le premier terme de (2.56), on distingue les deux cas suivants .

1^{er} **cas** $0 < \alpha \leq 1$ Si $\alpha = 1$ l'intégrale est nul.

Et si $\alpha < 1$, alors $(t_1 - s)^{\alpha-1} \leq (t_2 - s)^{\alpha-1}$, et par suite

$$\begin{aligned} \int_0^{t_1} |((t_1 - s)^{\alpha-1} - (t_2 - s)^{\alpha-1})| ds &= \int_0^{t_1} ((t_1 - s)^{\alpha-1} - (t_2 - s)^{\alpha-1}) ds \\ &= \frac{1}{\alpha} (t_1^\alpha - t_2^\alpha + (t_2 - t_1)^\alpha) \\ &\leq \frac{1}{\alpha} (t_2 - t_1)^\alpha. \end{aligned}$$

2^{ème} **cas** $\alpha > 1$ On a $(t_1 - s)^{\alpha-1} \leq (t_2 - s)^{\alpha-1}$, donc

$$\begin{aligned} \int_0^{t_1} |((t_1 - s)^{\alpha-1} - (t_2 - s)^{\alpha-1})| ds &= \int_0^{t_1} ((t_2 - s)^{\alpha-1} - (t_1 - s)^{\alpha-1}) ds \\ &= \frac{1}{\alpha} (-t_1^\alpha + t_2^\alpha - (t_2 - t_1)^\alpha) \\ &\leq \frac{1}{\alpha} (t_2 - t_1)^\alpha. \end{aligned}$$

En conclusion, on a

$$|(Ay)(t_1) - (Ay)(t_2)| \leq \begin{cases} \frac{2M}{\Gamma(\alpha+1)} (t_2 - t_1)^\alpha & \text{si } \alpha \leq 1 \\ \frac{M}{\Gamma(\alpha+1)} ((t_2 - t_1)^\alpha + t_2^\alpha - t_1^\alpha) & \text{si } \alpha > 1 \end{cases} \quad (\text{P})$$

Le membre de droite dans (P) converge vers 0 quand $t_2 \rightarrow t_1$, ce qui prouve que Ay est une fonction continue.

De plus, pour $y \in U$ et $t \in [0, h]$, on trouve

$$\begin{aligned} |(Ay)(t) - R(t)| &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left| \int_0^t ((t-s)^{\alpha-1} f(s, y(s))) ds \right| \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} M t^\alpha, \\ &\leq \frac{M}{\Gamma(\alpha+1)} h^\alpha \leq \frac{M}{\Gamma(\alpha+1)} \frac{K\Gamma(\alpha+1)}{M} = K. \end{aligned}$$

Ce qui montre que $Ay \in U$ si $y \in U$, c'est-à-dire que A applique U dans U . ■

Théorème 2.5.1 ([11, 4])

Sous l'hypothèse $[H_1]$, le problème de Cauchy (2.48) admet une solution $y \in C([0, h])$ avec h donné par (2.54).

Preuve.

D'après le Lemme 2.5.1, il suffit de montrer que l'équation intégrale de volterra (2.49) possède une solution $y(t) \in C([0, h])$. Ceci en utilisant le Théorème 1.3.3 (de point fixe de Schaudé).

D'après la Proposition 2.5.1, il suffit de montrer que $A(U)$ est un ensemble relativement compact, et pour cela on va utiliser le Théorème 1.3.1 (d'Arzéla-Ascoli) .

Premièrement, soient $z \in A(U)$ et $t \in [0, h]$, on a :

$$\begin{aligned} |z(t)| &= |(Ay)(t)| \leq \|R(t)\|_\infty + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} |f(s, y(s))| ds, \\ &\leq \|R(t)\|_\infty + \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} M h^\alpha \leq \|R(t)\|_\infty + K. \end{aligned}$$

Ce qui montre que $A(U)$ est uniformément borné.

De plus pour $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq h$ on a :

Si $0 < \alpha \leq 1$, (Voir (P)), on a

$$|(Ay)(t_1) - (Ay)(t_2)| \leq \frac{2M}{\Gamma(\alpha+1)} (t_2 - t_1)^\alpha. \quad (2.57)$$

Donc, si $|t_2 - t_1| < \delta$ on aura :

$$|(Ay)(t_1) - (Ay)(t_2)| \leq \frac{2M}{\Gamma(\alpha+1)} \delta^\alpha. \quad (2.58)$$

Notons que le terme de droite de (2.58) est indépendant de y, t_1 et t_2 , ce qui montre que $A(U)$ est équicontinue.

De même pour $\alpha > 1$ on a :

$$\begin{aligned} |(Ay)(t_1) - (Ay)(t_2)| &\leq \frac{M}{\Gamma(\alpha+1)} [(t_2 - t_1)^\alpha + t_2^\alpha - t_1^\alpha] \\ &= \frac{M}{\Gamma(\alpha+1)} [(t_2 - t_1)^\alpha + \alpha(t_2 - t_1)t_1^{\alpha-1}] \\ &\leq \frac{M}{\Gamma(\alpha+1)} [(t_2 - t_1)^\alpha + \alpha(t_2 - t_1)h^{\alpha-1}] \end{aligned}$$

pour quelque $\xi \in [t_1, t_2] \subseteq [0, h]$. Donc, si encore $|t_2 - t_1| < \delta$ on aura :

$$|(Ay)(t_1) - (Ay)(t_2)| \leq \frac{M}{\Gamma(\alpha + 1)}(\delta^\alpha + \alpha\delta h^{\alpha-1}). \quad (2.59)$$

Le terme de droite de (2.59) est encore indépendant de y, t_1 et t_2 , ce qui implique que l'ensemble $A(U)$ est équicontinue. Alors, $A(U)$ est relativement compact d'après le Théorème 1.3.1 d'Arzéla-Ascoli. le Théorème 1.3.3 de point fixe de Schauder assure, donc, que A possède un point fixe qui est la solution de (2.48).

■

Le théorème suivant fournit l'unicité de la solution du problème (2.48) sous (en plus de l'hypothèse $[H_1]$) la condition de lipschitz du terme non linéaire f .

Théorème 2.5.2 ([4])

On suppose que f satisfait l'hypothèse $[H_1]$ et vérifie de plus la condition de Lipschitz par rapport à la second variable, i.e.

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|.$$

Où L est une constante indépendante de t, y_1 et y_2 . Alors, il existe une fonction unique $y \in C([0, h])$ solution du problème de Cauchy (2.48).

Preuve. Pour montrer l'unicité de la solution du problème de Cauchy (2.48), on va utiliser encore l'opérateur A , tout en rappelant qu'il applique l'ensemble non vide, convexe et fermé $U := \{y \in C([0, h]) : \|y - T\|_\infty \leq K\}$ dans lui même. Nous allons maintenant montrer que A possède un point fixe unique en utilisant le Théorème 1.3.4 (de Weissinger). Pour cela on va d'abord prouver par récurrence que pour tout $j \in \mathbb{N}$ et tout $t \in [0, h]$, on a

$$\|A^j y - A^j \tilde{y}\|_{L_\infty([0, t])} \leq \frac{(Lt^\alpha)^j}{\Gamma(1 + \alpha j)} \|y - \tilde{y}\|_{L_\infty([0, t])} \quad (2.60)$$

On a :

Pour $j = 0$, (2.60) est évidemment vérifié.

On suppose que (2.60) est vérifié pour $j - 1$ et on montre la relation pour j :

$$\begin{aligned}
\| A^j y - A^j \tilde{y} \|_{L_\infty([0,t])} &\leq \| A(A^{j-1}y) - A(A^{j-1}\tilde{y}) \|_{L_\infty([0,t])} \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sup_{0 \leq x \leq t} \left| \int_0^x (x-s)^{\alpha-1} [f(s, A^{j-1}y(s)) \right. \\
&\quad \left. - f(s, A^{j-1}\tilde{y}(s))] ds \right|.
\end{aligned}$$

Dans l'étape suivante on utilisera la condition de Lipschitz sur f ainsi que l'hypothèse de récurrence, on trouve :

$$\begin{aligned}
\| A^j y - A^j \tilde{y} \|_{L_\infty([0,t])} &\leq \frac{L}{\Gamma(\alpha)} \sup_{0 \leq x \leq t} \int_0^x (x-s)^{\alpha-1} |A^{j-1}y(s) - A^{j-1}\tilde{y}(s)| dt \\
&\leq \frac{L}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \sup_{0 \leq x \leq s} |A^{j-1}y(x) - A^{j-1}\tilde{y}(x)| dt \\
&\leq \frac{L^j}{\Gamma(1+\alpha(j-1))} \sup_{0 \leq x \leq t} |y(x) - \tilde{y}(x)| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} s^{\alpha(j-1)} dt.
\end{aligned}$$

D'après la relation (2.5), pour $a = 0$ et $\beta = \alpha(j-1)$, on a

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} s^{\alpha(j-1)} dt = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(1+\alpha(j-1))}{\Gamma(1+\alpha j)} t^{\alpha j}.$$

D'où

$$\| A^j y - A^j \tilde{y} \|_{L_\infty([0,t])} = \frac{L^j}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1+\alpha(j-1))} \|y(x) - \tilde{y}(x)\|_{L_\infty([0,t])} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(1+\alpha(j-1))}{\Gamma(1+\alpha j)} t^{\alpha j}.$$

Comme conséquence, on trouve, en prenant la norme de sup défini par (1.8) sur $[0, h]$:

$$\| A^j y - A^j \tilde{y} \|_\infty \leq \frac{(Lh^\alpha)^j}{\Gamma(1+\alpha j)} \|y - \tilde{y}\|_\infty. \quad (2.61)$$

On a montré que l'opérateur A satisfait les hypothèses du théorème du point fixe de Weissing 1.3.4 avec $\alpha_j = (Lh^\alpha)^j / \Gamma(1+\alpha j)$. Comme la série $\sum_{j=0}^n \alpha_j = E_\alpha(Lh^\alpha)$ est convergente on en déduit l'unicité de la solution du problème de Cauchy (2.48).

■

2.5.2 Existence et unicité de la solution globale dans le cas

$$0 < \alpha < 1$$

Dans ce paragraphe on va donner des conditions suffisants pour l'existence et l'unicité de la solution globale du problème (2.48) dans le cas où $0 < \alpha < 1$. Ceci est en se basant sur le principe de contraction de Banach.

On va donc s'intéresser par le problème suivant :

$$\begin{cases} {}^C D^\alpha y(t) = f(t, y(t)) & t \in [0, T], \quad 0 < \alpha < 1 \\ y(0) = y_0. \end{cases} \quad (2.62)$$

Le lemme suivant est une conséquence immédiate du Lemme 2.5.1.

Lemme 2.5.2 ([4]) *Soit $f : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Une fonction continue y est une solution du problème à valeur initiale (2.62) si et seulement si y est une solution de l'équation intégrale de Volterra de seconde espèce :*

$$y(t) = y_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, y(s)) ds \quad (2.63)$$

Le théorème suivant établit l'existence et l'unicité d'une solution locale.

Théorème 2.5.3 ([4],[11]) *Soit $f : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et satisfait la condition de lipschitz par rapport à la seconde variable avec une constante de lipschitz L_f , donc le problème (2.62) admet une solution unique $y(t) \in C([0, h])$ avec*

$$h < \min\left\{T, \left(\frac{\Gamma(\alpha+1)}{L_f}\right)^{1/\alpha}\right\}. \quad (2.64)$$

.

Preuve. On considère l'espace de Banach $C([0, h])$ muni de la norme

$$\|y_1 - y_2\|_{C[0, h]} = \sup_{t \in [0, h]} |y_1 - y_2|$$

On réécrit l'équation intégrale (2.63) sous la forme suivante

$$y(t) = (Ay)(t).$$

Où :

$$(Ay)(t) = y_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, y(s)) ds. \quad (2.65)$$

Un argument similaire à celui utilisé dans la preuve de Proposition 2.5.1 permet d'aboutir à la continuité de Ay dans $C([0, h])$.

Il suffit donc de montrer que A est un opérateur contractant, sous l'hypothèse (2.54).

En effet

$$\begin{aligned} |Ay_1(t) - Ay_2(t)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} |f(s, y_1(s)) - f(s, y_2(s))| ds, \\ &\leq \frac{L_f}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} |y_1(s) - y_2(s)| ds, \\ &\leq \frac{L_f}{\Gamma(\alpha)} \sup_{s \in [0, h]} |y_1(s) - y_2(s)| \left(\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} ds \right), \\ &\leq \frac{L_f}{\Gamma(\alpha+1)} \|y_1 - y_2\|_{C([0, h])} t^\alpha. \end{aligned}$$

Comme $t \in [0, h]$, on a

$$|Ay_1(t) - Ay_2(t)| \leq \frac{L_f}{\Gamma(\alpha+1)} \|y_1 - y_2\|_\infty h^\alpha. \quad (2.66)$$

Sous l'hypothèse (2.54), on a

$$\frac{L_f}{\Gamma(\alpha+1)} h^\alpha < 1.$$

Donc, l'opérateur A est contractant et par suite l'équation intégrale (2.63) admet un point fixe unique dans $C([0, h])$. Alors le problème (2.62) possède une solution unique $y(t) \in C([0, h])$. ■

Dans le théorème suivant, on va prolonger la solution du problème (2.62) de l'intervalle $[0, h]$ (établi par Théorème 2.5.3) à l'intervalle $[0, T]$ tout entier.

Théorème 2.5.4

Sous les hypothèses du Théorème 2.5.3, le problème (2.62) admet une solution unique $y(t) \in C([0, T])$.

Preuve.

D'après le Théorème 2.5.3, le problème (2.62) admet une solution unique $y(t) \in$

$C([0, h])$ où h est donné par (2.54).

On va maintenant prolonger cette solution à $[0, T]$ de la manière suivante : (Voir [11],[10])

On divise l'intervalle $[0, T]$ en $[0, h] \cup [h, 2h] \cup \dots \cup [k_0 h, T]$ où $k_0 \in \mathbb{N}$ et $0 \leq T - k_0 h \leq h$.

On va prolonger la solution sur $[0, (k+1)h]$ ($k \geq 1$) par récurrence :

On suppose que le problème (2.62) admet une solution unique dans $C([0, kh])$ pour un certain $1 \leq k < k_0$ ($k = 1$ est vérifié d'après Théorème 2.5.3), qu'on note par y_{kh} .

On défini maintenant l'opérateur $A_{(k+1)h}$ sur $C([kh, (k+1)h])$ muni de la norme $\|\cdot\|_{C([kh, (k+1)h])} = \sup_{kh \leq t \leq (k+1)h}$

$$A_{(k+1)h} : C([kh, (k+1)h]) \rightarrow C([kh, (k+1)h])$$

où

$$\begin{aligned} (A_{(k+1)h}y)(t) &= y_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{kh} (t-s)^{\alpha-1} f(s, y_{kh}(s)) ds \\ &\quad + \int_{kh}^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, y(s)) ds \quad \forall t \in [kh, (k+1)h]. \end{aligned}$$

Il est claire que la solution du problème (2.62) sur $[kh, (k+1)h]$ est le point fixe de l'opérateur A_{k+1} (Vue l'unicité de la solution y_{kh} sur $[0, h]$).

On peut vérifier que pour $y \in C([kh, (k+1)h])$, Ay est continue sur $[kh, (k+1)h]$ comme composition d'applications continues.

De plus, pour tous $y_1, y_2 \in C([kh, (k+1)h])$ et $t \in [kh, (k+1)h]$, on a :

$$\begin{aligned} |(A_{(k+1)h}y_1)(t) - (A_{(k+1)h}y_2)(t)| &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left| \int_{kh}^t (t-s)^{\alpha-1} (f(s, y_1(s)) - f(s, y_2(s))) ds \right| \\ &\leq \frac{L_f}{\Gamma(\alpha)} \int_{kh}^t (t-s)^{\alpha-1} ds \\ &= \frac{L_f}{\Gamma(\alpha+1)} (t-kh)^\alpha \\ &\leq \frac{L_f}{\Gamma(\alpha+1)} h^\alpha. \end{aligned}$$

Vûe la condition (2.54) sur h , l'opérateur $A_{(k+1)h}$ est contractant sur $C([kh, (k+1)h])$ et il admet donc un point fixe unique $y_{(k+1)h}^* \in C([kh, (k+1)h])$.

Donc,

$$y_{(k+1)h}(t) = \begin{cases} y_{kh}(t) & t \in [0, kh], \\ y_{(k+1)h}^*(t) & t \in [kh, (k+1)h]. \end{cases}$$

est évidemment l'unique solution du problème (2.62) dans $C([0, (k+1)h])$ ■

Chapitre 3

Un résultat d'existence et d'unicité pour une classe d'équations différentielles fractionnaires avec retard

3.1 Position du problème et l'équation intégrale équivalente

Nous considérons dans ce chapitre le problème différentielle fractionnaire avec retard suivant :

$$\begin{cases} {}^C D^\alpha y(t) = f(t, y(t), y(t - \Delta(t))) & 0 < t \leq T \\ y(t) = \phi(t) & t \in [-r, 0] \end{cases} \quad (\text{Q})$$

où ${}^C D^\alpha$ est l'opérateur de dérivation fractionnaire au sens de Caputo d'ordre $0 < \alpha < 1$ défini par (2.27), $f : [0, T] \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction non linéaire continue, $\phi : [-r, 0] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue et $\Delta :]0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue, telle que

$$\inf_{0 < t \leq T} \{t - \Delta(t)\} = -r.$$

Lemme 3.1.1 *Une fonction continue $y \in C([0, T])$ est une solution du problème (Q) si et seulement si y est une solution de l'équation intégrale de Volterra suivante :*

$$\begin{cases} y(t) = \phi_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, y(s), y(s-\Delta(s))) ds & 0 < t \leq T, \\ y(t) = \phi(t) & t \in [-r, 0]. \end{cases} \quad (3.1)$$

Preuve. Il est clair qu'il suffit de montrer l'équivalence entre le problème (Q) et l'équation intégrale (3.1) pour $0 < t \leq T$. On suppose d'abord que y satisfait l'équation intégrale (3.1). Alors, pour $0 < t \leq T$, on a

$$y(t) - \phi_0 = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, y(s), y(s-\Delta(s))) ds, \quad (3.2)$$

en appliquant la dérivation fractionnaire de Rimmann-Lioville ${}^R D^\alpha$ aux deux membres de (3.2) on trouve :

$${}^R D^\alpha (y(t) - \phi_0) = {}^R D^\alpha \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, y(s), y(s-\Delta(s))) ds \right).$$

Notons que $y(0) = \phi_0$, les relations (2.44) et (2.23) donnent :

$${}^C D^\alpha y(t) = f(t, y(t), y(t-\Delta(t))). \quad (3.3)$$

Ce qui prouve la suffisance.

On suppose maintenant que y satisfait le problème (Q). Donc d'après (2.44), on a :

$$f(t, y(t), y(t-\Delta(t))) = {}^R D^\alpha (y(t) - \phi_0). \quad (3.4)$$

Vue la relation (2.12), l'équation (3.4) peut être écrite sous la forme :

$$f(t, y(t), y(t-\Delta(t))) = {}^R D^1 I^{1-\alpha} (y(t) - \phi_0). \quad (3.5)$$

En appliquant successivement les opérateurs I^1 et ${}^R D^{1-\alpha}$ aux deux côté de (3.5) et en prenant en considération la relation (2.12), on obtient :

$${}^R D^1 I^{1-(1-\alpha)} I^1 f(t, y(t), y(t - \Delta(t))) = y(t) - \phi_0.$$

Ainsi, la nécessité découle de la propriété (2.7) et la définition (2.1). ■

3.2 Le résultat de l'existence et l'unicité

Avant de prouver le résultat de l'existence et l'unicité de la solution du problème (Q), et en s'inspirant de [8, 16], on va formuler un théorème du point fixe pour un type d'opérateurs agissant sur un espace de fonctions continues.

3.2.1 Point fixe d'une classe d'opérateurs définits sur un espace de fonctions continues

On va commencer par quelques notations et un lemme préliminaire.

Soient J un intervalle borné et fermé de $\mathbb{R}$, I_1 et I_2 deux intervalles disjoints tels que $I_1 \cup I_2 = J$ et X l'espace des fonctions réelles continues sur J muni de la norme

$$\|u\|_X = \sup_{t \in J} |u(t)|.$$

Pour $\phi \in C(I_2)$, soit F_ϕ le sous ensemble de X définit par :

$$F_\phi = \{u \in X / u(t) = \phi(t) : t \in I_2\} \quad (3.6)$$

Il est facile de voir que F_ϕ est un sous ensemble fermé de X .

Lemme 3.2.1

Soit J un intervalle fermé et borné de $\mathbb{R}$.

Pour tout $\lambda > 0$, l'application $\|\cdot\|_{X,\lambda}$ défini pour tout $u \in C(J)$ par :

$$\|u\|_{X,\lambda} = \sup_{t \in J} e^{-\lambda t} |u(t)|, \quad (3.7)$$

est une norme sur $C(J)$ équivalente à la norme $\|\cdot\|_X$ et par suite $(X, \|\cdot\|_{X,\lambda})$ est un espace de Banach.

Preuve.

Il est facile de vérifier que $\|\cdot\|_{X,\lambda}$ est une norme sur X .

De plus, puisque J est borné et fermé, il admet une valeur minimale et maximale qu'on note par J_{min} et J_{max} respectivement. Ainsi

$$e^{-\lambda J_{max}} \|u\|_X \leq \|u\|_{X,\lambda} = \sup_{t \in J} e^{-\lambda t} |u(t)| \leq e^{-\lambda J_{min}} \|u\|_X$$

Ce qui achève la démonstration. ■

Théorème 3.2.1

Pour F_ϕ le sous ensemble défini par (3.6), soient $A : F \rightarrow F$ un opérateur, $1 > l_1 > 0, l_2 > 0$, deux constantes, $\delta_1, \delta_2 : I_1 \rightarrow I_1$ tels que $\delta_1 \leq \delta_2$, $G : I_1 \times I_1 \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction intégrable par rapport à la deuxième variable (pour toute première variable fixé), $K_1, K_2 : I_1 \rightarrow \mathbb{R}$ et $\tau : I_1 \rightarrow J$ des fonctions.

On suppose que :

(C₁) Pour tout $u, v \in F$ et tout $t \in I_1$:

$$|Au(t) - Av(t)| \leq l_1 |u(t) - v(t)| + l_2 \int_{\delta_1(t)}^{\delta_2(t)} G(t, s) (K_1(s) |u(s) - v(s)| + K_2(s) |u(\tau(s)) - v(\tau(s))|) ds.$$

(C₂) $\forall t \in I_1 : \tau(t) \leq t$

(C₃) Il existe deux exposant conjugués $p, q > 1$ ($\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$) tels que $K_1, K_2 \in L^q(I_1)$ et pour tout $t \in I_1$ et λ fixé,

$$G(t, \cdot) e^{-\lambda(t-\cdot)} \in L^p(I_1)$$

avec

$$\| G(t, \cdot) e^{-\lambda(t-\cdot)} \|_{L^p(I_1)} \leq C_\lambda(p).$$

Alors, A admet un point fixe unique dans F , à condition que

$$C_\lambda(p) \rightarrow 0 \text{ quand } \lambda \rightarrow \infty. \quad (3.8)$$

Preuve.

Sous les hypothèse $(C_1) - (C_3)$ et la condition (3.8), on va montrer que l'opérateur A est contractant par rapport à la norme définie par (3.7) pour une certaine valeur du paramètre auxiliaire λ et qui sera spécifié plus tard.

Notons d'abord que pour tout $t \in I_2$ et pour tous $u, v \in F$:

$$|u(t) - v(t)| \leq |\phi(t) - \phi(t)| = 0$$

Donc,

$$\|u - v\|_{X,\lambda} = \sup_{t \in J} e^{-\lambda t} |u(t) - v(t)| = \sup_{t \in I_1} e^{-\lambda t} |u(t) - v(t)|$$

Maintenant, d'après l'hypothèse (C_1) , on a pour tout $t \in I_1$ et pour tous $u, v \in F$:

$$\begin{aligned} |Au(t) - Av(t)| &\leq l_1 |u(t) - v(t)| \\ &+ l_2 \int_{\delta_1(t)}^{\delta_2(t)} G(t, s) (K_1(s) |u(s) - v(s)| + K_2(s) |u(\tau(s)) - v(\tau(s))|) ds \\ &\leq l_1 e^{\lambda t} e^{-\lambda t} |u(t) - v(t)| \\ &+ \int_{\delta_1(t)}^{\delta_2(t)} l_2 G(t, s) \{ K_1(s) e^{\lambda s} e^{-\lambda s} |u(s) - v(s)| \\ &+ K_2(s) e^{\lambda \tau(s)} e^{-\lambda \tau(s)} |u(\tau(s)) - v(\tau(s))| \} ds \\ &\leq l_1 e^{\lambda t} \|u - v\|_{X,\lambda} \\ &+ \left(\int_{\delta_1(t)}^{\delta_2(t)} l_2 G(t, s) \{ K_1(s) e^{\lambda s} + K_2(s) e^{\lambda \tau(s)} \} ds \right) \|u - v\|_{X,\lambda}. \end{aligned}$$

En multipliant les deux côtés de l'inégalité précédente par $e^{-\lambda t}$ et en tenant compte de (C_2) , on a :

$$\begin{aligned}
e^{-\lambda t}|Au(t) - Av(t)| &\leq l_1\|u - v\|_{X,\lambda} \\
&+ \left(\int_{\delta_1(t)}^{\delta_2(t)} l_2 G(t, s) \{K_1(s)e^{\lambda(s-t)} + K_2(s)e^{\lambda(\tau(s)-t)}\} ds \right) \|u - v\|_{X,\lambda} \\
&\leq l_1\|u - v\|_{X,\lambda} \\
&+ \left(\int_{\delta_1(t)}^{\delta_2(t)} l_2 G(t, s) \{K_1(s)e^{\lambda(s-t)} + K_2(s)e^{\lambda(s-t)}\} ds \right) \|u - v\|_{X,\lambda} \\
&+ \left(\int_{\delta_1(t)}^{\delta_2(t)} l_2 G(t, s) e^{-\lambda(t-s)} \{K_1(s) + K_2(s)\} ds \right) \|u - v\|_{X,\lambda}.
\end{aligned}$$

Notons que $[\delta_1(t), \delta_2(t)] \subset I_1$ (pour tout $t \in I_1$), vûe l'hypothèse (C_3) , l'inégalité de Hölder donne

$$\begin{aligned}
e^{-\lambda t}|Au(t) - Av(t)| &\leq l_1\|u - v\|_{X,\lambda} \\
&+ l_2 \left(\int_{I_1} (G(t, s)e^{-\lambda(t-s)})^p ds \right)^{1/P} \left(\int_{I_1} (K_1(s))^q ds \right)^{1/q} \\
&+ l_2 \left(\int_{I_1} (G(t, s)e^{-\lambda(t-s)})^p ds \right)^{1/P} \left(\int_{I_1} (K_2(s))^q ds \right)^{1/q} \leq l_1\|u - v\|_{X,\lambda} \\
&+ l_2 C_\lambda(p) (\|K_1\|_{L^q} + \|K_2\|_{L^q}) \|u - v\|_{X,\lambda}.
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\|Au - Av\|_{X,\lambda} \leq (l_1 + l_2 C_\lambda(p) (\|K_1\|_{L^q} + \|K_2\|_{L^q})) \|u - v\|_{X,\lambda}.$$

La condition (3.8) permet donc de choisir λ (suffisamment grand) tel que

$$C_\lambda(p) < \frac{1 - l_1}{l_2(\|K_1\|_{L^q} + \|K_2\|_{L^q})}$$

Ce qui rend donc l'opérateur A contractive (par rapport à la norme $\|\cdot\|_{X,\lambda}$) et par suite il admet un point fixe unique . ■

3.2.2 Application à la résolution du problème (Q)

En se basant sur le Théorème 3.2.1, et en s'inspirant de [7, 14], on va prouver l'existence et l'unicité de la solution du problème (Q) sous la condition de Lipschitz du terme non linéaire f de rapports Lipschitziens non constants.

Pour aboutir à ce résultat, on a besoin des hypothèses suivantes.

(H_1) Il existe deux fonctions $K_1, K_2 : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^+$, tels que :

$$\forall (t, u_1, v_1), (t, u_2, v_2) \in [0, T] \times \mathbb{R}^2 : |f(t, u_1, v_1) - f(t, u_2, v_2)| \leq K_1(t)|u_1 - u_2| + K_2(t)|v_1 - v_2|.$$

(H_2) $\forall t \in [0, T] \quad \Delta(t) \geq 0$.

(H_3) Pour $q = 1 + \frac{1}{\alpha}$, $K_1, K_2 \in L^q([0, T])$.

Théorème 3.2.2

Sous les hypothèses (H_1) – (H_3), le problème (Q) admet une solution continue unique.

Preuve.

D'après le Lemme 3.1.1, u est solution de (Q) si et seulement si u est le point fixe de l'opérateur A défini sur F_φ par :

$$Ay(t) = \varphi_0 + \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(s, y(s), y(s-\Delta(s))) ds \quad t \in I_1. \quad (3.9)$$

Où $I_1 =]0, T]$, $I_2 = [-r, 0]$, $J = [-r, T]$ et F_ϕ est le sous ensemble de $C(J, \mathbb{R})$ défini par (3.6). On va montrer les conditions (C_1) – (C_3) et (3.8) du Théorème 3.2.1.

En effet, d'après l'hypothèse (H_1), on a pour tout $y, z \in F$ et $t \in I_1$:

$$|Ay(t) - Az(t)| \leq \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \{K_1(s)|y(s) - z(s)| + K_2(s)|y(s-\Delta(s)) - z(s-\Delta(s))|\} ds$$

Donc (C_1) est vérifié avec

$$\delta_1(t) = 0, \delta_2(t) = t, \tau(t) = t - \Delta(t), l_1 = 0, l_2 = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \text{ et}$$

$$G(t, s) = \begin{cases} (t-s)^{\alpha-1} & : 0 < s \leq t \\ 0 & : s > t. \end{cases} \quad (3.10)$$

Notons que (H_2) n'est autre que la condition (C_2) dans le Théorème 3.2.1.

Vue l'hypothèse (H_3) , il suffit donc de prouver que

$$\int_0^t [(t-s)^{\alpha-1} e^{-\lambda(t-s)}]^p < \infty. \quad (3.11)$$

où $p = 1 + \alpha$.

En utilisant le changement de variable $u = \lambda p(t-s)$ pour évaluer l'intégrale qui figure dans (3.10), on obtient

$$\begin{aligned} \int_0^t (t-s)^{p(\alpha-1)} e^{-p\lambda(t-s)} ds &= \int_{\lambda pt}^0 \left(\frac{u}{\lambda p} \right)^{p(\alpha-1)} e^{-u} \left(\frac{-1}{\lambda p} \right) du \\ &= \int_0^{\lambda pt} \left(\frac{1}{\lambda p} \right)^{p(\alpha-1)+1} u^{p(\alpha-1)} e^{-u} du \\ &= \left(\frac{1}{\lambda p} \right)^{p(\alpha-1)+1} \int_0^{\lambda pt} u^{p(\alpha-1)} e^{-u} du \\ &\leq \left(\frac{1}{\lambda p} \right)^{\alpha^2} \int_0^{+\infty} u^{\alpha^2-1} e^{-u} du \\ &\leq \left(\frac{1}{\lambda p} \right)^{\alpha^2} \Gamma(\alpha^2). \end{aligned}$$

Alors,

$$\|G(t, s) e^{-\lambda(t-s)}\|_{L^p(I_1)} \leq \left(\frac{1}{\lambda p} \right)^{\alpha^2/p} \Gamma^{1/p}(\alpha^2).$$

d'où

$$\left(\frac{1}{\lambda p} \right)^{\alpha^2/p} \Gamma^{1/p}(\alpha^2) = C_\lambda(p).$$

Donc, pour λ fixé $G(t, \cdot) e^{-\lambda(t-\cdot)} \in L^p(I_1)$ et il est claire que $C_\lambda \rightarrow 0$ quand $\lambda \rightarrow +\infty$, et par suite la condition (3.8) est vérifié. Ainsi d'après le Théorème (3.2.1) l'opérateur (3.9) admet un point fixe unique dans F_ϕ qui est la solution du problème (Q) . ■

3.3 Exemple

L'exemple suivant illustre le résultat du théorème (3.2.2). On considère l'équation différentielle fractionnaire avec retard suivante :

$$\begin{cases} {}^C D^{1/2} y(t) = \frac{t\omega^2}{1+\omega^2} (y(t) - y(t - (2t+1))) & t \in]0, T], \\ y(t) = \phi(t) & t \in [-r, 0]. \end{cases} \quad (3.12)$$

tel que $t \in [0, T]$ et ω est une constante appartenant à $\mathbb{R}^*$ et fini.

Le problème (3.12) est identifié au problème (Q) avec :

$\alpha = \frac{1}{2}$ et $f : [0, T] \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définit par :

$$f(t, u, v) = \frac{t\omega^2}{1+\omega^2} (u - v). \quad (3.13)$$

et $\Delta(t) :]0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, tel que : $\Delta(t) = t + 2$,

$$\begin{aligned} -r &= \inf_{0 < t \leq T} \{t - \Delta(t)\} \\ &= \inf_{0 < t \leq T} \{t - (2t + 1)\} \\ &= \inf_{0 < t \leq T} \{-t - 1\} \\ &= -T - 1. \end{aligned}$$

et $\phi : [-T-1, 0] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue. Pour montrer l'existence et l'unicité de la solution de (3.12) dans F_ϕ définie par

$$F_\phi = \{y \in C([-T-1, T], \mathbb{R}), y(t) = \phi(t), t \in]0, T]\}. \quad (3.14)$$

Il suffit de vérifier les hypothèses du Théorème (3.2.2). On a

$$\begin{aligned}
|f(t, u_1, v_1) - f(t, u_2, v_2)| &= \left| \frac{t\omega^2}{1 + \omega^2} (u_1 - v_1) - \frac{t\omega^2}{1 + \omega^2} (u_2 - v_2) \right| \\
&\leq \left| \frac{t\omega^2}{1 + \omega^2} \right| |u_1 - u_2| + \left| \frac{t\omega^2}{1 + \omega^2} \right| |v_2 - v_1| \\
&\leq \left| \frac{t\omega^2}{1 + \omega^2} \right| |u_1 - u_2| + \left| \frac{t\omega^2}{1 + \omega^2} \right| |v_1 - v_2|.
\end{aligned}$$

Alors, la fonction f satisfait l'hypothèse (H_1) du théorème (3.2.2) avec :

$K_1(t) = K_2(t) = \frac{t\omega^2}{1 + \omega^2}$. De plus, pour $t \in [0, T]$ on a $\Delta(t) > 0$, donc, (H_2) est vérifiée aussi.

Il reste à vérifier que pour $q = 3$, $K_1(t), K_2(t) \in L^3([0, T])$.

$$\begin{aligned}
\int_0^T \left| \frac{t\omega^2}{1 + \omega^2} \right|^3 dt &= \left(\frac{\omega^2}{1 + \omega^2} \right)^3 \int_0^T t^3 dt \\
&= \left(\frac{\omega^2}{1 + \omega^2} \right)^3 \frac{T^4}{4} < \infty
\end{aligned}$$

Donc, l'hypothèse (H_3) est vérifiée. Alors il existe une solution unique $y(t)$ de problème (3.12) sur l'ensemble F_ϕ .

Bibliographie

- [1] S. ABBAS, Existence of solutions to fractional order ordinary and delay differential equation and application, Electronic Journal of Differential Equations, Vol 2011 (2011), No 09, pp. 1–11.
- [2] H. Bauer, Measure and integration theory, Walter de Gruyter GmbH et Co. KG, Berlin, Germany, 2001.
- [3] D. Delbosco, L. Rodinou, Existence and Uniqueness for a Nonlinear Fractional Differential Equation, Matgematical departement, Torino, Italy, 1995.
- [4] Kai.Diethelm, The Analysis of Fractional Differential Equation, An Application-Oriented Exposition Using Differential Operators of Caputo Type, Ed Springer, 2004.
- [5] F. Dubois , A. Galucio, N. Point, Introduction à la dérivation fractionnaire Théorie et applications, Conservatoire National des Arts et Métiers, Mathématiques, Paris, France, 2008.
- [6] M. Henry, La théorie de la fonction gamma, Limbourg, 1858.
- [7] T. Jankowski, Boundary problems for fractional differential equations, Applied Mathematic Lette, 2013.
- [8] T. Kawasaki, M. Toyoda, Fixed point theorem and fractional differential equations with multiple delays related with chaos neuron models, authors and Scientific Research Publishing Inc, 2015.
- [9] A. A. Kilbas and S. A. Marzan, Fractional calculus and applied analysis, Volume 7, Number 3(2004).
- [10] A. A. Kilbass, S. G. Samko, O. I. Marichev, Fractional integrals and derivatives theory and applications, Gordon and Breach Science publisher, Amsterdam, 1993.

-
- [11] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava and J. J. Trujillo, Theory and applications of fractional differential equations, North-Holland Mathematical Studies 204, Ed Jan Van Mill Amsterdam, (2006).
- [12] A. N. Kolmogorov, S. V. Fomin, Elements of the theory of functions and functional Analysis, Volumes 1 and 2, Dover Publications, INC, Mineola, New York, 1999.
- [13] B. LOU, Fixed points for operators in a space of continuous functions and applications, Volume 127, Number 8, pages 2259-2264, 1999.
- [14] Lakshman Mahto, Syed Abbas, Angelo Favini, Analysis of Caputo impulsive fractional order differential equations with applications, School of Basic Sciences Indian Institute of Technology Mandi, 16 Mai 2012.
- [15] I. Podlubny, Fractional differential equations, Vol 198, Academic Press, San Diego, California, USA, (1999).
- [16] T. Suzuki, Lou's fixed point theorem in a space of continuous mappings, J. Math. Soc. Japan, Vol 58, No 3, 2006.

Résumé

Ce travail est consacré au problème d'existence et d'unicité de la solution pour les équations différentielles d'ordre fractionnaire de type Caputo. Nous exposons d'abord quelques résultats connus pour un problème modèle; basés sur différentes variantes de la théorie du point fixe et l'approche des approximations successives. Nous prouvons ensuite, sous certaines conditions suffisantes, le résultat d'existence et d'unicité de la solution pour une classe d'équations différentielles fractionnaires avec retard.

Ceci est en utilisant une norme équivalente permettent d'obtenir le résultat globale directement sans faire appel aux approximations successives.

Mots clés Intégrale fractionnaire, dérivation fractionnaire de type Caputo, existence et unicité des solutions, théorèmes du point fixe.

Abstract

This work is devoted to the problem of existence and uniqueness of the solution for the fractional differential equations of Caputo's type. We first show some known results for a model problem; Based on different variants of the fixed point theory and the successive approximations approach. Then we prove, under certain sufficient conditions, the result of existence and uniqueness of the solution for a class of fractional differential equations with delay.

This by using an equivalent norm which gives the result directly without using the successive approximations approach.

Key words Fractional integral, fractional derivative of Caputo type, existence and uniqueness of solutions, fixed point theorems.

الملخص

هذا العمل مخصص لدراسة مسألة وجود و وحدانية الحل للمعادلات التفاضلية ذات الرتبة الكسرية من نوع كابيتو. أولاً قمنا بعرض بعض النتائج المعروفة لمسألة نموذجية؛ اعتماداً على أشكال مختلفة لنظرية النقطة الثابتة و تقريب الحل باستخدام التقريبات المتتالية. ثم أثبتنا تحت شروط كافية وجود و وحدانية الحل لصنف من المعادلات التفاضلية الكسرية التباطؤية. ذلك باستخدام نظيم مكافئ يسمح بالحصول على حل شامل مباشرة دون استعمال التقريبات المتتالية.

كلمات مفتاحية تكامل برتبة كسرية، اشتقاق برتبة كسرية من نوع كابيتو، وجود و وحدانية الحل، نظريات النقطة الثابتة.