République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Superieur et de la Recherche Scientifique

Université Echahid Hamma Lakhdar d'El Oued

Faculté Des Sciences Exactes
Département de Mathématiques
Mémoire de fin d'étude

MASTER ACADEMIQUE

Domaine : Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématiques
Spécialité : Mathématiques Fondamentales Et Appliquées

Thème

Stabilité pour des équations différentielles non linéaire et d'équation intégro-différentielles à retard

Présenté par : Benseghier Nour El Houda
Bouafia Amina

Soutenu publiquement devant le jury composé de

Président	Dr. Meneceur Bekkar	Univ. d'El-Oued
Encadreur	Dr. Gabsi Hocine	Univ. d'El-Oued
Examinateur	Dr. Hamrouni Ahmed	Univ. d'El-Oued

***Année universitaire :* 2021/2022**

Dédicaces

Je dédie ce travail :

A

mes chers parents, pour tous leurs sacrifices, leur amour, leur tendresse, leur soutien et leurs prières tout au long de mes études.

A

mes chères sœurs

pour leurs encouragements permanents, et leur soutien moral.

A

enfants Ma sœur

A

toute ma famille pour leur soutien tout au long de mon parcours universitaire .

A

le professeur encadreur Dr. Gabsi Hocine pour son

aide continue, ses précieux conseils et être patient avec nous

A

Tous ceux qui n'ont pas été mentionnés

Et qui ont contribué à la réalisation, de près ou de loin, de ce travail vous nos .

Benseghier Nour Elhouda

Dédicaces

Je dédie ce travail :

A

Mes chers parents

Pour leur soutien et leurs encouragements.

A

Mes chers frères

A

Mes chères soeurs

A

L'ensemble du personel de l'université Echahid Hamma Lakdar d'El Oued

Et spécialement les professeurs et plus en particulier le professeur encadreur Dr. Gabsi Hocine

A

Tous ceux qui n'ont pas été mentionnés

Et qui ont contribué à la réalisation, de près ou de loin, de ce travail vous nos .

Bouafia Amina

Remerciements

Au début, Avant toute chose, nous tenons à remercier "Allah" le tout puisant, pour nous avoir donné assez de courage pour accomplir ce travail.

Comme nous tenons à remercier vivement, encadreur de mémoire Dr.Gabsi Hocine pour avoir accepté de m’encadrer dans cette étude Remerciez-le de partager, de le soutenir et de l'encourager tout le temps. durant ce travail.

Nous remercions nos parents et nos frères pour l’aide et

le soutient moral qu’ils nous ont pro digués.

Nous remercions tous ceux qui n’ont pas été mentionnés et qui ont cont ri bué à la réalisation, de près ou de loin, de ce travail.

Résumé

La stabilité de solutions d'équations différentielles à retard joue un rôle important dans l'analyse qualitative des équations différentielles à retard. Dans ce mémoire, nous utilisons des techniques de point fixe pour obtenir des résultats de stabilité de l'équation différentielle neutre non linéaire et de l'équation intégro-différentielle avec retard fonctionnel et nous donnons quelques nouvelles conditions assurant que la solution nulle est asymptotiquement stable au moyen de la théorie du p oint fixe. Des exemples sont aussi. Donnés pour illustrer**.**

Abstract

Stability of solutions in delay differential equations play an important role in the qualitative analysis of delay differential equations. In this memory we use fixed point techniques to obtain stability results of the nonlinear neutral differential equation and integro differential equation with functional delay and here we give some new conditions ensuring that the zero solution is asymptotically stable by means of the fixed-point theory. Examples are also given to illustrate.

ملخص

يلعب استقرار الحلول في المعادلات التفاضلية المتأخرة دورًا مهمًا في التحليل النوعي لمعادلات التأخير التفاضلية. في هذه المذكرة نستخدم تقنيات النقطة الثابتة للحصول على نتائج الاستقرار للمعادلة التفاضلية غير الخطية والمعادلة التفاضلية التكاملية مع التأخير الوظيفي ، وهنا نقدم بعض الشروط الجديدة التي تضمن أن يكون الحل الصفري مستقرًا بشكل مقارب عن طريق نظرية النقطة الثابتة. كما يتم إعطاء أمثلة للتوضيح.

Sommaire

Notations générales

S	Un ensemble non vide.
d	Une distance sur S.
$\mathbb{N}$	Ensemble des entiers naturels.
$\mathbb{R}_+$	Ensemble des nombres réels positifs ou nuls.
$\mathbb{R}^n$	Espace vectoriel de dimension n construit sur le corps des réels.
$\|\cdot\|$	La norme.
$\vert\cdot\vert$	Orthogonal valeur absolue d'un nombre réel.
$C([a,b],\mathbb{R}^n)$	Ensemble des fonctions continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}^n$.
(S,d)	un espace métrique complet.

Introduction

Dans la nature, plusieurs phénomènes sont gouvernés par une classe d'équations différentielles à retard (EDR). Ces équations généralement l'évolution des variables dépendant nous seulement des valeurs actuelles mais dépendant aussi irréductiblement des valeurs prises dans le passé autrement dit elles tiennent compte de l'effet du passé dans la prédiction du futur.

Les équations différentielles à retard constituent un champs d'étude très important pour modéliser des phénomènes d'hérédité rencontrés en physique, biologie, chimie, économie, écologie, etc. Malgré que dans la plupart des modèles, le retard est estimé non signicatif et ignoré pour simplifie l'étude, il a été prouvé que dans de nombreux cas, le retard joue un rôle dominant dans plusieurs domaines et que les modèles avec retard fournissent des résultats plus précis et réalistes que leurs homologue sans retard.

À notre connaissance l'apparition des équations différentielles à retard remonte au 18ème siècle. L'analyse de ces équations à commencer dans les années cinquante, ces années ont vu une explosion de la théorie qui a été largement développée et les (EDR) fait partie du vocabulaire des chercheurs travaillant sur la visco élasticité, les problèmes mécaniques, les réacteurs nucléaires, le êux de chaleurs, les réseaux de neurones, la combustion, l'interaction des espèce, les modèles micro-biologiques, épidémiologiques ou physiologique, ainsi que beaucoup d'autres.

et l'une des premières approches est présenté par "Krasovskii" (1977), qui généralise la deuxième méthode de "Lyaponov". Ensuite de nombreux auteurs, ont développé différents problèmes, concernant l'analyse de la stabilité des équations diérentielles, avec un argument retardé. Parmi les équations différentielles à retard, on distingue ceux qui sont à retard constant. Par exemple : Lorsque, nous passons notre permis de conduire, nous apprenons que le temps de réaction de notre système nerveux, lors de la conduite, est de l'ordre de quelques secondes, et qu'il faut prendre soin de mettre une distance susante entre deux voitures qui se suivent, les épidémies, les maladies, possèdent un temps d'incubation, la dynamite inventé par "Alfred Nobel" dispose d'un dispositif (la mèche) pour retarder le déclenchement de son explosion, son utilisation, serait di cile sans cet arti ce. D'aprés cet exemple, on remarque que le retard peut être utile, il peut même être absolument nécessaire.

Dans le bon vieux temps lorsqu'on parle de stabilité on fait appel systématiquement à la méthode directe de Liapounov. Cette méthode, ou ses corollaires comme la méthode de l'énergie, est resté l'outil fondamental et incontournable pour traiter les problème d'existence, d'unicité et de la stabilité de solutions périodiques des équations différentielles. Néanmoins plusieurs investigateurs ont rencontré beaucoup de difficultés qui persistent dans l'application de cette théorie. En particulier, l'endicape de cette méthode se manifeste les fonctions utilisées dans les équations ne sont pas bornées en temps, si le délai n'est pas borné ou si sa dérivée n'est pas petite. A cela s'a joute aussi la difficulté traditionnelle celle de la construction de la fonctionnelle de Liapounov et l'aspect ponctuel, favorable pour les calculs, des conditions imposées aux fonctions des équations différentielles.

Certaines méthodes visant à stabiliser les équations intégro-différentielles à retard de type neutre non linéaires sont basées sur l'utilisation de la technique de point fixe. Elles peuvent conduire à des résultats très satisfaisants du point de vue pratique. Cette méthode repose sur trois éléments :

- Une application de point fixe ;
- Un espace fonctionnel convenable apte à contenir les solutions souhaitées ;
- Un théorème de point fixe.

Ce mémoire adresse le problème de stabilité par la technique de point fixe pour certaines équations fonctionnelles différentielles/intégro-différentielles non linéaires de type neutre. L'étude de la stabilité faite ici repose sur le théorème de point fixe de Banach. Ce travail est décomposé en trois chapitres, dans le premier chapitre nous rappelons quelques outils de base et nous présentons quelques résultats préliminaires essentiels pour ce travail. Nous donnons en particulier quelques résultats fondamentaux sur la théorie de la point fixe prise à la majorité du fameux livres [5]. Un rappel sur les équations différentielles à retard et les équations différentielles de type neutre pour plus details on renvoi aux reférences, [10],[11],[12].

Dans une deuxième étape on présente deux exemples d'équations différentielles à retard le premier est intégro-différentielles linéaire et l'autre non linéaires de type neutre. Ces exemples font parties des problèmes qui ont résisté à la méthode de Lyapounov. La première équation etant non linéaire à retard non borné $\tau(t) \geq 0$ donnée par l'expression

$$x' = -a(t)\,x(t) + b(t)\,g(x(t - r(t))) + c(t)\,x'(t - r(t)). \tag{1}$$

avec une condition initiale

$$x(t) = \psi(t), t \in [-r_0, 0]$$

où

$$\psi \in C([-r_0, 0], \mathbb{R}), \text{ et } r_0 = \inf\{t - r(t),\ t \geq 0$$

et $\tau : R_+ \longrightarrow R_+$ et $b, a : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions continues. avec $t - r(t) \longrightarrow \infty$, lorsque $t \longrightarrow \infty$.

Avant d'entamer le cas général, nous rappelons d'abord que dans [11] a proposé une méthode pour établir un théorème de stabilité pour l'équation

$$x' = -a(t)\,x(t) + b(t)\,x(t - r)$$

d'ou $r(t) = r > 0$ un retard constant. En clair la fonctionnelle de Liapunov correspond au cette équation est définie par

$$V(t, x_t) = \frac{1}{2}x^2(t) + \delta \int_{t-r}^{t} x^2(s)\,ds$$

avec les conditions suivantes

$$a(t) \geq \delta > 0 \text{ et } |b(t)| \leq \sigma\delta, \quad \sigma < 1$$

en particulier dans le cas les fonctions a, b non bornées alors cette équation est très compliquée.

Dans le dernier chapitre nous étudions une équation étant donnée intégro-différentielles non linéaire. Elle s'identifiet sous la forme

$$x'(t) = -\int_{t-r(t)}^{t} a(t,s)g(x(s))ds. \tag{2}$$

avec une condition initiale

$$x(t) = \psi(t), \ t \in [-r_0, 0] \ \text{avec } r_0 = \inf\{t - r(t), \ t \geq 0\}.$$

avec $t-\tau(t) \longrightarrow \infty$, lorsque $t \longrightarrow \infty$ et $a : R_+ \times [-r_0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : C([-r_0, \infty), R) \longrightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions continues et $g : R_+ \times C([-r_0, \infty), R) \longrightarrow R$. Des cas particuliers d'équation (2) ont été étudiés par de nombreux auteurs. Le équation (2) possède une longue histoire. Motivé par une application biologique en esprit, Volterra a considéré en 1928 la forme particulière suivante

$$x'(t) = \int_{t-r}^{t} a(t-s)x(s)ds. \tag{3}$$

avec un retard constant $r > 0$. Volterra a proposé une méthode pour construire une fonctionnelle de Liapunov pour cette équation et son on œuvre a servi pour plate forme pour tout les investigateurs venu après lui. En 1963, motivé par les remarques de Volterra, Levin a construit une fonctionnelle de Liapunov pour l'analogue non linéaire de (3). Il révisa ensuite ce travail conjoitement avec Nohel inclua l'équation

$$x'(t) = \int_{t-r}^{t} a(t,s)g\left(x(s)\right)ds. \tag{4}$$

D'autres travaux (voir [1]-[22]) qui concernent cette équations ont vu le jour par la suite. En particulier, Burton a proposé une étude de la stabilité par la méthode de point fixe pour (4) lorsque le retard est $r(t) = r$ est constant. Récemment, Becker et Burton [14] ont étudié (4) avec un retard fonctionnel mais contraint à l'hypothèse que $t - r(t)$ soit une fonction strictement croissante.

Dans ce mémoire, on revient sur l'équation (2) pour parler de nouvelles conditions sur a, r, et g sans contraintes sur $t-r(t)$ de sorte que, pour une fonction ψ initialement donnée, une application de point fixe peut être défini sur un espace métrique complet prudemment choisi dans lequel cette application possède un point fixe offrant une solution bornée et stable au problème posé. Ces conditions ont été proposées par Jin et Luo [4]. Jin et Luo ont déjà, dans [4], poussé le contexte de cet exposé à une étape plus avancée qui prend en charge des équations intégro-différentielles totallement non linéaires et qui améliore nettement les résultats antérieurs particulièrement ceux de Becker et Burton [14] avec moins de réstrictions et plus de rigueurs. La méthode de point fixe a été utilisé dans un certain nombre de travaux récents comme [1]-[22].

L'application de cette méthode a aussi montré des avantages significatifs de cette méthode sur celle de Liapunov lorsque les coefficients sont non bornés et/ou si le retard est non borné. les conditions de la première méthode sont en moyenne par contre celles de la deuxième sont toujours ponctuelles. L'idée fondamentale exposé ici permettant d'obtenir la stabilité asymptotique repose sur la donnée d'une fonction v continue soumise à une hypothèse à caractère asymptotique.

Chapitre I

Préliminaires

Sommaire

Ce chapitre est présenter et rappeler un certain nombre d'outils d'analyse, comme la théorie de point fixe et les équations différentielles à retard fonctionnel ainsi que l'essentiel des éléments qui seront utilisés dans la suite de notre travail. Nous en profiterons également pour introduire les principales notations.

I.1 Distances et normes

Les définitions peuvent être données pour des fonctions à valeurs complexes. Mais,dans notre contexte, on parlera seulement des fonctions à valeurs réelles.

Définition I.1.1 *[18] Soit S un ensemble non vide.On dit que d est une distance sur S si et seulement si d une application de $S \times S$ dans R_+ telle que :*

(d1) $\forall (x, y) \in S^2 \; d(x, y) \geq 0, d(x, x) = 0, d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y.$

(d2) $\forall (x, y) \in S^2 d(x, y) = d(y, x)$ *(symétrie).*

(d3) $\forall (x, y, z) \in S^3 d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ *(inégalité triangulaire).*

Dans ce cas,on dit que (S, d) est un espace métrique.

Définition I.1.2 *[18] Soit (S, d) un espace métrique et (x_n) une suite d'élément de S. On dit que (x_n) est une suite de cauchy si et seulement si :*

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall (p, q) \in \mathbb{N}^2, (p \geq n_0) \text{ et } (q \geq n_0) \Longrightarrow d(x_p, x_q) \leq \epsilon.$$

On dit que S est complet si et seulement si toute suite de cauchy de S converge.

Définition I.1.3 *[18] Un ensemble L dans un espace métrique (S, d) est compact si et seulement si chaque suite $\{x_n\} \subset L$ a une sous suite convergente vers une limite appartenant à L.*

On dit que L est relativement compact si et seulement si chaque suite $\{x_n\} \subset L$ a une suite convergente vers une limite appartenant à S (i.e. la fermeture de L est compacte).

Définition I.1.4 *[18] Soit $\{f_n\}$ une suite de fonction défnie sur $[a, b]$ et prend ses valeurs dans $\mathbb{R}$:*

1. *$\{f_n\}$est uniformément bornée sur $[a, b]$ s'il existe une constante $M > 0$ telle que : $|f_n(t)| \leq M$ pour tout n et tout $t \in [a, b]$.*
2. *$\{f_n\}$est équicontinue si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ telle que : $t_1, t_2 \in [a, b]$ et $| \ t_1 - t_2| < \delta$ implique $|f_n(t_1) - f_n(t_2)| < \epsilon, \forall n \in \mathbb{N}$.*

Le premier résultat donne la méthode principale pour prouver la compacit déans les espaces dont lesquels nous intéressons. A savoir les espaces fonctionnels infinis de dimension.

Théorème I.1.1 *(Ascoli-Arzela) [18] Soit $\{f_n(t)\}$une suite de fonction à valeurs réelles dans $[a, b]$. Si $\{f_n(t)\}$ est uniformément bornée et équicontinue, alors, il existe une sous suite qui converge uniformément sur $[a, b]$ vers une fonction continue.*

Lorsque on travaille sur des intervalles non compacts le théorème d'AscoliArzela peut être étendu comme suit.

Théorème I.1.2 *[19] Soit $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ et soit $q : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction continue telle que $q(t) \to 0$ lorsque $t \to \infty$. Si $\{\phi_k(t)\}$ une suite équicontinue de fonction de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}^n$ avec $\{\phi_k(t)\} \leq q(t)$ pour $t \in \mathbb{R}_+$, alors ilexiste une sous suite qui converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$vers une fonction $\phi(t)$ avec $|\phi_k(t)| \leq q(t)$ pour $t \in \mathbb{R}_+$.*

Définition I.1.5 *[19] Un espace vectoriel $(S, +, .)$ est dit un espace normé s'il existe uneapplication $\|.\|$de S dans $\mathbb{R}_+$ telle que pour tout $x, y \in S$ et $\alpha \in \mathbb{R}$*
(i) $\|x\| = 0$ si et seulement si $x = 0$
(ii) $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$
(iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Remarque I.1.1 *Un espace normé est un espace vectoriel dont la norme définie une distance en posant $d(x, y) = \|x - y\|$. Mais un espace vectoriel avec une métrique n'est pas toujours un espace normé.*

Définition I.1.6 *[18] Un espace de Banach est un espace normé complet pour la distance associée à sa norme.*

Les exemples d'espaces suivants sont très utilisés dans ce mémoire.

Théorème I.1.3 *[18] Un sous espace fermé d'un espace de Banach est lui-même de Banach.*

Exemple I.1.1 *[18] L'espace $C = C([a, b], \mathbb{R}^n)$ constitué de fonctions continues $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ est un espace vectoriel. Le nombre $\|f\| = max|f(t)|$, ou $|.|$ est la norme dans $\mathbb{R}^n$, défini une norme rendant $(C, \|.\|)$ un espace de Banach.*

Exemple I.1.2 *[18]*

(a) L'espace $\mathbb{R}^n$sur le corps $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel et il y a plusieures normes appropriées pour cela. Par exemple, si :

$$x=(x_1,......,x_n)\in\mathbb{R}^n,\ \text{alors}\ \|x\|=\max_{1\leq i\leq n}|x_i|\,,\ \|x\|=\sum_{i=1}^{n}|x_i|\ \ \text{et}\ \ \|x\|=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

sont des normes sur $\mathbb{R}^n$.La norme en racine s'appelle la norme . Euclidiennede $\mathbb{R}^n$.Notons que la racine carrée est nécessaire pour que $\|\alpha x\|=|\alpha|\,\|x\|$.

(b) Avec l'une de ces normes $(\mathbb{R}^n,\|.\|)$ est un espace de Banach.Il est omplet parce que l'espace des nombres réels est complet.

(c) Un sous ensemble Ω de $(\mathbb{R}^n,\|.\|)$ est compact si et seulement si Ω est borné et fermé.

Exemple I.1.3 *Soit $\psi:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ une fonction continue et soit S l'ensemble de fonctions continues et bornées $f:[a,\infty)\to\mathbb{R}^n$ avec $f(t)=\psi(t)$ pour $a\leq t\leq b$. Pour $f,g\in S$, on définitf $d(f,g)=\sup\limits_{a\leq t\leq\infty}|f(t)-g(t)|=\|f-g\|_\infty$. Alors (S,d) est un espace métrique complet.*

Exemple I.1.4 $(M,\|.\|)$ *est un espace de Banach .*

Exemple I.1.5 $(Q,|.|_h)$ *est un espace de Banach .*

I.2 Thèorèmes de point fixe

I.2.1 Thèorème du point fixe de Banach

Banach établit un théorème qui s'applique aux fonctions contractantes définies sur des espaces métriques complets.Il affirme qu'une contraction sur espace de Banach a un point fixe unique. Ce théorème (appelé aussi principe de l'application contractante) forme un outil fascinant qui facilite l'étude de la stabilité pour les équations différentielles à retard.

Définition I.2.1 *[5] Soit f une application sur un ensemble S. On appelle point fixe de f tout point x satifaisant $f(x)=x$. S'il existe un tel x, on dit que f possède un point fixe, ce qui est équivalent à dire que l'équation $f(x)-x=0$ possède une solution nulle.*

Définition I.2.2 *[18] Soit (S,d) un espace métrique complet et $P:S\to S$ une application, on dit que P est une contraction s'il existe un $\alpha\in(0,1)$ tell que $x;y\in S$ implique*

$$d(Px,Py)\leq\alpha d(x,y),\quad\alpha\in(0,1)$$

Théorème I.2.1 *(Principe de l'application contractante) [18] Soit (S,d)un espace de Banach, et soit $P:S\to S$ une contraction. Alors, il existe un et seulement un $x\in S$, tel que $f(x)=x$. De plus $x=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$, où $x_{n+1}=f(x_n)$et où x_1 est choisie arbitrairement dans S.*

Théorème I.2.2 *Soit (S,d)un espace métrique complet, supposons qu'il existe une application $P : S \to S$, telle que P^mest une contraction pour certain entier positif m . Alors P admet un point fixe dans S.*
Preuve. *Puisque P^m est une contraction, il existe un et un seul point x vérifie $P^m(x) = x$, ceci implique que $PP^m(x) = Px$ et $P^m(x) = P^mPx$, donc $P^mP(x) = Px$. D'où, Px est aussi un point fixe de P^m et d'après l'unicité de x, $Px = x$. Ainsi, x est un point fixe de P. De plus x est unique en effet, si $Py = y$,alors $P^my = y$ et $x = y$. ce qui achève la démonstration* ■

Théorème I.2.3 *[18] Soit (S,d) un espace métrique compact non vide et supposons que $P : S \to S$, avec $P : S \to S$, avec $d(Px,Py) < d(x,y)$, pour $x \neq y$, alors P admet un point fixe.*

Définition I.2.3 *[18] Soit S un espace topologique si toute application continue $P : S \to S$, admet un point fixe, alors on dit que S a la propriété de point fixe.*

Théorème I.2.4 *(Principe de l'application contractante) [5] Soit (S,d) un espace métrique complet non vide et soit $f : S \to S$ une contraction i.e., il existe une constante $0 \leq k \leq 1$ telle que $d(fx,fy) \leq kd(x,y)$, pour tout $x,y \in S$. Alors f admet un et seul point fixe $x^* \in S(fx^* = x^*)$.*

En règle générale, il est évid ent que, pour résoudre un problème de point fixe on doit identifier trois éléments fondamentau x, à savoir
* Un ensemble convenable S apte pour contenir les solutions du problème
* Une application $P : S \to S$ ayant la particularité qu'un point fixe est solution du problème
* Un théorème de point fixe qui assure l'existence d'un tel point fixe de P sur S.

I.3 Équations différentielles à retard et de type neutre

Une équation différentielle à retard est une équation différentielle dont la dérivée par rapport au temps présent de la solution dépend d'une donnée (de cette solution) sur un temps postérieurs. Une équation différentielle à retard est un model spécifique d'équations différentielles fonctionnelles dans lesquelles la partie fonctionnelle de l'équation est l'évaluation d'une fonctionnelle sur une étape antérieure (le passé) au processus ([6], [10], [11],[12]), Ce type d'équations a connu ces dernières décennies un grand intérrêt. Les investigateurs de toute les disciplines, physique, biologie, économie, logistiques, informatique et autres, trouvent leurs models bien exprimés par des équations à retard qu'avec des EDOS.

I.3.1 Équations différentielles à retard

Étant donné un nombre $r > 0, R = (-\infty,\infty), \mathbb{R}^n$ est l'espace vectoriel de dimension n muni de la norme euclidienne $|.|, C([a,b],\mathbb{R}^n)$ est l'espace de Banach des fonctions continues définies sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ muni de la topologie de la convergence. Si $[a,b] = [-r,0]$ on pose $C = C([-r,0],\mathbb{R}^n)$ et on désigne la norme d'un élément $\varphi \in C$ par $\|\varphi\| = \sup\limits_{-r \leq t \leq 0} |\varphi(t)|$. Si,

$$t_0 \in \mathbb{R}, A \geq 0 \;\text{ et }\; x \in C([t_0 - r, t_0 + A],\mathbb{R}^n),$$

alors pour $t \in [t_0, t_0 + A]$, on définit $x_t \in C$ par $x_t(s) = x(s+t)$ pour tout $s \in [-r, 0]$

Définition I.3.1 *[6] Si D est un sous ensemble de $\mathbb{R} \in C$, et $f : D \in \mathbb{R}$ une fonction donnée, la relation*

$$x'(t) = f(t, x_t), \tag{I.1}$$

où

$$x_t(s) := x(t+s), s \in [-r, 0],$$

est une équation différentielle fonctionnelle à retard sur D notée parfois $EDR(f)$. Le nombre r est appelé le retard.En clair, le cas $r = 0$ correspond au cas des équations différentielles ordinaires. Il est évident qu'une condition initiale appropriée au temps $t = t_0$ exige la détermination de la fonction x sur tout l'intervalle $[t_0 - r, t_0]$

$$x(t) = \psi(t), t \in [t_0 - r, t_0].$$

Ou $\psi : [t_0 - r, t_0] \in \mathbb{R}^n$ est une fonction donnée supposée continue appelée la condition initiale de l'équation à retard I.1. Ainsi, l'équation I.1 peut se mettre sous la forme :

$$x'(t) = f(t, x_t), t \geq t$$

$$x(t) = \psi(t), t \in [t_0 - r, t_0],$$

avec ψ une fonction donnée continue sur tout l'intervalle $[t_0 - r, t_0]$. L'équation I.1 est dite linéaire si $f(t, \varphi) = L(t)_\varphi$, où $L(t)$ est linéaire en chaque t : L'équation I.1 est dite non homogène si $f(t, \varphi) = L(t)_\varphi + h(t)$, où $h(t) \neq 0$. L'équation I.1 est dite autonome si $f(t, \varphi) = g(\varphi), g$ indépendante de t. A titre d'exemple, les équations suivantes sont des équations différentielles à retard

$$x'(t) = 2x(t) + 5x(t-1) \tag{I.2}$$

$$x'(t) = a(t)x(t) + b(t)x'(t - r(t)) + h(t) \tag{I.3}$$

$$x(t) = \int_{-r}^{0} x(t+s)ds \tag{I.4}$$

$a(t), b(t), r(t)$ sont des fonctions continues. L'équation I.2 représente une équation différentielle linéaire autonome à retard constant $r = 1$, l'équation I.3 est une équation différentielle linéaire à retard fonctionnelle non homogène non autonome et l'équationI.4 représente une équation intégro-différentielle linéaire à retard.

Définition I.3.2 *étant donnés $\psi \in C$ et $t_0 \in \mathbb{R}$, une solution de l'Equation I.1 est une fonction notée $x(t)t$ elle que $x(t) = \psi(t)$ si $t \in [t_0 - r, t_0]$et satisfaisant I.1 si $t \in [t_0, t_0 + A]A > 0$. Une telle fonction $x(t)$est dite solution de I.1 à travers (t_0, ψ)et st notée souvent par $x(t) = x(t, t_0, \psi)$.*

Lemme I.3.1 *Etant données une fonction $\psi \in C, t_0 \in \mathbb{R}$ et $f(t, \psi)$ une fonction continue. La recherche d'une solution de l'équation I.1 à travers (t_0, ψ) est équivalente à la résolution de l'équation intégrale*

$$x_{t_0} = \psi$$

$$x(t) = \psi(0) + \int_{t_0}^{t} f(u, x_u)du \ , \ t \geq t.$$

Généralement, on utilise la méthode des étapes pour résoudre les équations différentielles à retard, et pour bien comprende cette méthode on va donner quelques exemples illustratifs

Exemple I.3.1 *Considérons une EDR donnée par*

$$x'(t) = 2x(t-1), t \geq 1, \tag{I.5}$$

avec la condition initiale, $\psi(t) = t$ *si* $0 \leq t \leq 1$. *On résout l'équation I.5 pour* $1 \leq t \leq 5$.*Comme dans l'exemple I.9 on peut obtenir les résultats suivants*

$$x(t) = \begin{cases} 1 + (t-1)^2, 1 \leq t \leq 2, & \psi(1) = 1 \\ \frac{2}{3}(t-2)^3 + 2(t-1), 2 \leq t \leq 3, & \psi(2) = 2 \\ \frac{1}{3}(t-3)^4 + 2(t-2)^2 + \frac{8}{3}, 3 \leq t \leq 4, & \psi(3) = \frac{14}{3} \\ \frac{2}{15}(t-4)^5 + \frac{4}{3}(t-3)^3 + \frac{16}{3}(t-2) - 1, 4 \leq t \leq 5, & \psi(4) = 11 \end{cases}$$

Exemple I.3.2 *Si une EDO est donnée par* $\frac{dx}{dt} = Kx$, *alors un exemple d'une EDR s'écrit sous la forme*

$$\frac{dx}{dt} = Kx(t-r), \tag{I.6}$$

ici, on prend $k = -1$ *et* $r = 1$. *Donc l'équation I.6 devient,*

$$\frac{dx}{dt} = -x(t-1),$$

Si on veut résoudre l'équation, par exemple, au temps $t = 0$ *il est claire qu'on aura besoin de connaître la valeur de* x *au temps* $t = -1$. *Pour résoudre l'équation au temps* $t = 1$, *il est indispensable de savoir la valeur de* x *au temps* $t = 0$. *Par conséquent, pour avoir une solution complète de* $t = 0$ *à* $t = 1$, *on est obligé de connaître une donnée initiale de* $t = -1$ *à* $t = 0$. *Ainsi donc, on doit se doter d'une fonction initiale. Si une telle fonction est notée* $\psi(t)$ *et qu'on lui attribue, par exemple, la valeur* $\psi(t) = 1$, *pour* $t \in [-1, 0]$. *Alors on voit qu'on a sur samment d'informations pour résoudre notre équation lorsque* $t \in [0, 1]$, *et la solution générale sera* $x(t) = -t + c, c =$ *constante. En remplaçant* t *par zero dans cette dernière équation puisque* $\psi(t) = 1$ *,on constate que* $c = 1$. *Ainsi on aura*

$$x(t) = 1 - t, \quad si\ t \in [0, 1].$$

Maintenant, on peut exploiter ces informations pour progresser et résoudre l'équation pour des temps futurs, par exemple pour $t \in [1, 2]$. *Ici on voit que*

$$\begin{aligned} x'(t) &= -(1 - (t-1)) \\ &= t - 2. \end{aligned}$$

Elle possède la solution générale

$$x(t) = \frac{1}{2}t^2 - 2t + d.$$

En utilisant la solution que nous avons trouvé pour $t \in [0, 1]$ *et exactement en* $t = 1$ *onobtient la valeur* $d = \frac{3}{2}$. *Par conséquent,*

$$x(t) = \frac{1}{2}t^2, t \in [1, 2].$$

On peut progresser dans ce processus et résoudre l'EDR comme une série infinie d'EDO.

Théorème I.3.1 *(Existence)[11] Pour l'équation I.1, supposons que Ω est un sous ensemble ouvert de $\mathbb{R} \times C$ et $f(t, \varphi)$ une application continue sur Ω . Si $(t_0, \psi) \in \Omega$, alors il existe une solution de l'équation I.1 passant par (t_0, ψ).*

Définition I.3.3 *On dit que la fonction $f(t, \varphi)$ est Lipschitzienne par rapport à φ sur un compact K de $\mathbb{R} \times C$ s'il existe une constante $K > 0$ telle que, pour tout $(t, \varphi) \in K, i = 1, 2$ on a*

$$f\left|(t, \varphi_1) - f(t, \varphi_2)\right| \leq K \left|\varphi_1 - \varphi_1\right|. \tag{I.7}$$

Théorème I.3.2 *(Unicité)[11] supposons que Ω est un sous ensemble ouvert de $\mathbb{R} \times C$, $f : \Omega \in \mathbb{R}^n$ est continue, $f(t, \varphi)$ est Lipschitzienne par rapport à φ sur tout sous ensemblecompact de Ω. Si $(t_0, \psi) \in \Omega$, alors il existe une unique solution pour l'équation I.1 passant par (t_0, ψ). Dans l'exemple suivant on va utiliser la méthode dites des étapes pour résoudre une équation à retard.*

I.3.2 Équations différentielles de type neutre

On donne ici la définition d'une équation différentielle de type neutre et on donne quelques exemples.

Définition I.3.4 *[13] Supposons que Ω est un sous ensemble ouvert de $\mathbb{R} \times C$ d'éléments (t, φ). Une fonction $D : \Omega \to \mathbb{R}^n$ est dite atomique au point β de Ω si D est continue ainsi que sa première et seconde dérivée au sens de Frechet par rapport à φ et D_φ, est continue.*

Définition I.3.5 *[13]Supposons que Ω est un sous ensemble ouvert de $\mathbb{R} \times C, D : \Omega \to \mathbb{R}^n$ et $f : D : \Omega \to \mathbb{R}^n$ sont deux fonctions données continues avec D atomique en zéro. La relation*

$$\frac{d}{dt} D(t, x_t) = f(t, x_t), \tag{I.8}$$

est dite une équation différentielle de type neutre $(EDTN)$.

Exemple I.3.3 *[13] Si $D(\varphi) = \varphi(0), \forall \varphi$, alors D est atomic au point 0.si $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ une fonction continue, le couple (D, f) définit une $EDRN$ et donc l'$EDFR$ est une $EDRN$.*

Exemple I.3.4 *[13] $r > 0$,$D(\varphi) = \varphi(0) - \varphi^2(t - r)]$ et .$f : \Omega \to \mathbb{R}^n$est continue. Le (D, f) définit une $EDRN$,*

$$\frac{d}{dt} x\left[(t) - x^2(t - r)\right] = f(t, x_t).$$

Exemple I.3.5 *[13] $r > 0, (B)_{n \times n}$ une matrice donnée $D(\varphi) = \varphi(0) - B(\varphi - r)$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ une fonction continue. Le couple (D, f) définit une $EDRN$,*

$$\frac{d}{dt}\left[x(t) - Bx(t - r)\right] = f(t, x_t).$$

Définition I.3.6 *[13] Une fonction x est dite solution de l'équation I.8 sur $[t_0-r, t_0+\sigma]$, s'il existe un $t_0 \in \mathbb{R}$et $\sigma > 0$ tels que $x \in C([t_0-r, t_0+\sigma], \mathbb{R}^n)$, $(t, x_t) \in \Omega$, $t \in [t_0-r, t_0+\sigma]$, $D(t, x_t)$est continunment différentiable et satisfait I.8sur $[t_0-r, t_0+\sigma]$, Etant donnés $t \in \mathbb{R}$,$\psi \in C$ et $(t_O, \psi) \in \Omega$ on dit quex (t, t_0, ψ) est une solution de I.8 passant par (t_0, ψ) s'il existe $\sigma > 0$ telle que $x(t, t_0, \psi)$ est une solution de I.8 sur $[t_0-r, t_0+\sigma]$ et $[t_0-r, t_0+\sigma]$, on dit que $x(t, t_0, \psi)$ est une solution de I.8 sur $[t_0-r, \infty)$ si pour tout $\sigma > 0, x(t, t_0, \psi)$ est une solution de I.8 sur $[t_0-r, t_0+\sigma]$ et $x(t, t_0, \psi)$ Si $D(t, \varphi) = D_0(t, \varphi) - g(t), f(t, \varphi) = L(t, \varphi) + h(t)$, avec $D_0(t, \varphi)$ et $L(t, \varphi)$ sont linéaire, alors l'équation I.8 est dite linéaire. Si $g = 0$,$h = 0$, alors l'équation I.8 est dite homogène.*

Théorème I.3.3 *(Existence)[13] Si Ω est un sous ensemble ouvert de $\mathbb{R} \times C$ et $(t_O, \psi) \in \Omega$, alors il existe une solution pour l'équation I.8 passant par (t_O, ψ).*

Théorème I.3.4 *(Existence et Unicité)[13] Si Ω est un sous ensemble ouvert de $\mathbb{R} \times C$ et $f(t, \varphi)$est Lipschitzienne sur tout sous ensemble compact Ω de , alors pour tout $(t_O, \psi) \in \Omega$ il existe une unique solution pour l'équation I.8passant par (t_O, ψ).*

I.4 Stabilité de solutions pour les équations différentielles à retard

La méthode directe de Liapounov est la méthode la plus générale pour traiter les problèmes d'existence, d'unicité et de stabilité de solutions périodiques des équations différentielles que se soient ordinaires ou fonctionnelles. Néanmoins, pendant ces dernières décenies, plusieurs investigateurs ont rencontré beaucoup de difficultés qui persistent dans cette théorie. Dernièrement, des chercheurs ont réussi à contourner beaucoup de ces problèmes en se basant sur la théorie de point fixe. Considérons le système différentiel

$$x'(t) = F(t, x_t), F(t, 0) = 0. \tag{I.9}$$

On suppose que $F :]-\infty, \infty[\times c \to \mathbb{R}^n$où $C = C([-\alpha, 0], \mathbb{R}^n)$ est l'espace des fonctions continues $\psi : [-\alpha, 0] \to \mathbb{R}^n$,$\alpha > 0$. Ce dernier espace est de Banach lorsque on le muni de la norme $\|\psi\| = \sup\limits_{-r \leq t \leq 0} |\psi(t)|, \psi \in c$ On suppose que F est continue et supposée satisfaire toutes les conditions qui garantissent une solution. On définit

$$C(t) = \{\psi : [t-\alpha, t] \to \mathbb{R}^n, \psi \text{ continue}\}.$$

On a les définitions suivantes.

Définition I.4.1 *[18] La solution zero $(x(t) = 0)$ de l'équation I.9 est dite*

(1) Stable si $\forall \epsilon > 0$, $\forall t_0 \geq 0$, $\exists \delta(\epsilon, t_0) > 0$ tell que :

$$\psi \in C(t_0), \|\psi\| < \delta \quad \text{et } t \geq t_0 \Rightarrow |x(t, t_0, \psi)| < \epsilon$$

(2) Uniformément stable si δ de (1) est indépendante de t_0.

(3) Asymptotiquement stable si elle est stable et si, $\forall t_1 \geq t_0, \exists \eta > 0$ tell que :

$$\psi \in C(t_1), \|\psi\| < \eta \text{ et } t \geq t_1 \Rightarrow |x(t, t_1, \psi)| \to 0 \text{ quandt} \to \infty$$

Si en outre toutes les solutions tendent vers zéro, alors $x = 0$ est globalement asymptotiquement stable .

(4) Uniformément asymptotiquement stable si elle est uniformément stable et s'il existe $\eta > 0$ tel que :

$$\forall \gamma > 0, \exists T > 0 \quad \text{tell que} \quad [t_1 \geq t_0, \psi \in C(t_1), \|\psi\| < \eta \quad \text{et} \quad t \geq t_1 + T] \Rightarrow |x(t, t_1, \psi)| < \gamma$$

I.5 Stabilité par la méthode de point fixe

Lorsqu'on veut étudier la stabilité de la solution triviale d'une équation différentielle à retard par la méthode de point fixe il va falloir procéder comme suit

(I) Une équation différentielle à retard exige avant tout une donnée (une fonction) initiale définie sur un intervalle initiale approprié I_{t0} i.e. $\psi : I_{t0} \to \mathbb{R}^n$. On doit choir aussitot après un espace convenable S de fonctions $\varphi : I_{t0} \cup [t_0, \infty) \to \mathbb{R}^n$ qui coïncident sur I_{t0} avec ψ. Selon les cas de besoins on peut toujours ajouter d'autres restrictions aux fonctions φ de S comme la bornétude par exemple ou la condition $\varphi(t) \to \infty$ lorsque $t \to \infty$. Cette dernière condition s'impose si on souhaite étudier la stabilité asymptotique.

(II) Ensuite on doit inverser l'équation différentielle pour définir ce qu'on appelle une application de point fixe i.e, une application $P : S \to S$ dont le point fixe est solution de l'équation à retard donnée (l'équation originale). Néanmoins, cette inversion peut s'avérer une tache délicate dans plusieurs cas. Par exemple, si l'équation ne possède pas un EDO terme linéaire dans sa structure on ne pourra pas utiliser la variation des paramètres. Il est donc indispensable d'agir autrement et essayer si une transformation de cette équation est possible.

(III) A l'image de l'application $P : S \to S$ obtenu en, un théorème de point fixe doit être choisi permettant à l'équation $P(x) = x$ d'avoir une solution. En particulier si P est une contraction on pourra appliquer le théorème de point fixe de Banach, si P est compacte alors on appliquera le théorème de Schauder ou Schaeffer et si P se met sous forme d'une somme d'une contraction et d'une application compacte alors le théorème hybride de Krasnoselskii peut donner satisfaction. Il devient donc clair que la méthode de stabilité par la méthode de point fixe repose sur trois choses essentielles, la variation des paramètres, un espace complet et un théorème de fixe. Si ces éléments sont réunis alors, on peut, en une étape, conclure l'existence (voire l'unicité) et la stabilité. En outre, on verra que cette méthode exige toujours des conditions en moyenne cependant les conditions de la méthode de Liapounov sont toujours ponctuelles.

Chapitre II

Etude de la stabilité pour une classe d'équations différentielles non linéaire

Sommaire

La méthode directe de Lyapunov n'a donné que de maigre résultats de stabilité et avec beaucoup de restrictions sur le noyau. Il s'est avéré donc que l'espoir d'obtenir des améliorations avec la méthode de Lyapounov semble une tentative vaine. C'est pourquoi, les investigateurs se sont penchés sur la méthode de point fixe qui s'est plus concluante pour ce type d'équations. Ci-dessous, on va utiliser le théorème de point fixe de Banach pour conlure la stabilité asymptotique. En particulier, une application P associée à (II.1) et définie sur un espace métrique complet S de sorte que la solution de (II.1) sera un point fixe de P. L'espace S possède toute les caractéristiques qui fait de la solution bornée, stable et/ou asymptotiquement stable.

II.1 Equations différentielles à retard non linéaire de type type neutre

Dans ce chapitre nous considérons l'équation différentielle non linéaire à retard de type neutre donnée sous la forme

$$x'(t) = -a(t)x(t) + b(t)g\left(x(t-r(t))\right) + c(t)x'(t-r(t)), \tag{II.1}$$

où $a(t), b(t)$ sont continus, $c(t)$ est continûment différentible et $r(t) > 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et est continûment différentible deux fois. Avec une condition initiale.

Notons d'abord, que cette équation possède une très longue histoire et remonte à Volterra.

Avant d'entamer le cas général, rappelons d'abord que si $g\left(x(t-r)\right) = x(t-r)$ et $c(t)$ est identiquement nulle, alors l'équation (II.1) se réduit à l'équation différentielle suivante :

$$x'(t) = -a(t)x(t) + b(t)x(t-r) \tag{II.2}$$

avec $r \geq 0$, a et b sont des fonctions continues et on suppose que :

$$a(t) \geq \delta > 0, \quad |b(t)| \leq \theta\delta, \quad \theta < 1.$$

La fonctionnelle de Liapounov pour ce type de système est donée par :

$$V\left(t, x_t\right) = \frac{1}{2}x^2(t) + \delta \int_{t-r(t)}^{t} x^2(s)ds.$$

Alors en suivant les solutions de II.2 et en utilisant l'inégalité triangulaire on obtient,

$$V' \leq \frac{\delta}{2}\left(\theta - 1\right)\left(x^2\left(t\right) + x^2\left(t-r\right)\right).$$

On conclut que la solution zéro de II.2 est uniformément asymptotiquement stable. Il est difficile dans le cas a et b sont des fonctions bornées avec $|b(t)| \leq a\left(t\right)$ pour toute t, pour éviter ce difficulté on utilise le théorèm du point fixe. Supposons qu'il $L > 0$ telle que si $|x|$, $|y| \leq L$ alors

$$g(0) = 0 \text{ et } |g(x) - g(y)| \leq |x - y|. \tag{II.3}$$

II.1 est plus compliqué que II.2 considéré ci-dessus puisque II.1 n'est pas linéaire et le retard n'est pas constant et de plus il contient un terme dérivé.

$$r'(t) \neq 1 \;,\; \forall t \in \mathbb{R}. \tag{II.4}$$

II.1.1 Transformation et inversion de l'équation

Avant tout on commence par transformer (II.1) pour obtenir une équation moins délicate pour être inverser.

Lemme II.1.1 *Supposons que $r(t)$ est deux fois différentiable et satisfait II.4. Alors $x(t)$ est solution de l'équation (II.1) sur un interval $[0, T)$ et satisfait $x(t) = \psi(t)$ pour $t \in [-r, 0]$ ssi $x(t)$ est solution de l'équation intégrale*

$$\begin{aligned} x(t) &= \left(x(0) - \frac{c(0)}{1-r'(0)}x\left(-r(0)\right)\right)e^{-\int_0^t a(s)ds} + \frac{c(t)}{1-r'(t)}x(t-r(t)) \\ &\quad - \int_0^t (h(u)x(u-r(u)) - b(u)g(x(u-r(u))))e^{-\int_u^t a(s)ds}du, \end{aligned} \tag{II.5}$$

d'où

$$h(u) = \frac{r''(u)c(u) + (c'(u) + c(u)a(u))(1-r'(u))}{(1-r'(u))^2}. \tag{II.6}$$

Preuve. *En multipliant les deux membres de l'équation II.1 par $e^{\int_0^u a(s)ds}$*

$$\left(x(u)e^{\int_0^u a(s)ds}\right)' = \left[b(u)g(x(u-r(u))) + c(u)x'(u-r(u))\right]e^{\int_0^u a(s)ds}.$$

En intégrant de 0 à t

$$\int_0^t \left[x(u)e^{\int_0^u a(s)ds}\right]' du = \int_0^t \left[b(u)g(x(u-r(u))) + c(u)x'(u-r(u))\right] e^{\int_0^u a(s)ds} du.$$

ce qui donne

$$x(t)e^{\int_0^t a(s)ds} - x(0) = \int_0^t \left[b(u)g(x(u-r(u))) + c(u)x'(u-r(u))\right] e^{\int_0^u a(s)ds} du.$$

En divisant les deux membres de l'équation ci-dessus par $e^{\int_0^t a(s)ds}$

$$x(t) = x(0)e^{-\int_0^t a(s)ds} + \int_0^t \left[b(u)g(x(u-r(u))) + c(u)x'(u-r(u))\right] e^{-\int_u^t a(s)ds} du. \quad \text{(II.7)}$$

Ecrivons

$$\int_0^t c(u)x'(u-r(u))e^{-\int_u^t a(s)ds} du = \int_0^t (1-r'(u))x'(u-r(u))\frac{c(u)}{(1-r'(u))} e^{-\int_u^t a(s)ds} du,$$

en effectuant une intégration par partie avec

$$U = \frac{c(u)}{1-r'(u)} e^{-\int_u^t a(s)ds}$$

et

$$dV = (1-r'(u))x'(u-r(u))$$

on obtient

$$\begin{aligned}
&\int_0^t c(u)x'(u-r(u))e^{-\int_u^t a(s)ds} du \qquad \text{(II.8)}\\
&= \frac{c(u)}{1-r'(u)}x(t-r(t)) - \frac{c(0)}{1-r'(0)}x(-r(0))e^{-\int_0^t a(s)ds}\\
&- \int_0^t h(u)x(u-r(u))e^{-\int_u^t a(s)ds} du,
\end{aligned}$$

où $h(u)$ *est donnée par l'expression II.6. Alors la substitution de II.8 dans II.7 achève la démonstration.* ■

II.1.2 Bornétude et stabilité de solutions

Selon ce qu'on a vu au premier chapitre, pour chaque fonction $\psi \in C([-r,0],R)$, une solution de (II.1) à travers $(0,\psi)$ existe. C'est une fonction continue $x : [-r,\sigma) \to \mathbb{R}$, pour une constante positive $\sigma > 0$, telle que x satisfait (II.1) sur $[0,\sigma)$ et coïncide avec sur $[-r,0]$. Elle est notée par $x(t) = x(t,0,\psi)$. Soit $\psi : (-\infty,0] \to \mathbb{R}$ un fontion initiale continue bornée donnée on dit que $x(t) := x(t,0,\psi)$ est un solution de II.1 si $x(t) = \psi(t)$ pour $t < 0$ et vérifie II.1 pour $t \geq 0$

Considérons C l'espace de toutes les fonctions continues de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et définir l'ensemble S_ψ par :

$$S_\psi = \{\varphi \in C : \|\varphi\| \leq L, \varphi(t) = \psi(t), t \leq 0 \text{ et } \varphi(t) \to 0 \text{ lorsque } t \to \infty\}.$$

S_ψ est un espace de Banach, muni de la norme du supremum. Soit les conditions

$$e^{-\int_0^t a(s)ds} \to 0, \text{ lorsque } t \to \infty \tag{II.9}$$

il est $\alpha > 0$ tell que $\alpha < 1$

$$\left|\frac{c(t)}{1-r'(t)}\right| + \int_0^t (|h(u)| + |b(u)|)e^{-\int_u^t a(s)ds}du \leq \alpha, \qquad t \geq 0 \tag{II.10}$$

et

$$t - r(t) \to \infty \text{ lorsque } t \to \infty. \tag{II.11}$$

Théorème II.1.1 *Soit II.3, II.9 et II.11 sont valides, alors tout soultion $x(t, 0, \psi)$ de II.1 avec une fonction initiale continue $\psi(t)$ est bornée et tend vers 0 lorsque $t \to \infty$. De plus, la solution nulle est stable à $t_0 = 0$.*

Preuve. Soient $\alpha < 1$, L et choisissons $\delta > 0$ de sorte que

$$\left|1 - \frac{c(0)}{1-r'(0)}\right| \delta + L\alpha \leq L.$$

Maintenant, pour $\psi : (-\infty, 0] \to \mathbb{R}$ une fonction initiale donnée avec $\|\psi\| < \delta$ on définit à partir de (II.5) l'application $P : S_\psi \to S_\psi$ donnée par $(P\varphi)(t) = \psi(t)$ sur $[-r, 0]$

$$\begin{aligned}(P\varphi)(t) = &\left(\varphi(0) - \frac{c(0)}{1-r'(0)}\varphi(-r(0))\right) e^{-\int_0^t a(s)ds} \\ &+ \frac{c(t)}{1-r'(t)}\varphi(t-r(t)) \\ &- \int_0^t (h(u)\varphi(u-r(u)) - b(u)g(\varphi(u-r(u))))e^{-\int_u^t a(s)ds}du.\end{aligned}$$

Il est clair que $P\varphi$ est continue lorsque φ est aussi. Soit $\varphi \in S_\psi$ alors, en utilisant II.10 dans la définition de P et en appliquant II.3 on a :

$$\begin{aligned}|(P\varphi)(t)| \leq &\left|1 - \frac{c(0)}{1-r'(0)}\right| \delta + \left|\frac{c(t)}{1-r'(t)}\right| L \\ &+ \int_0^t (|h(u)|\,|\varphi(u-r(u))| + |b(u)|\,|g(\varphi(u-r(u)))|)e^{-\int_u^t a(s)ds}du \\ \leq &\left|1 - \frac{c(0)}{1-r'(0)}\right| \delta + \left|\frac{c(t)}{1-r'(t)}\right| L \\ &+ \int_0^t (|h(u)| + |b(u)|)|\varphi(u-r(u))|e^{-\int_u^t a(s)ds}du \\ \leq &\left|1 - \frac{c(0)}{1-r'(0)}\right| \delta + L\left\{\left|\frac{c(t)}{1-r'(t)}\right| + \int_0^t (|h(u)| + |b(u)|)e^{-\int_u^t a(s)ds}du\right\} \\ \leq &\left|1 - \frac{c(0)}{1-r'(0)}\right| \delta + L\alpha.\end{aligned}$$

Ce qui implique que $|(P\varphi)(t)| \leq L$ pour δ. On a donc $\|P\varphi\| \leq L$. Montre ensuite que $(P\varphi)(t) \to 0$ lorsque $t \to \infty$ .Par la condition II.9 ,le premier term de la définition de

$(P\varphi)(t)$ tend vers zéro.Aussi, le second du membre de droite tend vers zéro à case de II.11 et du fait que $\psi \in S_\psi$. Il reste à montrer que le terme intégral tend vers zéro $t \to \infty$. Soit $\epsilon > 0$ arbitraire et $\varphi \in S_\psi$ .Alors $\|\varphi\| \leq L$ et il existe $t_1 > 0$ tell que $|\varphi(t - r(t))| < \epsilon$ pour $t \geq t_1$ .Par condition II.9 ,il existe $t_2 > t_1$ tell que pour $t > t_2$

$$e^{-\int_{t_1}^t a(s)ds} < \frac{\epsilon}{\alpha L}.$$

Ansi pour $t > t_2$,on a :

$$\begin{aligned}
&\left|\int_0^t (h(u)\varphi(u-r(u)) - b(u)g(\varphi(u-r(u))))e^{-\int_u^t a(s)ds}du\right| \\
&\leq \int_0^t (|h(u)|\,|\varphi(u-r(u))| + |b(u)|\,|g(\varphi(u-r(u)))|)\,e^{-\int_u^t a(s)ds}du \\
&\leq \int_0^t (|h(u)| + |b(u)|)\,|\varphi(u-r(u))|\,e^{-\int_u^t a(s)ds}du \\
&\leq L\int_0^{t_1} (|h(u)| + |b(u)|)\,e^{-\int_u^t a(s)ds}du + \epsilon\int_{t_1}^t (|h(u)| + |b(u)|)\,e^{-\int_u^t a(s)ds}du \\
&\leq Le^{-\int_{t_1}^t a(s)ds}\int_0^{t_1} (|h(u)| + |b(u)|)\,e^{-\int_u^{t_1} a(s)ds}du + \alpha\epsilon \\
&\leq \alpha Le^{-\int_{t_1}^t a(s)ds} + \alpha\epsilon \leq \epsilon + \alpha\epsilon.
\end{aligned}$$

$(P\varphi)(t) \to 0$ lorsque $t \to \infty$.

Soit $\varphi, \phi \in S$

$$\begin{aligned}
|(P\varphi)(t) - (P\phi)(t)| \leq &\left|\frac{c(t)}{1-r'(t)}\right|\|\varphi - \phi\| \\
&+ \int_0^t |h(u)(\varphi(u-r(u)) - \phi(u-r(u)))|\,e^{-\int_u^t a(s)ds}du \\
&+ \int_0^t |b(u)(g(\varphi(u-r(u))) - g(\phi(u-r(u))))|\,e^{-\int_u^t a(s)ds}du \\
&\leq \left\{\left|\frac{c(t)}{1-r'(t)}\right| + \int_0^t (|h(u)| + |b(u)|)\,e^{-\int_u^t a(s)ds}du\right\}\|\varphi - \phi\| \\
&\leq \alpha\|\varphi - \phi\|.
\end{aligned}$$

Alors, par le principe de l'application contractante, P possède un et seul point fixe dans S_ψ. Ce point est solution de (II.1) d'après le lemme précédent. Comme x est contenu dans S_ψ, alors il possède aussi les propriétés, i.e bornée et tend vers zéro losque $t \to \infty$. Pour obtenir la stabilité de la solution triviale en $t_0 = 0$, on prend $\|\psi\| \leq \epsilon$ et en remplaçant, L avec ϵ. ∎

II.2 Exemples

II.2.1 Équations différentielle à retard de type neutre

Exemple II.2.1 *Soit l'équation*

$$x'(t) = -a(t)x(t) + b(t)x^2(t - r(t)) + c(t)x(t - r(t))x'(t - r(t)). \tag{II.12}$$

En multipliant les deux membres de l'équation II.12 par $e^{\int_0^u a(s)ds}$

$$\left[x(u)e^{\int_0^u a(s)ds}\right]' = \left[c(u)x(u-r(u))x'(u-r(u)) + b(u)x^2(u-r(u))\right] e^{\int_0^u a(s)ds}.$$

En intégrerant de 0 *à* t

$$\int_0^t \left[x(u)e^{\int_0^u a(s)ds}\right]' du = \int_0^t \left[c(u)x(u-r(u))x'(u-r(u)) + b(u)x^2(u-r(u))\right] e^{\int_0^u a(s)ds} du,$$

ce qui donne

$$x(t)e^{\int_0^t a(s)ds} - x(0) = \int_0^t \left[c(u)x(u-r(u))x'(u-r(u)) + b(u)x^2(u-r(u))\right] e^{\int_0^u a(s)ds} du,$$

on utilise la méthode de variation de paramétre pour obtenir la solution

$$\begin{aligned} x(t)e^{\int_0^t a(s)ds} &= x(0) \\ &+ \int_0^t \left[c(u)x(u-r(u))x'(u-r(u)) + b(u)x^2(u-r(u))\right] e^{\int_0^u a(s)ds} du. \end{aligned} \tag{II.13}$$

En divisant les deux membres de l'équation II.13 par $e^{\int_0^t a(s)ds}$ *on tire*

$$\begin{aligned} x(t) &= x(0)e^{-\int_0^t a(s)ds} \\ &+ \int_0^t \left[c(u)x(u-r(u))x'(u-r(u)) + b(u)x^2(u-r(u))\right] e^{-\int_u^t a(s)ds} du. \end{aligned}$$

Ecrivons

$$\begin{aligned} &\int_0^t c(u)x(u-r(u))x'(u-r(u))e^{-\int_u^t a(s)ds} du \\ = &\int_0^t x(u-r(u))x'(u-r(u))(1-r'(u))\frac{c(u)}{1-r'(u)}e^{-\int_u^t a(s)ds} du. \end{aligned}$$

En effectuant une intégration par partie avec

$$U = \frac{c(u)}{1-r'(u)}e^{-\int_u^t a(s)ds}$$

et

$$dV = x(u-r(u))x'(u-r(u))(1-r'(u)),$$

on obtient

$$\begin{aligned} &\int_0^t x(u-r(u))x'(u-r(u))(1-r'(u))\frac{c(u)}{1-r'(u)}e^{-\int_u^t a(s)ds} du \\ &= \frac{1}{2}x^2(t-r(t))\frac{c(u)}{(1-r'(u))} - \frac{1}{2}x^2(-r(0))\frac{c(0)}{1-r'(0)}e^{-\int_0^t a(s)ds} \\ &- \frac{1}{2}\int_0^t h(u)x^2(u-r(u))e^{-\int_u^t a(s)ds} du, \end{aligned}$$

où $h(u)$ est donnée par l'expression II.6on déduit que une solution de II.12 est donnée par :

$$x(t) = \left(x(0) - \frac{1}{2}\frac{c(0)}{1-r'(0)}x^2(-r(0))\right)e^{-\int_0^t a(s)ds}$$
$$+\frac{1}{2}x^2(t-r(t))\frac{c(t)}{1-r'(t)}$$
$$-\frac{1}{2}\int_0^t (h(u)-2b(u))x^2(u-r(u))e^{-\int_u^t a(s)ds}du.$$

Soit

$$S_\psi = \{\varphi \in C : \|\varphi\| \leq L,\ \varphi(t) = \psi(t)\ si\ t \leq 0\ et\ \varphi(t) \to 0\ lorsque\ t \to \infty\}.$$

Supposons que

$$L\left\{\left|\frac{c(t)}{(1-r'(t))}\right| + \int_0^t |h(u)-2b(u)|e^{-\int_u^t a(s)ds}du\right\} \leq \alpha < 1\ , \qquad t \leq 0. \qquad \text{(II.14)}$$

Théorème II.2.1 *Si II.9 II.11 et II.14 sont vérifiées, alors tout solution $x(t, 0, \psi)$ de II.12,avec une petite fonction initiale continue $\psi(t)$, est bornée et tend vers zéro lorsque $t \to \infty$. De plus la solution nulle est stable à $t_0 = 0$.*
Preuve. *Pour L et α,trouver $\delta > 0$tell que :*

$$\left(\delta + \frac{1}{2}\left|\frac{c(0)}{1-r'(0)}\right|\delta^2\right) + \frac{1}{2}L\alpha \leq L.$$

soit $\psi : (-\infty, 0] \to \mathbb{R}$ une petite fonction intiale bornée donnée avec $\|\psi\| < \delta$. Définissons l'application $P : S_\psi \to S_\psi$ par, pour $t \geq 0$

$$(P\varphi)(t) = \left(\varphi(0) - \frac{1}{2}\frac{c(0)}{1-r'(0)}\varphi^2(-r(0))\right)e^{-\int_0^t a(s)ds}$$
$$+\frac{1}{2}\frac{c(t)}{1-r'(t)}\varphi^2(t-r(t))$$
$$-\frac{1}{2}\int_0^t (h(u)-2b(u))\varphi^2(u-r(u))e^{-\int_u^t a(s)ds}du\ ,$$

$P\varphi$ est continue si φ telle. Soit $\varphi \in S_\psi$ avec $\|\varphi\| \leq L$ .Alors en utilisant II.14 dans la définition de $(P\varphi)(t)$, on obtient

$$|(P\varphi)| \leq \left(\delta + \frac{1}{2}\left|\frac{c(0)}{1-r'(0)}\right|\delta^2\right)$$
$$+\frac{1}{2}L^2\left\{\left|\frac{c(t)}{1-r'(0)}\right| + \int_0^t |h(u)-2b(u)|\,e^{-\int_u^t a(s)ds}du\right\}$$
$$\leq \left(\delta + \frac{1}{2}\left|\frac{c(0)}{1-r'(0)}\right|\delta^2\right) + \frac{1}{2}L\alpha.$$

Ainsi $\|(P\varphi)\| \leq L$ *en choisisant* δ *comme ci-dessus, et* $(P\varphi)(t)$ *est borné .Considérons* t_1 *et* t_2 *comme dans la preuve du Théorème II.1.1.* $t > t_2$ *on a*

$$\begin{aligned}
|(P\varphi)| &= \left(\delta + \frac{1}{2}\left|\frac{c(0)}{1-r'(0)}\right|\delta^2\right)e^{-\int_0^t a(s)ds} + \frac{1}{2}\left|\frac{c(t)}{1-r'(t)}\right|\left|\varphi^2(t-r(t))\right| \\
&+ \frac{1}{2}\int_0^t \left|(h(u)-2b(u))\varphi^2(u-r(u))\right| e^{-\int_u^t a(s)ds}du \\
&\leq \left(\delta + \frac{1}{2}\left|\frac{c(0)}{1-r'(0)}\right|\delta^2\right)\epsilon + \frac{1}{2}\left|\frac{c(t)}{1-r'(t)}\right|\epsilon^2 \\
&+ \frac{1}{2}L^2\epsilon\int_0^{t_1}|h(u)-2b(u))|e^{-\int_u^{t_1}a(s)ds}du + \frac{1}{2}\epsilon^2\int_{t_1}^t |h(u)-2b(u))|e^{-\int_u^t a(s)ds}du \\
&\leq \left(\delta + \frac{1}{2}\left|\frac{c(0)}{1-r'(0)}\right|\delta^2\right)\epsilon + \frac{\alpha\epsilon^2}{2L} + \frac{\alpha\epsilon L}{2}.
\end{aligned}$$

$(P\varphi)(t) \to 0$ *lorsque* $t \to \infty$*. Pour voir que* P *est la contraction sous la norme supremum, soit* $\varphi, \phi \in S_\psi$*. Alors :*

$$\begin{aligned}
&|(P\varphi)(t) - (P\phi)(t)| \\
&\leq \frac{1}{2}\left\{\left|\frac{c(t)}{1-r'(t)}\right| + \int_0^t |h(u)-2b(u)|e^{-\int_u^t a(s)ds}du\right\}\left\|\varphi^2-\phi^2\right\| \\
&\leq \frac{1}{2}(2L)\left\{\left|\frac{c(t)}{1-r'(t)}\right| + \int_0^t |h(u)-2b(u))|e^{-\int_u^t a(s)ds}du\right\}\|\varphi-\phi\| \\
&\leq \alpha\|\varphi-\phi\|.
\end{aligned}$$

Le théorème de Banach implique que P *a un unique point fixe dans* S_ψ *qui résout II.12, est bornée et tend vers zéro quand* $t \to \infty$*. Ainsi on obtient le stabilité de la solution triviale à* $t_0 = 0$*.* ■

II.2.2 Équation intégro-différentielle de type neutre

Considérons l'équation intégrale de Volterra de type neutre

$$x'(t) = -a(t)x(t) + c(t)x'(t-r(t))x(t-r(t)) + \int_{t-r(t)}^t K(t,s)x^2(s)ds, \tag{II.15}$$

où $0 \leq r(t) \leq r_0$ pour une constante r_0.

Si II.4 est vérifiée , alors une solution de II.15 est donnée par

$$\begin{aligned}
x(t) \;&=\; \left[x(0) - \frac{1}{2}x^2(-r(0))\frac{c(0)}{1-r'(0)}\right]e^{-\int_0^t a(s)ds} + \frac{1}{2}x^2(t-r(t))\frac{c(t)}{1-r'(t)} \\
&-\frac{1}{2}\int_0^t\left[h(u)x^2(u-r(u)) - \int_{u-r(u)}^u K(u,s)x^2(s)ds\right]e^{-\int_u^t a(s)ds}du,
\end{aligned}$$

où $h(u)$ est défini par II.6.

Soit L une constante positive et supposons que les conditions suivantes sont satisfaites

$$L\left\{\left|\frac{c(t)}{1-r'(t)}\right| + \int_0^t\left[|h(u)| + \int_{u-r(u)}^u |K(u,s)|ds\right]e^{-\int_u^t a(s)ds}du\right\} \leq \alpha < 1, t \geq 0, \tag{II.16}$$

et que pour tout $\epsilon > 0$ il existe $t_1 > 0$ et $T > 0$ tell que $t_2 \geq t_1$ et $t \geq t_2 + T$, alors

$$e^{-\int_{t_2}^{t} a(s)s} < \epsilon \text{ et } e^{-\int_{0}^{t} a(s)s} \to 0 \text{ lorsque } t \to \infty. \tag{II.17}$$

Dans [21], une équation similaire à II.15 est considérée avec $c(t) \equiv 0$ si les conditions II.4, II.11, II.16 et II.17 sont vérifiées, alors la solution trivial de II.15 est asymptotiqement stable en $t_0 = 0$.

Théorème II.2.2 *Si les conditions II.4, II.11, II.16 et II.17 sont vérifiées, alors le solution trivial de II.15 est asymptotiquement stable à $t_0 = 0$.*

Preuve. Soit $\psi : [-r_0, 0] \to \mathbb{R}$ une fonction initiale bornée donnée avec $\|\psi\| < \delta$. Soit

$$S_\psi = \left\{ \begin{array}{l} \varphi : [-r_0, \infty) \to \mathbb{R} : \varphi(t) = \psi(t) \text{ si } -r_0 \leq t \leq 0 \\ \text{et } \|\varphi\| \leq L \text{ , } \varphi \in C, \text{ et } \varphi(t) \to 0 \text{ lorsque } t \to \infty \end{array} \right\}$$

on définit l'application $P : S_\psi \to S_\psi$. Pour $t \geq 0$

$$\begin{aligned}
(P\varphi)(t) &= \left[\varphi(0) - \frac{1}{2}\varphi^2(-r(0))\frac{c(0)}{1-r'(0)}\right] e^{-\int_0^t a(s)ds} \\
&+ \frac{1}{2}\varphi^2(t-r(t))\frac{c(t)}{1-r'(t)} \\
&- \frac{1}{2}\int_0^t \left[h(u)\varphi^2(u-r(u)) - \int_{u-r(u)}^{u} K(u,s)\varphi^2(s)ds\right] e^{-\int_u^t a(s)ds}du,
\end{aligned}$$

P est bein définie sur S_ψ . Soit $\varphi \in S_\psi$ tell que $\|\varphi\| \leq L$ pour tout $\epsilon > 0$ il existe $t_1 > 0$ tell que pour $t \geq t_1 - r_0$ on a $|\varphi(t)| \leq L$, aussi pour $t_2 \geq t_1$et $t \geq t_2 + T$ on a $e^{-\int_{t_2}^t a(s)ds} < \epsilon$, par conséquent $t \geq t_2 + T$ et t_1 assez grand implique

$$\begin{aligned}
|(P\varphi(t))| &\leq \left(\delta + \frac{1}{2}\left|\frac{c(0)}{1-r'(0)}\right|\delta^2\right)\epsilon + \frac{1}{2}\left|\frac{c(t)}{1-r'(t)}\right|\epsilon^2 \\
&+ \frac{1}{2}L^2\int_0^{t_2}\left[|h(u)| + \int_{u-r(u)}^{u}|K(u,s)|ds\right] e^{-\int_u^{t_2} a(s)ds}e^{-\int_{t_2}^t a(s)ds}du \\
&+ \frac{1}{2}\epsilon^2\int_{t_2}^{t}\left[|h(u)| + \int_{u-r(u)}^{u}|K(u,s)|ds\right] e^{-\int_u^t a(s)ds}du \\
&\leq \left(\delta + \frac{1}{2}\left|\frac{c(0)}{1-r'(0)}\right|\delta^2\right)\epsilon + \frac{\alpha\epsilon^2}{2L} + \frac{\alpha\epsilon L}{2}.
\end{aligned}$$

Autement dit $(P\varphi)(t) \to 0$ lorsque $t \to \infty$ .Aussi $\|\varphi\| \leq L$ imlique $\|P\varphi\| \leq L$ pour δ bien choisée. Nous allons montrer que P est une contration. Pour cela soit $\varphi, \phi \in S_\psi$, alors de II.16 on a :

$$\begin{aligned}
&|(P\varphi)(t) - (P\phi)(t)| \\
&\leq \frac{1}{2}(2L)\left\{\left|\frac{c(t)}{1-r'(t)}\right| + \int_0^t\left[|h(u)| + \int_{u-r(u)}^{u}|K(u,s)|ds\right] e^{-\int_u^t a(s)ds}du\right\}\|\varphi - \phi\| \\
&\leq \alpha\|\varphi - \phi\|.
\end{aligned}$$

Donc P admet un unique point fixe dans S_ψ. ∎

Chapitre III

Stabilité d'équation intégro-différentielles à retard

Dans ce chapitre nous étudions une équation scalaire intégro-différentielle et donnons quelques nouvelles conditions s'assurer que la solution nulle est asymptotiquement stable au moyen de la théorie du point fixe.

Sommaire

III.1 Équation intégro-différentielles linéaire

Considérons l'équation intégro-différentielle suivante :

$$x'(t) = -\int_{t-r(t)}^{t} a(t,s)x(s)ds. \tag{III.1}$$

III.1.1 Transformation et inversion de l'équation

Lemme III.1.1 *l'quation III.1 est équivalente à*

$$x'(t) = B(t, t-r(t))(1-r'(t))x(t-r(t)) + \frac{d}{dt}\int_{t-r(t)}^{t} B(t,s)x(s)ds. \tag{III.2}$$

Où

$$B(t,s) := \int_{t}^{s} a(u,s)du, \ \ avec \ B(t, t-r(t)) = \int_{t}^{t-r(t)} a(u, t-r(t))du.$$

Preuve. *En dérivant le terme intégral de l'équation III.2 , on obtient*

$$\frac{d}{dt}\int_{t-r(t)}^{t} B(t,s)x(s)ds = B(t,t)x\,(t) - B(t,t-r(t))(1-r'(t))x(t-r(t)) + \int_{t-r(t)}^{t} \frac{\partial}{\partial t}B(t,s)x(s)ds.$$

En substituant cela dans l'équation III.2, on s'aperçoit que III.2 est équivalente à III.1 si B vérifie les conditions suivantes

$$B(t,t) = 0 \text{ et, } \frac{\partial}{\partial t}B(t,s)x(s) = a(t,s). \tag{III.3}$$

L'égalité ci-desssus implique

$$B(t,s) = -\int_0^t a(u,s)du + \phi(s). \tag{III.4}$$

Pour une certaine fonction,ϕ et $B(t;s)$ doit satisfaire

$$B(t,t) = -\int_0^t a(u,t)du + \phi(t) = 0.$$

En conséquence

$$\int_0^t a(u,t)du = \phi(t).$$

En substituant ceci dans III.4, nous obtenons

$$B(t,s) = -\int_0^t a(u,s)du + \int_0^s a(u,s)du.$$

Cette définition de B satisfait III.3. Par conséquent, III.1est équivalente à III.2 ∎

Lemme III.1.2 *si $x\,(t)$ est une solution de III.1 sur un intérvalle $[0,T)$ et vérifie la condition initiale $x(t) = \psi(t)$ pour $t \in [-r_0, 0]$ alors $x(t)$ est la solution de l'intégrale équation*

$$\begin{aligned} x\,(t) \quad = \quad & e^{-\int_0^t v(s)ds}\psi\,(0) - e^{-\int_0^t v(u)du}\int_{-r(0)}^{0} [v\,(u) + B\,(0,u)]\,\psi\,(u)\,du \\ & + \int_{t-r(t)}^{t} [v\,(u) + B\,(t,u)]\,x\,(u)\,du \\ & - \int_0^t e^{-\int_s^t v(s)ds} v\,(s) \int_{s-r(s)}^{s} [v\,(u) + B\,(s,u)]\,x\,(u)\,duds \\ & + \int_0^t e^{-\int_s^t v(u)du}\,[v\,(s-r\,(s)) + B\,(s,s-r\,(s))]\,(1-r'\,(s))\,x\,(s-r\,(s))\,ds \end{aligned} \tag{III.5}$$

sur $[0,T)$où $v : [-r_0,\infty) \to \mathbb{R}$ est une fonction continue arbiraire inversement ,si une fonction continue $x(t) = \psi(t)$.Pour $t \in [-r_0, 0]$ et est une solution de III.5 sur un intervalle $[0,\tau)$. Alors $x(t)$ est une solution de III.1 sur $[0,\tau)$

Preuve. En multipliant les deux membres de l'équation III.2 par le facteur $e^{\int_0^t v(s)ds}$ et en intégrons par rapport à s de 0 à $t \in [0,T)$,on obtient

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-\int_0^t v(s)ds}\psi(0) + \int_0^t e^{-\int_s^t v(u)du} v(s)\, x(s)\, ds \\ &+ \int_0^t e^{-\int_s^t v(u)du} \frac{d}{ds}\int_{s-r(s)}^{s} B(s,u)\, x(u)\, duds \\ &+ \int_0^t e^{-\int_s^t v(u)du} B(s, s-r(s))\,(1-r'(s))\, x(s-r(s))\, ds. \end{aligned}$$

En effectuant une intégration par partie, il vient

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-\int_0^t v(s)ds}\psi(0) + \int_0^t e^{-\int_s^t v(u)du}\frac{d}{ds}\int_{s-r(s)}^{s}[v(u)+B(s,u)]\, x(u)duds \\ &+ \int_0^t e^{-\int_s^t v(u)du}[v(s-r(s)) + B(s,s-r(s))]\,(1-r'(s))\, x(s-r(s))\, ds \\ &= e^{-\int_0^t v(s)ds}\psi(0) + e^{-\int_s^t v(u)du}\int_{s-r(s)}^{s}[v(u)+B(s,u))]\, x(u)_0^t \\ &- \int_0^t e^{-\int_s^t v(u)du} v(s)\int_{s-r(s)}^{s}[v(u)+B(s,u)]\, x(u)\, duds \\ &+ + \int_0^t e^{-\int_s^t v(u)du}[v(s-r(s)) + B(s,s-r(s))]\,(1-r'(s))\, x(s-r(s))\, ds, \end{aligned}$$

ce qui conduit à III.5. Inversement, supposons qu'une fonction continue $x(t)$soit égale à $\psi(t)$ sur $[-r_0, 0]$ et vérifie III.5 sur un intervalle $[0,\tau)$. Alors il est dérivable sur $[0,\tau)$. En différenciant III.5 à l'aide de la règle de Leibniz, on obtient III.2 . ■

III.1.2 Bornétude et stabilité asymptotique

Pour une fonction initialement donnée $\psi : [-r_0, 0] \to \mathbb{R}$, on définit l'ensemble $C_\psi \subset C$

$$C_\psi := \{\phi : [-r_0,\infty) \to \mathbb{R}\ ,\ \phi \in C\ ,\ \phi(t) = \psi(t)\ \text{ pour } t \in [r_0, 0]\}.$$

$$\|\phi\| = \sup\{|\phi|\ : t \in\ [0,\infty)\}\ \text{pour } \phi \in C.$$

En d'autres expressions on va s'installer dans l'espace métrique complet (C,d) où d est la métrique induite du supremum

$$d(\phi_1,\phi_2) = \|\phi_1 - \phi_2\| \text{ pour } \phi_1,\phi_2 \in C.$$

Soit $v : [-r_0,\infty) \to \mathbb{R}$ une fonction continue et P une l'application difinie sur $C_\psi$comme suit, pour $\phi \in C_\psi$, on pose $(P\phi)(t) := \psi(t)$ pour toute $t \in [-r_0, 0]$ et pour $t > 0$ on pose

$$\begin{aligned} (P\phi)(t) &= e^{-\int_0^t v(u)du}\psi(0) - e^{-\int_0^t v(u)du}\int_{-r(0)}^{0}[v(u)+B(0,u)]\,\psi(u)du \qquad \text{(III.6)} \\ &+ \int_{t-r(t)}^{t}[v(u)+B(t,u)]\,\phi(u)du \\ &- \int_0^t e^{-\int_s^t v(u)du} v(s)\int_{s-r(t)}^{s}[v(u)+B(s,u)]\,\phi(u)duds \\ &+ \int_0^t e^{-\int_s^t v(u)du}[v(s-r(s))+B(s,s-r(s))]\,(1-r'(s))\phi(s-r(s))ds. \end{aligned}$$

Lemme III.1.3 *suposons qu'il existe des constantes $k \geq 0$ et $\alpha > 0$ tell que :*

$$-\int_0^t v(s)ds \leq k, \tag{III.7}$$

et

$$\int_{t-r(t)}^t |v(u) + B(t,u)|\, du + \int_0^t e^{-\int_s^t v(u)du} |v(s)| \int_{s-r(t)}^s |v(u) + B(s,u)|\, duds \tag{III.8}$$
$$+ \int_0^t e^{-\int_s^t v(u)du} |v(s - r(s)) + B(s, s - r(s))| \, |(1 - r'(s))|\, ds$$
$$\leq \alpha.$$

Pour $t \geq 0$, alors $P : C_\psi \to C_\psi$.

Preuve. *pour $\phi \in C_\psi$, $P\phi$ est continue et concorde avec ψ sur $[-r_0, 0]$ en vertu de la définition de P. Pour $t > 0$, il résulte de III.7 et III.8 que*

$$|(P\phi)(t)| \leq e^k |\psi(0)| + e^k \int_{-r_0}^0 |v(u) + B(0,u)| \, |\psi(t)|\, du + \alpha \|\phi\|. \tag{III.9}$$

En conséquence

$$\|P\phi\| \leq e^k \|\psi\| \left(1 + \int_{-r_0}^0 |v(u) + B(0,u)|\, du\right) + \alpha \|\phi\| < \infty. \tag{III.10}$$

Ainsi $P\phi \in C_\psi$. ■

Définition III.1.1 *La solution nulle de III.1 est dit stable en $t = 0$ si. Pour tout $\epsilon > 0$ il existe un $\delta > 0$ tell que $\psi : [-r_0, 0] \to (-\delta, \delta)$ implique que $t \geq 0$. $|x(t)| < \epsilon$ pour $t \geq -r_0$*

Théorème III.1.1 *Supposons qu'il existe des constantes $k \geq 0$, $\alpha \in (0, 1)$ et une fonction continue $v : [-r_0, \infty) \to \mathbb{R}$ telles que III.7 et III.8 sont valables pour $t \geq 0$. Alors pour chaque fonction continue $\psi : [-r_0, 0] \to \mathbb{R}$, il existe une unique fonction continue $x : [-r_0, 0] \to \mathbb{R}$ avec $x(t) = \psi(t)$ sur $[-r_0, 0]$ qui vérifie III.1 sur $[-r_0, \infty)$. De plus $x(t)$est borné sur $[-r_0, \infty)$. En outre la solution nulle de III.1 est stable à $t = 0$. Si en plus*

$$\int_0^t v(s)ds \to \infty, \tag{III.11}$$

lorsque $t \to \infty$, alors $x(t) \to 0$ lorsque $t \to \infty$

Preuve. *l'espace C_ψ défini par la fonction initiale continue $\psi : [-r_0, 0] \to \mathbb{R}$ pour $\phi, \eta \in$*

C_ψ,

$$\begin{aligned}
|(P\phi)(t)-(P\eta)(t)| \leq & \int_{t-r(t)}^{t} |v(u)+B(t,u)|\,|\phi(u)-\eta(u)|\,du \\
& + \int_0^t e^{-\int_s^t v(u)du}\,|v(s)| \int_{s-r(t)}^{s} |v(u)+B(s,u)|\,|\phi(u)-\eta(u)|\,duds \\
& + \int_0^t e^{-\int_s^t v(u)du}\,|v(s-r(s))+B(s,s-r(s))| \\
& |1-r'(s)|\,|\phi(s-r(s))-\eta(s-r(s))|\,ds \\
\leq & \,(\int_{t-r(t)}^{t} |v(u)+B(t,u)|\,du \\
& + \int_0^t e^{-\int_s^t v(u)du}\,|v(s)| \int_{s-r(t)}^{s} |v(u)+B(s,u)|\,duds \\
& + \int_0^t e^{-\int_s^t v(u)du}\,|v(s-r(s))+B(s,s-r(s))|\,|1-r'(s)|\,ds)\,\|\phi(u)-\eta(u)\|
\end{aligned}$$

Il est clair que la solution nulle de III.1 est stable. Si $x(t)$ est une solution avec la fonction initiale ψ, d'après III.10, on a :

$$(1-\alpha)\,\|x\| \leq e^k\,\|\psi\| \left(1+\int_{-r_0}^{0} |v(u)+B(0,u)|\,du\right).$$

pour tout $\epsilon>0$, il existe un $\delta>0$ tell que $|x(t)|<\epsilon$ pour toutt $t\geq -r_0$ si $\|\psi\|<\delta$.

nous prouvons que la solution de III.1 tend vers zéro lorsque III.11 est vérifiée. On définit C_ψ comme suit :

$$C_\psi^0 := \{\phi : [-r_0,\infty)\to\mathbb{R} : \phi\in C, \phi(t)=\psi(t) \text{ pour } [-r_0,0]\,\phi(t)\to 0 \text{ lorsque } t\to 0\}$$

Depuis C_ψ^0 est un sous-ensemble fermé de C_ψ et (C_ψ^0,d)est complet, l'espace métrique (C_ψ^0,d) est également complet.

$$|(P\phi)(t)| \leq e^{-\int_0^t v(s)ds}\left(|\psi(0)|+\int_{-r_0}^{0}|v(u)+B(0,u)|\,du\right)\alpha\,\|\phi\|_{[t-r(t),t]}+|I_4|+|I_5|$$

$P\to 0$ lorsque $t\to\infty$.Par III.6 et III.8, on a
$\|\phi\|_{[T-r(T),\infty)}<\epsilon/2\alpha$
puisque $t-r(t)\to\infty$ lorsque $t\to\infty$. Pour $t\geq T$,

$$\begin{aligned}
|I_4| \leq & \int_0^T v(s)e^{-\int_s^T v(u)du}\int_{s-r(s)}^{s}|v(u)+B(s,u)|\,duds\,\|\phi\|\,e^{-\int_T^t v(u)du} \\
& + \int_T^t v(s)e^{-\int_s^t v(u)du}\int_{s-r(s)}^{s}|v(u)+B(s,u)duds\,\|\phi\|_{[T-r(T),\infty)}.
\end{aligned}$$

D'après (2.8), il existe un $\tau\geq T$ tel que $\|\phi\|\,e^{-\int_T^t v(u)du}<\epsilon/2\alpha$ pour $t>\tau$. Ainsi, pour tout $\epsilon>0$, il existe un $\tau>0$ tel

que $t>\tau$ implique $I_4<\epsilon$,c'est-à-dire $I_4\to\infty$ lorsque $t\to\infty$. De même, on peut montrer que I_5 tend vers zéro quand $t\to\infty$ ■

III.2 Équation intégro-différentielles non linéaires

La classe d'équations non linéaires integro-differentielles de type neutre

$$x'(t) = -\int_{t-r(t)}^{t} a(t,s)g(x(s))ds \tag{III.12}$$

avec retard fonctionnel $r(t) \geq 0$ est étudiée dans ce chapitre. Cette étude est un travail récent attribué à Jin et Luo et publié dans [4]. Cette étude vise à rechercher les meilleures conditions sur r, a et g pour que, si l'on se dote d'une fonction continue ψ, une application P pour III.12 est construite sur un espace complet C_ψ, prudemment choisi, dans lequel P possède un unique point fixe . La conclusion finale est un théorème de stabilité pour la solution triviale de III.12 avec une condition nécéssaire et suffisante garantissant une telle stabilité. Cette conclusion ne traduit pas uniquement en corrolaires une quantité de résultats anciens comme ceux de Volterra, Levin, Brownell, Ergen ou récents comme ceux de Burton [14], Becker et Burton [14] mais aussi prépare la voie vers de nouvelles perspectives pour manipuler cette équation qui incarne un tas de phénomènes du monde réel de nature physique et biologique. Un exemple illustratif est prévu pour achever ce chapitre.

III.2.1 Transformation et inversion de l'équation

Ici aussi (III.12) ne possède aucun terme non trivial et linéaire pour pouvoir appliquer la méthode de variation de paramètres. Une transformation s'impose alors. Avant de commencer cette inversion rapelons que la théorie d'existence garantie une solution unique $x(t) = x(t, 0, \psi)$ pour (III.12) et ce pour chaque donnée initiale $\psi \in C([-r_0, 0], \mathbb{R})$.

Lemme III.2.1 *L'équation III.12 est équivalente à*

$$x'(t) = B(t, t-r(t))(1-r'(t))g(x(t-r(t))) + \frac{d}{dt}\int_{t-r(t)}^{t} B(t,s)g(x(s))ds. \tag{III.13}$$

Preuve. Raisonnement similaire à III.2. ■

Ayant subi ces manipulations synthétiques, sans changement des propriétés fondamenles, on estime que l'équation (III.13) est prete pour l'intégration.

Lemme III.2.2 *Si $\psi : [-r_0, 0] \to \mathbb{R}$ une fonction initiale continue donnée. Si $x(t)$ est la solution de l'équation III.12 sur un intervalle $[0, T)$ avec $x(t) = \psi(t)$, $t \in [-r_0, 0]$, alors $x(t)$ est une solution de l'équation intégrale,*

$$\begin{aligned}
x(t) &= e^{-\int_0^t v(s)ds}\psi(0) - e^{-\int_0^t v(u)du}\int_{-r(0)}^{0}[v(u) + B(0,u)]\,g(\psi(u))du \\
&+ \int_{t-r(t)}^{t}[v(u) + B(t,u)]\,g(\psi(u))du - \int_0^t e^{-\int_s^t v(u)du}\int_{s-r(s)}^{s}[v(u) + B(s,u)]\,g(x(u))duds \\
&+ \int_0^t e^{-\int_s^t v(u)du}\left[v(s-r(s)) + B(s, s-r(s))\right](1-r'(s))g(x(s-r(s)))ds \\
&+ \int_0^t e^{-\int_s^t v(u)du}v(s)\left[x(s) - g(x(s))\right]ds.
\end{aligned} \tag{III.14}$$

Où $v : [-r_0, \infty) \to \mathbb{R}$ est une fonction arbitraire continue. Réciproquement, si une fonction continue $x(t)$ est égale à $\psi(t)$ pour $t \in [-r_0, 0]$ et est une solution de III.14 sur un intervalle $[0, \tau)$, alros $x(t)$ est une solution de l'équation III.12 sur $[0, \tau)$.

Preuve. En multipliant les deux membres de l'équation III.13 par le facteur $e^{\int_0^t v(u)du}$ et en intégrant de 0 à $t \in [0, T)$, on obtient

$$\begin{aligned}
x(t) &= e^{-\int_0^t v(s)ds}\psi(0) + \int_0^t e^{-\int_s^t v(u)du} v(s)x(s)ds + \int_0^t e^{-\int_s^t v(u)du} \frac{d}{ds}\int_{s-r(s)}^s B(s,u)x(u)duds \\
&+ \int_0^t e^{-\int_s^t v(u)du} B(s, s-r(s))(1-r'(s)x(s-r(s))ds \\
&= e^{-\int_0^t v(s)ds}\psi(0) + \int_0^t e^{-\int_s^t v(u)d} v(s)x(s)ds \\
&+ \int_0^t e^{-\int_s^t v(u)du} \frac{d}{ds}\int_{s-r(s)}^s [v(u) + B(s,u)]\, g(x(u))duds \\
&+ \int_0^t e^{-\int_s^t v(u)du} B(s, s-r(s))(1-r'(s)g(x(s-r(s)))ds \\
&- \int_0^t e^{-\int_s^t v(u)du} \frac{d}{dt}\int_{s-r(s)}^s v(u)g(x(u))duds.
\end{aligned}$$

Pour conclure on effectue une intégration par partie pour obtenir III.14.Inversement, supposons que $x(t)$ une fonction continue, égale à $\psi(t)$ sur $[-r_0, 0]$et vérifie l'équation III.14 sur un intervalle$[0, \tau)$. Alors $x(t)$ est dérivable sur $[0, \tau)$. En Dérivant x à l'aide de la formule de Leibniz on obtient III.13. ■

III.2.2 Bornétude et stabilité asymptotique

Soit $\varphi : [-r_0, \infty) \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Définissons l'application P sur C_ψ^lcomme suit ; pour $\phi \in C_\psi^l$ on pose $P\varphi(t) := \psi(t)$ pour $t \in [-r_0, 0]$ et
pour $t \geq 0$

$$\begin{aligned}
(P\varphi)(t) &= e^{-\int_0^t v(u)du}\psi(0) - e^{-\int_0^t v(u)du}\int_{-r(0)}^0 [v(u) + B(0,u)]\, g(\psi(u))du \\
&+ \int_{t-r(t)}^t [v(u) + B(t,u)]\, g(\phi(u))du \\
&- \int_0^t e^{-\int_s^t v(u)du} v(s)\int_{s-r(s)}^s [v(u) + B(s,u)]\, g(\phi(u))duds \\
&+ \int_0^t e^{-\int_s^t v(u)du} [v(s-r(s)) + B(s, s-r(s))]\,(1-r'(s))g(\phi(s-r(s)))ds \\
&+ \int_0^t e^{-\int_s^t v(u)du} v(s)\,[\phi(s) - g(\phi(s))]\, ds.
\end{aligned}$$

Lemme III.2.3 *Supposons que*

1. *il existe une constante $l > 0$ telle que g vérifie la condition de Lipschitz sur $[-l, l]$ et soit L la constante de Lipschitz pour $g(x)$ et $x - g(x)$ sur $[-l, l]$.*
2. *$v(t) \geq 0$ pour $t \geq 0$.*

3. *il existe une fonction continue* q *telle que* $|B(t;u)| \leq q(u)$ *pour* $t - r(t) \leq u \leq t$.

Alors, il existe une distance d_h *sur* C_ψ^l *telle que, rendant*

4. *l'espace métrique* (C_ψ^l, d) *complet.*

5. P *est contractante sur* $\left(C_\psi^l, d_h\right)$ *si* P *applique* C_ψ^l *dans lui même.*

Preuve. Pour $t \in [-r_0, \infty)$ et pour une constante $k > 4$, définissons

$$h(t) := kL \int_0^t [v(u) + q(u) + \omega(u)]du,$$

où

$$\omega(u) = \begin{cases} 0, \text{ si } u \in [-r_0, 0] \\ |v(u - r(u)) + B(u, u - r(u))](1 - r'(u))|, \text{si } u \in [0, \infty). \end{cases}$$

Soit S l'espace de toutes les fonctions continues $\phi : [-r_0, \infty) \to \mathbb{R}$ telle que :

$$|\phi|_h = \sup\left\{|\phi(t)| e^{-h(t)} : t \in [-r(0), \infty)\right\} < \infty.$$

$(S, |.|_h)$ est un espace de Banach . Ainsi (S, d_h) est un espace métrique complet , où d_h désigne la métrique induite :$d(\phi, \eta) = |\phi - \eta|_h$ pour $\phi, \eta \in s$ .Puisque C_ψ^l est un sous-ensemble fermé de s l'espace métrique $\left(C_\psi^l, d\right)$ est complet et la preuve (4) est complet

comme pour (5) puisque $P : C_\psi^l \to C_\psi^l$ et g satisfait la condition de Lipsichitz sur $[-l, l]$. Pour $\phi, \eta \in C_\psi^l$

$$\begin{aligned}
&|(P\phi)(t) - (P\eta)(t)| e^{-h(t)} \\
&\leq \int_{t-r(t)}^t |v(u) + B(t, u)| L |\phi(u) - \eta(u)| e^{-h(t)+h(u)-h(u)} du \\
&+ \int_0^t e^{-\int_s^t v(u)du} v(s) \int_{s-r(s)}^s |v(u) + B(s, u)| L |\phi(u) - \eta(u)| e^{-h(t)+h(u)-h(u)} duds \\
&+ \int_0^t e^{-\int_s^t v(u)du} \omega(s) L |\phi(s - r(s)) - \eta(s - r(s))| e^{-h(t)+h(s-r(s))-h(s-r(s))} ds \\
&+ \int_0^t e^{-\int_s^t v(u)du} v(s) L |\phi(s) - \eta(s)| e^{-h(t)+h(s)-h(s)} ds \\
&\leq \int_{t-r(t)}^t e^{-KL\int_u^t [v(\theta)+q(\theta)]d\theta} |v(u) + B(t, u)| L |\phi(u) - \eta(u)| e^{-h(u)} du \\
&+ \int_0^t e^{-\int_s^t v(u)du} v(s) \int_{s-r(s)}^s e^{-KL\int_u^s [v(\theta)+q(\theta)]d\theta} |v(u) + B(s, u)| L |\phi(u) - \eta(u)| e^{-h(u)} duds \\
&+ \int_0^t e^{-KL\int_s^t \omega(u)du} \omega(s) L |\phi(s - r(s)) - \eta(s - r(s))| e^{-h(s-r(s))} ds \\
&+ \int_0^t e^{-(KL+1)\int_s^t v(u)du} v(s) L |\phi(s) - \eta(s)| e^{-h(s)} ds.
\end{aligned}$$

Par (3) on a :

$$|v(u) + B(t, u)| \leq v(u) + q(u)$$

Pour $t - r(t) \leq s \leq t$

$$|(P\phi)(t) - (P\eta)(t)| e^{-h(t)} \leq \left(\frac{1}{KL} + \frac{1}{KL} + \frac{1}{KL} + \frac{1}{KL+1}\right) L |\phi - \eta|_h \leq \frac{4}{K} |\phi - \eta|_h,$$

pour tout $t > 0$. Ainsi $d(P\phi, P\eta) \leq \left(\frac{4}{K}\right) d(\phi, \eta)$. Puisque $k > 4$, alors la conclusion que P est une contraction sur (C_{ψ}^{l}, d). ■

Théorème III.2.1 *Supposons que toutes hypothèses du Lemme III.2.3 sont valides.On admet que :*
1) g est impaire et strictement croissante sur $[-l, l]$
2) $x - g(x)$ est non décroissante sur $[0, l]$
3) il existe $\alpha \in (0, 1)$ telle que pour $t \geq 0$

$$\int_{t-r(t)}^{t} |v(u) + B(t,u)|du + \int_{0}^{t} e^{-\int_{s}^{t} v(u)du}|v(u)| \int_{s-r(t)}^{s} |v(u) + B(s,u)|duds$$
$$+ \int_{0}^{t} e^{-\int_{s}^{t} v(u)du}|v(s - r(s)) + B(s, s - r(s))||1 - r'(s)|ds$$
$$\leq \alpha.$$

Alors il existe $\delta \in (0, l)$ tell que pour chaque fonction continue $\psi : [-r_0, 0] \to (-\delta, \delta)$, il existe une fonction unique continue $x : [-r_0, \infty) \to \mathbb{R}$ avec $x(t) = \psi(t)$ sur $[-r_0, 0]$qui est une solution de III.12 sur $[0, \infty)$. En outre, $x(t)$ est délimité par l sur $[-r_0, \infty)$. En outre la solution zéro de l'équation III.12 est stable en $t = 0$.

Preuve. Puisque g est impaire et satisfait la condition de Lipschitz sur $[-l, l]$, $g(0) = 0$ et g est (uniformément) continue sur l'intervalle $[-l, l]$. Alors on peut choisir un nombre δ qui satisfait

$$\delta + g(\delta) \int_{-r(0)}^{0} |v(u) + B(0, u)| du \leq (1 - \alpha) g(l). \tag{III.15}$$

Soit $\psi : [-r_0, 0] \to (-\delta, \delta)$ une fonction continue. L'inégalité III.15 implique que $\delta < l$ puisque $g(l) \leq l$ d'après la condition (2). Ainsi $|\psi(t)| < l$ pour $-r_0 \leq t \leq 0$. Maintenant, on montre que pour une telle ψ, l'application P applique $C_{\psi}^{l} \to C_{\psi}^{l}$. Pour une fonction arbitraire $\phi \in C_{\psi}^{l}$, il en résulte de (1) et (2) que :

$$\begin{aligned}|(P\phi)(t)| \leq \delta + g(\delta) \int_{-r(0)}^{0} |v(u) + B(0, u)| du + g(l) \int_{t-r(t)}^{t} |v(u) + B(t, u)| du \\ + g(l) \int_{0}^{t} e^{-\int_{s}^{t} v(u)du} v(s) \int_{s-r(s)}^{s} |v(u) + B(s, u)| duds \\ + g(l) \int_{0}^{t} e^{-\int_{s}^{t} v(u)du} |v(s - r(s)) + B(s, s - r(s))| |1 - r'(s)| ds \\ + (l - g(l)) \int_{0}^{t} e^{-\int_{s}^{t} v(u)du} v(s)ds\end{aligned}$$

pour $t > 0$. Par (3) et III.15 , on voit que :

$$\begin{aligned}|(P\phi)(t)| &\leq \delta + g(\delta) \int_{-r(0)}^{0} |v(u) + B(0, u)| du + \alpha g(l) + l - g(l) \\ &\leq (1 - \alpha) g(l) + (\alpha - 1) g(l) + l = l.\end{aligned}$$

$|(P\phi)(t)| \leq l$ pour $t \in [-r_0, \infty)$ puisque $|(P\phi)(t)| = |\psi(t)| < l$ pour $t \in [-r_0, 0]$, $P\phi \in C_{\psi}^{l}$. ■

Definition 1 *La solution nullle de III.12 est asymptotiquement stable si elle stable en $t = 0$ et δ existe tell que pour tout fonction continue $\psi : [-r_0, 0] \to (-\delta, \delta)$ la solution $x(t)$ avec $x(t) = \psi(t)$ sur $[-r_0, 0]$ tend vers zéro lorsque $t \to \infty$*

Remarque III.2.1 *Le travail de Becker et Burton dans [14] exige que $t - r(t)$ sout strictement croissant. Cependant dans le présent travail cette condition est supprimée.*

Remarque III.2.2 *Les conditions de [14], parallèles à III.8 et III.11*

$$\int_{t-r(t)}^{t} |G(t,u)| + \int_0^t e^{-\int_s^t G(u,u)du} |G(s,u)|\, duds \le \alpha, \tag{III.16}$$

et

$$\int_0^t G(s,s)ds \to \infty \text{ lorsque } t \to \infty. \tag{III.17}$$

Où $G(t,s) = \int_t^{f(s)} a(u,s)du$, $f(t)$ est l'inverse de $t - r(t)$. En choisissant $v(s) = G(s,s)$ les théorèmes III.1.1 et III.2.1 seréduisent à Théorème 3.3 et 3.10 de [14], respectivement. Ainsi nos résultats généralisent et améliorent ceux de [14].

III.3 Exemple

On Considère l'équation suivante

$$x' = -\int_{0.4635t}^{t} \frac{1}{s^2+1} x(s)ds. \tag{III.18}$$

En suivant la notation de la Remarque III.2.2, on a $f(t) = \frac{t}{0.4625}$ alors :

$$G(t,s) = \int_t^{s/0.4635} \frac{1}{s^2+1} = \frac{s/0.4635 - t}{s^2+1},$$

pour $t \ge 0$ et $0,4635t \le s \le t$. En conséquence

$$\lim_{t\ge 0} \left\{ \int_{0.4635t}^{t} |G(t,u)|\, du + \int_0^t e^{-\int_s^t G(u,u)du} |G(s,s)| \int_{0.4635s}^{s} |G(s,u)|\, duds \right\}$$
$$= 2\left(-\frac{\ln 0.4635 + 1}{0.4635} + 1\right) = 1.003.$$

Alors il existe $t_0 > 0$ telle que :

$$\int_{0.4635}^{t} |G(t,u)|\, du + \int_0^t e^{-\int_s^t G(u,u)du} |G(s,s)| \int_{0.4635}^{s} |G(s,u)|\, duds > 1.002,$$

pour $t \ge t_0$. Cela implique que la condition III.16 n'est pas vérifiée. Ainsi le Théorème 3.3 dans [14] ne peut pas être appliqué à l'Eq III.18. Cependant, par III.2

$$B(t,s) = \int_s^t \frac{1}{s^2+1} du = \frac{s-t}{s^2+1}.$$

En choisissant $v(t) = \frac{t}{t^2+1}$ clairement, la condition III.11 est vérifiée. De plus nous avons

$$\begin{aligned}\int_{t-r(t)}^{t} |v(u) + B(t,u)|\, du &= \int_{0.4635t}^{t} \left|\frac{2u-t}{u^2+1}\right| du \\ &= \int_{0.4635t}^{0.5t} \frac{t-2u}{u^2+1} du + \int_{0.5t}^{t} \frac{2u-t}{u^2+1} du \\ &= t\left(2\arctan 0.5t - \arctan t - \arctan 0.4635t\right) + \ln(t^2+1) \\ &+ \ln(0.4635^2 t^2 + 1) - 2\ln(0.25t^2+1) \\ &=: w(t),\end{aligned}$$

Puisque la fonction $w(t)$ est croissante sur $[0, \infty)$ et

$$\lim_{t\to\infty} w(t) = 1/0.4635 - 3 + 2\ln 2 + 2\ln 0.927 = 0.3992,$$

alors

$$\int_{t-r(t)}^{t} |v(u) + B(t,u)|\, du < 0.3992$$

$$\begin{aligned}&\int_0^t e^{-\int_s^t v(u)du} \left|v(s-r(s)) + B(s, s-r(s))\right| \left|1 - r'(s)\right| ds \\ &= (1/0.4635 - 2) \int_0^t e^{-\int_s^t \frac{u}{u^2+1} du} \frac{s}{s^2 + 1/0.4635^2} ds \\ &< 1/0.4635 - 2 = 0.1575,\end{aligned}$$

et

$$\int_0^t e^{-\int_s^t v(u)du} |v(s)| \int_{s-r(s)}^{s} |v(u) + B(s,u)|\, duds < 0.3992.$$

Soit $\alpha := 0.3992 + 0.1575 + 0.3992 = 0.9559 < 1$ alors la solution nulle de III.18 est asymptotiquement stable par le théorème III.1.1.

Bibliographie

Bibliographie

[1] B.Zhang, Fixed points and stability in differential equations with variable delays,Nonlinear Anal. 63 (2005) e233–242.

[2] C.H.Jin, J.W.Luo, Fixed points and stability in neutral differential equations with variable delays, Proc. Amer. Math. Soc. 136 (2008) 909-918.

[3] C.H.Jin, J.W.Luo, Stability in functional differential equations established using fixed point theory, Nonlinear Analysis 68 (2008) 3307-3315.

[4] C.H.Jin ,J.W. Luo, Stability of an intego-differential equation, Computers and Mathematics with Applications, 57 (2009), 1080-1088.

[5] D.R.Smart, Fixed Point Theorems, in : Cambridge Tracts in Mathematics, vol. 66, Cambridge University Press, London, New York, 1974.

[6] Driver, Rodney David. Ordinary and delay differential equations. Vol. 20. Springer Science Business Media, 2012.

[7] G.Seifert, Liapunov-Razumikhin conditions for stability and boundedness of functional differential equations of Volterra type .J. Differential Equations 14(1973), 424-430.

[8] J.J.Levin, J.A.Nohel, On a nonlinear delay equation. J. Math. Anal. Appl. 8 (1964) 31-44.

[9] J.J.Levin, The asymptotic behavior of the solution of a Volterra equation. Proc. Amer. Math. Soc. 14, (1963) 534-541.

[10] J.K.Hale, Sufficient conditions for stability and instability of autonomous functional-differential equations. Journal of Differential Equations 1.4, 452-482 (1965).

[11] J.k.Hale, Theory of functional differential equations, Springer- Verlag, New York, (1977).

[12] Kuang, Yang, Delay differential equations : with applications in population dynamics. Vol. 191. Academic Press, 1993.

[13] K.Yang, Delay differential equations with applications in population dynamics, Copyright c (1993) by Academic Press, Inc, Volume 191.

[14] L.C.Becker, T.A.Burton, Stability, fixed points and inverse of delays, Proc. Roy.Soc. Edinburgh 136A, (2006) 245-275.

[15] L.Hatvani, Annulus arguments in the stability theory for functional differential equations .Differential Integral Equations 10(1997),No .5,975-1002.

[16] T.A.Burton, Liapunov functionals, fixed points, and stability by Krasnoselskii's theorem, Nonlinear Studies 9 (2002) 181-190.

[17] T.A.Burton, Fixed points and stability of a nonconvolution equation, Proc. Amer. Math. Soc. 132 (2004) 3679 -3687.

[18] T.A.Burton, Stability and periodic solutions of ordinary functional differential equations, Academic Press. NY, (1985).

[19] T.A. Burton , Stability by Fixed Point Theory for Functional Differential Equations, Dover Publications, New York, 2006.

[20] T.A.Burton, Stability by fixed point theory or Liapunov's theory : a comparison, Fixed Point Theory 4 (2003) 15-32.

[21] T.A.Burton, T.Furumochi, Fixed points and problems in stability theory, Dynamical Systems and Applications 10 (2001) 89-116.

[22] T.A.Burton, T.Furumochi, Krasnoselskii's fixed point theorem and stability, Nonlinear Anal 49 (2002) 445-454.