



N° d'ordre :
N° de série :

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la
Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ HAMMA LAKHDAR EL-OUED
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES

Mémoire de fin d'étude

MASTER ACADEMIQUE

Domaine: Mathématiques et Informatique

Filière: Mathématiques

Spécialité: Mathématiques fondamentales et appliquées

Thème

**Analyse d'un problème de contact en
élasto-viscoplasticité avec variable
interne d'état et sans frottement.**

Présenté par : Daga Ali

Chouchani Mohammed Abd Elbasset

Sous la supervision de : Douib Bachir

Soutenu publiquement le : ... /06/2024

Devant le jury composé de :

Mr Rehouma Abd Elhamid	MCA	Univ. El-Oued	Président
Mr Douib Bachir	MCB	Univ. El-Oued	Encadreur
Mr Azeb Ahmed Abd Elaziz	Pr.	Univ. El-Oued	Examinateur

Année universitaire : 2023 -2024

Résumé

L'objectif de ce mémoire porte sur l'étude mathématique d'un problème de contact en élasto-viscoplasticité où le contact est modélisé par une condition de compliance normale sans frottement. Le matériau est modélisé par une loi constitutive générale de nature élasto-viscoplastique avec variable interne d'état. Nous établissons un résultat d'existence et d'unicité de la solution moyennant les techniques de point fixe et des équations d'évolution d'ordre un avec des opérateurs monotones. Finalement, nous étudions la dépendance de la solution par rapport aux conditions de contact et nous prouvons un résultat de convergence.

Mots clés : compliance normale, sans frottement, point fixe, solution faible .

Abstract

The objective of this thesis is to study a mathematical model for frictionless contact between an elastic-viscoplastic body and a foundation. We model the material with a general elastic-viscoplastic constitutive law with internal state variable and the contact with a normal compliance condition.

We derive a variational formulation of the model. We establish existence and uniqueness of a weak solution, using general results on first order nonlinear evolution equations with monotone operators and fixed point arguments. Finally, we study the dependence of the solution on perturbations of contact conditions and prove a convergence result.

Keywords : normal compliance, frictionless , fixed point , weak solution .

الملخص

الهدف من هذا البحث هو الدراسة الرياضية لمسألة تلامس جسم مطاطي و لزج ومرن حيث يتم تقيد الظاهرة بشرط الامتثال الطبيعي دون احتكاك. وان الجسم محل الدراسة مؤسس بقانون سلوك الظاهرة مع متغير داخلي للحالة . لقد برهنا نظرية الوجود والوحدانية للحل مستخدمين تقنيات النقطة الصامدة ومعادلات التطور من الرتبة الأولى مع المؤثرات الرتيبة. وفي النهاية قدمنا دراسة ترابط الحل بشروط التلامس ثم برهنا نظرية تخص التقارب **الكلمات المفتاحية :** ، امتثال طبيعي ، دون الاحتكاك ، نقطة ثابتة ، حل ضعيف.

*Je remercie **Allah** pour ce qu'il m'a permis de faire, puis je présente le fruit de ma récolte à mon âme dans cette vie, **ma mère** qui était mon inclinaison et mon refuge, à **mon père** qui était ma couverture et ma source de force après Dieu , et à **Ma femme ,et mes enfants : Mansour , elJilani et mohammed**, et à **ma mère** qui m'a donné naissance et à ses héritiers ma bonté, et a été ma fierté et mon honneur et à mon soutien après **Allah mes frères** et à La source de mon sourire **Mes soeurs** , et à **la lumière de la famille** et de ses petits-enfants, et à tous **mes petits êtres aimés**, et cette **âme pure** qui nous a quittés, et qui m'a fait terminer mon travail avec un cœur brûlant, que **Allah** ait pitié de toi, à mon cher **Et aux compagnons de la marche et du chemin, mes amis**, et à tous ceux qui m'ont appris la connaissance ou la sagesse tout au long de mon.*

Chouchani Mohammed Abd Elbasset

Je dédie mon mémoire de Master

A ma chère mère "Gaid Aicha"

*A mon chér père "Daga sayah" ,Que la
miséricorde de Dieu soit sur lui.*

A mon chérs et mes chéres frères

*A Ma femme une compagne de combat qui n'a
jamais ménagé ni son temps ni ses efforts*

*A Mes enfants : "Siham " et "Lazhar" et
"Moussa" et "Mohsen" et "Nour" et " Batoul" .*

*A mes chère amis et tout la famille les proches,
tous ceux qui portent un nom de
famille "Ahnani"et "Ghedioui"*

Daga Ali

REMERCIEMENTS

*Nous remercions **Dieu** Tout-Puissant qui ma permis de terminer ce travail.*

*Nous adressons mes remerciements les plus chaleureuses et sincères à notre encadreur le docteur **DOUIB Bachir** de nous avoir beaucoup appris lors de son encadrement de notre mémoire de master. Son enthousiasme et sa compétence m'ont encouragé à mos travaux des recherche sous sa direction.*

*Nous somme très honorée que Monsieur le docteur **Rehouma Abd Elhamid** a accepté de présider le jury de la soutenance de noter mémoire.*

*Nous voudrions adresser tous mes remerciements sincèrement et apprécions au membre du jury Monsieur le docteur **AZEB AHMED Abelaziz**, nous leur prions de trouver ici l'expression de noter plus grande gratitude.*

A tous nos amis et collègues qui ont accompagnés et soutenus durant nos années d'études, qu'ils trouvent ici l'expression de noter gratitude.

Aussi, nous rends hommage à tous nos maîtres et professeurs à partir du primaire, à celles et ceux qui ont stimulé dans nos études, nous leur dis du fond du cœur merci en espérant que cette thèse leur soit dédicacé comme fruit de leur travail.

A tous ceux qui ont contribué à l'achèvement de ces travaux, de près ou de loin, nous remercions et apprécions beaucoup.

*Chouchani Mohammed Abd Elbasset
Daga Ali*

TABLE DES MATIÈRES

Introduction générale	1
Notations principales	3
1 MODÉLISATION DU CONTACT élasto-viscoplastique	5
1.1 Cadre physique	5
1.2 Modèle mathématique	8
1.3 Lois de comportement	9
1.3.1 Lois de comportement élasto-viscoplastique avec variable interne état	9
1.4 Lois de contact	10
1.4.1 Contact sans frottement	10
1.4.2 Contact avec compliance normale	11
2 Outils Mathématiques	12
2.1 Espaces fonctionnels	12
2.1.1 Fonctions continues et continûment différentiables	13
2.1.2 Espaces $L^p(\Omega)$	13
2.1.3 Espace de Hilbert	14
2.1.4 Espace de Sobolev	15
2.2 Espaces liés au problème à étudier	16
2.3 Espaces des fonctions à valeurs vectorielles	19

2.3.1	Espace de Lebesgue $L^p(0, T; X)$	20
2.3.2	Espace de Sobolev $W^{k,p}(0, T; X)$	21
2.4	Éléments d'analyse non linéaire dans un espace de Hilbert	23
2.5	Représentation de Riesz-Fréchet	24
2.6	Théorème du point fixe de Banach	25
2.7	Lemme de type Gronwall	26
3	problème élasto-viscoplasticité avec variable interne d'état et sans frottement	28
3.1	Formulation mécanique du problème	28
3.2	Formulation variationnelle	32
3.3	Existence et unicité de la solution	33
3.4	Dépendance continue	41
	Conclusion générale	46
	Bibliographie	47

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Dans la plupart des systèmes de la mécanique des milieux continus, il existe des situations dans lesquelles un corps déformable entre en contact avec d'autres corps ou bien avec une fondation rigide ou déformable. La problématique du contact est essentiellement de savoir comment les forces sont appliquées sur une structure et comment réagissent ces structures lorsqu'elles subissent ces forces. Les problèmes de contact mécanique apparaissent principalement dans des domaines aussi variés que l'aéronautique, la mécanique automobile, le génie civil, les sciences du bois, la médecine, la production de l'énergie (assemblage des structures, fissuration dans les joints soudés) et les systèmes de transmission. Prenant en compte les comportements divers des milieux continus, elle englobe l'hydrodynamique, la dynamique des gaz, l'élasticité, la plasticité et d'autres types de comportement. Vu l'importance du phénomène, des efforts considérables ont été consacrés à la modélisation, l'analyse ainsi que l'approximation numérique des processus physiques provenant des contacts entre des corps déformables ou entre un corps et une base rigide, déformable ou lubrifiée. Par conséquent, une théorie mathématique générale de la mécanique du contact (MTCM) a actuellement émergée. Elle concerne les structures mathématiques qui sont à la base des problèmes de contact avec des lois constitutives différentes, c'est à dire, différents matériaux, diverses géométries et des conditions de contact différentes. La modélisation des problèmes de contact d'un corps déformable avec une base dépend essentiellement des propriétés mécaniques du matériau considéré, ainsi que des conditions aux limites de contact. Le contact comprend les étapes suivantes : la modélisation mathématique, l'analyse variationnelle incluant

de résultat d'existence et d'unicité de la solution.

Ce travail se donne pour objectif l'étude d'un problème de contact entre une structure élasto-viscoplasticité avec variable interne d'état et sans frottement et une fondation, et endommagement. Nous présentons dans ce mémoire trois chapitres que nous décrivons brièvement : La première chapitre introduit des notations générales de la mécanique nécessaire pour une bonne compréhension de la suite des problèmes traités. Nous commençons par le cadre physique, lois de comportement élasto-viscoplasticité et conditions aux limites. Dans le deuxième chapitre nous donnons quelques rappels sur les espaces fonctionnels et les principales notations utilisées. Ensuite nous passons aux résultats fondamentaux d'analyse non linéaire, les inéquations quasi-variationnelles elliptiques et d'évolution, Triplet de Gelfand et les lemmes de Gronwall et quelques théorèmes qui seront d'une grande utilité pour les démonstrations. certains théorèmes très utiles dans notre travail. Enfin on a consacré le dernier chapitre pour étudier un problème de compliance normale entre un corps élasto-viscoplasticité avec variable interne d'état et sans frottement , nous présentons une formulation variationnelle du problème et nous démontrons l'existence et l'unicité d'une solution faibl. Finalement, nous étudions la dépendance de la solution par rapport aux conditions de contact et nous prouvons un résultat de convergence.

NOTATIONS PRINCIPALES

Si Ω est un domaine de $\mathbb{R}^d (d = 2, 3)$, on note par

\mathbb{R}	l'ensemble des nombres réels,
\mathbb{K}	l'ensemble des nombres réels ou imaginaire,
$\overline{\Omega}$	l'adhérence de Ω ,
Γ	la frontière de Ω supposée régulière,
$\Gamma_i (i = \overline{1, 3})$	une partie mesurable de la frontière Γ ,
$\text{mes } \Gamma_1$	la mesure de Lebesgue $(d - 1)$ dimensionnelle de Γ_1 ,
ν	la normale unitaire sortante à Γ ,
v_ν, v_τ	les composantes normale et tangentielle du champ vectoriel v ,
σ_ν, σ_τ	les composantes normale et tangentielle du champ tensoriel σ ,
$C^1(\overline{\Omega})$	l'espace des fonctions réelles continûment différentiables sur $\overline{\Omega}$,
H	l'espace $L^2(\Omega)^d$,
H_1	l'espace $H^1(\Omega)^d$,
\mathcal{H}	l'espace $L^2_s(\Omega)^{d \times d}$,
\mathcal{H}_1	l'espace $\{\sigma \in \mathcal{H} / \text{Div } \sigma \in H\}$,
$H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$	l'espace de Sobolev d'ordre $\frac{1}{2}$ sur Γ ,
H_Γ	l'espace $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^d$,
$H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$	l'espace dual de $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$,
H'_Γ	l'espace dual de H_Γ ,
W	l'espace $\{\zeta \in H^1(\Omega) / \zeta = 0 \text{ sur } \Gamma_a\}$,
\mathcal{W}	l'espace $\{D = (D_i) / D_i \in L^2(\Omega), \text{div } D \in L^2(\Omega)\}$,

$\gamma : H_1 \longrightarrow H_\Gamma$ l'application trace pour les fonctions vectorielles.

Si H est un espace de Hilbert réel, on utilise les notations suivantes :

$(\cdot, \cdot)_H$ le produit scalaire de H ,
 $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H' \times H}$ le produit de dualité entre H' et H ,
 $|\cdot|_H$ la norme de H ,

De plus, si $[0, T]$ un intervalle de temps, $k \in \mathbb{N}$ et $1 \leq p \leq \infty$, on note par

$C(0, T; H)$ l'espace des fonctions continues sur $[0, T]$ dans H ,
 $C^1(0, T; H)$ l'espace des fonctions continument dérivables sur $[0, T]$ dans H ,
 $L^p(0, T; H)$ l'espace des fonctions mesurables sur $[0, T]$ dans H ,
telles que $\int_0^T |u(t)|_H^p dt < +\infty$ avec les modifications usuelles si $p = +\infty$.
 $|\cdot|_{L^p(0, T; H)}$ la norme de $L^p(0, T; H)$,
 $W^{k, p}(0, T; H)$ l'espace de Sobolev de paramètres k et p ,
 $|\cdot|_{W^{k, p}(0, T; H)}$ la norme de $W^{k, p}(0, T; H)$.

Autre notations :

\dot{u}, \ddot{u} les dérivées première et seconde de u par rapport au temps,
 $\nabla \varphi$ le gradient de φ ,
 $\text{Div } \sigma$ divergence de σ ,
 $\text{div } D$ divergence du vecteur D ,
 $\varepsilon(u)$ le tenseur de déformation,
 \mathbb{S}_d l'espace des tenseurs symétriques du second ordre sur \mathbb{R}^d ,
 Λ^n puissance n de l'opérateur Λ ,
 C des constantes génériques strictements positives,
 Ψ_K fonction indicatrice de K ,
p.p. presque partout,
i.e. c'est-à-dire.

CHAPITRE 1

MODÉLISATION DU CONTACT

ÉLASTO-VISCOPLASTIQUE

Ce chapitre présente une clarification et une idée directrice utilisée dans ce mémoire, nous allons introduire le cadre physique, puis nous rappelons l'équation de mouvement et décrire quelques types des lois de comportement élasto-viscoplastique. Par ailleurs, nous précisons dans ce chapitre les conditions aux limites de contact sans frottement.

1.1 Cadre physique

Nous allons introduire dans ce paragraphe le modèle générale de problème de contact étudiés dans ce mémoire. Le cadre physique est le suivant. Nous envisageons un corps élasto-viscoplastique occupe un domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^d (d = 2, 3)$ avec une surface de Lipschitz Γ qui est divisée en trois parties mesurables disjointes Γ_1, Γ_2 et Γ_3 telles que $\text{mes}\Gamma_1 > 0$. Soit $T > 0$ et $[0, T]$ l'intervalle de temps d'intérêt. Le corps est fixé sur $\Gamma_1 \times (0, T)$, et le champ de déplacement y est donc nul. Des tractions superficielles de densité \mathbf{f}_2 agissent sur $\Gamma_2 \times (0, T)$ et une force volumique de densité \mathbf{f}_0 est appliquée dans $\Omega \times (0, T)$. Le corps est en contact sans frottement avec une fondation déformable sur la surface de contact potentielle $\Gamma_3 \times (0, T)$. De plus, le processus est dynamique et donc les termes inertiels sont inclus dans l'équation du mouvement.

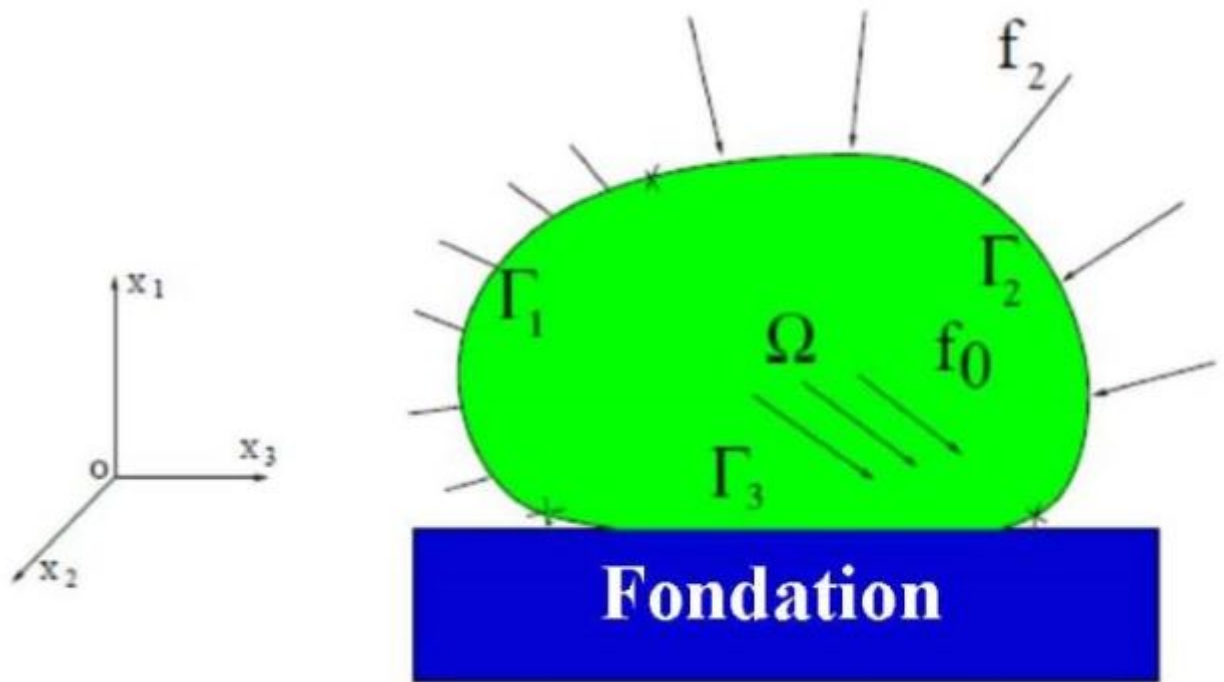


FIGURE 1.1 – corps élasto-viscoplastique en contact avec une fondation

Ensuite, la formulation classique du problème de contact mécanique avec la compliance normale d'un matériau élastique-viscoplastique avec une variable d'état interne est la suivante.

Nous désignons par \mathbb{S}_d l'espace des tenseurs symétriques d'ordre deux sur \mathbb{R}^d ; ". " représente le produit scalaire sur \mathbb{R}^d , \mathbb{S}_d et $|\cdot|$ représentent respectivement la norme sur \mathbb{R}^d et \mathbb{S}_d . Ainsi, nous avons

$$u \cdot v = u_i v_i, \quad |v| = (v \cdot v)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^d,$$

$$\sigma \cdot \tau = \sigma_{ij} \tau_{ij}, \quad |\tau| = (\tau \cdot \tau)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall \sigma, \tau \in \mathbb{S}_d,$$

avec la convention de l'indice muet.

Pour un vecteur v , nous notons par v_ν et v_τ les composantes normale et tangentielle à la frontière définies par

$$\begin{cases} v_\nu = v \cdot \nu, \\ v_\tau = v - v_\nu \cdot \nu. \end{cases} \quad (1.1)$$

Nous désignons par $\sigma = \sigma(x, t)$ le champ des contraintes, par $u = u(x, t)$ le champ des déplacements et par $\varepsilon(u)$ le champ des déformations infinitésimales. Pour simplifier les notations, nous n'indiquons pas explicitement la dépendance des fonctions par rapport à $x \in \bar{\Omega}$ et $t \in [0, T]$.

Nous avons aussi pour un champ des contraintes σ nous dénotons par σ_ν et σ_τ les traces normale et tangentielle d'une fonction $\sigma \in H_1$, on rappelle que lorsque σ est une fonction régulière alors :

$$\begin{cases} \sigma_\nu = (\sigma\nu) \cdot \nu, \\ \sigma_\tau = \sigma\nu - \sigma_\nu \cdot \nu. \end{cases} \quad (1.2)$$

En utilisant (1.1) et (1.2), nous obtenons la relation

$$(\sigma\nu) \cdot v = \sigma_\nu v_\nu + \sigma_\tau \cdot v_\tau, \quad (1.3)$$

qui va intervenir tout au long de ce mémoire, dans l'établissement de formulation variationnelle de problème mécanique de contact.

En outre, les points au-dessus d'une fonction représentent la dérivation par rapport au temps ; par exemple

$$\dot{u} = \frac{du}{dt}, \quad \ddot{u} = \frac{d^2u}{dt^2},$$

où \dot{u} désigne le champ des vitesses et \ddot{u} désigne le champ des accélérations. Pour le champ des vitesses \dot{u} les notations \dot{u}_ν et \dot{u}_τ représentent respectivement les vitesses normale et tangentielle à la frontière, c'est-à-dire

$$\begin{cases} \dot{u}_\nu = \dot{u} \cdot \nu, \\ \dot{u}_\tau = \dot{u} - \dot{u}_\nu \cdot \nu. \end{cases}$$

Rappelons maintenant la relation déformation déplacement dans l'hypothèse des petites transformations

$$\varepsilon(u) = (\varepsilon_{ij}(u)), \quad \varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad 1 \leq i, j \leq d, \quad (1.4)$$

nous allons maintenant décrire le modèle mathématique associé au cadre physique que nous avons vu au conditions précédent.

1.2 Modèle mathématique

Soit un corps matériel qui occupe un domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ avec une surface frontière $\partial\Omega = \Gamma$ supposée assez régulière. Du point de vue mécanique, on étudie le nouvel état d'équilibre du corps résultant de l'application des forces volumiques dans Ω et des force surfacique sur une partie de la frontière Ω , dans un intervalle de temps $[0, T]$. Le modèle mathématique décrit l'évolution du corps qui occupe le domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^d$.

Les fonctions inconnues de notre problème \mathcal{P} sont le champ des déplacements $u : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$, le champ des contraintes $\sigma : \Omega \times [0, T] \rightarrow S_d$, et le champ de variable interne d'état $\mathbf{k} : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^m$.

On sait qu'en général, l'évolution d'un corps matériel est décrite par l'équation de mouvement de cauchy

$$\text{Div } \sigma + f_0 = \rho \ddot{u} \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (1.5)$$

où $\rho : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$ désigne la densité de masse, et "Div" représente l'opérateur divergence pour le tenseurs; $\text{Div } \sigma = (\sigma_{ij,j})$. Le processus d'évolution défini par (1.5) s'appelle processus dynamique. Dans certaines situation, cette équation peut encore se simplifier, par exemple, dans la cas où le champ des vitesses \dot{u} varie très lentement par rapport au temps, le terme $\rho \ddot{u}$ peut être négligé, dans ce cas l'équation (1.5) devient

$$\text{Div } \sigma + f_0 = 0 \quad \text{dans } \Omega \times (0, T). \quad (1.6)$$

L'équation (1.6) s'appelle l'équation d'équilibre. Le processus d'évolution défini par (1.6) s'appelle processus quasi-statique.

Nous rappelons que dans le cadre physique, f_0 et f_2 varient très lentement par rapport au temps, par conséquent, nous supposons que les accélérations dans le système sont négligeables, nous plaçons donc le cas quasi-statique et nous utilisons l'équation (1.6). Puisque le corps est encastré sur Γ_1 , le champ des déplacements s'annule

$$u = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1 \times (0, T). \quad (1.7)$$

La condition aux limites en traction est

$$\sigma \nu = f_2 \quad \text{sur } \Gamma_2 \times (0, T), \quad (1.8)$$

f_2 étant une donnée du problème.

1.3 Lois de comportement

Les lois de comportement sont des relations entre le tenseur des contraintes et le tenseur des déformations et leurs dérivées. C'est toute une série d'essais qu'il faut imaginer et réaliser pour établir une lois de comportement. Les expériences physiques pour les matériaux unidimensionnels constituent le point de départ dans l'établissement des lois de comportement. Voici quatre exemples classiques d'essais sur les solides : essais de chargement monotone, essais de charge-décharge, essais de fluage et essais de relaxation. Dans la description des phénomènes purement mécanique, par lois de comportement (ou lois constitutive) nous comprenons dans la suite une relation entre le tenseur des contraintes σ , le tenseur des déformations infinitésimales ε et leurs dérivées temporelles $\dot{\sigma}$ et $\dot{\varepsilon}$.

Nous présentons par la suite les lois de comportement des matériaux : matériaux élasto-viscoplastique avec variable interne d'état .

1.3.1 Lois de comportement élasto-viscoplastique avec variable interne d'état

Une loi de constitutive dun matériau élasto-viscoplastique avec variable interne d'état est donnée par

$$\sigma(t) = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{\mathbf{u}}(t)) + \mathcal{E}\varepsilon(\mathbf{u}(t)) + \int_0^t \mathcal{G}(\sigma(s) - \mathcal{A}\varepsilon(\dot{\mathbf{u}}(s)), \varepsilon(\mathbf{u}(s)), k(s)) ds \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (1.9)$$

où \mathbf{u} désigne le champ de déplacement, σ représente le tenseur des contraintes, $\varepsilon(u)$ est le tenseur des déformations linéarisé, \mathcal{A} est l'opérateur de viscosité et \mathcal{E} est l'opérateur d'élasticité. \mathcal{G} est une fonction constitutive non linéaire décrivant le comportement viscoplastique du matériau et dépendant de la variable interne d'état k . L'évolution du champ de variable interne d'état est donnée par l'équation différentielle suivante :

$$\dot{k}(t) = \phi(\sigma(t) - \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}(t)), \varepsilon(u(t)), k(t)), \quad (1.10)$$

où ϕ est une fonction non linéaire dépendant aussi de la variable interne d'état k .

Nous supposons que \mathbf{k} est une fonction de valeur vectorielle dont l'évolution est régie par l'équation différentielle (1.10) .

Dans (1.9) et partout ailleurs, le point au dessus d'une variable représente la dérivée par rapport à la variable temporelle t . Il découle de (1.9) qu'à chaque instant t , le tenseur de contrainte $\sigma(t)$ est divisé en deux parties : $\sigma(t) = \sigma^V(t) + \sigma^R(t)$, où $\sigma^V(t) = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{\mathbf{u}}(t))$ représente la partie purement visqueuse de la contrainte tandis que $\sigma^R(t)$ satisfait une relation élastique-viscoplastique de type taux avec une variable d'état interne

$$\begin{aligned}\sigma^R(t) &= \mathcal{E}\varepsilon(\mathbf{u}(t)) + \int_0^t \mathcal{G}(\sigma^R(s), \varepsilon(\mathbf{u}(s)), \mathbf{k}(s)) ds, \\ \dot{\mathbf{k}}(t) &= \phi(\sigma^R(t), \varepsilon(\mathbf{u}(t)), \mathbf{k}(t)).\end{aligned}\tag{1.11}$$

Lorsque $\mathcal{G} = 0$ la loi constitutive (1.9) se réduit à la relation constitutive viscoélastique de Kelvin-Voigt donnée par

$$\sigma(t) = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{\mathbf{u}}(t)) + \mathcal{E}\varepsilon(\mathbf{u}(t))\tag{1.12}$$

Exemples et interprétation mécanique des matériaux élastiques-viscoplastiques de la forme (1.11) dans lesquels la fonction \mathcal{G} ne dépend pas de la variable interne \mathbf{k} ont été considérés par de nombreux auteurs : voir par exemple [5, 12] et les références qui y sont mentionnées. Les problèmes de contact pour les matériaux de la forme (1.9) et (1.11) sans variable interne et (1.12) sont le sujet de nombreux articles, par exemple [3, 9, 10, 13, 17, 18] et les références récentes [2, 11] . Les problèmes de contact pour les matériaux élastiques-viscoplastiques de la forme (1.11) et (1.12) ont été étudiés dans [5, 8, 19] . Les problèmes de contact dynamique sans frottement pour les matériaux de la forme (1.9), dans lesquels la variable d'état interne représente le champ de dommages dont l'évolution est décrite par une inclusion différentielle, sont étudiés dans [20, 21].

1.4 Lois de contact

1.4.1 Contact sans frottement

Dans un contact parfait, où sans frottement, l'action mécanique transmissible par obstacle entre deux solides ne peut être en tout point que normale au contact (perpendiculaire au plan tangent commun du contact). Ceci se traduit par la relation

$$\sigma_\tau = 0 ,\tag{1.13}$$

qui signifie que la contrainte tangentielle est nulle. Si ce n'est pas le cas, on dit que le mouvement tangentielle se produit avec frottement ce qui nous oblige à introduire une lois de frottement qui prend en considération la composante tangentielle avec les autres variables du système.

1.4.2 Contact avec compliance normale

Dans ce cas, la fondation est supposée déformable et la zone de contact n'est pas connue à priori. La contrainte normale σ_ν satisfait la condition dite de compliance normale.

$$-\sigma_\nu = p_\nu (u_\nu - g), \quad (1.14)$$

où u_ν est le déplacement normal, g représente l'interstice entre le corps et la fondation et p_ν est une fonction positive donnée, appelée fonction de compliance normale. Cette condition indique que la fonction exerce une action sur le corps en fonction de sa pénétration $u_\nu - g$. Si le corps repose sur la fondation l'interstice est nul, $g = 0$. Comme exemple de la fonction p_ν nous pouvons considérer,

$$p_\nu(r) = c_\nu r_+ \quad (1.15)$$

où c_ν est une constante positive et $r_+ = \max\{0, r\}$. Un deuxième exemple est donné par :

$$p_\nu = \begin{cases} c_\nu r_+ & \text{si } r \leq \alpha \\ c_\nu \alpha & \text{si } r > \alpha \end{cases} \quad (1.16)$$

où α est un coefficient positif relatif à la dureté de la surface. Dans se cas, la condition de contact (1.14) signifie que lorsque la pénétration est trop profonde, i.e. quand elle dépasse α la fonction se désintégré et n'offre plus de résistance à la pénétration.

Dans ce chapitre, nous introduisons les espaces fonctionnels utilisés dans ce mémoire, et donnons quelques propriétés nécessaires dans la suite. Partout dans ce chapitre Ω est un domaine borné et lipschitzien de \mathbb{R}^d ($d = 2, 3$), de frontière Γ représentable localement comme le graphe d'une fonction lipschitzienne sur un ouvert de \mathbb{R}^{d-1} , Ω étant situé localement d'un seul côté de Γ . Par ailleurs, nous considérons une partition Γ en trois parties mesurables disjointes Γ_1 , Γ_2 et Γ_3 telles que $\text{mes } \Gamma_1 > 0$.

2.1 Espaces fonctionnels

Dans cette section, nous faisons quelques rappels sur les espaces de fonctions à valeurs réelles. Nous allons aborder les espaces de fonctions continues, continûment différentiables, les espaces de Hilbert, les fonctions p-intégrables et les espaces de Sobolev, qui nous permettront d'introduire les espaces spécifiques à la mécanique au prochaine section. Nous rappelons par la suite les définitions et quelques propriétés de ces espaces. Nous ne donnons pas de démonstrations afin de pas rallonger la longueur de ce chapitre.

2.1.1 Fonctions continues et continûment différentiables

L'espace des fonctions uniformément continues sur Ω est noté par $C(\overline{\Omega})$ et il est un espace de Banach pour la norme donnée par :

$$|v|_{C(\overline{\Omega})} = \sup\{|v(x)|, x \in \overline{\Omega}\}.$$

Toute fonction uniformément continue est bornée et possède une unique extension continue sur $\overline{\Omega}$. Pour tout entier k , l'espace $C^k(\overline{\Omega})$ donné par

$$C^k(\overline{\Omega}) = \{v \in C(\overline{\Omega}) / D^\alpha v \in C(\overline{\Omega}) \text{ pour } |\alpha| \leq k\},$$

est l'espace des fonctions continues sur $\overline{\Omega}$ dont les dérivées d'ordre au plus k sont également continues sur $\overline{\Omega}$. Il est aussi un espace de Banach s'il est muni de la norme

$$|v|_{C^k(\overline{\Omega})} = \sum_{|\alpha| \leq k} |D^\alpha v|_{C(\overline{\Omega})}.$$

L'espace $C^\infty(\Omega)$ désigne l'espace des fonctions indéfiniment différentiables :

$$C^\infty(\overline{\Omega}) = \bigcap_{k=0}^{\infty} C^k(\overline{\Omega}).$$

Nous pouvons maintenant parler de l'espace des fonctions indéfiniment différentiables sur l'ensemble à support compact inclus dans Ω , défini par

$$C_0^\infty(\Omega) = \{v \in C^\infty(\Omega) / \text{supp } v \subset \Omega\},$$

où $\text{supp } v = \overline{\{v \in C^\infty(\Omega) / v(x) \neq 0\}}$ est le support de la fonction v . Si $\text{supp } v$ est un sous ensemble propre de Ω , on dit que v est une fonction à support compact dans Ω .

2.1.2 Espaces $L^p(\Omega)$

On suppose connues la définition des applications mesurables pour la mesure de Lebesgue et la définition de $L^1(\Omega)$, l'espace des fonctions intégrables sur Ω , muni de la norme définie par

$$|v|_{L^1(\Omega)} = \int_{\Omega} |v(x)| dx.$$

Définition 2.1.1. *L'espace des fonctions de puissance p -ième intégrables dans Ω peut être défini par :*

$$L^p(\Omega) = \{v \text{ mesurables sur } \Omega \text{ à valeurs dans } \mathbb{K} / |v|_{L^p(\Omega)} \in L^1(\Omega)\}.$$

Grâce à l'inégalité de Minkowski, c'est un espace normé, dont la norme, noté $|v|_{L^p}$ est définie par :

$$|v|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |v|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

On appelle l'espace de Lebesgue $L^\infty(\Omega)$ l'ensemble

$$L^\infty(\Omega) = \{v : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable; } \exists C > 0, |v(x)| \leq C \text{ p.p. sur } \Omega\},$$

muni de la norme définie par

$$|v|_{L^\infty(\Omega)} = \inf\{C; |v(x)| \leq C \text{ p.p. sur } \Omega\}.$$

2.1.3 Espace de Hilbert

Soit H un espace vectoriel réel et $(\cdot, \cdot)_H$ un produit scalaire sur H i.e.

$(\cdot, \cdot)_H : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ est une application bilinéaire symétrique et définie positive.

On note par $|\cdot|_H$ l'application de $H \rightarrow \mathbb{R}_+$ définie par :

$$|u|_H = (u, u)_H^{\frac{1}{2}}, \quad (2.1)$$

et on rappelle que $|\cdot|_H$ est une norme sur H qui vérifie l'inégalité de Cauchy-Schwartz :

$$|(u, v)_H| \leq |u|_H |v|_H, \quad \forall u, v \in H. \quad (2.2)$$

On dit que H est un espace de Hilbert si H est complet pour la norme défini par (2.1). Soit H' l'espace dual de H c'est à dire l'espace des fonctionnelles linéaires et continues sur H muni de la norme :

$$|\eta|_{H'} = \sup_{v \in H - \{0\}} \frac{|\langle \eta, v \rangle_{H' \times H}|}{|v|_H},$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H' \times H}$ représente le produit de dualité entre H' et H .

2.1.4 Espace de Sobolev

L'espace de Sobolev ont permis de résoudre de bon nombre des problèmes concernant les équations aux dérivées partielles sans réponse jusque là.

On commence par un bref rappel de quelques résultats sur l'espaces de Sobolev $H^1(\Omega)$ défini par :

$$H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) \mid \nabla u_i \in L^2(\Omega), \quad i = 1, 2, \dots, d\}.$$

On note par ∇u le vecteur de composante ∇u_i . On a $\nabla u \in L^2(\Omega)^d$ pour tout $u \in H^1(\Omega)$.

On sait que $H^1(\Omega)$ est un espaces de Hilbert pour le produit scalaire

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = (u, v)_{L^2(\Omega)} + (\nabla u_i, \nabla v_i)_{L^2(\Omega)},$$

et la norme associée

$$|u|_{H^1(\Omega)} = (u, u)_{H^1(\Omega)}^{\frac{1}{2}},$$

alors on a

$$|u|_{H^1(\Omega)}^2 = |u|_{L^2(\Omega)}^2 + |\nabla u|_{L^2(\Omega)^d}^2.$$

On a le résultats suivant :

Théorème 2.1.1. (de densité).

$$C^1(\bar{\Omega}) \text{ est dense dans } H^1(\Omega).$$

Théorème 2.1.2. (Rellich).

$$H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \text{ avec injection compacte.}$$

Théorème 2.1.3. (trace de Sobolev).

Il existe une application linéaire et continue $\delta : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Gamma)$ telle que $\delta u = u|_{\Gamma}$ pour tout $u \in C^1(\bar{\Omega})$.

Pour plus des détails sur les espaces de Sobolev nous renvoyons le lecteur, par exemple, à [1]

Remarque 2.1.1. L'espace $L^2(\Gamma)$ ci-dessus représente l'espaces de fonctions réelles sur Γ qui sont L^2 pour la mesure superficielle $d\Gamma$. L'application δ s'appelle application de trace, elle est définie comme le prolongement par densité de l'application $u \mapsto u|_{\Gamma}$ définir pour $u \in C^1(\bar{\Omega})$.

Remarque 2.1.2. On note que l'application de trace $\delta : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Gamma)$ est un opérateur compact.

Définition 2.1.2. Pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $p \in [1, +\infty]$, nous définissons l'espace de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ par :

$$W^{k,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) \mid \forall \alpha, |\alpha| \leq k; \exists v_\alpha \in L^p(\Omega), \text{ tel que } v_\alpha = D^\alpha u\},$$

Remarque 2.1.3. Nous ferons très souvent l'abus d'écriture qui consiste à identifier $D^\alpha u$ et v_α .

La norme sur l'espace $W^{k,p}(\Omega)$ est donnée par

$$|u|_{W^{k,p}(\Omega)} = \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha| \leq k} |D^\alpha u|_{L^p(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}} & \text{si } 1 \leq p < \infty, \\ \max_{|\alpha| \leq k} |D^\alpha u|_{L^\infty(\Omega)} & \text{si } p = \infty. \end{cases}$$

Pour $p = 2$, on note par $H^k(\Omega)$ l'espace $W^{k,2}(\Omega)$ et la norme précédente provient d'un produit scalaire.

2.2 Espaces liés au problème à étudier

Introduisons les espaces de Hilbert suivants, associés aux inconnues mécaniques u et σ :

$$\begin{cases} H = \{u = (u_i) \mid u_i \in L^2(\Omega)\} = L^2(\Omega)^d, \\ \mathcal{H} = \{\sigma = (\sigma_{ij}) \mid \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \in L^2(\Omega)\} = L^2_s(\Omega)^{d \times d}, \\ H_1 = \{u = (u_i) \mid \varepsilon(u) \in \mathcal{H}\} = H^1(\Omega)^d, \\ \mathcal{H}_1 = \{\sigma \in \mathcal{H} \mid \text{Div} \sigma = (\sigma_{ij,j}) \in H\}. \end{cases} \quad (2.3)$$

Les espaces H, \mathcal{H}, H_1 et \mathcal{H}_1 sont des espaces réels de Hilbert munis des produits scalaires suivants :

$$\begin{cases} (u, v)_H = \int_{\Omega} u_i v_i dx & \forall u, v \in H, \\ (\sigma, \tau)_{\mathcal{H}} = \int_{\Omega} \sigma_{ij} \tau_{ij} dx & \forall \sigma, \tau \in \mathcal{H}, \\ (u, v)_{H_1} = (u, v)_H + (\varepsilon(u), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} & \forall u, v \in H_1, \\ (\sigma, \tau)_{\mathcal{H}_1} = (\sigma, \tau)_{\mathcal{H}} + (\text{Div } \sigma, \text{Div } \tau)_H & \forall \sigma, \tau \in \mathcal{H}_1, \end{cases} \quad (2.4)$$

où $\varepsilon : H_1 \rightarrow \mathcal{H}$ et $\text{Div} : \mathcal{H}_1 \rightarrow H$ sont respectivement les opérateurs de déformation et de divergence, définis par

$$\varepsilon(u) = (\varepsilon_{ij}(u)), \quad \varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad \text{Div } \sigma = (\sigma_{ij,j}).$$

Les normes sur les espaces H, \mathcal{H}, H_1 et \mathcal{H}_1 sont notées par $|\cdot|_H, |\cdot|_{\mathcal{H}}, |\cdot|_{H_1}$ et $|\cdot|_{\mathcal{H}_1}$ respectivement.

Puisque la frontière Γ est lipschitzienne, le vecteur normal extérieur ν à la frontière est défini p.p. Pour tout champ de vecteurs $v \in H_1$ nous utilisons la notation v pour désigner la trace γv de v sur Γ . Rappelons que l'application de trace $\gamma : H_1 \rightarrow L^2(\Gamma)^d$ est linéaire et continue, mais n'est pas surjective. L'image de H_1 par cette application est notée par $H_{\Gamma} = H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^d$ ce sous-espace s'injecte continûment dans $L^2(\Gamma)^d$. Désignons par H'_{Γ} le dual de H_{Γ} , et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit de dualité entre H'_{Γ} et H_{Γ} . Pour tout $\sigma \in \mathcal{H}_1$, il existe un élément $\sigma\nu \in H'_{\Gamma}$ tel que :

$$\langle \sigma\nu, \gamma v \rangle_{H'_{\Gamma} \times H_{\Gamma}} = (\sigma, \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + (\text{Div } \sigma, v)_H \quad \forall v \in H_1. \quad (2.5)$$

En outre, si σ est assez régulier (par exemple C^1), nous avons la formule

$$\langle \sigma\nu, \gamma v \rangle_{H'_{\Gamma} \times H_{\Gamma}} = \int_{\Gamma} \sigma\nu \cdot v da \quad \forall v \in H_1. \quad (2.6)$$

Donc, pour σ assez régulier nous avons la formule de Green suivante :

$$(\sigma, \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + (\text{Div } \sigma, v)_H = \int_{\Gamma} \sigma\nu \cdot v da \quad \forall v \in H_1. \quad (2.7)$$

l'ensemble des variables d'état internes admissibles est donné par ,

$$Y = \{ \alpha = (\alpha_i) \mid \alpha_i \in L^2(\Omega), 1 \leq i \leq m \}. \quad (2.8)$$

Nous introduisons au présent un sous-espace fermé de H_1 , dont la définition est donnée ci-après

$$V = \{v \in H_1 / v = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1\}. \quad (2.9)$$

Inégalité de Korn : Soit $\text{mes } \Gamma_1 > 0$. Alors il existe une constante $c_K > 0$ dépendant uniquement de Ω et Γ_1 vérifie l'inégalité suivante,

$$|\varepsilon(v)|_{\mathcal{H}} \geq c_K |v|_{H_1} \quad \forall v \in V. \quad (2.10)$$

Nous considérons sur l'espace V , le produit scalaire donné par

$$(u, v)_V = (\varepsilon(u), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} \quad \forall u, v \in V. \quad (2.11)$$

Soit $|\cdot|_V$ la norme associée, i.e.

$$|v|_V = |\varepsilon(v)|_{\mathcal{H}} \quad \forall v \in V. \quad (2.12)$$

Par l'inégalité de Korn et (2.4), il vient que $|\cdot|_{H_1}$ et $|\cdot|_V$ sont des normes équivalentes sur V et ainsi $(V, |\cdot|_V)$ est un espace de Hilbert.

En effet, d'après (2.4)

$$(u, v)_{H_1} = (u, v)_H + (\varepsilon(u), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}}.$$

Alors

$$|v|_{H_1} = (|v|_H^2 + |\varepsilon(v)|_{\mathcal{H}}^2)^{\frac{1}{2}}.$$

En utilisant (2.10), il résulte

$$c_K |v|_{H_1} \leq |\varepsilon(v)|_{\mathcal{H}} \leq |v|_{H_1}. \quad (2.13)$$

Alors $|\cdot|_{H_1}$ équivalent $|\cdot|_{\mathcal{H}}$.

En outre, d'après (2.10) et (2.12) et le théorème de trace de Sobolev, on trouve qu'il existe une constante $c_0 > 0$ dépendante uniquement de Ω, Γ_1 et Γ_3 telle que :

$$|v|_{L^2(\Gamma_3)^d} \leq c_0 |v|_V \quad \forall v \in V. \quad (2.14)$$

2.3 Espaces des fonctions à valeurs vectorielles

Ce paragraphe est destiné à rappeler les principaux résultats sur les fonctions définies sur un intervalle de temps et à valeurs dans un espace de Banach réel.

Soit $T > 0$. Pour tout espace de Banach réel $(X, |\cdot|_X)$. Nous notons par $C(0, T; X)$ et $C^1(0, T; X)$ les espaces des fonctions continues et continûment différentiables sur $[0, T]$ avec valeurs dans X , respectivement, avec les normes

$$|\mathbf{f}|_{C(0, T; X)} = \max_{t \in [0, T]} |\mathbf{f}(t)|_X$$

, alors que $C^1(0, T; X)$ est un espace de Banach réel avec la norme

$$|\mathbf{f}|_{C^1(0, T; X)} = \max_{t \in [0, T]} |\mathbf{f}(t)|_X + \max_{t \in [0, T]} |\dot{\mathbf{f}}(t)|_X.$$

Enfin, pour $k \in \mathbb{N}$ et $p \in [1, \infty]$, on utilise la notation standard pour les espaces de Lebesgue $L^p(0, T; X)$ et pour les espaces de Sobolev $W^{k, p}(0, T; X)$. De plus, si X_1 et X_2 sont des espaces de Hilbert réels, alors $X_1 \times X_2$ désigne l'espace de Hilbert produit muni du produit scalaire canonique $(\cdot, \cdot)_{X_1 \times X_2}$. Nous rappelons le résultat standard suivant pour les équations d'évolution du premier ordre (voir [2] ou [22]). Soient V et H des espaces de Hilbert réels tels que V soit dense dans H et que l'application d'injection soit continue. L'espace H est identifié à son propre dual et à un sous-espace du dual V' de V . Nous écrivons

$$V \subset H \subset V'$$

et on dit que les inclusions ci-dessus définissent un triplet de Gelfand. Nous notons par $|\cdot|_V, |\cdot|_H$ et $|\cdot|_{V'}$ les normes sur les espaces V, H et V' respectivement, et nous utilisons $\langle \cdot, \cdot \rangle_{V' \times V}$ pour le couplage dual entre V' et V . Notez que si $\mathbf{f} \in H$ alors

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle_{V' \times V} = (\mathbf{f}, \mathbf{v})_H \quad \forall \mathbf{v} \in V.$$

Théorème 2.3.1. *soit $V \subset H \subset V'$ un triplet de Gelfand. Soit $A : V \rightarrow V'$ un opérateur hemicontinu et monotone qui satisfait.*

$$(A\mathbf{u}, \mathbf{u})_{V' \times V} \geq \omega |\mathbf{u}|_V^2 + \lambda, \quad \forall \mathbf{u} \in V, \quad (2.15)$$

$$|A\mathbf{u}|_{V'} \leq C (|\mathbf{u}|_V + 1), \quad \forall \mathbf{u} \in V, \quad (2.16)$$

pour certaines constantes $\omega > 0$, $C > 0$ and $\lambda \in \mathbb{R}$. Ensuite, étant donné $\mathbf{u}_0 \in H$ et $\mathbf{f} \in L^2(0, T; V')$, il existe une fonction unique \mathbf{u} qui satisfait

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &\in L^2(0, T; V) \cap C(0, T; H), \quad \dot{\mathbf{u}} \in L^2(0, T; V'), \\ \dot{\mathbf{u}}(t) + A\mathbf{u}(t) &= \mathbf{f}(t), \quad p.p. \ t \in (0, T), \\ \mathbf{u}(0) &= \mathbf{u}_0 \end{aligned}$$

Définition 2.3.1. Une fonction $u : [0, T] \rightarrow X$ est dite mesurable s'il existe un sous-ensemble $E \subset [0, T]$ de mesure nulle et une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions appartenant à $C_c(0, T; X)$ telle que $|u_n(t) - u(t)|_X \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$, pour tout $t \in [0, T]/E$.

Définition 2.3.2. Une fonction $u : [0, T] \rightarrow X$ est dite fortement dérivable en $t_0 \in (0, T)$ s'il existe un élément $\frac{du}{dt}(t_0) \in X$ appelé la dérivée forte de u en t_0 , tel que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{1}{h} (u(t_0 + h) - u(t_0)) - \frac{du}{dt}(t_0) \right|_X = 0.$$

Définition 2.3.3. Une fonction $u : [0, T] \rightarrow X$ est dite intégrable s'il existe une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions appartenant à $C_c(0, T; X)$ telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^T |u_n(t) - u(t)|_X dt = 0.$$

Théorème 2.3.2. (Bochner). Une fonction $u : [0, T] \rightarrow X$ mesurable et intégrable si et seulement si $t \rightarrow |tu(t)|_X : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}_+$ est intégrable. Dans ce cas

$$\left| \int_0^T u(t) dt \right|_X \leq \int_0^T |u(t)|_X dt.$$

2.3.1 Espace de Lebesgue $L^p(0, T; X)$

Soit $1 \leq p < \infty$. L'espace de Lebesgue $L^p(0, T; X)$ est l'ensemble des classes de fonctions $u : [0, T] \rightarrow X$ mesurables, telles que l'application $t \rightarrow |u(t)|_X$ appartient à $L^p(0, T)$. On sait que $L^p(0, T; X)$ est un espace vectoriel normé avec la norme

$$\begin{cases} |u|_{L^p(0, X; T)} = \left(\int_0^T |u(t)|_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}} & \text{si } 1 \leq p < \infty, \\ |u|_{L^\infty(0, X; T)} = \inf \{ c > 0 / |u(t)|_X < c \text{ p.p. } t \in (0, T) \} & \text{si } p = \infty. \end{cases}$$

Proposition 2.3.1. 1. $L^p(0, T; X)$ ($1 \leq p \leq \infty$) est un espace de Banach.

2. Si X est un espace de Hilbert avec le produit scalaire $(\cdot, \cdot)_X$, alors $L^2(0, T; X)$ est aussi un espace de Hilbert avec le produit scalaire

$$(u, v)_{L^2(0, T; X)} = \int_0^T (u(t), v(t))_X dt.$$

3. $L^r(0, T; X) \subseteq L^q(0, T; X)$, avec injection continue, $1 \leq q \leq r \leq \infty$.

4. Si X est un espace de Hilbert, alors

$$L^p(0, T; X)' = L^q(0, T; X), \quad \text{si } 1 < p, q < \infty, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

$$L^1(0, T; X)' = L^\infty(0, T; X),$$

où $L^p(0, T; X)'$ représente le dual de l'espace $L^p(0, T; X)$, $1 \leq p \leq \infty$.

Définition 2.3.4. Soit $u, w \in L^1(0, T; X)$. La fonction w s'appelle la dérivée généralisée d'ordre n de u sur $(0, T)$ si

$$\int_0^T \varphi^{(n)}(t) u(t) dt = (-1)^n \int_0^T \varphi(t) w(t) dt, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(0, T)$$

$C_c^\infty(0, T)$ étant l'espace des fonctions réelles indéfiniment dérivables à support compact dans $(0, T)$.

Nous écrivons $w = \dot{u}$ pour $n = 1$ et $w = u^{(n)}$ pour $n \geq 2$.

2.3.2 Espace de Sobolev $W^{k,p}(0, T; X)$

Définition 2.3.5. Soit $1 \leq p \leq \infty$. L'espace de Sobolev $W^{1,p}(0, T; X)$ est l'espace des fonction $u : [0, T] \rightarrow X$ telles que $u \in L^p(0, T; X)$ et $\dot{u} \in L^p(0, T; X)$. $W^{1,p}(0, T; X)$ est un espace de Banach muni de la norme

$$|u|_{W^{1,p}(0, T; X)} = |u|_{L^p(0, T; X)} + |\dot{u}|_{L^p(0, T; X)}.$$

En particulier, $W^{1,2}(0, T; X)$ est un espace de Hilbert pour la norme précédente.

Définition 2.3.6. Une fonction $u : [0; T] \rightarrow X$ est dite absolument continue si quelque soit $\varepsilon > 0$, il existe $\delta = \delta(\varepsilon)$ tel que pour toute suite d'intervalles (a_i, b_i) disjoints, inclus dans $[0; T]$, tels que $\sum_i (b_i - a_i) < \delta$ on a $\sum_i |u(b_i) - u(a_i)|_X \leq \varepsilon$.

Théorème 2.3.3. Soit $1 \leq p \leq \infty$, X un espace de Banach réflexif et soit $u \in L^p(0, T; X)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $u \in W^{1,p}(0, T; X)$.
2. u admet un représentant absolument continu presque partout dérivable, ayant la dérivée forte dans $L^p(0, T; X)$.
3. Il existe $u_0 \in X$ et $g \in L^p(0, T; X)$, telles que

$$u(t) = u_0 + \int_0^t g(s) ds \quad \forall t \in [0, T].$$

Théorème 2.3.4. Si la fonction u appartient à l'espace $W^{1,p}(0, T; X)$, $p \in [1, \infty]$.

Nous avons alors :

1. $|u(t) - u(s)|_X \leq \int_s^t |\dot{u}(r)|_X dr \quad 0 \leq s \leq t \leq T$,
2. si de plus $p < \infty$, on a

$$|u(t) - u(s)|_X^p \leq (t - s)^p \int_s^t |\dot{u}(r)|_X^p dr \quad 0 \leq s \leq t \leq T,$$

3. si $p = \infty$, on a

$$|u(t) - u(s)|_X \leq |\dot{u}|_{L^\infty(0, T; X)} \quad 0 \leq s \leq t \leq T.$$

Théorème 2.3.5. (Cauchy-Lipschitz) Soit $(X, |\cdot|_X)$ un espace de Banach réel et soit $F(t, \cdot) : X \rightarrow X$ un opérateur défini p.p. sur $(0, T)$, qui satisfait les propriétés suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) il existe } L_F > 0 \text{ tel que} \\ |F(t, x) - F(t, y)|_X \leq L_F |x - y|_X \quad \forall x, y \in X, \text{ p.p. } t \in (0, T); \\ \text{(b) il existe } 1 \leq p \leq \infty \text{ tel que} \\ F(\cdot, x) \in L^p(0, T; X) \quad \forall x \in X. \end{array} \right.$$

Alors, pour tout $x_0 \in X$, il existe une fonction unique $x \in W^{1,p}(0, T; X)$ tel que

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= F(t, x(t)), \text{ p.p. } t \in (0, T), \\ x(0) &= x_0. \end{aligned}$$

Théorème 2.3.6. *Dans le cas où l'espace $(H, (\cdot, \cdot)_H)$ est un espace de Hilbert et si la fonction u appartient à l'espace $W^{1,2}(0, T; H)$, alors*

1. *la fonction $t \rightarrow \frac{1}{2}|u(t)|_H^2$ est une fonction absolument continue sur l'intervalle $]0, T[$.*
2. *$\frac{d}{dt} \frac{1}{2}|u(t)|_H^2 = (\dot{u}(t), u(t))_H$ p.p. $t \in]0, T[$.*
3. *$\frac{1}{2}|u(t)|_H^2 = \frac{1}{2}|u(0)|_H^2 + \int_0^t (\dot{u}(s), u(s))_H ds \quad \forall t \in]0, T[$.*

Ces quelques propriétés achèvent cette section. Pour plus de détails sur les résultats dans ce paragraphe nous renvoyons le lecteur par exemple aux références[3].

2.4 Éléments d'analyse non linéaire dans un espace de Hilbert

Dans cette section nous rappelons quelques éléments d'analyse dans les espaces de Hilbert et quelques résultats concernant les équations et les inéquations variationnelles d'évolution paraboliques du première ordre qui interviennent dans l'étude des problèmes mécaniques. Puis nous rappelons le théorème de point fixe de Banach.

Équations et inéquations variationnelles d'évolution

Nous commençons ce paragraphe par un bref rappel sur les opérateurs fortement monotones et de Lipschitz. Pour cela, on considère un espace de Hilbert H muni du produit scalaire $(\cdot, \cdot)_H$ et la norme associée $|\cdot|_H$ et H' l'espace dual de H en notant par $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H' \times H}$ pour le produit de dualité entre H et H'

Définition 2.4.1. *L'opérateur $A : H \rightarrow H'$ est dite :*

1. *monotone si*

$$\langle Au - Av, u - v \rangle_{H' \times H} \geq 0 \quad \forall u, v \in H;$$

2. *fortement monotone s'il existe $m > 0$ tel que*

$$\langle Au - Av, u - v \rangle_{H' \times H} \geq m|u - v|_H^2 \quad \forall u, v \in H;$$

3. de Lipschitz s'il existe $L > 0$

$$|Au - Av|_{H'} \leq L|u - v|_H \quad \forall u, v \in H.$$

4. hemicontinu si pour toute suite numérique $(\lambda_n) \subset \mathbb{R}$ telle que $\lambda_n \rightarrow \lambda$ lorsque $n \rightarrow +\infty$ on a

$$\langle A(u + \lambda_n v), w \rangle_{H' \times H} \rightarrow \langle A(u + \lambda v), w \rangle_{H' \times H} \text{ quand } n \rightarrow +\infty.$$

2.5 Représentation de Riesz-Fréchet

Dans cette section nous rappelons le théorème de représentation de Riesz-Fréchet. L'importance de ce théorème est que toute forme linéaire continue sur un espace de Hilbert H peut se représenter à l'aide du produit scalaire.

Théorème 2.5.1. (Théorème de représentation de Riesz-Fréchet) Soit H un espace de Hilbert et soit H' son espace dual. Alors, pour tout $\phi \in H'$ il existe $f \in H$ unique tel que

$$\langle \phi, v \rangle_{H' \times H} = (f, v)_H \quad \forall v \in H.$$

On a de plus

$$|\phi|_{H'} = |f|_H.$$

Pour une démonstration de ce théorème voir par exemple ([4] pages 81-82). L'application $\phi \mapsto f$ est un isomorphisme isométrique qui permet d'identifier H et H' . Soit maintenant H un espace de Hilbert réel tel que V dense dans H et l'injection $V \subset H$ est continue. On identifie H et H' . Soit V' le dual de V , on peut alors prolonger H dans V' grâce au procédé suivant : étant donné $f \in H$, l'application $v \in V \mapsto (f, v)_H$ est une forme linéaire continue sur H et a fortiori sur V ; on la note $Tf \in V'$ de sorte que

$$\langle Tf, v \rangle_{V' \times V} = (f, v), \quad \forall f \in H, \quad \forall v \in V.$$

On vérifie que $T : H \rightarrow V'$ possède les propriétés suivantes

- (1) $|Tf|_{V'} \leq C|f|_H \quad \forall f \in H.$
- (2) T est injective.

(3) $T(H)$ est dense dans V' .

En général T n'est pas surjective de H sur V' . A l'aide de T on prolonge H dans V' et on a le schéma

$$V \subset H = H' \subset V', \quad (2.17)$$

où les injections canoniques sont continues et denses. Ce triplet est appelé.

Triplet de Gelfand. On dit que H est l'espace pivot. Nous continuons avec quelques définitions portant sur les formes bilinéaires définies dans un espace de Hilbert.

2.6 Théorème du point fixe de Banach

Le théorème de point fixe de Banach va être utilisé plus tard dans cette thèse pour démontrer l'existence et l'unicité.

Soit X un espace de Banach muni de la norme $|\cdot|_X$ et $K \subset X$ une partie de X et soit $\Lambda : K \rightarrow X$ un opérateur défini sur K . On s'intéresse à l'existence d'une solution de l'équation

$$\Lambda u = u, \quad u \in K. \quad (2.18)$$

Une telle solution de (2.18) s'appelle un point fixe de Λ dans K .

Théorème 2.6.1. (Théorème du point fixe de Banach). *Soit K une partie non vide et fermé de l'espace de Banach X et soit $\Lambda : K \rightarrow K$ une contractante, i.e., $\exists k \in]0, 1[$ tel que*

$$|\Lambda u - \Lambda v|_X \leq k|u - v|_X, \quad u, v \in K.$$

Alors il existe un unique élément $u \in K$ tel que $\Lambda u = u$, i.e., Λ possède un point fixe unique dans K .

Nous allons ainsi utiliser une version du théorème de point fixe de Banach que nous présentons ci-dessus.

Pour cela, nous rappelons que les puissances de l'opérateur Λ sont définies récursivement par

$$\Lambda^n = \Lambda(\Lambda^{n-1}) \quad \text{pour } n \geq 2.$$

Théorème 2.6.2. *Sous les mêmes conditions du Théorème 2.6.1, on suppose que Λ^n est une contractante pour un certain entier $n \geq 2$. Alors Λ admet un point fixe unique dans K .*

Les démonstrations des théorèmes 2.6.1, 2.6.2 peuvent être trouver dans [11].

2.7 Lemme de type Gronwall

Nous rappelons ici les lemmes classiques du type Gronwall qui interviennent dans de nombreux problèmes de contact, en particulier pour établir l'unicité de la solution. Pour avoir plus de détails sur le rappels figurant dans ce paragraphe, on pourra consulter par exemple [13]. Notons par ailleurs que dans certains paragraphes de ce mémoire, nous allons utiliser de versions " presque partout " de ces lemmes.

Lemme 2.7.1. *Soient $m, n \in C([0, T]; \mathbb{R})$ telles que $m(t) \geq 0$ et $n(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0, T]$ soit $a \geq 0$ une constante, et $\psi \in C([0, T]; \mathbb{R})$ est une fonction telle que*

1. Si

$$\psi(t) \leq a + \int_0^t m(s)ds + \int_0^t n(s)\psi(s)ds, \quad \forall t \in [0, T],$$

alors

$$\psi(t) \leq \left(a + \int_0^t m(s)ds \right) \exp \left(\int_0^t n(s)ds \right) \quad \forall t \in [0, T].$$

2. Si

$$\psi(t) \leq m(t) + a \cdot \int_0^t \psi(s)ds \quad \forall t \in [0, T],$$

alors

$$\int_0^t \psi(s)ds \leq e^{aT} \cdot \int_0^t m(s)ds \quad \forall t \in [0, T],$$

pour le cas particulier $m = 0$ la partie (1) de ce lemme devient.

Corollaire 2.7.1. *Soient $n \in C([0, T]; \mathbb{R})$ telles que $n(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0, T]$ et soit $a \geq 0$. Si $\psi \in C([0, T]; \mathbb{R})$ est une fonction telle que*

$$\psi(t) \leq a + \int_0^t n(s)\psi(s)ds \quad \forall t \in [0, T],$$

alors

$$\psi(t) \leq a \cdot \exp \left(\int_0^t n(s)ds \right) \quad \forall t \in [0, T],$$

Le corollaire 2.7.1 est souvent utilisé pour montrer l'unicité de la solution, de la façon suivante. On suppose deux solutions, en notant par ψ la norme de la différence entre ces solutions, on essaie ensuite de majorer ψ sous la forme

$$\psi(t) \leq \int_0^t n(s)\psi(s)ds, \quad \forall t \in [0, T],$$

avec une certaine fonction $n \geq 0$. En appliquant corollaire 2.7.1 donne immédiatement la nullité de ψ .

Lemme 2.7.2. Soient $m, n \in C([0, T]; \mathbb{R})$ telles que $m(t) \geq 0$ et $n(t) \geq 0 \forall t \in [0, T]$, $a \geq 0$. Soit également $\phi : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction telle que :

$$\frac{1}{2}\phi^2(s) \leq \frac{1}{2}a^2 + \int_0^s m(t)\phi(t)dt + \int_0^s n(t)\phi^2(t)dt, \quad \forall s \in [0, T].$$

Alors

$$|\phi(s)| \leq \left(a + \int_0^s m(t)ds \right) e^{\int_0^s n(t)dt}, \quad \forall s \in [0, T].$$

Dans le cas particulier $n = 0$, le lemme 2.7.2 devient :

Corollaire 2.7.2. Soit $m \in C([0, T]; \mathbb{R})$ telles que $m(t) \geq 0, \forall t \in [0, T]$ et soit $a \geq 0$. Soit également $\phi : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction telle que :

$$\frac{1}{2}\phi^2(s) \leq \frac{1}{2}a^2 + \int_0^s m(t)\phi(t)dt, \quad \forall s \in [0, T].$$

Alors

$$|\phi(s)| \leq a + \int_0^s m(t)dt, \quad \forall s \in [0, T].$$

CHAPITRE 3

PROBLÈME ÉLASTO-VISCOPLASTICITÉ AVEC VARIABLE INTERNE D'ÉTAT ET SANS FROTTEMENT

Dans ce chapitre nous étudions un problème de contact en élasto-viscoplasticité avec variable interne d'état et sans frottement. Le plan de ce chapitre est le suivant. Dans la première section, nous commençons à proposer et décrire notre problème puis nous introduisons des hypothèses très utiles pour la dernière section. Ensuite, dans la deuxième section, nous prouvons une formulation variationnelle du problème. Enfin, dans la troisième section, nous énonçons un théorème de l'existence d'une solution faible unique du problème, et nous le prouvons.

3.1 Formulation mécanique du problème

Un corps élasto-viscoplastique occupe un domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^d (d = 2, 3)$ avec une surface de Lipschitz Γ qui est divisée en trois parties mesurables disjointes Γ_1, Γ_2 et Γ_3 telles que $\text{mes} \Gamma_1 > 0$. Soit $T > 0$ et $[0, T]$ l'intervalle de temps d'intérêt. Le corps est fixé sur $\Gamma_1 \times (0, T)$, et le champ de déplacement y est donc nul. Des tractions superficielles de densité \mathbf{f}_2 agissent sur $\Gamma_2 \times (0, T)$ et une force volumique de densité \mathbf{f}_0 est appliquée dans $\Omega \times (0, T)$. Le corps est en contact sans frottement avec une fondation déformable sur la surface de contact potentielle $\Gamma_3 \times (0, T)$. De plus, le processus est dynamique et donc les termes inertiels sont inclus dans l'équation du

mouvement. Ensuite, la formulation classique du problème de contact mécanique avec la compliance normale d'un matériau élastique-viscoplastique avec une variable d'état interne est la suivante.

Position du Problème \mathcal{P} :

Trouver un champ des déplacements $\mathbf{u} : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$, un champ des contraintes $\sigma : \Omega \times [0, T] \rightarrow S_d$ un champ de variable interne d'état $\mathbf{k} : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^m$ tels que

$$\begin{aligned} \sigma(t) = & \mathcal{A}\varepsilon(\dot{\mathbf{u}}(t)) + \mathcal{E}\varepsilon(\mathbf{u}(t)) \\ & + \int_0^t \mathcal{G}(\sigma(s) - \mathcal{A}\varepsilon(\dot{\mathbf{u}}(s)), \varepsilon(\mathbf{u}(s)), \mathbf{k}(s)) ds \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\dot{\mathbf{k}} = \phi(\sigma - \mathcal{A}\varepsilon(\dot{\mathbf{u}}), \varepsilon(\mathbf{u}), \mathbf{k}) \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (3.2)$$

$$\rho \ddot{\mathbf{u}} = \text{Div } \sigma + \mathbf{f}_0 \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (3.3)$$

$$\mathbf{u} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1 \times (0, T), \quad (3.4)$$

$$\sigma \nu = \mathbf{f}_2 \quad \text{sur } \Gamma_2 \times (0, T), \quad (3.5)$$

$$\sigma_\nu = -p(u_\nu - g), \quad \sigma_\tau = 0 \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (3.6)$$

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0, \quad \dot{\mathbf{u}}(0) = \mathbf{v}_0, \quad \mathbf{k}(0) = \mathbf{k}_0 \quad \text{dans } \Omega. \quad (3.7)$$

Les équations (3.1) et (3.2) représentent la loi constitutive élastique-viscoplastique avec la variable d'état interne introduite dans la première section. L'équation (3.3) représente l'équation du mouvement où ρ est la densité de masse. Les équations (3.4) et (3.5) sont les conditions de déplacement-traction. Dans l'étude du problème mécanique \mathcal{P} nous supposons les hypothèses suivantes.

L'opérateur de viscosité $\mathcal{A} : \Omega \times S_d \rightarrow S_d$ satisfait

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) Ils existent des constants } C_{\mathcal{A}}^1, C_{\mathcal{A}}^2 > 0 \text{ telles que} \\ |\mathcal{A}(\mathbf{x}, \varepsilon)| \leq C_{\mathcal{A}}^1 |\varepsilon| + C_{\mathcal{A}}^2 \quad \forall \varepsilon \in S_d, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Omega. \\ \text{(b) Il existe une constante } m_{\mathcal{A}} > 0 \text{ telle que} \\ (\mathcal{A}(\mathbf{x}, \varepsilon_1) - \mathcal{A}(\mathbf{x}, \varepsilon_2)) \cdot (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \geq m_{\mathcal{A}} |\varepsilon_1 - \varepsilon_2|^2 \\ \quad \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in S_d, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Omega. \\ \text{(c) L'application } \mathbf{x} \mapsto \mathcal{A}(\mathbf{x}, \varepsilon) \text{ est mesurable sur } \Omega \text{ pour tout } \varepsilon \in S_d. \\ \text{(d) L'application } \varepsilon \mapsto \mathcal{A}(\mathbf{x}, \varepsilon) \text{ est continue sur } S_d, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Omega. \end{array} \right. \quad (3.8)$$

L'opérateur délasticité $\mathcal{E} : \Omega \times S_d \rightarrow S_d$ satisfait :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) Il existe une constante } L_{\mathcal{E}} > 0 \text{ telle que} \\ |\mathcal{E}(x, \varepsilon_1) - \mathcal{E}(x, \varepsilon_2)| \leq L_{\mathcal{E}} |\varepsilon_1 - \varepsilon_2| \quad \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in S_d, \text{ p.p. } x \in \Omega. \\ \text{(b) Pour toute } \varepsilon \in S_d, x \mapsto \mathcal{E}(x, \varepsilon) \text{ est mesurable sur } \Omega. \\ \text{(c) L'application } x \mapsto \mathcal{E}(x, 0) \text{ est dans } \mathcal{H}. \end{array} \right. \quad (3.9)$$

L'opérateur de viscoplasticité $\mathcal{G} : \Omega \times S_d \times S_d \times \mathbb{R}^m \rightarrow S_d$ satisfait :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) Il existe une constante } L_{\mathcal{G}} > 0 \text{ telle que} \\ |\mathcal{G}(x, \sigma_1, \varepsilon_1, k_1) - \mathcal{G}(x, \sigma_2, \varepsilon_2, k_2)| \leq L_{\mathcal{G}} (|\sigma_1 - \sigma_2| + |\varepsilon_1 - \varepsilon_2| + |k_1 - k_2|) \\ \forall \sigma_1, \sigma_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in S_d \text{ et } k_1, k_2 \in \mathbb{R}^m, \text{ p.p. } x \in \Omega. \\ \text{(b) L'application } x \mapsto \mathcal{G}(x, \sigma, \varepsilon, k) \text{ est mesurable sur } \Omega, \\ \text{Pour toute } \sigma, \varepsilon \in S_d \text{ et } k \in \mathbb{R}^m. \\ \text{(c) L'application } x \mapsto \mathcal{G}(x, 0, 0, 0) \text{ est dans } \mathcal{H}. \end{array} \right. \quad (3.10)$$

La fonction $\phi : \Omega \times S_d \times S_d \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ satisfait :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) Il existe une constante } L_{\phi} > 0 \text{ telle que} \\ |\phi(x, \sigma_1, \varepsilon_1, k_1) - \phi(x, \sigma_2, \varepsilon_2, k_2)| \leq L_{\phi} (|\sigma_1 - \sigma_2| + |\varepsilon_1 - \varepsilon_2| + |k_1 - k_2|) \\ \forall \sigma_1, \sigma_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in S_d \text{ et } k_1, k_2 \in \mathbb{R}^m, \text{ p.p. } x \in \Omega. \\ \text{(b) L'application } x \mapsto \phi(x, \sigma, \varepsilon, k) \text{ est mesurable sur } \Omega \\ \text{Pour toute } \sigma, \varepsilon \in S_d \text{ et } k \in \mathbb{R}^m. \\ \text{(c) L'application } x \mapsto \phi(x, 0, 0, 0) \text{ est dans } H. \end{array} \right. \quad (3.11)$$

La fonction de compliance normale $p : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ satisfait :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) Il existe une constante } L_p > 0 \text{ telle que} \\ |p(x, r_1) - p(x, r_2)| \leq L_p |r_1 - r_2| \quad \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } x \in \Gamma_3. \\ \text{(b) } r \mapsto p(\cdot, r) \text{ est mesurable sur } \Gamma_3 \text{ pour tout } r \in \mathbb{R}. \\ \text{(c) } p(\cdot, r) = 0 \text{ pour tout } r \leq 0. \end{array} \right. \quad (3.12)$$

Nous remarquons que l'hypothèse (3.12) satisfaite par les fonctions définies dans (1.15) et (1.16) et donc nos résultats s'appliquent au contact sans frottement correspondant.

La densité de masse est satisfaite

$$\rho \in L^\infty(\Omega), \text{ il existe } \rho^* > 0 \text{ tel que } \rho(x) \geq \rho^*, \text{ p.p. } x \in \Omega. \quad (3.13)$$

De même, nous supposons la fonction que l'interstice g satisfont :

$$g \in L^2(\Gamma_3), \quad g \geq 0 \text{ p.p. sur } \Gamma_3. \quad (3.14)$$

Nous supposons que les forces volumiques \mathbf{f}_0 et les tractions surfaciques \mathbf{f}_2 ont la régularité suivante

$$\mathbf{f}_0 \in L^2(0, T; H), \quad \mathbf{f}_2 \in L^2\left(0, T; L^2(\Gamma_2)^d\right). \quad (3.15)$$

Enfin, nous supposons que les données initiales sont satisfaisantes

$$\mathbf{u}_0 \in V, \quad \mathbf{v}_0 \in H, \quad \mathbf{k}_0 \in Y. \quad (3.16)$$

Nous allons utiliser un produit scalaire modifié sur l'espace de Hilbert $H = L^2(\Omega)^d$ donné par

$$((\mathbf{u}, \mathbf{v}))_H = (\rho \mathbf{u}, \mathbf{v})_H \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in H,$$

et soit $|\cdot|_H$ la norme associée, cest-à-dire

$$|\mathbf{v}|_H = (\rho \mathbf{v}, \mathbf{v})_H^{1/2} \quad \forall \mathbf{v} \in H.$$

En utilisant l'hypothèse (3.13), il vient que $|\cdot|_H$ et $|\cdot|_H$ sont des normes équivalentes sur H . De plus l'inclusion de $(V, |\cdot|_V)$ dans $(H, |\cdot|_H)$ est continue et dense. Nous notons par V' l'espace dual de V . En identifiant H avec son dual, nous obtenons le triplet de Gelfand

$$V \subset H \subset V'.$$

Nous utilisons la notation $\langle \cdot, \cdot \rangle_{V' \times V}$ pour la dualité entre V' et V et rappelons que

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{V' \times V} = ((\mathbf{u}, \mathbf{v}))_H \quad \forall \mathbf{u} \in H, \forall \mathbf{v} \in V.$$

L'hypothèses (3.15) pour p.p. $t \in (0, T)$, permet de définir une fonction $\mathbf{f}(t) \in V'$ par

$$\langle \mathbf{f}(t), \mathbf{v} \rangle_{V' \times V} = \int_{\Omega} \mathbf{f}_0(t) \cdot \mathbf{v} dx + \int_{\Gamma_2} \mathbf{f}_2(t) \cdot \mathbf{v} da \quad \forall \mathbf{v} \in V, \quad (3.17)$$

et on note que

$$\mathbf{f} \in L^2(0, T; V'). \quad (3.18)$$

Nous considérons aussi la fonctionnelle $j : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$j(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Gamma_3} p(u_\nu - g) v_\nu da \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V. \quad (3.19)$$

En utilisant les arguments standard, nous obtenons la formulation variationnelle suivante du problème mécanique(3.1) - (3.7).

3.2 Formulation variationnelle

En utilisant la formule de Green (2.7)

$$(\sigma, \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + (\text{Div } \sigma, v)_H = \int_{\Gamma} \sigma \nu \cdot v da \quad \forall v \in H_1,$$

on trouve

$$\int_{\Omega} \sigma \cdot \varepsilon(v) dx + \int_{\Omega} \text{Div } \sigma \cdot v dx = \int_{\Gamma_1} \sigma \nu \cdot v da + \int_{\Gamma_2} \sigma \nu \cdot v da + \int_{\Gamma_3} \sigma \nu \cdot v da \quad \forall v \in V.$$

De la définition de l'espace V avec (3.3) et (3.5), on obtient

$$\int_{\Omega} \sigma \cdot \varepsilon(v) dx - \int_{\Omega} f_0 \cdot v dx + \int_{\Omega} \rho \ddot{u} \cdot v dx = \int_{\Gamma_2} f_2 \cdot v da + \int_{\Gamma_3} \sigma \nu \cdot v da \quad \forall v \in V.$$

D'après les formules (1.3) et (3.6) on a

$$\sigma \nu \cdot v = -p_{\nu} (u_{\nu} - g) v_{\nu},$$

il vient que

$$\int_{\Omega} \sigma \cdot \varepsilon(v) dx + \int_{\Omega} \rho \ddot{u} \cdot v dx = \int_{\Omega} f_0 \cdot v dx + \int_{\Gamma_2} f_2 \cdot v da - \int_{\Gamma_3} p_{\nu} (u_{\nu} - g) v_{\nu} da.$$

De (3.17) et (3.19), nous obtenons :

$$\langle \rho \ddot{u}(t), v \rangle_{V' \times V} + (\sigma(t), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + j(u, v) = \langle f(t), v \rangle_{V' \times V} \quad \forall v \in V, t \in (0, T),$$

$$\langle \ddot{\mathbf{u}}(t), \mathbf{v} \rangle_{V' \times V} + (\boldsymbol{\sigma}(t), \varepsilon(\mathbf{v}))_{\mathcal{H}} + j(\mathbf{u}(t), \mathbf{v}) = \langle \mathbf{f}(t), \mathbf{v} \rangle_{V' \times V} \quad \forall \mathbf{v} \in V.$$

Problème PV :

Trouver un champ des déplacements $\mathbf{u} : [0, T] \rightarrow V$, un champ des contraintes $\sigma : [0, T] \rightarrow \mathcal{H}$ et un champ de variable interne d'état $\mathbf{k} : [0, T] \rightarrow Y$ tels que pour p.p. $t \in (0, T)$,

$$\begin{aligned} \sigma(t) = & \mathcal{A}\varepsilon(\dot{\mathbf{u}}(t)) + \mathcal{E}\varepsilon(\mathbf{u}(t)) \\ & + \int_0^t \mathcal{G}(\sigma(s) - \mathcal{A}\varepsilon(\dot{\mathbf{u}}(s)), \varepsilon(\mathbf{u}(s)), \mathbf{k}(s)) ds \end{aligned} \quad (3.20)$$

$$\langle \ddot{\mathbf{u}}(t), \mathbf{v} \rangle_{V' \times V} + (\boldsymbol{\sigma}(t), \varepsilon(\mathbf{v}))_{\mathcal{H}} + j(\mathbf{u}(t), \mathbf{v}) = \langle \mathbf{f}(t), \mathbf{v} \rangle_{V' \times V} \quad \forall \mathbf{v} \in V \quad (3.21)$$

$$\dot{\mathbf{k}}(t) = \phi(\sigma(t) - \mathcal{A}\varepsilon(\dot{\mathbf{u}}(t)), \varepsilon(\mathbf{u}(t)), \mathbf{k}(t)), \quad (3.22)$$

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0, \quad \dot{\mathbf{u}}(0) = \mathbf{v}_0, \quad \mathbf{k}(0) = \mathbf{k}_0. \quad (3.23)$$

3.3 Existence et unicité de la solution

Concernant l'existence et l'unicité de la solution du Problème PV nous avons le théorème suivant.

Théorème 3.3.1. *Sous les hypothèses (3.8) - (3.16) le problème PV admet une solution unique $\{\mathbf{u}, \sigma, \mathbf{k}\}$ satisfaisant*

$$\mathbf{u} \in W^{1,2}(0, T; V) \cap C^1(0, T; H), \quad \ddot{\mathbf{u}} \in L^2(0, T; V'), \quad (3.24)$$

$$\sigma \in L^2(0, T; \mathcal{H}), \quad \text{Div } \sigma \in L^2(0, T; V'), \quad (3.25)$$

$$\mathbf{k} \in W^{1,2}(0, T; Y). \quad (3.26)$$

Pour démontrer ce théorème nous construisons trois problèmes auxiliaires et nous démontrons l'existence et l'unicité de leur solution. Ensuite nous construisons une application contractante où son point fixe unique est la solution du problème faible du problème mécanique P . Dans la première étape, nous considérons le problème auxiliaire suivant dans lequel la fonction $\eta = (\eta^1, \eta^2) \in L^2(0, T; V' \times Y)$ donnée.

Problème PV_η :

Trouver un champ des déplacements $\mathbf{u}_\eta : [0, T] \rightarrow V$ tel que pour p.p. $t \in (0, T)$,

$$\langle \ddot{\mathbf{u}}_\eta(t), \mathbf{v} \rangle_{V' \times V} + (\mathcal{A}\varepsilon(\dot{\mathbf{u}}_\eta(t)), \varepsilon(\mathbf{v}))_{\mathcal{H}} + \langle \eta^1(t), \mathbf{v} \rangle_{V' \times V} = \langle \mathbf{f}(t), \mathbf{v} \rangle_{V' \times V} \quad \forall \mathbf{v} \in V, \quad (3.27)$$

$$\mathbf{u}_\eta(0) = \mathbf{u}_0, \quad \dot{\mathbf{u}}_\eta(0) = \mathbf{v}_0. \quad (3.28)$$

Concernant le problème PV_η , nous avons le résultat suivant.

Lemme 3.3.1.

Il existe une solution unique du problème PV_η ayant la régularité (3.24).

Démonstration .

Nous utilisons le résultat abstrait d'existence et d'unicité donnée par théorème 2.3.1.

Nous définissons l'opérateur $A : V \rightarrow V'$ par

$$\langle A\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{V' \times V} = (\mathcal{A}\varepsilon(\mathbf{u}), \varepsilon(\mathbf{v}))_{\mathcal{H}} \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V. \quad (3.29)$$

Il résulte de (2.11), (3.8) et (3.29) que

$$|A\mathbf{u} - A\mathbf{v}|_{V'} \leq L_{\mathcal{A}} |\mathcal{A}\varepsilon(\mathbf{u}) - \mathcal{A}\varepsilon(\mathbf{v})|_{\mathcal{H}} \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V. \quad (3.30)$$

De l'hypothèse (3.8) et du théorème de Krasnoselski (voir par exemple [12]), on déduit que $A : V \rightarrow V'$ est continu et donc hémicontinu. En utilisant les hypothèses (2.11) et (3.8)(b), il vient que

$$\langle A\mathbf{u} - A\mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v} \rangle_{V' \times V} \geq m_{\mathcal{A}} |\mathbf{u} - \mathbf{v}|_V^2 \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V, \quad (3.31)$$

ce qui implique que $A : V \rightarrow V'$ est un opérateur fortement donc monotone. Nous choisissons $\mathbf{v} = 0_V$ dans (3.31) pour obtenir

$$\langle A\mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle_{V' \times V} \geq m_{\mathcal{A}} |\mathbf{u}|_V^2 - |A0_V|_{V'} |\mathbf{u}|_V$$

On a

$$2 |A0_V|_{V'} |\mathbf{u}|_V \leq |A0_V|_{V'}^2 + |\mathbf{u}|_V^2$$

donc

$$\begin{aligned} - \left| \frac{1}{\sqrt{m_{\mathcal{A}}}} A0_V \right|_{V'} |\sqrt{m_{\mathcal{A}}} |\mathbf{u}|_V &\geq -\frac{1}{2} m_{\mathcal{A}} |A0_V|_{V'}^2 - \frac{m_{\mathcal{A}}}{2} |\mathbf{u}|_V^2 \\ \langle A\mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle_{V' \times V} &\geq m_{\mathcal{A}} |\mathbf{u}|_V^2 - \frac{1}{2} m_{\mathcal{A}} |A0_V|_{V'}^2 - \frac{m_{\mathcal{A}}}{2} |\mathbf{u}|_V^2 \end{aligned}$$

et donc

$$\langle A\mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle_{V' \times V} \geq \frac{1}{2} m_{\mathcal{A}} |\mathbf{u}|_V^2 - \frac{1}{2m_{\mathcal{A}}} |A0_V|_{V'}^2 \quad \forall \mathbf{u} \in V.$$

Donc, l'opérateur, A satisfait la condition (2.15) avec $\omega = m_{\mathcal{A}}/2$ et $\lambda = -|A0_V|_{V'}^2 / (2m_{\mathcal{A}})$. Alors, la condition (2.15) du théorème 2.3.1 est vérifiée. En plus, à l'aide de (3.30) nous déduisons que

$$|A\mathbf{u}|_{V'} \leq L_{\mathcal{A}} |\mathbf{u}|_V + |A0_V|_{V'} \quad \forall \mathbf{u} \in V.$$

On pose $C = \max \{L_{\mathcal{A}}, |A0_V|_{V'}\}$, nous trouvons

$$|A\mathbf{u}|_{V'} \leq C (|\mathbf{u}|_V + 1) \quad \forall \mathbf{u} \in V$$

où C est une constante positive. Cela implique que A satisfait la condition (2.16). Enfin, nous rappelons que par (3.18) et (3.16) on a $\mathbf{f} - \eta^1 \in L^2(0, T; V')$ et $\mathbf{v}_0 \in H$.

Alors, il résulte du théorème 2.3.1 qu'il existe une fonction unique \mathbf{v}_{η} qui satisfait :

$$\mathbf{v}_{\eta} \in L^2(0, T; V) \cap C(0, T; H), \dot{\mathbf{v}}_{\eta} \in L^2(0, T; V'), \quad (3.32)$$

$$\dot{\mathbf{v}}_{\eta}(t) + A\mathbf{v}_{\eta}(t) + \eta^1(t) = \mathbf{f}(t), \text{ p.p. } t \in (0, T), \quad (3.33)$$

$$\mathbf{v}_\eta(0) = \mathbf{v}_0. \quad (3.34)$$

Soit $\mathbf{u}_\eta : [0, T] \rightarrow V$ défini par

$$\mathbf{u}_\eta(t) = \int_0^t \mathbf{v}_\eta(s) ds + \mathbf{u}_0 \quad \forall t \in [0, T]. \quad (3.35)$$

De (3.29), (3.32) et (3.35) il résulte que \mathbf{u}_η est l'unique solution du problème PV_η et elle satisfait la régularité (3.24). Ceci donne la partie d'existence du Lemme 3.3.1. L'unicité de la solution est une conséquence de l'unicité de la solution du problème (3.33) et (3.34), garantie par le théorème 2.3.1. \square

On définit $\mathbf{k}_\eta \in W^{1,2}(0, T; Y)$ par

$$\mathbf{k}_\eta(t) = \mathbf{k}_0 + \int_0^t \eta^2(s) ds. \quad (3.36)$$

Dans la troisième étape nous utilisons la solution \mathbf{u}_η obtenu du Lemme 3.3.1 et \mathbf{k}_η défini par (3.36) pour considérer le problème de Cauchy pour le champ des contraintes suivant.

Problème QV_η :

Trouver un champ des contraintes $\sigma_\eta : [0, T] \rightarrow \mathcal{H}$ tel que

$$\sigma_\eta(t) = \mathcal{E}\varepsilon(\mathbf{u}_\eta(t)) + \int_0^t \mathcal{G}(\sigma_\eta(s), \varepsilon(\mathbf{u}_\eta(s)), \mathbf{k}_\eta(s)) ds \quad \forall t \in [0, T]. \quad (3.37)$$

Pour l'étude du Problème QV_η nous avons le résultat suivant.

Lemme 3.3.2.

Le problème QV_η admet une solution unique $\sigma_\eta \in W^{1,2}(0, T, \mathcal{H})$. De plus, si σ_i et \mathbf{u}_i représentent les solutions des problèmes QV_{η_i}, PV_{η_i} , respectivement, et \mathbf{k}_i est défini dans (3.36) pour $\eta_i \in L^2(0, T; V' \times Y)$, $i = 1, 2$, alors il existe $C > 0$ tel que

$$\begin{aligned} |\sigma_1(t) - \sigma_2(t)|_{\mathcal{H}}^2 &\leq C(|\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t)|_V^2 + \int_0^t |\mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s)|_V^2 ds) \\ &+ \int_0^t |\mathbf{k}_1(s) - \mathbf{k}_2(s)|_Y^2 ds \quad \forall t \in [0, T] \end{aligned} \quad (3.38)$$

Démonstration .

Soit $\Lambda_\eta : L^2(0, T, \mathcal{H}) \rightarrow L^2(0, T, \mathcal{H})$ donné par

$$\Lambda_\eta \sigma(t) = \mathcal{E}\varepsilon(\mathbf{u}_\eta(t)) + \int_0^t \mathcal{G}(\sigma(s), \varepsilon(\mathbf{u}_\eta(s)), \mathbf{k}_\eta(s)) ds \quad (3.39)$$

pour $\sigma \in L^2(0, T, \mathcal{H})$ et $t \in [0, T]$. Soient $\sigma_1, \sigma_2 \in L^2(0, T, \mathcal{H})$ nous utilisons (3.11) et (3.39) pour obtenir, pour tout $t \in [0, T]$,

$$|\Lambda_\eta \sigma_1(t) - \Lambda_\eta \sigma_2(t)|_{\mathcal{H}} \leq L_{\mathcal{G}} \int_0^t |\sigma_1(s) - \sigma_2(s)|_{\mathcal{H}} ds.$$

Il s'ensuit que pour p est assez grand, la puissance Λ_η^p est une contraction sur l'espace de Banach $L^2(0, T; \mathcal{H})$, Donc il existe unique $\sigma_\eta \in L^2(0, T; \mathcal{H})$ tel que $\Lambda_\eta \sigma_\eta = \sigma_\eta$. De plus, σ_η est l'unique solution du problème QV_η En utilisant (3.37). la régularité de \mathbf{u}_η , la régularité de \mathbf{k}_η et les propriétés des opérateurs \mathcal{E} et \mathcal{G} , il en résulte que $\sigma_\eta \in W^{1,2}(0, T; \mathcal{H})$.

Nous considérons maintenant $(\eta_1, \eta_2) \in L^2(0, T; V' \times Y)$ et pour $i = 1, 2$, nous notons $\mathbf{u}_{\eta_i} = \mathbf{u}_i$, $\sigma_{\eta_i} = \sigma_i$ et $\mathbf{k}_{\eta_i} = \mathbf{k}_i$. Nous avons

$$\sigma_i(t) = \mathcal{E}\varepsilon(\mathbf{u}_i(t)) + \int_0^t \mathcal{G}(\sigma_i(s), \varepsilon(\mathbf{u}_i(s)), \mathbf{k}_i(s)) ds \quad \forall t \in [0, T]$$

et en utilisant les propriétés (3.9) et (3.10) de \mathcal{E} et \mathcal{G} , nous trouvons

$$\begin{aligned} |\sigma_1(t) - \sigma_2(t)|_{\mathcal{H}}^2 &\leq C(|\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t)|_V^2 + \int_0^t |\mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s)|_V^2 ds) \\ &+ \int_0^t |\sigma_1(s) - \sigma_2(s)|_{\mathcal{H}}^2 ds + \int_0^t |\mathbf{k}_1(s) - \mathbf{k}_2(s)|_Y^2 ds \quad \forall t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (3.40)$$

En utilisant maintenant le lemme de Gronwall pour déduire (3.38). Enfin, en conséquence de ces résultats et en utilisant les propriétés de \mathcal{G} , \mathcal{E} , ϕ et j , pour $t \in [0, T]$, Maintenant on considère l'application

$$\Lambda\eta(t) = (\Lambda^1\boldsymbol{\eta}(t), \Lambda^2\boldsymbol{\eta}(t)) \in V' \times Y, \quad (3.41)$$

définie par

$$\begin{aligned} \langle (\Lambda^1\boldsymbol{\eta}(t), \mathbf{v}) \rangle_{V' \times V} &= (\mathcal{E}\varepsilon(\mathbf{u}_\eta(t)), \varepsilon(\mathbf{v}))_{\mathcal{H}} + \left(\int_0^t \mathcal{G}(\sigma_\eta(s), \varepsilon(\mathbf{u}_\eta(s)), \mathbf{k}_\eta(s)) ds, \varepsilon(\mathbf{v}) \right)_{\mathcal{H}} \\ &+ j(\mathbf{u}_\eta(t), \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V, \end{aligned} \quad (3.42)$$

$$\Lambda^2\boldsymbol{\eta}(t) = \phi(\sigma_\eta(t), \varepsilon(\mathbf{u}_\eta(t)), \mathbf{k}_\eta(t)). \quad (3.43)$$

Dans la quatrième étape soit $\eta \in L^2(0, T; V' \times Y)$, $\mathbf{u}_\eta, \sigma_\eta$ représenter le champ de déplacement et le champ de contrainte obtenus dans les Lemme 3.3.1, 3.3.2 respectivement, et \mathbf{k}_η est la variable d'état interne donnée par (3.36). Nous obtenons le résultat suivant.

Lemme 3.3.3.

L'opérateur Λ admet un point fixe unique $\eta^* \in L^2(0, T; V' \times Y)$.

Démonstration .

Soient $(\eta_1, \eta_2) \in L^2(0, T; V' \times Y)$. Nous écrivons pour $i = 1, 2$,

$$\mathbf{u}_{\eta_i} = \mathbf{u}_i, \quad \dot{\mathbf{u}}_{\eta_i} = \mathbf{v}_{\eta_i} = \mathbf{v}_i, \quad \sigma_{\eta_i} = \sigma_i, \quad \mathbf{k}_{\eta_i} = \mathbf{k}_i$$

En utilisant (2.11), (3.9), (3.10) et (3.12) on obtient

$$\begin{aligned} |\Lambda^1 \eta_1(t) - \Lambda^1 \eta_2(t)|_{V'}^2 &\leq C(|\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t)|_V^2 + \int_0^t |\sigma_1(s) - \sigma_2(s)|_{\mathcal{H}}^2 ds) \\ &\quad + \int_0^t |\mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s)|_V^2 ds + \int_0^t |\mathbf{k}_1(s) - \mathbf{k}_2(s)|_Y^2 ds \end{aligned} \quad (3.44)$$

Nous utilisons l'estimation (3.40) pour voir que

$$\begin{aligned} |\Lambda^1 \eta_1(t) - \Lambda^1 \eta_2(t)|_{V'}^2 &\leq C(|\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t)|_V^2 + \int_0^t |\mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s)|_{\mathcal{H}}^2 ds) \\ &\quad + \int_0^t |\mathbf{k}_1(s) - \mathbf{k}_2(s)|_Y^2 ds \end{aligned} \quad (3.45)$$

Par des arguments similaires et de (3.11), (3.38) et (3.43) on déduit que

$$\begin{aligned} |\Lambda^2 \eta_1(t) - \Lambda^2 \eta_2(t)|_Y^2 &\leq C(|\sigma_1(t) - \sigma_2(t)|_{\mathcal{H}}^2 + |\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t)|_V^2 + |\mathbf{k}_1(t) - \mathbf{k}_2(t)|_Y^2) \\ &\leq C \left(|\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t)|_V^2 + \int_0^t |\mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s)|_V^2 ds \right. \\ &\quad \left. + |\mathbf{k}_1(t) - \mathbf{k}_2(t)|_Y^2 + \int_0^t |\mathbf{k}_1(s) - \mathbf{k}_2(s)|_Y^2 ds \right). \end{aligned} \quad (3.46)$$

Alors,

$$\begin{aligned} |\Lambda \eta_1(t) - \Lambda \eta_2(t)|_{V' \times Y}^2 &\leq C(|\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t)|_V^2 + \int_0^t |\mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s)|_V^2 ds + |\mathbf{k}_1(t) - \mathbf{k}_2(t)|_Y^2 \\ &\quad + \int_0^t |\mathbf{k}_1(s) - \mathbf{k}_2(s)|_Y^2 ds) \end{aligned} \quad (3.47)$$

De plus, de (3.27) on obtient

$$\begin{aligned} \langle (\dot{\mathbf{v}}_1 - \dot{\mathbf{v}}_2), (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) \rangle_{V' \times V} + (\mathcal{A}\varepsilon(\mathbf{v}_1) - \mathcal{A}\varepsilon(\mathbf{v}_2), \varepsilon(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2))_{\mathcal{H}} \\ + \langle (\eta_1^1 - \eta_2^1, \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) \rangle_{V' \times V} = 0, \quad \text{p.p. } t \in (0, T). \end{aligned}$$

En intégrant cette égalité sur l'intervalle $[0, T]$, et en prenant en considération les conditions initiales $\mathbf{v}_1(0) = \mathbf{v}_2(0) = \mathbf{v}_0$, l'hypothèse (2.11) et (3.8) pour trouver

$$\begin{aligned} m_{\mathcal{A}} \int_0^t |\mathbf{v}_1(s) - \mathbf{v}_2(s)|_V^2 ds &\leq - \int_0^t \langle \eta_1^1(s) - \eta_2^1(s), \mathbf{v}_1(s) - \mathbf{v}_2(s) \rangle_{V' \times V} ds \\ &\leq \int_0^t |\eta_1^1(s) - \eta_2^1(s)|_{V'} |\mathbf{v}_1(s) - \mathbf{v}_2(s)|_V ds, \end{aligned}$$

et donc

$$2m_{\mathcal{A}} \int_0^t |\mathbf{v}_1(s) - \mathbf{v}_2(s)|_V^2 ds \leq \int_0^t 2 |\eta_1^1(s) - \eta_2^1(s)|_{V'} |\mathbf{v}_1(s) - \mathbf{v}_2(s)|_V ds,$$

pour tout $t \in [0, T]$. Par ailleurs, nous utilisons l'inégalité $2ab \leq a^2/\gamma + \gamma b^2$ pour obtenir

$$\int_0^t |\mathbf{v}_1(s) - \mathbf{v}_2(s)|_V^2 ds \leq C \int_0^t |\eta_1^1(s) - \eta_2^1(s)|_{V'}^2 ds \quad \forall t \in [0, T]. \quad (3.48)$$

D'autre part, à partir de (3.36) nous avons

$$|\mathbf{k}_1(t) - \mathbf{k}_2(t)|_Y^2 \leq C \int_0^t |\eta_1^2(s) - \eta_2^2(s)|_Y^2 ds \quad (3.49)$$

Puisque $\mathbf{u}_1(0) = \mathbf{u}_2(0) = \mathbf{u}_0$, nous obtenons

$$|\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t)|_V^2 \leq C \int_0^t |\mathbf{v}_1(s) - \mathbf{v}_2(s)|_V^2 ds.$$

De cette inégalité et (3.47) nous avons que

$$\begin{aligned} |\Lambda\eta_1(t) - \Lambda\eta_2(t)|_{V' \times Y}^2 &\leq C \left(\int_0^t |\mathbf{v}_1(s) - \mathbf{v}_2(s)|_V^2 ds \right. \\ &\quad \left. + |\mathbf{k}_1(t) - \mathbf{k}_2(t)|_Y^2 + \int_0^t |\mathbf{k}_1(s) - \mathbf{k}_2(s)|_Y^2 ds \right). \end{aligned}$$

Il découle de (3.48) (et (3.49) que

$$|\Lambda\eta_1(t) - \Lambda\eta_2(t)|_{V' \times Y}^2 \leq C \int_0^t |\eta_1(s) - \eta_2(s)|_{V' \times Y}^2 ds.$$

De plus, on a

$$\begin{aligned}
|\Lambda\eta_1(t) - \Lambda\eta_2(t)|_{V' \times Y}^2 &\leq C \int_0^t |\eta_1(s) - \eta_2(s)|_{V' \times Y}^2 ds, \\
|\Lambda^2\eta_1(t) - \Lambda^2\eta_2(t)|_{V' \times Y}^2 &\leq C \int_0^t C \int_0^s |\eta_1(r) - \eta_2(r)|_{V' \times Y}^2 dr ds, \\
|\Lambda^3\eta_1(t) - \Lambda^3\eta_2(t)|_{V' \times Y}^2 &\leq C^2 \int_0^t \int_0^s |\eta_1(r) - \eta_2(r)|_{V' \times Y}^2 dr ds, \\
|\Lambda^3\eta_1(t) - \Lambda^3\eta_2(t)|_{V' \times Y}^2 &\leq C^3 \int_0^t \int_0^s \int_0^r |\eta_1(l) - \eta_2(l)|_{V' \times Y}^2 dl dr ds, \\
&\vdots \\
&\vdots \\
&\vdots \\
|\Lambda^p\eta_1(t) - \Lambda^p\eta_2(t)|_{V' \times Y}^2 &\leq C^p \underbrace{\int_0^t \int_0^s \dots \int_0^h}_{p \text{ integrals}} |\eta_1(l) - \eta_2(l)|_{V' \times Y}^2 dl \dots dr ds.
\end{aligned}$$

On sait que :

$$\int_0^r ds = r, \quad r \in [0, T],$$

et que

$$\int_0^s \int_0^r dr ds = \int_0^s r dr = \frac{s^2}{2},$$

et que

$$\int_0^t \int_0^s \int_0^r dl dr ds = \frac{t^3}{6} = \frac{t^3}{3!},$$

$$\int_0^t \int_0^s \dots \int_0^r dl \dots dr ds = \frac{t^p}{p!}$$

Quand on note $p = m$; nous déduisons :

$$|\Lambda^m\eta_1 - \Lambda^m\eta_2|_{L^2(0,T;V' \times Y)}^2 \leq \frac{C^m T^m}{m!} |\eta_1 - \eta_2|_{L^2(0,T;V' \times Y)}^2.$$

D'après l'équivalence de Stirling $n! \approx \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}$, on a $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{C^m T^m}{n!} = 0$, l'inégalité précédente implique que pour m suffisamment grand Λ^m est une contraction sur l'espace de Banach $L^2(0, T; V')$ donc Λ a un point fixe unique. Maintenant, nous avons tous les ingrédients nécessaires pour fournir la démonstration du théorème 2.3.1.

Démonstration .

Soit $\eta_* = (\eta_1, \eta_2) \in L^2(0, T; V' \times Y)$ le point fixe de Λ défini par (3.41)-(3.43) et on note

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_{\eta_*}, \quad \mathbf{k} = \mathbf{k}_{\eta_*}, \quad (3.50)$$

$$\sigma = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{\mathbf{u}}) + \sigma_{\eta_*}. \quad (3.51)$$

On démontre que $(\mathbf{u}, \sigma, \mathbf{k})$ satisfait (3.20), (3.23) et (3.24), (3.26). En effet, nous écrivons (3.37) pour $\eta = \eta_*$ et nous utilisons (3.50)-(3.51) pour obtenir (3.20). On utilise (3.27) pour $\eta = \eta_*$ et la première égalité dans (3.50) pour trouver

$$\langle \ddot{\mathbf{u}}(t), \mathbf{v} \rangle_{V' \times V} + (\mathcal{A}\varepsilon(\dot{\mathbf{u}}(t)), \varepsilon(\mathbf{v}))_{\mathcal{H}} + \langle \eta_1(t), \mathbf{v} \rangle_{V' \times V} = \langle \mathbf{f}(t), \mathbf{v} \rangle_{V' \times V} \quad \forall \mathbf{v} \in V, \text{ p.p. } t \in (0, T). \quad (3.52)$$

Les égalités $\Lambda^1(\eta_*) = \eta_1$ et $\Lambda^2(\eta_*) = \eta_2$ combinées avec (3.42), (3.43), (3.50) et (3.51) impliquent que

$$\begin{aligned} & \langle \eta_1(t), \mathbf{v} \rangle_{V' \times V} = (\mathcal{E}\varepsilon(\mathbf{u}(t)), \varepsilon(\mathbf{v}))_{\mathcal{H}} + j(\mathbf{u}(t), \mathbf{v}) \\ & + \left(\int_0^t \mathcal{G}(\sigma(s) - \mathcal{A}\varepsilon(\dot{\mathbf{u}}(s)), \varepsilon(\mathbf{u}(s)), \mathbf{k}(s)) ds, \varepsilon(\mathbf{v}) \right)_{\mathcal{H}} \quad \forall \mathbf{v} \in V \end{aligned} \quad (3.53)$$

$$\eta_2(t) = \phi(\sigma(t) - \mathcal{A}\varepsilon(\dot{\mathbf{u}}(t)), \varepsilon(\mathbf{u}(t)), \mathbf{k}(t)). \quad (3.54)$$

De (3.54) et (3.50) on déduit que (3.22) est vérifié. En substituant (3.53) dans (3.52) et on utilise (3.20) pour voir que $(\mathbf{u}, \sigma, \mathbf{k})$ satisfait (3.21). Puis, (3.23), les régularités (3.24) et (3.26) résultent du Lemme 3.3.1 et (3.36). La régularité $\sigma \in L^2(0, T; \mathcal{H})$ résulte des lemmes 3.3.1), (3.3.2, l'hypothèse (3.8) et (3.51). Finalement (3.21) implique que

$$\rho \ddot{\mathbf{u}}(t) = \text{Div } \sigma(t) + \mathbf{f}_0(t) \quad \text{dans } V', \text{ p.p. } t \in (0, T),$$

et donc $\text{Div } \sigma \in L^2(0, T; V')$ pour (3.13) et (3.15). et nous déduisons que la régularité (3.25) est vérifiée, ce qui démontre la partie d'existence du théorème 3.3.1. L'unicité de la solution est une conséquence de l'unicité du point fixe de l'opérateur Λ défini par (3.41) et (3.43) et l'unicité de la solution des problèmes PV_η et QV_η . \square

3.4 Dépendance continue

Dans cette section, nous étudions la dépendance de la solution du Problème PV aux perturbations des conditions de contact. Nous supposons que (3.8) - (3.16) tenir et indiquer par $(\mathbf{u}, \sigma, \mathbf{k})$ la solution du Problème PV obtenu dans le théorème 3.3.1. De plus, pour tout $\alpha > 0$ Nous désignons par p^α une perturbation de p qui satisfait (3.12) avec L_p remplacé par L_p^α . Nous introduisons la fonctionnelle j^α défini par (3.19), remplaçant p par p^α et nous considérons le problème variationnel suivant.

Problème PV $^\alpha$:

Trouve un champ de déplacement $\mathbf{u}^\alpha : [0, T] \rightarrow V$, un champ de contrainte $\sigma^\alpha : [0, T] \rightarrow \mathcal{H}$ et une variable d'état interne $\mathbf{k}^\alpha : [0, T] \rightarrow Y$ tel que pour p.p. $t \in (0, T)$,

$$\begin{aligned} \sigma^\alpha(t) = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{\mathbf{u}}^\alpha(t)) + \mathcal{E}\varepsilon(\mathbf{u}^\alpha(t)) \\ + \int_0^t \mathcal{G}(\sigma^\alpha(s) - \mathcal{A}\varepsilon(\dot{\mathbf{u}}^\alpha(s)), \varepsilon(\mathbf{u}^\alpha(s)), \mathbf{k}^\alpha(s)) ds, \end{aligned} \quad (3.55)$$

$$\langle (\ddot{\mathbf{u}}^\alpha(t), \mathbf{v}) \rangle_{V' \times V} + (\sigma^\alpha(t), \varepsilon(\mathbf{v}))_{\mathcal{H}} + j^\alpha(\mathbf{u}^\alpha(t), \mathbf{v}) = \langle \mathbf{f}(t), \mathbf{v} \rangle_{V' \times V} \quad \forall \mathbf{v} \in V, \quad (3.56)$$

$$\dot{\mathbf{k}}^\alpha(t) = \phi(\sigma^\alpha(t) - \mathcal{A}\varepsilon(\dot{\mathbf{u}}^\alpha(t)), \varepsilon(\mathbf{u}^\alpha(t)), \mathbf{k}^\alpha(t)), \quad (3.57)$$

$$\mathbf{u}^\alpha(0) = \mathbf{u}_0, \quad \dot{\mathbf{u}}^\alpha(0) = \mathbf{v}_0, \quad \mathbf{k}^\alpha(0) = \mathbf{k}_0. \quad (3.58)$$

Nous déduisons du théorème 3.3.1 que pour tout $\alpha > 0$, le Problème PV $^\alpha$ a une solution unique $(\mathbf{u}^\alpha, \sigma^\alpha, \mathbf{k}^\alpha)$ qui satisfait (3.24) - (3.26). Supposons que la fonction de contact satisfait les hypothèses suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Il existe un } \beta \in \mathbb{R}_+ \text{ et } \theta :]0, \infty[\rightarrow [0, \infty[\text{ tel que} \\ \text{(a) } |p^\alpha(\mathbf{x}, r) - p(\mathbf{x}, r)| \leq \theta(\alpha)(|r| + \beta) \text{ pour tout } \alpha > 0, r \in \mathbb{R} \\ \text{(b) } \lim_{\alpha \rightarrow 0} \theta(\alpha) = 0. \\ \text{(c) Il existe un } L_0 > 0 \text{ tel que } L_p^\alpha \leq L_0 \text{ pour tout } \alpha > 0. \end{array} \right. \quad (3.59)$$

Nous avons le résultat de convergence suivan.

Théorème 3.4.2

La solution $(\mathbf{u}^\alpha, \sigma^\alpha, \mathbf{k}^\alpha)$ du Problème PV $^\alpha$ converge vers la solution $(\mathbf{u}, \sigma, \mathbf{k})$ du Problème PV i.e.

$$\mathbf{u}^\alpha \rightarrow \mathbf{u} \text{ dans } W^{1,2}(0, T; V) \quad \text{quand } \alpha \rightarrow 0, \quad (3.60)$$

$$\sigma^\alpha \rightarrow \sigma \text{ dans } L^2(0, T; \mathcal{H}) \quad \text{quand } \alpha \rightarrow 0, \quad (3.61)$$

$$\mathbf{k}^\alpha \rightarrow \mathbf{k} \text{ dans } W^{1,2}(0, T; Y) \quad \text{quand } \alpha \rightarrow 0. \quad (3.62)$$

Ce résultat de convergence, est important du point de vue mécanique car cela montre que de petites perturbations des conditions de contact entraînent de petites perturbations de la solution faible du Problème de contact dynamique P .

Démonstration .

Soit $\alpha > 0$. Ci-dessous, C désigne toujours une constante positive qui peut dépendre des données et de la solution $(\mathbf{u}, \sigma, \mathbf{k})$ mais ne dépend pas de α , ni de la variable temporelle, et dont la valeur peut varier d'un endroit à l'autre. En utilisant (3.21) et (3.56), nous obtenons.

$$\begin{aligned} & \langle (\ddot{\mathbf{u}}^\alpha(t) - \ddot{\mathbf{u}}(t)), (\mathbf{v}) \rangle_{V' \times V} + (\sigma^\alpha(t) - \sigma(t), \varepsilon(\mathbf{v}))_{\mathcal{H}} \\ & + j^\alpha(\mathbf{u}^\alpha(t), \mathbf{v}) - j(\mathbf{u}(t), \mathbf{v}) = 0, \quad \text{p.p. } t \in (0, T). \end{aligned} \quad (3.63)$$

on pose $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{u}}^\alpha(t) - \dot{\mathbf{u}}(t)$, il résulte

$$\begin{aligned} & \langle (\ddot{\mathbf{u}}^\alpha(t) - \ddot{\mathbf{u}}(t)), (\dot{\mathbf{u}}^\alpha(t) - \dot{\mathbf{u}}(t)) \rangle_{V' \times V} + (\sigma^\alpha(t) - \sigma(t), \varepsilon(\dot{\mathbf{u}}^\alpha(t) - \dot{\mathbf{u}}(t)))_{\mathcal{H}} \\ & + j^\alpha(\mathbf{u}^\alpha(t), \dot{\mathbf{u}}^\alpha(t) - \dot{\mathbf{u}}(t)) - j(\mathbf{u}(t), \dot{\mathbf{u}}^\alpha(t) - \dot{\mathbf{u}}(t)) = 0, \quad \text{p.p. } t \in (0, T). \end{aligned} \quad (3.64)$$

Nous définissons

$$\sigma^{\alpha R}(t) = \sigma^\alpha(t) - \mathcal{A}\varepsilon(\dot{\mathbf{u}}^\alpha(t)), \sigma^R(t) = \sigma(t) - \mathcal{A}\varepsilon(\dot{\mathbf{u}}(t)) \quad (3.65)$$

Notons que (3.20) et (3.55) donnent

$$\sigma^{\alpha R}(t) = \mathcal{E}\varepsilon(\mathbf{u}^\alpha(t)) + \int_0^t \mathcal{G}(\sigma^{\alpha R}(s), \varepsilon(\mathbf{u}^\alpha(s)), \mathbf{k}^\alpha(s)) ds, \quad (3.66)$$

$$\sigma^R(t) = \mathcal{E}\varepsilon(\mathbf{u}(t)) + \int_0^t \mathcal{G}(\sigma^R(s), \varepsilon(\mathbf{u}(s)), \mathbf{k}(s)) ds. \quad (3.67)$$

Nous utilisons (3.22), (3.57) et comme $\mathbf{k}^\alpha(0) = \mathbf{k}(0) = \mathbf{k}_0$ nous avons

$$\begin{aligned} & \mathbf{k}^\alpha(t) - \mathbf{k}(t) \\ &= \int_0^t (\phi(\sigma^{\alpha R}(s), \varepsilon(\mathbf{u}^\alpha(s)), \mathbf{k}^\alpha(s)) - \phi(\sigma^R(s), \varepsilon(\mathbf{u}(s)), \mathbf{k}(s))) ds. \end{aligned} \quad (3.68)$$

Nous combinons (3.64) et (3.65) pour obtenir

$$\begin{aligned} & \langle (\ddot{\mathbf{u}}^\alpha(t) - \ddot{\mathbf{u}}(t)), (\dot{\mathbf{u}}^\alpha(t) - \dot{\mathbf{u}}(t)) \rangle_{V' \times V} + (\mathcal{A}\varepsilon(\dot{\mathbf{u}}^\alpha(t)) - \mathcal{A}\varepsilon(\dot{\mathbf{u}}(t)), \varepsilon(\dot{\mathbf{u}}^\alpha(t) - \dot{\mathbf{u}}(t)))_{\mathcal{H}} \\ &= -(\sigma^{\alpha R}(t) - \sigma^R(t), \varepsilon(\dot{\mathbf{u}}^\alpha(t) - \dot{\mathbf{u}}(t)))_{\mathcal{H}} + j(\mathbf{u}(t), \dot{\mathbf{u}}^\alpha(t) - \dot{\mathbf{u}}(t)) \\ & \quad - j^\alpha(\mathbf{u}^\alpha(t), \dot{\mathbf{u}}^\alpha(t) - \dot{\mathbf{u}}(t)), \text{ p.p. } t \in (0, T). \end{aligned} \quad (3.69)$$

Il découle de (3.8)(b) que pour p.p. $t \in (0, T)$,

$$(\mathcal{A}\varepsilon(\dot{\mathbf{u}}^\alpha(t)) - \mathcal{A}\varepsilon(\dot{\mathbf{u}}(t)), \varepsilon(\dot{\mathbf{u}}^\alpha(t) - \dot{\mathbf{u}}(t)))_{\mathcal{H}} \geq m_{\mathcal{A}} |\dot{\mathbf{u}}^\alpha(t) - \dot{\mathbf{u}}(t)|_V^2. \quad (3.70)$$

En utilisant (3.66) et (3.67), nous déduisons que

$$\begin{aligned} \sigma^{\alpha R}(t) - \sigma^R(t) &= \mathcal{E}\varepsilon(\mathbf{u}^\alpha(t)) - \mathcal{E}\varepsilon(\mathbf{u}(t)) \\ & \quad + \int_0^t \mathcal{G}(\sigma^{\alpha R}(s), \varepsilon(\mathbf{u}^\alpha(s)), \mathbf{k}^\alpha(s)) ds \\ & \quad - \int_0^t \mathcal{G}(\sigma^R(s), \varepsilon(\mathbf{u}(s)), \mathbf{k}(s)) ds \quad \forall t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (3.71)$$

En combinant (2.12), (3.9) et (3.10), nous obtenons

$$\begin{aligned} |\sigma^{\alpha R}(t) - \sigma^R(t)|_{\mathcal{H}} &\leq C \left(|\mathbf{u}^\alpha(t) - \mathbf{u}(t)|_V + \int_0^t |\mathbf{u}^\alpha(s) - \mathbf{u}(s)|_V ds \right. \\ & \quad \left. + \int_0^t |\sigma^{\alpha R}(s) - \sigma^R(s)|_{\mathcal{H}} ds + \int_0^t |\mathbf{k}^\alpha(s) - \mathbf{k}(s)|_Y ds \right) \quad \forall t \in [0, T]. \end{aligned}$$

De (2.12), (3.11) et (3.68), on obtient

$$\begin{aligned} |\mathbf{k}^\alpha(t) - \mathbf{k}(t)|_Y &\leq C \left(\int_0^t |\mathbf{u}^\alpha(s) - \mathbf{u}(s)|_V ds \right. \\ & \quad \left. + \int_0^t |\sigma^{\alpha R}(s) - \sigma^R(s)|_{\mathcal{H}} ds + \int_0^t |\mathbf{k}^\alpha(s) - \mathbf{k}(s)|_Y ds \right) \quad \forall t \in [0, T]. \end{aligned}$$

En ajoutant les deux dernières inégalités, nous trouvons

$$\begin{aligned} |\sigma^{\alpha R}(t) - \sigma^R(t)|_{\mathcal{H}} + |\mathbf{k}^\alpha(t) - \mathbf{k}(t)|_Y &\leq C (|\mathbf{u}^\alpha(t) - \mathbf{u}(t)|_V \\ & \quad + \int_0^t |\mathbf{u}^\alpha(s) - \mathbf{u}(s)|_V ds + \int_0^t |\sigma^{\alpha R}(s) - \sigma^R(s)|_{\mathcal{H}} ds + \int_0^t |\mathbf{k}^\alpha(s) - \mathbf{k}(s)|_Y ds). \end{aligned}$$

En utilisant le lemme de Gronwall, nous voyons que

$$\begin{aligned} |\sigma^{\alpha R}(t) - \sigma^R(t)|_{\mathcal{H}} + |\mathbf{k}^\alpha(t) - \mathbf{k}(t)|_Y \\ \leq C \left(|\mathbf{u}^\alpha(t) - \mathbf{u}(t)|_V + \int_0^t |\mathbf{u}^\alpha(s) - \mathbf{u}(s)|_V ds \right) \end{aligned}$$

et

$$|\sigma^{\alpha R}(t) - \sigma^R(t)|_{\mathcal{H}} \leq C \left(|\mathbf{u}^\alpha(t) - \mathbf{u}(t)|_V + \int_0^t |\mathbf{u}^\alpha(s) - \mathbf{u}(s)|_V ds \right), \quad (3.72)$$

$$|\mathbf{k}^\alpha(t) - \mathbf{k}(t)|_Y \leq C \left(|\mathbf{u}^\alpha(t) - \mathbf{u}(t)|_V + \int_0^t |\mathbf{u}^\alpha(s) - \mathbf{u}(s)|_V ds \right). \quad (3.73)$$

L'inégalité (3.72) montre que

$$\begin{aligned} - (\sigma^{\alpha R}(t) - \sigma^R(t), \varepsilon(\dot{\mathbf{u}}^\alpha(t) - \dot{\mathbf{u}}(t)))_{\mathcal{H}} \\ \leq C \left(|\mathbf{u}^\alpha(t) - \mathbf{u}(t)|_V + \int_0^t |\mathbf{u}^\alpha(s) - \mathbf{u}(s)|_V ds \right) |\dot{\mathbf{u}}^\alpha(t) - \dot{\mathbf{u}}(t)|_V, \quad \text{p.p. } t \in (0, T). \end{aligned} \quad (3.74)$$

D'après la définition des fonctionnelles j et j^α , il en découle que

$$\begin{aligned} j(\mathbf{u}(t), \dot{\mathbf{u}}^\alpha(t) - \dot{\mathbf{u}}(t)) - j^\alpha(\mathbf{u}^\alpha(t), \dot{\mathbf{u}}^\alpha(t) - \dot{\mathbf{u}}(t)) \\ = \int_{\Gamma_3} (p(u_\nu(t) - g) - p^\alpha(u_\nu(t) - g)) (\dot{u}_\nu^\alpha(t) - \dot{u}_\nu(t)) da \\ + \int_{\Gamma_3} (p^\alpha(u_\nu(t) - g) - p^\alpha(u_\nu^\alpha(t) - g)) (\dot{u}_\nu^\alpha(t) - \dot{u}_\nu(t)) da, \quad \text{p.p. } t \in (0, T). \end{aligned}$$

En utilisant (3.59), (2.14) et le fait que p^α satisfait (3.12) avec L_p^α à la place de L_p

$$\begin{aligned} j(\mathbf{u}(t), \dot{\mathbf{u}}^\alpha(t) - \dot{\mathbf{u}}(t)) - j^\alpha(\mathbf{u}^\alpha(t), \dot{\mathbf{u}}^\alpha(t) - \dot{\mathbf{u}}(t)) \\ \leq \int_{\Gamma_3} \theta(\alpha)(|u_\nu(t) - g| + \beta) |\dot{\mathbf{u}}^\alpha(t) - \dot{\mathbf{u}}(t)|_V da \\ + \int_{\Gamma_3} L_0 |u_\nu(t) - u_\nu^\alpha(t)| |\dot{\mathbf{u}}^\alpha(t) - \dot{\mathbf{u}}(t)|_V da \quad \text{p.p. } t \in (0, T). \end{aligned}$$

nous déduisons que

$$\begin{aligned} j(\mathbf{u}(t), \dot{\mathbf{u}}^\alpha(t) - \dot{\mathbf{u}}(t)) - j^\alpha(\mathbf{u}^\alpha(t), \dot{\mathbf{u}}^\alpha(t) - \dot{\mathbf{u}}(t)) \\ \leq C(\theta(\alpha) + |\mathbf{u}^\alpha(t) - \mathbf{u}(t)|_V) |\dot{\mathbf{u}}^\alpha(t) - \dot{\mathbf{u}}(t)|_V, \quad \text{p.p. } t \in (0, T). \end{aligned} \quad (3.75)$$

Nous substituons (3.70), (3.74) et (3.75) dans (3.69) pour obtenir, pour p.p. $t \in (0, T)$,

$$\begin{aligned} \langle (\ddot{\mathbf{u}}^\alpha(t) - \ddot{\mathbf{u}}(t)), (\dot{\mathbf{u}}^\alpha(t) - \dot{\mathbf{u}}(t)) \rangle_{V' \times V} + m_{\mathcal{A}} |\dot{\mathbf{u}}^\alpha(t) - \dot{\mathbf{u}}(t)|_V^2 \\ \leq C \left(\theta(\alpha) + |\mathbf{u}^\alpha(t) - \mathbf{u}(t)|_V + \int_0^t |\mathbf{u}^\alpha(s) - \mathbf{u}(s)|_V ds \right) |\dot{\mathbf{u}}^\alpha(t) - \dot{\mathbf{u}}(t)|_V, \end{aligned} \quad (3.76)$$

et, en utilisant l'inégalité .

$$ab \leq \frac{1}{2m_{\mathcal{A}}}a^2 + \frac{m_{\mathcal{A}}}{2}b^2,$$

après quelques calculs d'algèbre, nous trouvons

$$\begin{aligned} & \langle (\ddot{\mathbf{u}}^\alpha(t) - \ddot{\mathbf{u}}(t)), (\dot{\mathbf{u}}^\alpha(t) - \dot{\mathbf{u}}(t)) \rangle_{V' \times V} + \frac{m_{\mathcal{A}}}{2} |\dot{\mathbf{u}}^\alpha(t) - \dot{\mathbf{u}}(t)|_V^2 \\ & \leq C \left(\theta^2(\alpha) + |\mathbf{u}^\alpha(t) - \mathbf{u}(t)|_V^2 + \int_0^t |\mathbf{u}^\alpha(s) - \mathbf{u}(s)|_V^2 ds \right), \quad \text{p.p. } t \in (0, T). \end{aligned}$$

Nous intégrons cette égalité sur $[0, s]$ en utilisant la condition initiale

$\dot{\mathbf{u}}^\alpha(0) = \dot{\mathbf{u}}(0) = \mathbf{v}_0$ pour trouve

$$\frac{m_{\mathcal{A}}}{2} \int_0^s |\dot{\mathbf{u}}^\alpha(t) - \dot{\mathbf{u}}(t)|_V^2 dt \leq C \left(\theta^2(\alpha) + \int_0^s |\mathbf{u}^\alpha(t) - \mathbf{u}(t)|_V^2 dt \right) \quad \forall s \in [0, T]. \quad (3.77)$$

puisque $\dot{\mathbf{u}}^\alpha(0) = \dot{\mathbf{u}}(0) = \mathbf{v}_0$ nous voyons que

$$|\mathbf{u}^\alpha(s) - \mathbf{u}(s)|_V^2 \leq C \int_0^s |\dot{\mathbf{u}}^\alpha(t) - \dot{\mathbf{u}}(t)|_V^2 dt \quad \forall s \in [0, T]. \quad (3.78)$$

Nous substituons maintenant (3.77) dans (3.78) et utilisons à nouveau l'inégalité de Gronwall pour trouver que

$$|\mathbf{u}^\alpha(s) - \mathbf{u}(s)|_V^2 \leq C\theta^2(\alpha) \quad \forall s \in [0, T]. \quad (3.79)$$

De (3.77) et (3.78) on déduit que

$$\int_0^s |\dot{\mathbf{u}}^\alpha(t) - \dot{\mathbf{u}}(t)|_V^2 dt \leq C\theta^2(\alpha) \quad \forall s \in [0, T]. \quad (3.80)$$

Nous combinons maintenant (3.79), (3.80) et l'hypothèse (3.59)(b) pour voir que (3.60) est satisfaite. Il découle de (3.65) que

$$\sigma^\alpha(t) - \sigma(t) = \sigma^{\alpha R}(t) - \sigma^R(t) + \mathcal{A}\varepsilon(\dot{\mathbf{u}}^\alpha(t)) - \mathcal{A}\varepsilon(\dot{\mathbf{u}}(t)), \quad \text{p.p. } t \in (0, T).$$

En utilisant cette inégalité,(3.72), et l'hypothèse (3.8) de l'opérateur \mathcal{A} et (3.60) nous voyons que (3.61) est satisfait. De (3.22), (3.57), l'hypothèse (3.11) sur ϕ , (3.72) et (3.73) nous déduisons que

$$\left| \dot{\mathbf{k}}^\alpha(t) - \dot{\mathbf{k}}(t) \right|_Y^2 \leq C \left(\int_0^t |\dot{\mathbf{u}}^\alpha(s) - \dot{\mathbf{u}}(s)|_V^2 ds \right). \quad (3.81)$$

puisque $\mathbf{k}^\alpha(0) = \mathbf{k}(0) = \mathbf{k}_0$ nous trouvons

$$|\mathbf{k}^\alpha(t) - \mathbf{k}(t)|_Y^2 \leq C \left(\int_0^t \left| \dot{\mathbf{k}}^\alpha(s) - \dot{\mathbf{k}}(s) \right|_Y^2 ds \right). \quad (3.82)$$

Nous concluons maintenant à partir de (3.80)-(3.82) et (3.59)(b) que (3.62) est également satisfait. \square

CONCLUSION GÉNÉRALE

Cet mémoire est destinée à l'étude variationnelle d'un problème de contact en élasto-viscoplasticité où le contact est modélisé par une condition de compliance normale sans frottement.

Le matériau est modélisé par une loi constitutive générale de nature élasto-viscoplastique avec variable interne d'état.

Notre étude de phénomène de contact comprend les étapes suivantes : la modélisation mathématique, l'analyse variationnelle incluant de résultat obtenus concernent l'existence et l'unicité d'une solution faible pour le problème étudié, en utilisant les techniques de point fixe de Banach et un résultat de convergence.

- [1] R. A. Adams, Sobolev Spaces, Academic Press, New York, 1975.
- [2] Y. Ayyad and M. Sofonea, Analysis of two dynamic frictionless contact problems for elastic-visco-plastic materials, *Electron. J. Differential Equations* 2007, no. 55,17 pp.
- [3] V. Barbu, and T. Precupanu, Convexity and optimisation in Banach spaces, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, (1986).
- [4] H. Brézis, Analyse fonctionnelle, Théorie et Application, Masson, 1987.
- [5] O. Chau, J. R. Fern´andez, W. Han and M. Sofonea, A frictionless contact problem for elastic-viscoplastic materials with normal compliance and damage, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 191 (2002), 5007–5026.
- [6] N. Cristescu and I. Suliciu, Viscoplasticity, Nijhoff, The Hague, and Editura Technica, Bucharest, 1982.
- [7] G. Duvaut et J.-L. Lions, Les In´equations en M´ecanique et en Physique, Springer, Berlin, 1976.
- [8] J. R. Fern´andez, W. Han, M. Sofonea and J. M. Via˜no, Variational and numerical analysis of a frictionless contact problem for elastic-viscoplastic materials with internal state variables, *Quart. J. Mech. Appl. Math.* 54 (2001), 501–522.
- [9] J. R. Fern´andez, M. Sofonea et J. M. Vianˆo, Analyse num´erique d’un probl´eme ´elasto-viscoplastique de contact sans frottement avec compliance normale, *C. R. Acad. Sci. Paris* 331 (2000), 323–328.

-
- [10] W. Han and M. Sofonea, *Quasistatic Contact Problems in Viscoelasticity and Viscoplasticity*, AMS/AP Stud. Adv. Math. 30, Amer. Math. Soc. and Int. Press, 2002.
- [11] W. Han and M. Sofonea, Evolutionary variational inequalities arising in viscoelastic contact problems, *SIAM J. Numer. Anal.* 38 (2000), 556–579.
- [12] W. Han and M. Sofonea, On a dynamic contact problem for elastic-visco-plastic materials, *Appl. Numer. Math.* 57 (2007), 498–509.
- [13] H. Hilber, T. Hughes, R. Taylor, Improved numerical dissipation for time integration algorithms in structural dynamics, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics* 5 (1977) 283-292.
- [14] I. R. Ionescu and M. Sofonea, *Functional and Numerical Methods in Viscoplasticity*, Oxford Univ. Press, Oxford, 1994.
- [15] O. Kavian, *Introduction ‘a la th´eorie des points critiques et applications aux ´equations elliptiques*, Springer, 1993.
- [16] A. Klarbring, A. Mikeli´c and M. Shillor, Frictional contact problems with normal compliance, *Int. J. Engrg. Sci.* 26 (1988), 811–832.
- [17] J. A. C. Martins and J. T. Oden, Existence and uniqueness results for dynamic contact problems with nonlinear normal and friction interface laws, *Nonlinear Anal.* 11 (1987), 407–428 ; Corrigendum, *ibid.* 12 (1988), 747.
- [18] M. Rochdi, M. Shillor and M. Sofonea, A quasistatic contact problem with directional friction and damped response, *Appl. Anal.* 68 (1998), 409–422.
- [19] M. Rochdi, M. Shillor and M. Sofonea, Quasistatic viscoelastic contact with normal compliance and friction, *J. Elasticity* 51 (1998), 105–126.
- [20] L. Selmani and N. Bensebaa, A frictionless contact problem with adhesion and damage in elasto-viscoplasticity, *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova* 118 (2007), 49–71 .
- [21] M. Selmani and T. Messaoudi, A dynamic frictionless elastic-viscoplastic problem with normal damped response and damage, *Mediterr. J. Math.* 9 (2012), 81–94.
- [22] M. Selmani and L. Selmani, Analysis of a frictionless contact problem for elastic-viscoplastic materials, *Nonlinear Anal. Modelling Control* 17 (2012), 99–117.

- [23] M. Sofonea, W. Han and M. Shillor, Analysis and Approximation of Contact Problems with Adhesion or Damage, Pure Appl. Math. 276, Chapman-Hall/CRC Press, New York, 2006.