



République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement supérieur et de la Recherche Scientifique



Université d'El Oued

Faculté des Sciences Exactes

Laboratoire ...

Une thèse de doctorat

Présentée en vue de l'obtention du diplôme de Doctorat

Domaine : Mathématiques

Spécialisation : Analyse fonctionnelle

Sur les opérateurs normaux et leurs applications

Présenté par : Ismail Lakehal

Encadré par : Messaoud Guesba

Soutenue devant le jury composé de :

Nom	Grade	Affiliation	Rôle
Abdelouahab Mansour	Professeur	Université El Oued	Président
Messaoud Guesba	Professeur	Université El Oued	Rapporteur
Amar Belacel	Professeur	Université Laghouat	Co-directeur de thèse
Lamine Guedda	Professeur	Université El Oued	Examineur
Tidjani Menacer	Professeur	Université Biskra	Examineur
Ismail Bouznada	Professeur	Université Tébessa	Examineur

Année académique : 2025-2026 / 1446-1447 AH

Résumé

Cette thèse s'inscrit dans le cadre des espaces de Hilbert et de la théorie des opérateurs. Elle porte sur les opérateurs linéaires bornés définis sur un espace de Hilbert complexe H , en particulier sur la classe des opérateurs C -normaux, qui généralisent naturellement les opérateurs C -symétriques. Plusieurs propriétés fondamentales de cette classe sont établies. Nous montrons notamment que si un opérateur T est C -symétrique, alors T^n est C -normal pour tout entier positif n . Des conditions suffisantes garantissant la stabilité de la C -normalité par la somme, le produit et le produit tensoriel sont également données.

Par ailleurs, nous introduisons et étudions les opérateurs $2-C$ -normaux et $C-2$ -normaux. Nous analysons leur comportement par rapport à l'adjoint, à l'inverse et à la multiplication par un scalaire complexe, et montrons qu'ils ne sont pas équivalents aux opérateurs C -normaux. Certains résultats antérieurs sont étendus à ces classes, en s'appuyant en particulier sur la décomposition polaire, et l'on présente divers exemples illustratifs afin de mettre en évidence la portée et la pertinence de ces généralisations.

Abstract

This thesis is situated within the framework of Hilbert spaces and operator theory. It focuses on bounded linear operators defined on a complex Hilbert space H , with particular emphasis on the class of C -normal operators, which naturally generalize C -symmetric operators. Several fundamental properties of this class are established. In particular, we show that if an operator T is C -symmetric, then T^n is C -normal for every positive integer n . Sufficient conditions ensuring the stability of C -normality under the sums, the products, and the tensor products are also provided.

Furthermore, we introduce and study the classes of $2-C$ -normal and $C-2$ -normal operators. We analyze their behavior with respect to the adjoint operator, the inverse operator, and scalar multiplication by a complex number, and we demonstrate that these classes are not equivalent to C -normal operators. Some previously known results are generalized to these classes, notably by using the polar decomposition, and several illustrative examples are presented.

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier Allah de m'avoir donné la force et la capacité de mener à bien ce travail.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude et mes sincères remerciements à mon directeur de thèse, le Professeur Messaoud Guesba, pour son précieux soutien et son accompagnement tout au long de la réalisation de ce travail. Il m'a accompagné avec sérieux et intégrité, en me fournissant l'ensemble des références et travaux antérieurs relatifs à ce sujet, tout en traçant pour moi un chemin clair. Il a corrigé chacune de mes tentatives jusqu'à l'aboutissement de l'article et de cette thèse. Aucun mot ne saurait exprimer toute ma profonde reconnaissance.

Je n'oublie pas non plus d'adresser mes vifs remerciements au professeur Amar Belacel, encadrant adjoint, qui m'a guidé et conseillé avec bienveillance vers le domaine de la théorie des opérateurs. Il m'a apporté une aide précieuse en matière de recherche et de publication, jusqu'à l'achèvement de ce travail. Je lui suis profondément reconnaissant.

Je tiens également à remercier mes parents pour leur amour et leur soutien tout au long de ma vie. Merci à vous deux de m'avoir donné la force de regarder toujours vers l'avenir et de poursuivre mes rêves.

Je remercie également mes frères et sœurs pour tout leur soutien et leur affection, car la vie sans eux ne vaut rien. Je demande à Dieu de les protéger.

J'adresse mes remerciements particuliers et ma gratitude aux membres du jury « Messieurs les Professeurs Abdelouahab Mansour, Lamine Guedda, Tidjani Menacer et Ismail Bouznada » qui ont accepté d'examiner mon travail.

Je remercie également tous les enseignants et le personnel de l'Université Chahid Hamma Lakhdar d'El Oued, pour toute l'aide qu'ils m'ont apportée, et à leur tête le président du département de mathématiques, le généreux professeur Saïd Beloul.

Enfin, je tiens à dédier ce travail à mon père. J'aurais souhaité qu'il soit avec moi (que Dieu ait pitié de lui).

Dédicace

Je dédie ce modeste travail :

-À mon père, que Dieu ait son âme et le fasse reposer dans les vastes jardins du Paradis.

-À ma mère, que Dieu prolonge sa vie et nous accorde d'être obéissants envers elle.

-À ceux avec qui j'ai grandi sous le même toit, mes frères et sœurs.

-À ma chère épouse et à mes fils, Ahmed et Abdallah.

-À toute ma famille.

-À tous mes étudiants.

-À tous mes amis et compagnons.

Enfin, je dédie cette thèse à mes collègues et à tous ceux qui me sont chers.

Ismail

Table des matières

1	Préliminaires	10
1.0.1	Les opérateurs continus.	10
1.0.2	Définitions importantes.	11
1.0.3	Notion de l'adjoint d'un opérateur	12
1.0.4	L'opérateur auto-adjoint	13
1.0.5	L'image numérique.	14
1.0.6	Quelques classes d'opérateurs.	15
1.0.7	Opérateur positif et opérateur racine carrée	15
1.0.8	Décomposition polaire d'un opérateur	17
1.0.9	Les opérateurs compacts	18
1.0.10	Spectre d'un opérateur	19
1.1	Les opérateurs normaux	20
1.1.1	Quelques classes d'opérateurs.	22
1.1.2	Inverse d'un opérateur normal	23
1.1.3	Le théorème de Fuglede-Putnam	25
1.1.4	Quelques applications du théorème de Fuglede- Putnam	25
2	Sur les opérateurs normaux	28
2.1	Conjugaison.	28
2.2	Les opérateurs symétriques complexes	30
2.3	Opérateurs C -normaux	34
2.3.1	Les opérateurs C -normaux	35
2.3.2	Cas de dimension finie	38
2.3.3	Résultats et exemples	40
2.4	Quelques résultats sur les opérateurs C -normaux	46
3	Les opérateurs 2-C-normaux et les opérateurs C-2-normaux	56
3.1	Les opérateurs 2- C -normaux	56
3.2	Les opérateurs C -2-normaux	68
	Conclusion	84
	Bibliographie	85

Liste des notations

Symboles	Signification
$\mathbb{C}$	Ensemble des nombres complexes.
$\mathbb{R}$	Ensemble des nombres réels.
$\mathbb{N}$	Ensemble des entiers naturels.
H	Espace de Hilbert.
$\mathcal{B}(H)$	Ensemble des opérateurs linéaires bornés sur H .
$LA(H)$	Ensemble des opérateurs anti-linéaires sur H .
C	Conjugaison sur H .
$Im(T)$	L'image de l'opérateur $T \in \mathcal{B}(H)$.
$Ker(T)$	Le noyau de l'opérateur $T \in \mathcal{B}(H)$.
$\ T\ $	Norme de l'opérateur T .
$W(T)$	L'image numérique de l'opérateur T .
M_n	Ensemble des matrices.
$\sqrt{T}$	Racine carrée de l'opérateur T .
$K(H)$	Ensemble des opérateurs compacts sur H .
$K_0(H)$	Ensemble des opérateurs de rang fini sur H .
L^2	espace de Lebesgue.
$T \otimes S$	Le produit tensoriel de T et S .
$N_{2,C}(H)$	Ensemble de tous les opérateurs 2- C -normaux sur H .
$N_{C,2}(H)$	Ensemble de tous les opérateurs C -2-normaux sur H .

Introduction

Dans cette thèse, nous allons étudier le domaine des opérateurs linéaires bornés sur un espace de Hilbert complexe, généralement désigné par $\mathcal{B}(H)$, en expliquant l'évolution et les recherches qui ont été menées sur ce type d'opérateurs. Nous mettrons particulièrement en lumière les catégories d'opérateurs relevant de l'analyse fonctionnelle, qui ont joué un rôle essentiel dans les travaux des dernières années.

Dans le cas de la théorie des opérateurs, il existe de nombreux types d'opérateurs qui ont été précédemment étudiés et dont l'étude reste ouverte et diversifiée à ce jour. Dans notre thèse, l'étude se limitera aux opérateurs normaux (dans le cas d'un opérateur $T \in \mathcal{B}(H)$, celui-ci commute avec son adjoint, c'est-à-dire $TT^* = T^*T$) et à tout ce qui les concerne, car ils sont étroitement liés à de nombreuses thématiques.

S.A. Alzraiqi et A.B. Patel [1] ont introduit les opérateurs n -normaux, c'est-à-dire : la classe des opérateurs T tels que $T^n T^* = T^* T^n$, et ont également démontré plusieurs propriétés intéressantes de cette classe. La classe des opérateurs n -normaux est très étendue. Par exemple, les opérateurs n -nilpotents ($T^n = 0$) sont clairement n -normaux.

L'un des concepts cruciaux sur lesquels repose cette thèse est la notion de conjugaison C , c'est-à-dire un opérateur anti-linéaire, isométrique et involutif, vérifiant $C \in LA(H)$, $C^2 = I$ et $\langle Cx, Cy \rangle = \langle y, x \rangle$ pour tout $x, y \in H$, où $LA(H)$ désigne l'ensemble des opérateurs anti-linéaires sur H . Une telle structure apparaît naturellement en physique; voir [17]. Nous notons l'opérateur adjoint de l'opérateur $X \in LA(H)$ par $X^\#$, c'est-à-dire l'opérateur qui satisfait la propriété

$$\langle X^\# x, y \rangle = \overline{\langle x, Xy \rangle} \text{ pour tout } x, y \in H.$$

L'opérateur anti-linéaire X est appelé auto-adjoint anti-linéaire si $X^\# = X$. Les conjugaisons sont des exemples de tels opérateurs, puisque $C^\# = C$; voir [30]. Cela a conduit à l'extension du concept d'opérateur normal à cette classe, où nous disons d'un opérateur anti-linéaire qu'il est normal s'il satisfait $XX^\# = X^\#X$.

Parmi les opérateurs qui ont été largement étudiés au cours des dernières années, on trouve les opérateurs C -symétriques, où un opérateur $T \in \mathcal{B}(H)$ est C -symétrique si $CTC = T^*$ et l'on dit qu'un opérateur T est complexe symétrique s'il existe une conjugaison C telle que T soit C -symétrique; voir [13][15][16]. De même, on dit que T est C -skew-symétrique si $CTC = -T^*$. Les opérateurs C -symétriques ont des applications en physique, en particulier en mécanique quantique et en analyse spectrale; voir [27] et [4].

En 2020, M. Ptak, K. Simik et A. Wicher ont introduit une nouvelle définition des opérateurs C -normaux, qu'ils ont appelée ainsi, et qui repose sur les propriétés des opérateurs normaux et sur les propriétés des conjugaisons. La conséquence immédiate de cette définition des opérateurs C -normaux est que les opérateurs C -symétriques et les opérateurs C -skew-symétriques sont C -normaux; cependant, l'inverse n'est pas vrai dans le cas général.

Comme l'ont présenté C.Wang, J.Zhao et S.Zhu dans [31], ils ont donné une définition équivalente des opérateurs C -normaux et ont utilisé cette définition pour étudier de nouvelles propriétés de cette catégorie, se basant

sur la décomposition polaire des opérateurs de $\mathcal{B}(H)$, ainsi que sur l'analyse des opérateurs unitaires en les décomposant en une composition de deux conjugaisons, comme ils l'ont exposé dans [15].

Dans notre travail, nous avons utilisé ces définitions pour présenter de nouveaux résultats concernant les opérateurs C -normaux et pour généraliser certaines conclusions trouvées dans les travaux antérieurs.

Ce travail est divisé en trois chapitres suivants.

Dans le premier chapitre, nous donnons un aperçu général des différentes notions nécessaires à la compréhension du contenu de cette thèse. En particulier, nous commençons par introduire quelques concepts généraux concernant les opérateurs et nous nous référons au concept d'opérateurs positifs, qui nous aideront à aborder la décomposition polaire d'un opérateur, un concept essentiel pour le troisième chapitre. Ensuite, nous présentons les définitions et les théories les plus importantes concernant les opérateurs normaux. À la fin de ce chapitre, nous introduisons le théorème de Fuglede-Putnam, dont nous aurons besoin dans le deuxième chapitre (comme il a été utilisé dans notre article publié). De plus, nous fournissons quelques applications de ce théorème.

Au début de ce chapitre 2, nous présentons une définition fondamentale pour la suite de cette thèse, à savoir la notion de conjugaison, ainsi que la plupart des propriétés qui lui sont associées et essentielles à ce travail. Ensuite, nous introduisons la notion d'opérateurs symétriques complexes, qui s'applique aux opérateurs C -symétriques, lesquels ont été largement étudiés par de nombreux chercheurs, notamment par S. R. Garcia. Cette notion dépend largement des propriétés de la conjugaison et de la décomposition polaire d'un opérateur, laquelle révèle de nombreuses caractéristiques de ce type d'opérateur.

Ensuite, nous revenons à la définition des opérateurs C -normaux, introduite pour la première fois dans l'article de M. Ptak, K. Simik et A. Wicher [28], laquelle a permis d'établir de nombreuses caractéristiques de ce type d'opérateurs. Nous présentons également une définition équivalente à la définition précédente, à savoir celle proposée par C. Wang, J. Zhao et S. Zhu dans [32], et utilisée par ces auteurs pour obtenir de nouveaux résultats.

À la fin de ce chapitre, nous exposons les résultats que nous avons obtenus, lesquels concernent les opérateurs C -normaux. Nous avons étudié les conditions sous lesquelles la somme et le produit d'opérateurs de ce type restent au sein de cette classe, et nous avons généralisé certains résultats trouvés dans les deux articles précédents. Nous explorons également d'autres propriétés, notamment celles qui dépendent du théorème de Fuglede-Putnam et d'autres théorèmes connexes.

Dans le troisième chapitre, nous nous appuyons sur la définition des opérateurs normaux et des opérateurs 2-normaux, sur la manière de passer de l'un à l'autre, ainsi que sur la définition des opérateurs C -normaux, et nous tentons de définir deux nouvelles catégories. Nous les avons nommées respectivement opérateurs 2- C -normaux et opérateurs C -2-normaux.

Tout d'abord, nous présentons la définition des opérateurs 2- C -normaux, nous définissons de nombreuses propriétés de ce type d'opérateurs et nous étudions la relation entre eux et les opérateurs normaux, C -symétriques et C -normaux. Nous examinons la stabilité de cette classe par rapport à l'opérateur adjoint, à la multiplication par un nombre complexe, à son inverse, ainsi qu'au produit et à la somme des opérateurs de cette classe, ainsi qu'à de nombreuses autres propriétés.

Ensuite, nous avons également présenté un autre type, différent du premier et contenant les mêmes éléments de base, et nous l'avons appelé les opérateurs C -2-normaux. De la même manière que pour le premier type, nous avons établi de nombreuses propriétés et quelques théorèmes, et nous avons également utilisé la décomposition polaire d'un opérateur pour obtenir quelques résultats pour ce type d'opérateur, notamment l'étude de la transformée de Duggal.

Au cours de l'étude de ces deux opérateurs, nous avons établi et généralisé de nombreuses propriétés présentées dans des travaux antérieurs concernant les opérateurs C -normaux. Lors de l'étude de ces nouvelles catégories, nous avons présenté de nombreux exemples variés et mis en évidence la différence entre elles et les opérateurs normaux, C -symétriques et C -normaux.

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre, nous présentons les notations, les résultats élémentaires ainsi que les outils que nous utiliserons tout au long de cette thèse. Nous y introduisons les espaces de Hilbert complexes et présentons les concepts d'opérateurs normaux, d'opérateurs n -normaux, d'opérateurs compacts, d'opérateurs positifs ainsi que la notion de racine carrée d'un opérateur et le spectre d'un opérateur.

1.0.1 Les opérateurs continus.

Définition 1.0.1. *Un espace de Hilbert H est un espace préhilbertien sur $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) qui est complet pour la distance définie par $d(x, y) = \|x - y\|$.*

Un espace de Hilbert est également un espace de Banach dont la norme provient d'un produit scalaire.

Une telle norme est parfois appelée norme de convergence en moyenne quadratique.

Définition 1.0.2. *Une forme linéaire continue sur un espace de Hilbert H est une application linéaire $T : H \rightarrow \mathbb{K}$ telle que, pour toute suite $(x_n)_n$ convergeant vers x dans H , la suite $(T(x_n))_n$ converge vers $T(x)$. L'ensemble des formes linéaires continues sur H est appelé le dual topologique de H et se note H^* .*

Proposition 1.0.1. *Une forme linéaire T sur H est continue si et seulement s'il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$|T(x)| \leq C \|x\|, \forall x \in H.$$

Démonstration. Il est clair que s'il existe $C > 0$ telle que l'on ait

$$|T(x)| \leq C \|x\|, \forall x \in H.$$

Alors, si une suite (x_n) converge vers x dans H , on a

$$\begin{aligned} |T(x_n) - T(x)| &= |T(x_n - x)| \\ &\leq C \|x_n - x\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Donc T est continue.

Réciproquement, si T est continue, l'image réciproque par T de la boule ouverte centrée à l'origine et de rayon 1

est un ouvert de H contenant 0 ; il existe donc $\lambda > 0$ tel que $\|x\| \leq \lambda$ entraîne $|T(x)| \leq 1$. Soit x un élément arbitraire de H non nul ; l'élément $\lambda x \|x\|^{-1}$ a une norme égale à λ , donc $\lambda \|x\|^{-1} |T(x)| \leq 1$ et, par conséquent,

$$|T(x)| \leq \lambda^{-1} \|x\|, \quad \forall x \in H.$$

Cela montre que la forme linéaire T est bornée par λ^{-1} . □

Théorème 1.0.1. (Théorème de représentation de Riesz)[7]. Soit H un espace de Hilbert ; on a :

(1) Si T est une forme linéaire continue sur H , alors il existe un unique élément y de H tel que

$$\forall x \in H, T(x) = \langle x, y \rangle \quad \text{et} \quad |T| = \|y\|.$$

(2) Réciproquement, tout $y \in H$ définit une forme linéaire continue T_y sur H par la formule

$$T_y(x) = \langle x, y \rangle, \quad \forall x \in H.$$

Ainsi l'application qui à un élément $y \in H$ associe la forme linéaire continue T_y est un isomorphisme (anti-linéaire) topologique de H sur son dual H^* .

Définition 1.0.3. Soit $T : X \longrightarrow Y$, où X et Y sont deux espaces de Banach, une application linéaire que l'on appellera souvent un opérateur. Si l'opérateur $T : X \longrightarrow Y$ est continu, on appelle adjoint, ou dual, de T , l'unique application linéaire continue $T^* : Y^* \longrightarrow X^*$, où X^* désigne le dual topologique de X , telle que :

$$\langle T^*(y^*), x \rangle = \langle y^*, T(x) \rangle, \quad \forall x \in X, \forall y^* \in Y^*.$$

Proposition 1.0.2. [7] Soient X et Y deux espaces vectoriels normés sur $\mathbb{K}$ et soit T un opérateur linéaire de X dans Y . Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (1) L'opérateur linéaire T est continu.
- (2) L'opérateur linéaire T est continu en 0.
- (3) L'opérateur linéaire T est continu en un point.
- (4) Il existe une constante $c > 0$ telle que $\|Tx\| \leq c \|x\|$, pour tout $x \in X$.

Définition 1.0.4. Soit H un espace de Hilbert. On appelle opérateur sur H une application linéaire continue de H dans H . On note $\mathcal{B}(H)$ l'ensemble des opérateurs sur H . Si $T \in \mathcal{B}(H)$, on définit sa norme d'opérateur par

$$\begin{aligned} \|T\| &= \sup \{ \|Tx\| : x \in H, \|x\| \leq 1 \} \\ &= \inf \{ c \mid \|Tx\| \leq c \|x\| ; \forall x \in H \} \\ &= \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| \end{aligned}$$

1.0.2 Définitions importantes.

1. Si $T \in \mathcal{B}(H)$, $Im(T)$ (resp. $Ker(T)$) désigne l'image (resp. le noyau) de T .
2. Si T_1 et T_2 sont deux opérateurs de $\mathcal{B}(H)$, on dit que T_1 et T_2 commutent si $T_1 T_2 = T_2 T_1$.

3. Soit $T \in \mathcal{B}(H)$, avec H un espace de Hilbert sur $\mathbb{C}$. Si $\langle Tx, x \rangle = 0$, pour tout $x \in H$, alors $T = 0$. (Si H est un espace de Hilbert sur $\mathbb{R}$, cette propriété n'est pas vérifiée.) Donc si $S, T \in \mathcal{B}(H)$

$$\langle Sx, x \rangle = \langle Tx, x \rangle, \forall x \in H \implies S = T.$$

Définition 1.0.5. Sur $\mathcal{B}(H)$, on utilise l'une des topologies suivantes :

(1) **Topologie uniforme (ou de la norme).**

Une suite $(T_n)_n$ d'opérateurs converge en norme vers T si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|T_n - T\| = 0$.

(2) **Topologie forte des opérateurs.**

Une suite $(T_n)_n$ d'opérateurs converge fortement vers T , noté $T_n \xrightarrow{S} T$, si, pour tout $x \in H$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|T_n x - T x\| = 0.$$

(3) **Topologie faible des opérateurs.**

Une suite $(T_n)_n$ d'opérateurs converge faiblement vers T , noté $T_n \xrightarrow{W} T$, si et seulement si

$$\langle T_n x, y \rangle \longrightarrow \langle T x, y \rangle \text{ quand } n \longrightarrow +\infty, \text{ pour tout } x, y \in H.$$

1.0.3 Notion de l'adjoint d'un opérateur

Théorème 1.0.2. [7] Soit H un espace de Hilbert et T un opérateur de $\mathcal{B}(H)$. Il existe un unique opérateur continu de H dans H , noté T^* et appelé l'adjoint de T , tel que

$$\langle T x, y \rangle = \langle x, T^* y \rangle, \quad \forall x, y \in H.$$

Proposition 1.0.3. L'application

$$\begin{aligned} \phi : \mathcal{B}(H) &\longrightarrow \mathcal{B}(H) \\ T &\longrightarrow T^* \end{aligned}$$

est anti-linéaire (en particulier, $(\lambda T)^* = \overline{\lambda} T^*$). On a de plus :

- (1) Pour tout $T, S \in \mathcal{B}(H)$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, on a $(\alpha T + \beta S)^* = \alpha T^* + \beta S^*$.
- (2) Pour tout $T \in \mathcal{B}(H)$, on a $(T^*)^* = T$.
- (3) On a $I^* = I$.
- (4) Pour tout $T, S \in \mathcal{B}(H)$, on a $(TS)^* = S^* T^*$.
- (5) Si T est inversible, alors T^* est inversible et on a $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.
- (6) Pour tout $T \in \mathcal{B}(H)$, on a $\ker(T^*) = (\text{Im}(T))^\perp$ et $\text{Im}(T^*) = (\ker(T))^\perp$.

Exemple 1.0.1. On désigne par $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la base canonique de $\ell^2(\mathbb{N})$ et soit T l'opérateur de translation défini sur $\ell^2(\mathbb{N})$ par

$$T e_1 = 0 \text{ et } T e_{n+1} = e_n, \quad n \geq 1.$$

Les relations

$$\langle T^* e_n, e_m \rangle = \langle e_n, T e_m \rangle = \begin{cases} 1, & \text{si } m = n + 1, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

montrent que T^* est défini par $T^* e_n = e_{n+1}$, $n \geq 1$. Il en résulte que, si $x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n$, est un élément arbitraire de $\ell^2(\mathbb{N})$, ses images par T et par T^* sont données par

$$Tx = \sum_{n=2}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_{n-1}, \quad T^* x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_{n+1}.$$

Proposition 1.0.4. Si un opérateur sur $\mathcal{B}(H)$ est représenté par sa matrice, alors son adjoint est représenté par la matrice transposée conjuguée.

Démonstration. Soit H un espace de Hilbert séparable et soit $(e_n)_n$ une base hilbertienne de H . Tout élément $T \in \mathcal{B}(H)$ est représenté par la matrice infinie $(a_{ij})_{i,j}$, avec $a_{ij} = \langle T e_j, e_i \rangle$. On peut voir de même que l'opérateur adjoint T^* est représenté par la matrice (a_{ij}^*) donnée par $a_{ij}^* = \langle T^* e_j, e_i \rangle$. Comme

$$\begin{aligned} a_{ij}^* &= \langle T^* e_j, e_i \rangle = \langle e_j, T e_i \rangle \\ &= \overline{\langle T e_i, e_j \rangle} = \overline{a_{ji}}. \end{aligned}$$

On en déduit, comme en dimension finie, que l'adjoint T^* est représenté par la matrice transposée conjuguée. Donc, pour $T \in M_n(\mathbb{C})$ et $x, y \in \mathbb{C}^n$, on a, pour le produit scalaire hermitien usuel de $\mathbb{C}^n$:

$$T^* = {}^t \overline{T} \quad \text{alors} \quad \langle Tx, y \rangle = \langle x, {}^t \overline{T} y \rangle.$$

□

1.0.4 L'opérateur auto-adjoint

Définition 1.0.6. Un opérateur $T \in \mathcal{B}(H)$ est dit auto-adjoint (ou parfois hermitien) s'il est égal à son adjoint, c'est-à-dire si, quels que soient x et y dans H ,

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle.$$

Cela signifie que $T^* = T$.

Remarque 1.0.1. Soit $T \in \mathcal{B}(H)$, on a :

(1) On dit que T est anti-hermitien si $T^* = -T$.

(2) Soit $T \in M_n(\mathbb{C})$. On dit que T est hermitien si $T = {}^t \overline{T}$. On dit que T est anti-hermitien si $T = -{}^t \overline{T}$.

Exemple 1.0.2. Soit $T \in \mathcal{B}(H)$. Les opérateurs

$$U = \frac{1}{2}(T + T^*) \quad \text{et} \quad V = \frac{1}{2i}(T - T^*)$$

sont auto-adjoints et on a $T = U + iV$. L'opérateur U est appelé la partie réelle de T et l'opérateur V est sa partie imaginaire.

Proposition 1.0.5.

1. Soit H un espace de Hilbert sur $\mathbb{C}$. Un opérateur $T \in \mathcal{B}(H)$ est auto-adjoint si, et seulement si, pour tout x dans H , $\langle Tx, x \rangle \in \mathbb{R}$.
2. Soit H un espace de Hilbert sur $\mathbb{R}$ et T un élément de $\mathcal{B}(H)$ auto-adjoint. Si $\langle Tx, x \rangle = 0$ pour tout $x \in H$, alors $T = 0$.

Définition 1.0.7. Soit $T \in \mathcal{B}(H)$, on a :

- (1) Un sous-ensemble X de H est dit invariant pour T si $T(X) \subset X$.
- (2) Un sous-ensemble X de H est dit réduisant pour T si $T(X) \subset X$ et $T(X^\perp) \subset X^\perp$, avec

$$X^\perp = \{y \in H, \forall x \in X : \langle x, y \rangle = 0\}.$$

Proposition 1.0.6. Soit $T \in \mathcal{B}(H)$ un opérateur auto-adjoint et soit X un sous-espace de H . Si X est invariant par T , alors $X^\perp$ est aussi invariant par T .

Démonstration. En effet, pour tout $x \in X$ et $y \in X^\perp$, on a

$$\langle Ty, x \rangle = \langle y, Tx \rangle = 0,$$

car (Tx) appartient à X ; il en résulte que (Ty) appartient à $X^\perp$. □

1.0.5 L'image numérique.

Définition 1.0.8. L'image numérique d'un opérateur T dans $\mathcal{B}(H)$ est l'ensemble défini par :

$$W(T) = \{\langle Tx, x \rangle \in \mathbb{C}, x \in H, \|x\| = 1\}.$$

Le rayon numérique de T est défini par :

$$w(T) = \sup\{|z|, z \in W(T)\}.$$

Définition 1.0.9. Un opérateur borné U , défini sur un espace de Hilbert H , est dit unitaire si $U^*U = UU^* = I$, c'est-à-dire que U est l'inverse de son adjoint (i.e., $U^{-1} = U^*$).

Exemple 1.0.3. (et propriétés.) Soit T un opérateur auto-adjoint dans $\mathcal{B}(H)$. Alors les deux opérateurs e^{iT} et e^{-iT} sont des opérateurs unitaires.

Si T est un opérateur auto-adjoint, alors il est clair que

$$(e^{iT})^* = e^{-iT^*} = e^{-iT}.$$

D'autre part, on a

$$(e^{iT})^* e^{iT} = e^{-iT} e^{iT} = I, \text{ et } e^{iT} (e^{iT})^* = e^{iT} e^{-iT} = I.$$

Donc e^{iT} est un opérateur unitaire.

Exemple 1.0.4. Soit T l'opérateur défini sur $\mathbb{C}^3$ ($T \in M_3(\mathbb{C})$) par

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i \end{pmatrix}.$$

Alors on a que T est un opérateur unitaire, car

$$TT^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i \end{pmatrix} = T^*T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i \end{pmatrix} = I.$$

Théorème 1.0.3. [19] (**Propriétés de l'image numérique**). Soient $T, S \in \mathcal{B}(H)$ et soit $U \in \mathcal{B}(H)$ un opérateur unitaire (i.e., $U^*U = UU^* = I$). Alors

1. $W(\alpha I + \beta T) = \alpha + \beta W(T)$ pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.
2. $W(T + S) \subset W(T) + W(S)$.
3. $W(T^*) = \{\bar{\lambda}, \lambda \in W(T)\}$.
4. $W(U^*TU) = W(T)$.

1.0.6 Quelques classes d'opérateurs.

Définition 1.0.10. Un opérateur linéaire T sur un espace de Hilbert H :

- (1) est isométrique (ou une isométrie) si $T^*T = I$. Autrement dit, $\|Tx\| = \|x\|$ pour tout $x \in H$,
- (2) est dit projection si $T^2 = T$,
- (3) est dit projection orthogonale si $T = T^2 = T^*$.

1.0.7 Opérateur positif et opérateur racine carrée

Définition 1.0.11. Un opérateur $T \in \mathcal{B}(H)$ est dit positif si, pour tout $x \in H$, $\langle Tx, x \rangle$ est supérieur ou égal à zéro.

- Notons que tout opérateur positif, dans un espace de Hilbert sur $\mathbb{C}$, est auto-adjoint ($\langle Tx, x \rangle \in \mathbb{R}$).
- Pour tout opérateur $T \in \mathcal{B}(H)$, les opérateurs TT^* et T^*T sont auto-adjoints positifs car, pour tout $x \in H$,

$$\langle TT^*x, x \rangle = \langle T^*x, T^*x \rangle \geq 0.$$

- Si T est auto-adjoint, alors T^2 est un opérateur positif.

Exemple 1.0.5. Soit T l'opérateur défini par :

$$T: L^2([0, 1]) \longrightarrow L^2([0, 1])$$

$$f \longrightarrow Tf(x) = xf(x).$$

Par conséquent, T est un opérateur positif, car

$$\begin{aligned}\langle Tf, f \rangle &= \int_0^1 x f(x) \overline{f(x)} dx \\ &= \int_0^1 x |f(x)|^2 dx \geq 0.\end{aligned}$$

Théorème 1.0.4. (Théorème de Cauchy-Schwarz généralisé). Soit T un opérateur linéaire positif défini sur un espace de Hilbert H . Alors, pour tout $x, y \in H$, on a la relation suivante :

$$|\langle Tx, y \rangle|^2 \leq \langle Tx, x \rangle \langle Ty, y \rangle.$$

Lemme 1.0.1. Soit T un opérateur linéaire positif défini sur un espace de Hilbert H , de norme $\|T\| \leq 1$. Alors l'opérateur $S = I - T$ est un opérateur positif de norme $\|S\| \leq 1$.

Théorème 1.0.5. Soit $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite croissante d'opérateurs linéaires auto-adjoints définis sur un espace de Hilbert H . Si les normes $\|T_n\|$ sont bornées pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ ($\|T_n\| \leq M$), alors il existe un opérateur linéaire continu T tel que, pour tout $x \in H$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_n x = Tx, \text{ et } \|T\| \leq M.$$

Lemme 1.0.2. Soit T un opérateur linéaire positif défini sur un espace de Hilbert H , tel que $\|T\| \leq 1$. On définit la suite $(U_n)_n$ par

$$U_1 = 0, \quad U_{n+1} = \frac{1}{2}(I - T + U_n^2) = \frac{1}{2}(S + U_n^2), \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

Alors la suite $(U_n)_n$ converge vers un opérateur linéaire continu U vérifiant $\|U\| \leq 1$.

De plus, tout opérateur linéaire borné D qui commute avec T commute avec chaque U_n et avec l'opérateur limite U , c'est-à-dire :

$$DT = TD \implies U_n D = D U_n \text{ et } UD = DU.$$

Définition 1.0.12. Soit T un opérateur linéaire positif défini sur un espace de Hilbert H . Alors l'opérateur positif S est dit racine carrée de T si l'on a la relation

$$S^2 = T, \text{ ou encore } S = \sqrt{T}.$$

Théorème 1.0.6. Soit T un opérateur linéaire positif défini sur un espace de Hilbert H . Alors T admet une racine carrée positive unique $S = \sqrt{T}$. De plus, l'opérateur S commute avec tout opérateur qui commute avec T . Autrement dit,

$$TD = DT \implies SD = DS \quad (\sqrt{T}D = D\sqrt{T}).$$

Notation 1.0.1. Pour tout opérateur $T \in \mathcal{B}(H)$, on note $|T| = \sqrt{T^*T}$. On a alors

$$|T|^2 = T^*T.$$

Définition 1.0.13. Soit H un espace de Hilbert et T un opérateur de $\mathcal{B}(H)$. On dit que T est une isométrie partielle si

$$\|T(x)\| = \|x\| \text{ pour tout } x \in \ker(T)^\perp.$$

Proposition 1.0.7. Soit T un opérateur de $\mathcal{B}(H)$. Alors T est une isométrie partielle si et seulement si T^*T est une projection orthogonale.

1.0.8 Décomposition polaire d'un opérateur

Théorème 1.0.7. Pour tout opérateur $T \in \mathcal{B}(H)$, il existe une isométrie partielle U telle que

$$T = U|T|.$$

En outre, U est unique à condition que $\ker(U) = \ker(T)$.

Démonstration. 1) **Existence.** On a pour tout $x \in H$:

$$\begin{aligned} \| |T| x \|^2 &= \langle |T|^2 x, x \rangle = \langle T^* T x, x \rangle \\ &= \langle T x, T x \rangle = \| T x \|^2 \end{aligned}$$

Alors $\ker(|T|) = \ker(T)$. On définit à présent l'application

$$\begin{aligned} \tilde{V} : \operatorname{Im}(|T|) &\longrightarrow \operatorname{Im}(T) \\ |T| x &\longrightarrow \tilde{V}(|T| x) = T x. \end{aligned}$$

Vérifions que $\tilde{V}$ est bien défini. Soient $x_1, x_2 \in H$, alors :

$$\begin{aligned} |T| x_1 = |T| x_2 &\implies (x_1 - x_2) \in \ker(|T|) = \ker(T) \\ &\implies T x_1 = T x_2 \quad (\tilde{V}(|T| x_1) = \tilde{V}(|T| x_2)). \end{aligned}$$

De plus, $\| \tilde{V}(|T| x) \| = \| T x \| = \| |T| x \|$ pour tout $x \in H$. Donc $\tilde{V}$ est une isométrie. On prolonge par continuité $\tilde{V}$ à

$$V : \overline{\operatorname{Im}(|T|)} \longrightarrow \overline{\operatorname{Im}(T)}$$

Nous savons que, pour tout $y \in \overline{\operatorname{Im}(|T|)}$, il existe une suite $(|T| x_n)_n$ de $\operatorname{Im}(|T|)$ telle que $y = \lim_{n \rightarrow \infty} |T| x_n$.

On pose, $V y = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{V}(|T| x_n)$. Alors,

$$V y = V(\lim_{n \rightarrow \infty} |T| x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{V}(|T| x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} T x_n.$$

Il est évident que, grâce à $\| |T| x_n \| = \| T x_n \|$, comme $(|T| x_n)_n$ est convergente dans H , alors $(T x_n)_n$ l'est aussi et que $V y \in \overline{\operatorname{Im}(T)}$. De plus, V est aussi une isométrie. En effet, soit $y \in \overline{\operatorname{Im}(|T|)}$; on a

$$\begin{aligned} \| V y \| &= \left\| \lim_{n \rightarrow \infty} T x_n \right\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \| T x_n \| \\ &= \left\| \lim_{n \rightarrow \infty} |T| x_n \right\| = \| y \|. \end{aligned}$$

De plus, comme $|T|$ est auto-adjoint, il découle que $\overline{Im(|T|)} = \ker(|T|)^\perp$. On définit l'application :

$$U(x) = \begin{cases} V(x) & \text{si } x \in \ker(|T|)^\perp \\ 0 & \text{si } x \in \ker(|T|) \end{cases}$$

Comme $\ker(|T|) = \ker(T) = \ker(U)$, alors U est définie sur $H = \ker(U) \oplus \ker(U)^\perp$ par

$$U(x) = \begin{cases} V(x) & \text{si } x \in \ker(U)^\perp \\ 0 & \text{si } x \in \ker(U) \end{cases}$$

et on a

$$\begin{aligned} U|T|x &= V|T|x = Tx \\ \implies U|T| &= T. \end{aligned}$$

Enfin, U est une isométrie partielle définie sur H par construction.

2) **Unicité.** Si U_1, U_2 sont deux isométries partielles vérifiant la propriété énoncée, c'est-à-dire

$$U_1|T| = U_2|T|$$

alors $U_1|T|x = U_2|T|x$ permet de conclure que $U_1 = U_2$ sur $Im(|T|)$. Il est évident que l'on a aussi $U_1 = U_2$ sur $\overline{Im(|T|)}$ et $\ker(|T|)$. On déduit que $U_1 = U_2$. $\square$

1.0.9 Les opérateurs compacts

Définition 1.0.14. Soit H un espace de Hilbert et T un opérateur de H . On dit que T est compact si, pour toute suite bornée $(x_n)_n$ dans H , la suite $(Tx_n)_n$ contient une sous-suite convergente.

• On désignera par $K(H)$ l'ensemble des opérateurs compacts de H dans lui-même.

Théorème 1.0.8.

- (1) Tout opérateur compact est borné, c'est-à-dire que l'on a l'inclusion $K(H) \subset \mathcal{B}(H)$.
- (2) L'ensemble $K(H)$ est un idéal bilatère de $\mathcal{B}(H)$, c'est-à-dire que si $T \in K(H)$ et $S \in \mathcal{B}(H)$, alors TS et ST sont dans $K(H)$.

Démonstration. (2) Soit $T \in K(H)$ et $S \in \mathcal{B}(H)$. Si une suite $(x_n)_n$ est bornée dans H , il en sera de même de la suite (Sx_n) et T étant compact, la suite (TSx_n) contient une sous-suite convergente. TS est donc un opérateur compact. On démontre de même que ST est un opérateur compact. $\square$

Définition 1.0.15. Un opérateur T est de rang fini si son image est de dimension finie. Le rang de T est la dimension de son image. L'ensemble des opérateurs de rang fini de H dans H sera noté $K_0(H)$.

Théorème 1.0.9. [7] Soit H un espace de Hilbert. On a :

- Si T est un opérateur compact sur H , alors l'image par T de toute suite faiblement convergente de H est une suite fortement convergente.
- Tout opérateur de rang fini est compact, c'est-à-dire $K_0(H) \subseteq K(H)$.

Proposition 1.0.8. Soit $T \in \mathcal{B}(H)$. Si T^*T est un opérateur compact, alors T est un opérateur compact. On en déduit que T est compact si et seulement si T^* est compact.

Théorème 1.0.10. Un opérateur borné T est de rang fini si, et seulement si, son adjoint T^* l'est aussi. Dans ce cas, T et T^* ont le même rang.

Théorème 1.0.11. [7] Soient H un espace de Hilbert séparable et $(e_n)_n$ une base hilbertienne de H .

Soit $\lambda = (\lambda_n)_n$ une suite bornée dans $\mathbb{C}$. Alors l'opérateur de multiplication par λ défini par $T_\lambda(e_n) = \lambda_n e_n$ est compact si, et seulement si, $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = 0$.

1.0.10 Spectre d'un opérateur

Soit T un opérateur de $\mathcal{B}(H)$. Le spectre de T , noté $\sigma(T)$, est le sous-ensemble de $\mathbb{C}$ défini par :

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} / (T - \lambda I) \text{ n'est pas inversible}\}.$$

• Le rayon spectral d'un opérateur T , noté $r(T)$, est défini par :

$$r(T) = \sup \{|\lambda|, \lambda \in \sigma(T)\}.$$

• Le complémentaire de $\sigma(T)$ par rapport à $\mathbb{C}$, noté $\rho(T)$, est appelé l'ensemble résolvant de T , c'est-à-dire :

$$\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} / (T - \lambda I) \text{ est inversible}\}.$$

La fonction $\lambda \longrightarrow (T - \lambda I)^{-1}$ est appelée fonction résolvante de T .

Théorème 1.0.12. Soit T un opérateur de $\mathcal{B}(H)$. L'ensemble résolvant $\rho(T)$ est ouvert. De plus, la fonction résolvante est analytique dans $\rho(T)$.

Corollaire 1.0.1. Soit T un opérateur de $\mathcal{B}(H)$. Si $d(\lambda)$ est la distance du point λ au spectre $\sigma(T)$, alors

$$\|(T - \lambda I)^{-1}\| \geq \frac{1}{d(\lambda)}, \quad \lambda \notin \sigma(T)$$

et

$$\|(T - \lambda I)^{-1}\| \longrightarrow +\infty \text{ quand } d(\lambda) \longrightarrow 0$$

et l'ensemble résolvant est le domaine naturel d'analyticité de la résolvante.

Définition 1.0.16. Soit $T \in \mathcal{B}(H)$. On définit :

1. Le spectre ponctuel de T , noté $\sigma_p(T)$, est défini par :

$$\sigma_p(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} / \ker(T - \lambda I) \neq \{0\}\}.$$

2. Le spectre résiduel de T , noté $\sigma_r(T)$, est défini par :

$$\sigma_r(T) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} / (T - \lambda I) \text{ injectif et } \overline{\operatorname{Im}(T - \lambda I)} \neq H \right\}.$$

3. Le spectre continu de T , note $\sigma_c(T)$, est défini par :

$$\sigma_c(T) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} / (T - \lambda I) \text{ injectif, } \operatorname{Im}(T - \lambda I) \neq \overline{\operatorname{Im}(T - \lambda I)} \text{ et } \overline{\operatorname{Im}(T - \lambda I)} = H \right\}.$$

4. Le spectre approximatif de T , note $\sigma_{ap}(T)$, est défini par :

$$\sigma_{ap}(T) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} / \exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset H, \text{ tel que } \|x_n\| = 1 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \|(T - \lambda I)x_n\| = 0 \right\}.$$

Remarque 1.0.2. Soit $T \in \mathcal{B}(H)$. On a toujours :

$$\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \sigma_r(T) \cup \sigma_c(T)$$

et

$$\sigma_p(T) \cup \sigma_c(T) \subset \sigma_{ap}(T) \subset \sigma(T).$$

Proposition 1.0.9. Soit $T \in \mathcal{B}(H)$. $(T - \lambda I)$ est inversible si et seulement si :

- (1) $(T - \lambda I)$ est injectif.
- (2) $(T - \lambda I)$ est surjectif c'est-à-dire $((T - \lambda I)^{-1})$ est borné.

Remarque 1.0.3. Soit $T \in \mathcal{B}(H)$. On a :

$$\sigma(T^*) = \left\{ \overline{\lambda}, \lambda \in \sigma(T) \right\}.$$

1.1 Les opérateurs normaux

Dans cette partie, nous présentons quelques définitions et propriétés des opérateurs normaux déjà établies, puis nous nous appuyons sur celles-ci pour introduire de nouvelles définitions et propriétés au sein de la même classe d'opérateurs. On note $\mathcal{B}(H)$ l'algèbre des opérateurs linéaires bornés agissant sur un espace de Hilbert complexe H .

Définition 1.1.1. On dit que $T \in \mathcal{B}(H)$ est un opérateur normal si T commute avec son adjoint, c'est-à-dire,

$$T^* T = T T^*.$$

Remarque 1.1.1. Si $T \in M_n(\mathbb{C})$, on dit que T est normal si ${}^t \overline{T} T = T {}^t \overline{T}$.

Exemple 1.1.1. Soit T l'opérateur défini sur $L^2([0, 1])$ par $Tf(x) = xf(x)$. On a donc T^* est défini par

$$\begin{aligned} \langle T^* f, g \rangle &= \langle f, Tg \rangle = \overline{\langle Tg, f \rangle} = \overline{\int_0^1 xg(x)\overline{f(x)}dx} \\ &= \int_0^1 \overline{xg(x)}f(x)dx = \int_0^1 xf(x)\overline{g(x)}dx = \langle Tf, g \rangle. \end{aligned}$$

Donc $T^* = T$, alors $TT^* = T^2 = T^*T$, ce qui signifie que T est un opérateur normal.

Exemple 1.1.2. Soit T l'opérateur défini sur $\mathbb{C}^3$ ($T \in M_3(\mathbb{C})$) par

$$T = \begin{pmatrix} 1+i & 0 & 0 \\ 0 & 2i & 0 \\ 0 & 0 & 1-i \end{pmatrix}, \text{ alors } T^* = \begin{pmatrix} 1-i & 0 & 0 \\ 0 & -2i & 0 \\ 0 & 0 & 1+i \end{pmatrix}.$$

On a

$$TT^* = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = T^*T$$

Donc $TT^* = T^*T$, ce qui signifie que T est un opérateur normal.

Ce résultat peut être généralisé. Si T est l'opérateur défini sur $\mathbb{C}^3$ ($T \in M_3(\mathbb{C})$) par $T = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & \bar{a} \end{pmatrix}$,

alors, pour tout a et b de $\mathbb{C}$, T est un opérateur normal, car

$$TT^* = \begin{pmatrix} |a|^2 & 0 & 0 \\ 0 & |b|^2 & 0 \\ 0 & 0 & |a|^2 \end{pmatrix} = T^*T.$$

Exemple 1.1.3. Si T est l'opérateur défini sur $\mathbb{C}^3$ ($T \in M_3(\mathbb{C})$) par $T = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ a & 0 & b \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix}$,

alors, pour tout a et b de $\mathbb{C}$ avec $\bar{a}\bar{b} \in \mathbb{R}$, T est un opérateur normal, car

$$TT^* = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ a & 0 & b \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \bar{a} & 0 \\ \bar{a} & 0 & \bar{b} \\ 0 & \bar{b} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |a|^2 & 0 & a\bar{b} \\ 0 & |a|^2 + |b|^2 & 0 \\ \bar{a}b & 0 & |b|^2 \end{pmatrix},$$

et on a

$$T^* T = \begin{pmatrix} 0 & \bar{a} & 0 \\ \bar{a} & 0 & \bar{b} \\ 0 & \bar{b} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ a & 0 & b \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |a|^2 & 0 & \bar{a}b \\ 0 & |a|^2 + |b|^2 & 0 \\ a\bar{b} & 0 & |b|^2 \end{pmatrix}.$$

Donc T est un opérateur normal si et seulement si $\bar{a}b = \bar{a}b$, c'est-à-dire $\bar{a}b \in \mathbb{R}$.

Proposition 1.1.1. Soit H un espace de Hilbert et T un opérateur de $\mathcal{B}(H)$; on a :

- (1) Si $T^* = T$, on peut facilement conclure que T est un opérateur normal.
- (2) Si $T^* = -T$, alors T est un opérateur normal.
- (3) Si $T^* = \lambda T$ avec $\lambda \in \mathbb{C}$ arbitraire, alors T est un opérateur normal.
- (4) Si $T^* = T^{-1}$, alors T est un opérateur normal.
- (5) Si T est un opérateur normal, alors l'opérateur T^n est normal pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Démonstration. Pour (1), (2), (3) et (4), la preuve est claire.

Preuve de (5) : T est normal, d'où $TT^* = T^*T$.

$$\begin{aligned} T^n (T^n)^* &= T^n (T^*)^n = (TT^*)^n \\ &= (T^*T)^n = (T^*)^n T^n \\ &= (T^n)^* T^n. \end{aligned}$$

C'est -à-dire que T^n est normal pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

• Cela montre que chaque fois que P est un polynôme et T un opérateur normal, alors $P(T)$ est aussi normal. $\square$

Remarque 1.1.2. Si T^n est normal, alors T n'est pas nécessairement normal.

En effet, soit $T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 + \sqrt{3}i \end{pmatrix}$. On a $T^3 = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$, qui est normal, mais

$$TT^* = \begin{pmatrix} 5 & -1 - \sqrt{3}i \\ -1 + \sqrt{3}i & 4 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = T^*T.$$

Donc T n'est pas normal.

1.1.1 Quelques classes d'opérateurs.

Définition 1.1.2. Un opérateur $T \in \mathcal{B}(H)$, où H est un espace de Hilbert :

- (1) est *quasi-normal* si T commute avec T^*T , c'est-à-dire $T(T^*T) = (T^*T)T$;
- (2) est *binormal* si TT^* commute avec T^*T , c'est-à-dire $TT^*T^*T = T^*TT^*$;
- (3) est *hyponormal* si $TT^* \leq T^*T$, ou bien $\|T^*x\| \leq \|Tx\|$ pour tout $x \in H$;
- (4) est *semi-normal* si T ou T^* est hyponormal;
- (5) est *k-quasi-hyponormal* si $(T^*)^k(TT^* - T^*T)T^k \leq 0$, pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Proposition 1.1.2. Soit $T \in \mathcal{B}(H)$; alors les assertions suivantes sont équivalentes :

1. T est normal.
2. $\|Tx\| = \|T^*x\|$ pour tout $x \in H$.
3. Les parties réelles et imaginaires de T commutent.

Démonstration. Pour $x \in H$ arbitraire, on a

$$\begin{aligned} \|Tx\|^2 - \|T^*x\|^2 &= \langle T^*Tx, x \rangle - \langle TT^*x, x \rangle \\ &= \langle (T^*T - TT^*)x, x \rangle. \end{aligned}$$

Donc (1) et (2) sont équivalentes.

On pose $T = A + iB$, tel que $A = \operatorname{Re}(T)$ et $B = \operatorname{Im}(T)$, donc $T^* = A - iB$ et

$$T^*T - TT^* = 2i(AB - BA),$$

d'où $T^*T = TT^*$ si et seulement si $AB = BA$. Donc (1) et (3) sont équivalentes. □

Remarque 1.1.3. Soit $T \in \mathcal{B}(H)$; on a :

(1) Si T est normal, alors $\ker(T^*) = \ker(T)$, car si T est normal, on a $\|Tx\| = \|T^*x\|$.

(2) Et nous avons toujours $\ker(T^*) = (\operatorname{Im}(T))^\perp$, car

$$\begin{aligned} x \in \ker(T^*) &\iff \langle T^*x, y \rangle = 0, \forall y \in H \\ &\iff \langle x, Ty \rangle = 0, \forall y \in H \\ &\iff x \in (\operatorname{Im}(T))^\perp. \end{aligned}$$

Proposition 1.1.3. Soit $T \in \mathcal{B}(H)$ un opérateur normal; alors on a :

$$\ker(T) \oplus \overline{\operatorname{Im}(T)} = H$$

Démonstration. D'après la remarque précédente, on a $\ker(T^*) = (\operatorname{Im}(T))^\perp$, d'où

$$(\ker(T^*))^\perp = ((\operatorname{Im}(T))^\perp)^\perp = \overline{\operatorname{Im}(T)}.$$

Donc

$$H = \ker(T^*) \oplus (\ker(T^*))^\perp = \ker(T) \oplus \overline{\operatorname{Im}(T)}.$$

□

1.1.2 Inverse d'un opérateur normal

Lemme 1.1.1. Si $T \in \mathcal{B}(H)$ est un opérateur inversible, d'inverse T^{-1} , alors on a : $(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}$.

Démonstration. Si T est inversible, on a

$$(T^{-1})^* T^* = (TT^{-1})^* = I, \text{ et } (T^*)^{-1} T^* = I.$$

Donc $(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}$. □

Proposition 1.1.4. Soit $T \in \mathcal{B}(H)$ un opérateur normal et inversible. Alors T^{-1} est aussi normal.

Démonstration. On a

$$\begin{aligned} (T^{-1})^* T^{-1} &= (T^*)^{-1} T^{-1} = (T^* T)^{-1} \\ &= T^{-1} (T^*)^{-1} = T^{-1} (T^{-1})^*. \end{aligned}$$

Cela signifie que T^{-1} est un opérateur normal. □

Proposition 1.1.5. Soit $T \in \mathcal{B}(H)$ et soit U un opérateur unitaire ($U^* U = U U^* = I$). L'opérateur UTU^* est normal si et seulement si T est normal.

Démonstration. D'une part,

$$(UTU^*)^* (UTU^*) = UT^* U^* UTU^* = UT^* TU^*.$$

D'autre part,

$$(UTU^*) (UTU^*)^* = UTU^* UT^* U^* = UTT^* U^*.$$

Alors $T^* T = T T^*$ si et seulement si UTU^* est normal. □

Proposition 1.1.6. Soit $T \in \mathcal{B}(H)$ un opérateur inversible; les assertions suivantes sont équivalentes :

- (1) T est normal.
- (2) $T^{-1} T^*$ (ou $T^* T^{-1}$) est unitaire.
- (3) Il existe un opérateur unitaire U tel que $T^* = UT$.

Démonstration. (1) $\implies$ (2). On a

$$\begin{aligned} (T^{-1} T^*)^* (T^{-1} T^*) &= T(T^{-1})^* (T^{-1}) T^* = T T^{-1} (T^{-1})^* T^* \\ &= I(T T^{-1})^* = I. \end{aligned}$$

(2) $\implies$ (3). En considérant $U = T^* T^{-1}$, on a

$$UT = T^* T^{-1} T = T^*.$$

(3) $\implies$ (1). Pour tout $x \in H$, on a

$$\begin{aligned} \|T^* x\|^2 &= \|UTx\|^2 = \langle UTx, UTx \rangle \\ &= \langle Tx, U^* UTx \rangle = \|Tx\|^2. \end{aligned}$$

Donc T est normal. □

Proposition 1.1.7. Soit $T \in \mathcal{B}(H)$ un opérateur normal.

Si $Tx = \lambda x$, avec $\lambda \in \mathbb{C}$ et $x \in H$, alors $T^*x = \bar{\lambda}x$.

1.1.3 Le théorème de Fuglede-Putnam

Théorème 1.1.1. [11](Fuglede, 1950) Soient T et N deux opérateurs bornés sur un espace de Hilbert H tels que $NT = TN$, où N est normal. Alors $N^*T = TN^*$.

Puis, en 1951, Putnam a généralisé ce résultat au cas de deux opérateurs normaux, c'est-à-dire :

Théorème 1.1.2. [18](Putnam, 1951) Soient T , M et N trois opérateurs bornés sur un espace de Hilbert H , où M et N sont normaux et $MT = TN$. Alors $M^*T = TN^*$.

Remarque 1.1.4. En 1959, Berberian a remarqué l'équivalence entre les deux versions, celle de Fuglede et celle de Putnam. Cette relation est donnée par la matrice suivante.

Soient $A = \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & T \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ deux matrices d'opérateurs définies sur $H \times H$, où M et N sont normaux.

Alors A est normal et on a $AB = BA$. La version de Fuglede donne alors :

$$A^*B = BA^*.$$

En écrivant les coefficients de ces deux dernières matrices, on trouve la version de Putnam ($M^*T = TN^*$).

Remarque 1.1.5. Les hypothèses du théorème précédent impliquent que $T^*M = NT^*$, mais n'impliquent pas que $MT^* = T^*N$.

Lorsque M et N sont auto-adjoints et T est normal, si $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$,

alors $MT = TN$, mais $MT^* \neq T^*N$.

1.1.4 Quelques applications du théorème de Fuglede- Putnam

Dans cette section, on se contentera de quelques applications de ce théorème.

L'opérateur n -normal.

Définition 1.1.3. On dit que $T \in \mathcal{B}(H)$ est un opérateur n -normal si T^n commute avec l'adjoint de T , c'est-à-dire :

$$T^n T^* = T^* T^n.$$

Proposition 1.1.8. Soit T un opérateur de $\mathcal{B}(H)$. Alors T est n -normal si et seulement si T^n est normal, où $n \in \mathbb{N}^*$.

Démonstration. Si T est un opérateur n -normal, donc $T^n T^* = T^* T^n$. Alors

$$\begin{aligned} T^n (T^*)^n &= T^n T^* (T^*)^{n-1} = T^* T^n (T^*)^{n-1} \\ &= T^* (T^n T^*) (T^*)^{n-2} = (T^*)^2 T^n (T^*)^{n-2} \\ &= \dots = (T^*)^n T^n. \end{aligned}$$

Cela signifie que T^n est un opérateur normal.

Si T^n est un opérateur normal, alors, puisque $TT^n = T^nT$ et que $N = T^n$ est normal, en utilisant le théorème de Fuglede-Putnam, nous avons $T(T^n)^* = (T^n)^*T$; par conséquent $T^nT^* = T^*T^n$. $\square$

Sur la somme de deux opérateurs normaux et bornés.

Nous notons que la somme de deux opérateurs normaux n'est pas toujours normale, comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 1.1.4. *Considérons les opérateurs T et S définis par :*

$$T = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} + i & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} + i & 0 & \sqrt{2} + 2i \\ 0 & \sqrt{2} + 2i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad S = \begin{pmatrix} 1+i & 0 & 0 \\ 0 & 2i & 0 \\ 0 & 0 & 1-i \end{pmatrix}.$$

On a T et S sont des opérateurs normaux. Mais,

$$T + S = \begin{pmatrix} 1+i & \frac{\sqrt{2}}{2} + i & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} + i & 2i & \sqrt{2} + 2i \\ 0 & \sqrt{2} + 2i & 1-i \end{pmatrix}$$

n'est pas normale.

Proposition 1.1.9. *Soient T et S deux opérateurs normaux et bornés; si T commute avec S , alors $(T + S)$ est un opérateur normal.*

Démonstration. Si T commute avec S , on a, d'après le théorème de Fuglede-Putnam :

$$TS = ST \implies TS^* = S^*T \quad \text{et} \quad ST^* = T^*S.$$

Et comme T et S sont des opérateurs normaux, on a $TT^* = T^*T$ et $SS^* = S^*S$. Alors

$$\begin{aligned} (T + S)(T + S)^* &= (T + S)(T^* + S^*) \\ &= TT^* + TS^* + ST^* + SS^* \\ &= T^*T + S^*T + T^*S + S^*S \\ &= (T + S)^*(T + S). \end{aligned}$$

Donc $(T + S)$ est un opérateur normal. $\square$

Remarque 1.1.6. (1) *On a toujours :*

$$TS = ST \Leftrightarrow T^*S^* = S^*T^* \quad \text{et} \quad TS^* = S^*T \Leftrightarrow T^*S = ST^*.$$

Donc, dans la proposition précédente, on peut remplacer la commutativité de T et S par la commutativité de T^* et S^* , ou T^* et S , ou T et S^* .

(2) La réciproque de la proposition précédente n'est pas toujours vrai. On peut construire de nombreux contre-exemples.

(3) Soient T et S deux opérateurs normaux et bornés; si $(T + S)$ est un opérateur normal, cela ne signifie pas que $TS = ST$.

(4) La somme de deux opérateurs auto-adjoints est un opérateur normal.

Corollaire 1.1.1. Si T et S sont deux opérateurs normaux tels que $TS = ST$, alors, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, l'opérateur $T + \lambda S$ est normal.

Démonstration. D'après le théorème de Fuglede-Putnum, on trouve que $TS^* = S^*T$ et $ST^* = T^*S$.

Et comme T et S sont des opérateurs normaux, on a $TT^* = T^*T$ et $SS^* = S^*S$. Alors

$$\begin{aligned}
 (T + \lambda S)(T + \lambda S)^* &= (T + \lambda S)(T^* + \bar{\lambda}S^*) \\
 &= TT^* + \bar{\lambda}TS^* + \lambda ST^* + \lambda\bar{\lambda}SS^* \\
 &= T^*T + \bar{\lambda}S^*T + \lambda T^*S + \bar{\lambda}\lambda S^*S \\
 &= (T^* + \bar{\lambda}S^*)T + (T^* + \bar{\lambda}S^*)\lambda S \\
 &= (T + \lambda S)^*(T + \lambda S).
 \end{aligned}$$

Donc $(T + \lambda S)$ est un opérateur normal. □

Proposition 1.1.10. Soient T et S deux opérateurs normaux et bornés. Si TS^* et S^*T sont auto-adjoints, Alors le fait que $T + S$ soit un opérateur normal implique la commutativité de T et de S .

Démonstration. Comme TS^* et S^*T sont auto-adjoints, on a

$$(TS^*)^* = ST^* = TS^* \quad \text{et} \quad (S^*T)^* = T^*S = S^*T.$$

Puisque T, S et $T + S$ sont normaux, on a

$$\begin{aligned}
 (T + S)(T + S)^* = (T + S)^*(T + S) &\iff T^*S + S^*T = ST^* + TS^* \\
 &\iff S^*T + S^*T = TS^* + TS^* \\
 &\iff S^*T = TS^*.
 \end{aligned}$$

D'après le théorème de Fuglede-Putnum, on trouve que $S^*T^* = T^*S^*$; par conséquent $TS = ST$. □

Chapitre 2

Sur les opérateurs normaux

Dans ce chapitre, nous présentons les résultats les plus importants et les plus récents obtenus sur les opérateurs normaux. Nous nous concentrons particulièrement sur les opérateurs C -normaux, où C est une conjugaison dans un espace hilbertien. Enfin, nous exposons les résultats que nous avons obtenus sous le titre « Quelques résultats sur les opérateurs C -normaux ». Avant cela, nous rappelons quelques concepts : l'opérateur anti-linéaire, la conjugaison, l'opérateur C -symétrique, l'opérateur complexe symétrique et l'opérateur C -normal.

2.1 Conjugaison.

Définition 2.1.1. Soient X et Y deux espaces vectoriels sur $\mathbb{C}$. Une application $F : X \longrightarrow Y$ est dite anti-linéaire si, pour tous $x, y \in X$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, on a $F(x + y) = F(x) + F(y)$ et $F(\lambda x) = \overline{\lambda}F(x)$.

Remarque 2.1.1.

- (1) La composition d'une application linéaire et d'une application anti-linéaire est une application anti-linéaire.
- (2) La composition d'un nombre pair d'applications anti-linéaires est une application linéaire.

Définition 2.1.2. Soit X un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$. On appelle forme sesquilinéaire (à droite) sur X une application $\varphi : X \times X \longrightarrow \mathbb{C}$ telle que, pour tout $y \in X$, l'application $x \longrightarrow \varphi(x, y)$ est linéaire et telle que, pour tout $x \in X$, l'application $y \longrightarrow \varphi(x, y)$ est anti-linéaire.

Proposition 2.1.1. Soit $\varphi : X \times X \longrightarrow \mathbb{C}$ une forme sesquilinéaire; alors, pour tous $x, y \in X$:

- (1) On a $\varphi(x + y, x + y) + \varphi(x - y, x - y) = 2(\varphi(x, x) + \varphi(y, y))$. (Identité du parallélogramme.)
- (2) On a $4\varphi(x, y) = \varphi(x + y, x + y) - \varphi(x - y, x - y) + i\varphi(x + iy, x + iy) - i\varphi(x - iy, x - iy)$.

Démonstration. (1) Parmi les propriétés d'une forme sesquilinéaire, nous avons, pour tous $x, y \in X$:

$$\varphi(x + y, x + y) = \varphi(x, x) + \varphi(x, y) + \varphi(y, x) + \varphi(y, y), \quad \text{et} \quad \varphi(x - y, x - y) = \varphi(x, x) - \varphi(x, y) - \varphi(y, x) + \varphi(y, y).$$

Donc la somme membre à membre donne :

$$\varphi(x + y, x + y) + \varphi(x - y, x - y) = 2(\varphi(x, x) + \varphi(y, y)).$$

- (2) De la même manière.

□

Proposition 2.1.2. Soit X un espace vectoriel complexe et φ une forme sesquilinéaire sur X ; les conditions suivantes sont équivalentes :

- (1) φ est hermitienne ($\varphi(x, y) = \overline{\varphi(y, x)}$, $\forall x, y \in X$),
- (2) pour tout $x \in X$, on a $\varphi(x, x) \in \mathbb{R}$.

Démonstration. On utilise la proposition 2.1.1 (2). □

Définition 2.1.3. Soit H un espace de Hilbert sur $\mathbb{C}$. L'application anti-linéaire $C : H \longrightarrow H$ est dite une conjugaison si :

1. C est isométrique : $\langle Cx, Cy \rangle = \langle y, x \rangle$ pour tous $x, y \in H$.
2. C est involutive : $C^2 = I$.

Remarque 2.1.2. .

- (1) $C^2 = I$ signifie que la conjugaison C est inversible et que son inverse est la même ($C^{-1} = C$).
- (2) Si C est une conjugaison, on a toujours $\|Cx\| = \|x\|$ pour tous $x \in H$.

Proposition 2.1.3. Soient H_1 et H_2 des espaces de Hilbert. L'application $F : T \longrightarrow T^*$ est une application anti-linéaire et isométrique de $\mathcal{B}(H_1, H_2)$ dans $\mathcal{B}(H_2, H_1)$.

Démonstration. Pour tous $x \in H_1, y \in H_2$ et $T_1, T_2 \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ ainsi que $\lambda \in \mathbb{C}$, on a :

$$F(T_1 + \lambda T_2) = (T_1 + \lambda T_2)^* \text{ et on a}$$

$$\begin{aligned} \langle x, (T_1 + \lambda T_2)^* y \rangle &= \langle (T_1 + \lambda T_2)x, y \rangle \\ &= \langle T_1 x, y \rangle + \langle \lambda T_2 x, y \rangle \\ &= \langle x, T_1^* y \rangle + \langle x, \bar{\lambda} T_2^* y \rangle \\ &= \langle x, (T_1^* + \bar{\lambda} T_2^*) y \rangle. \end{aligned}$$

Donc $F(T_1 + \lambda T_2) = F(T_1) + \bar{\lambda} F(T_2)$. Ainsi F est anti-linéaire.

Par définition de la norme opérateur

$$\|F(T)\| = \|T^*\| = \sup_{\|y\| \leq 1} \|T^* y\|$$

et par corollaire d'Hahn-Banach,

$$\|T^* y\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |\langle x, T^* y \rangle|.$$

De plus, comme $\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^* y \rangle$, on obtient

$$\|T^*\| = \sup_{\|y\| \leq 1, \|x\| \leq 1} |\langle Tx, y \rangle|.$$

En appliquant de nouveau un corollaire de Hahn-Banach et la définition de la norme opérateur de T , on obtient :

$$\sup_{\|y\| \leq 1, \|x\| \leq 1} |\langle Tx, y \rangle| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\| = \|T\|.$$

Donc $\|F(T)\| = \|T\|$; ainsi l'application F est isométrique. □

Exemple 2.1.1. (Un exemple typique de conjugaison.) Soit $H = \mathbb{C}^n$, un espace de Hilbert.

$C(z_1, z_2, \dots, z_n) = (\overline{z_n}, \overline{z_{n-1}}, \dots, \overline{z_1})$ est une simple conjugaison, et sa vérification est facile. Elle peut aussi être formulée autrement :

$$C(z_1, z_2, \dots, z_n) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{z_1} \\ \overline{z_2} \\ \vdots \\ \vdots \\ \overline{z_n} \end{pmatrix}.$$

Exemple 2.1.2. Un autre exemple simple est donné par la conjugaison $[Cf](x) = \overline{f(x)}$ sur un espace de Lebesgue $L^2(X, \mu)$ en effet :

(1) $[C(\alpha f + \beta g)](x) = \overline{(\alpha f + \beta g)(x)} = \overline{\alpha} [Cf](x) + \overline{\beta} [Cg](x)$ pour tous $f, g \in L^2(X, \mu)$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Cela signifie que C est un opérateur anti-linéaire.

(2) Pour tous $f, g \in L^2(X, \mu)$, on a

$$\begin{aligned} \langle [Cf], [Cg] \rangle &= \int_X \overline{f(x)} \overline{g(x)} dx \\ &= \int_X g(x) \overline{f(x)} dx \\ &= \langle g, f \rangle. \end{aligned}$$

Donc $\langle Cf, Cg \rangle = \langle g, f \rangle$; ainsi C est une isométrie anti-linéaire.

(3) Quel que soit $f \in L^2(X, \mu)$, on a

$$\begin{aligned} [C^2 f](x) &= [CCf](x) = \overline{[Cf](x)} \\ &= \overline{\overline{f(x)}} = f(x). \end{aligned}$$

Donc $C^2 = I$; ainsi C est involutive.

2.2 Les opérateurs symétriques complexes

Définition 2.2.1. Soit H un espace de Hilbert et C une conjugaison sur H . Un opérateur linéaire borné $T : H \rightarrow H$ est dit opérateur C -symétrique si $T = CT^*C$. On dit que T est un opérateur complexe symétrique (OCS) s'il existe une conjugaison C telle que T soit un opérateur C -symétrique.

Exemple 2.2.1. Par exemple, considérons une matrice de Toeplitz finie avec des entrées complexes. Soient $(a_i)_i$ des nombres complexes avec $i \in \{-n, \dots, -1, 0, 1, \dots, n\}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

Appelons matrice de *Toeplitz* la matrice définie comme suit :

$$T = \begin{pmatrix} a_0 & a_{-1} & \cdot & \cdot & a_{-(n-1)} & a_{-n} \\ a_1 & a_0 & \cdot & \cdot & a_{-(n-2)} & a_{-(n-1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n-1} & a_{n-2} & \cdot & \cdot & a_0 & a_{-1} \\ a_n & a_{n-1} & \cdot & \cdot & a_1 & a_0 \end{pmatrix}.$$

Soit C la conjugaison sur $\mathbb{C}^n$ définie par $C(z_0, z_1, \dots, z_n) = (\overline{z_n}, \overline{z_{n-1}}, \dots, \overline{z_0})$. Alors :

$$Tz = \begin{pmatrix} a_0 & a_{-1} & \cdot & \cdot & a_{-(n-1)} & a_{-n} \\ a_1 & a_0 & \cdot & \cdot & a_{-(n-2)} & a_{-(n-1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n-1} & a_{n-2} & \cdot & \cdot & a_0 & a_{-1} \\ a_n & a_{n-1} & \cdot & \cdot & a_1 & a_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ z_{n-1} \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^n a_{-i} z_i \\ \sum_{i=-1}^{n-1} a_{-i} z_{i+1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \sum_{i=-(n-1)}^1 a_{-i} z_{i+(n-1)} \\ \sum_{i=-n}^0 a_{-i} z_{i+n} \end{pmatrix},$$

et on a

$$CT^*Cz = C \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{-n} \overline{a_{-i}} \overline{z_{i+n}} \\ \sum_{i=1}^{-(n-1)} \overline{a_{-i}} \overline{z_{i+(n-1)}} \\ \cdot \\ \cdot \\ \sum_{i=(n-1)}^{-1} \overline{a_{-i}} \overline{z_{i+1}} \\ \sum_{i=n}^0 \overline{a_{-i}} \overline{z_i} \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{-n} \overline{a_{-i}} \overline{z_{i+n}} \\ \sum_{i=-(n-1)}^1 \overline{a_{-i}} \overline{z_{i+(n-1)}} \\ \cdot \\ \cdot \\ \sum_{i=-1}^{n-1} \overline{a_{-i}} \overline{z_{i+1}} \\ \sum_{i=0}^n \overline{a_{-i}} \overline{z_i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^n a_{-i} z_i \\ \sum_{i=-1}^{n-1} a_{-i} z_{i+1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \sum_{i=-(n-1)}^1 a_{-i} z_{i+(n-1)} \\ \sum_{i=-n}^0 a_{-i} z_{i+n} \end{pmatrix}.$$

Donc $T = CT^*C$, ce qui signifie que T est un opérateur C -symétrique.

Théorème 2.2.1. Soit H un espace de Hilbert et C une conjugaison sur H . Si T et S sont des opérateurs C -symétriques, on obtient alors les propriétés suivantes :

1. T^* est un opérateur C -symétrique.
2. λT est un opérateur C -symétrique pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$.
3. $T + S$ est un opérateur C -symétrique.

4. Si $TS = ST$, alors TS est un opérateur C -symétrique.
 5. Si T est inversible, alors T^{-1} est un opérateur C -symétrique.

Démonstration. La preuve de (1), (2) et (3) est facile.

(4) On a $TS = ST$, alors $T^*S^* = S^*T^*$ et

$$CTSC = CTCCSC = (TS)^*.$$

C'est-à-dire que TS est un opérateur C -symétrique.

(5) Puisque $C^{-1} = C$ et $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$, on a

$$CT^{-1}C = (CTC)^{-1} = (T^{-1})^*.$$

Donc T^{-1} est un opérateur C -symétrique. □

Lemme 2.2.1. Soit H un espace de Hilbert et C une conjugaison sur H . Si T est un opérateur C -symétrique, alors $p(T)$ est C -symétrique pour tout polynôme $p(z)$.

Démonstration. Si $(\alpha_i)_{i=0}^n \subset \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$ et $p(z) = \sum_{k=0}^n \alpha_k z^k$ est un polynôme sur $\mathbb{C}$, on a que T est un opérateur C -symétrique, donc $CTC = T^*$ et $CT^kC = (CTC)^k$. Alors

$$\begin{aligned} C(p(T)C) &= C\left(\sum_{k=0}^n \alpha_k T^k\right)C = \sum_{k=0}^n \overline{\alpha_k} CT^kC \\ &= \sum_{k=0}^n \overline{\alpha_k} (CTC)^k = \sum_{k=0}^n \overline{\alpha_k} (T^*)^k \\ &= \sum_{k=0}^n (\alpha_k T^k)^* = \left(\sum_{k=0}^n \alpha_k T^k\right)^* = (p(T))^*. \end{aligned}$$

Donc $C(p(T)C) = (p(T))^*$, ce qui signifie que $p(T)$ est un opérateur C -symétrique. □

Théorème 2.2.2. Soit H un espace de Hilbert et $T \in \mathcal{B}(H)$. Si T est un opérateur hyponormal et complexe symétrique, alors T est un opérateur normal.

Démonstration. Comme T est un opérateur hyponormal, on a $\|T^*x\| \leq \|Tx\|$ pour tout $x \in H$. Puisque T est aussi complexe symétrique, il existe une conjugaison C telle que $CT^*C = T$ et $CT = T^*C$. Donc

$$\begin{aligned} \|Tx\| &= \|CT^*Cx\| = \|T^*Cx\| \\ &\leq \|TCx\| = \|CT^*x\| = \|T^*x\|. \end{aligned}$$

Ainsi $\|T^*x\| = \|Tx\|$. Donc T est un opérateur normal. □

Théorème 2.2.3. Soit H un espace de Hilbert. Un opérateur complexe symétrique $T \in \mathcal{B}(H)$ de conjugaison C est binormal si et seulement si C commute avec $T(T^*)^2T$ (de manière équivalente, $T^*T^2T^*$).

Démonstration. Puisque T est un opérateur complexe symétrique, $CT = T^*C$ et $TC = CT^*$.

Dans le premier sens, supposons que C commute avec $T(T^*)^2T$. Alors

$$\begin{aligned} T^* T T T^* &= T^* T C C T T^* = T^* C T^* T^* C T^* \\ &= C T (T^*)^2 T C = T (T^*)^2 T C C \\ &= T T^* T^* T, \end{aligned}$$

donc T est binormal.

Inversement, supposons que T est binormal. Alors

$$\begin{aligned} T (T^*)^2 T C &= T T^* T^* T C = T^* T T T^* C \\ &= T^* C T^* T^* C T^* C = C T T^* T^* T C C \\ &= C T (T^*)^2 T. \end{aligned}$$

Dans les deux sens, les preuves utilisant $T^* T^2 T^*$ sont identiques. $\square$

Théorème 2.2.4. Soit $T \in \mathcal{B}(H)$ un opérateur binormal et complexe symétrique de conjugaison C . Si C commute avec $T^* T$ et $T T^*$, alors T est un opérateur normal.

Démonstration. Puisque T est un opérateur complexe symétrique ($T = C T^* C$) et binormal ($T^* T T T^* = T T^* T^* T$), alors

$$T^* T C T^* C C T C = T T^* C T C C T^* C \Rightarrow T^* T C T^* T C = T T^* C T T^* C,$$

puisque C commute avec $T^* T$ et $T T^*$, on obtient $T^* T T^* T = T T^* T T^*$, donc $T T^* = T^* T$; ainsi T est un opérateur normal. $\square$

Théorème 2.2.5. Soit $T \in \mathcal{B}(H)$ un opérateur $(n-1)$ -normal et complexe symétrique de conjugaison C . Si C commute avec $T T^*$, alors T est un opérateur n -normal.

Démonstration. Puisque T est un opérateur complexe symétrique ($T = C T^* C$) et un opérateur $(n-1)$ -normal, alors $T^* T^{n-1} = T^{n-1} T^*$, donc

$$\begin{aligned} T^* T^{n-1} T &= T^{n-1} T^* T \Rightarrow T^* T^n = T^{n-1} T^* T \\ &\Rightarrow T^* T^n = T^{n-1} C T C C T^* C \\ &\Rightarrow T^* T^n = T^{n-1} C T T^* C \\ &\Rightarrow T^* T^n = T^{n-1} T T^* C C \\ &\Rightarrow T^* T^n = T^n T^*, \end{aligned}$$

donc T est un opérateur n -normal. $\square$

Définition 2.2.2. Soit H un espace de Hilbert et $T \in \mathcal{B}(H)$. On dit que T est un opérateur quasi-normal si T commute avec $T^* T$. De tels opérateurs ont été considérés pour la première fois dans [6] et sont depuis devenus un objet standard d'étude.

Proposition 2.2.1. [12] Si T est un opérateur C -symétrique, alors les énoncés suivants sont équivalents :

1. T est un opérateur quasi-normal.
2. C et $|T|$ commutent (c'est-à-dire que $|T|$ est un opérateur C -symétrique).
3. T est normal.

Théorème 2.2.6. [12] Soit H un espace de Hilbert et $T \in \mathcal{B}(H)$. Si T est nilpotent d'ordre deux (c'est-à-dire que $T^2 = 0$), alors T possède une symétrie complexe.

Exemple 2.2.2. Soit $H = \mathbb{C}^3$ un espace de Hilbert et soit T un opérateur de $\mathcal{B}(H)$ défini comme suit :

$$T = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ on obtient } T^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ac \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

donc T est un opérateur nilpotent d'ordre deux si $ac = 0$. Alors

$$T_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, T_2 = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, T_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } T_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ a & b & 0 \end{pmatrix},$$

sont des opérateurs à symétrie complexe pour tous $a, b \in \mathbb{C}$.

2.3 Opérateurs C -normaux

Soit H un espace de Hilbert complexe et notons $LA(H)$ l'algèbre de tous les opérateurs anti-linéaires bornés dans H . Pour l'opérateur anti-linéaire $X \in LA(H)$, il existe un unique opérateur anti-linéaire $X^\#$, appelé l'adjoint anti-linéaire de X , tel que $\langle Xx, y \rangle = \overline{\langle x, X^\#y \rangle}$ pour tous $x, y \in H$.

L'opérateur anti-linéaire X est appelé auto-adjoint anti-linéaire si $X^\# = X$. Les conjugaisons en sont des exemples, puisque $C^\# = C$, car $C \in LA(H)$ et on a, pour tous $x, y \in H$

$$\langle Cx, y \rangle = \langle Cy, x \rangle = \overline{\langle x, Cy \rangle}, \text{ et } \langle Cx, y \rangle = \overline{\langle x, C^\#y \rangle},$$

ce qui signifie que $C^\# = C$.

S'il existe une conjugaison C sur un espace de Hilbert complexe H , on dit que l'opérateur $T \in \mathcal{B}(H)$ est C -symétrique si $CTC = T^*$. Il s'avère que T est C -symétrique si et seulement si TC est un opérateur anti-linéaire auto-adjoint, c'est-à-dire $(TC)^\# = TC$, car

$$\begin{aligned} \langle (TC)^\#x, y \rangle &= \overline{\langle x, TCy \rangle} = \overline{\langle x, CT^*y \rangle} \\ &= \overline{\langle T^*y, Cx \rangle} = \overline{\langle y, TCx \rangle} = \langle TCx, y \rangle, \end{aligned}$$

donc $(TC)^\# = TC$.

2.3.1 Les opérateurs C -normaux

Définition 2.3.1. Un opérateur $T \in \mathcal{B}(H)$ est dit C -normal si

$$(TC)(TC)^\# = (TC)^\#(TC).$$

La définition fait référence à la normalité pour les opérateurs anti-linéaires. Ainsi, un opérateur anti-linéaire $X \in LA(H)$ est dit anti-linéaire normal si $XX^\# = X^\#X$.

Lemme 2.3.1. Un opérateur $T \in \mathcal{B}(H)$ est C -normal si et seulement si

$$TT^* = CT^*TC,$$

ou, de manière équivalente, $C|T|C = |T^*|$, avec $|T| = (T^*T)^{\frac{1}{2}}$.

Démonstration. Soit $T \in \mathcal{B}(H)$ un opérateur C -normal, alors

$$\begin{aligned} (TC)(TC)^\# = (TC)^\#(TC) &\Leftrightarrow TCCT^* = CT^*TC \\ &\Leftrightarrow TT^* = CT^*TC. \end{aligned}$$

Donc T est un opérateur C -normal si et seulement si $TT^* = CT^*TC$. Et on a $|T| = (T^*T)^{\frac{1}{2}}$ et $|T^*| = (TT^*)^{\frac{1}{2}}$, alors

$$\begin{aligned} |T^*| &= (|T^*|^2)^{\frac{1}{2}} = (C|T|^2C)^{\frac{1}{2}} \\ &= (C|T||T|C)^{\frac{1}{2}} = (C|T|CC|T|C)^{\frac{1}{2}} \\ &= ((C|T|C)^2)^{\frac{1}{2}} = C|T|C. \end{aligned}$$

Donc T est un opérateur C -normal si et seulement si $|T^*| = C|T|C$. □

Théorème 2.3.1. Soit H un espace de Hilbert complexe, C une conjugaison sur H et $T \in \mathcal{B}(H)$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. T est C -normal,
2. $CTT^* = T^*TC$,
3. $CT^*T = TT^*C$,
4. T^* est C -normal,
5. CTC est C -normal,
6. CT^*C est C -normal,
7. $(CT)(CT)^\# = (CT)^\#(CT)$,
8. $\|TCx\| = \|T^*x\|$ pour tout $x \in H$,
9. $\|T^*Cx\| = \|Tx\|$ pour tout $x \in H$,
10. $T_+ \stackrel{df}{=} \frac{1}{2}(CT + T^*C)$ et $T_- \stackrel{df}{=} \frac{1}{2}(CT - T^*C)$, commutatifs,
11. $T^+ \stackrel{df}{=} \frac{1}{2}(TC + CT^*)$ et $T^- \stackrel{df}{=} \frac{1}{2}(TC - CT^*)$, commutatifs.

Démonstration. L'équivalence entre (1), (2), (3) et (4) provient directement des propriétés de la conjugaison.

On trouve que (1) $\Leftrightarrow$ (5). On a : T est C -normal si et seulement si $TT^* = CT^*TC$. Alors

$$\begin{aligned}
 CTC \text{ est } C\text{-normal} &\Leftrightarrow (CTC)(CTC)^* = C(CTC)^*(CTC)C \\
 &\Leftrightarrow CTCCT^*C = CCT^*CCTCC \\
 &\Leftrightarrow CTT^*C = T^*T \\
 &\Leftrightarrow CCTT^*CC = CT^*TC \\
 &\Leftrightarrow TT^* = CT^*TC \\
 &\Leftrightarrow T \text{ est } C\text{-normal}.
 \end{aligned}$$

L'équivalence entre (1) et (6) se démontre de la même manière.

On prouve que (1) $\Leftrightarrow$ (7). On a $(CT)^\# = T^*C$, alors

$$\begin{aligned}
 TT^* = CT^*TC &\Leftrightarrow CTT^*C = T^*T \\
 &\Leftrightarrow CTT^*C = T^*CCT \\
 &\Leftrightarrow (CT)(T^*C) = (T^*C)(CT) \\
 &\Leftrightarrow (CT)(CT)^\# = (CT)^\#(CT).
 \end{aligned}$$

On prouve que (1) $\Leftrightarrow$ (8). Pour tout $x \in H$, si T est C -normal, on a

$$\begin{aligned}
 \|TCx\|^2 &= \langle TCx, TCx \rangle \\
 &= \langle Cx, T^*TCx \rangle \\
 &= \langle CT^*TCx, x \rangle \\
 &= \langle TT^*x, x \rangle \\
 &= \langle T^*x, T^*x \rangle \\
 &= \|T^*x\|^2 \\
 &\Leftrightarrow \|TCx\| = \|T^*x\|.
 \end{aligned}$$

Et on a : si $\|TCx\| = \|T^*x\|$, alors

$$\begin{aligned}
 \|TCx\|^2 = \|T^*x\|^2 &\Leftrightarrow \langle CT^*TCx, x \rangle = \langle TT^*x, x \rangle \\
 &\Leftrightarrow CT^*TC = TT^*,
 \end{aligned}$$

donc T est C -normal.

L'équivalence entre (1) et (9) se démontre de la même manière.

On prouve que (1) $\Leftrightarrow$ (10). Si T est C -normal, on a

$$\begin{aligned}
 T_+ T_- &= \frac{1}{4}(CT + T^*C)(CT - T^*C) \\
 &= \frac{1}{4}(CTCT - CTT^*C + T^*CCT - T^*CT^*C) \\
 &= \frac{1}{4}(CTCT - T^*T + CTT^*C - T^*CT^*C) \\
 &= \frac{1}{4}(CTCT - T^*CCT + CTT^*C - T^*CT^*C) \\
 &= \frac{1}{4}((CT - T^*C)CT + (CT - T^*C)T^*C) \\
 &= \frac{1}{4}(CT - T^*C)(CT + T^*C) \\
 &= T_- T_+.
 \end{aligned}$$

Et si T_+ et T_- sont commutatifs, on a

$$\begin{aligned}
 T_+ T_- = T_- T_+ &\implies (CTCT - CTT^*C + T^*T - T^*CT^*C) = (CTCT + CTT^*C - T^*T - T^*CT^*C) \\
 &\implies -CTT^*C + T^*T = CTT^*C - T^*T \\
 &\implies 2T^*T = 2CTT^*C \\
 &\implies T \text{ est } C\text{-normal}.
 \end{aligned}$$

L'équivalence entre (1) et (11) se démontre de la même manière. $\square$

Lemme 2.3.2. Soit C une conjugaison dans H . Si $T \in \mathcal{B}(H)$ est C -normal, alors $T_L = CTCT$ et $T_R = TCTC$ sont normaux.

Démonstration. Si T est C -normal, alors on a

$$\begin{aligned}
 T_L T_L^* &= (CTCT)(CTCT)^* = CTCTT^*CT^*C \\
 &= CTT^*TT^*C = CTT^*CCTT^*C \\
 &= T^*TT^*T = T^*CT^*TCT \\
 &= (T^*CT^*C)(CTCT) = (CTCT)^*(CTCT) \\
 &= T_L^* T_L,
 \end{aligned}$$

donc T_L est un opérateur normal. De la même manière, T_R est aussi normal. $\square$

Exemple 2.3.1. Soit $H = \mathbb{C}^3$ et soit C la conjugaison définie par $C(z_1, z_2, z_3) = (\overline{z_3}, \overline{z_2}, \overline{z_1})$ et

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Alors on a que $T_L = 0$ et $T_R = 0$ sont normaux.

$$\text{On a : } TT^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } CT^*TC = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Or, $TT^* \neq CT^*TC$, ce qui signifie que T n'est pas C -normal. Donc, l'implication réciproque n'est pas vraie.

Proposition 2.3.1. Soit C une conjugaison dans l'espace de Hilbert complexe H et $U \in \mathcal{B}(H)$ un opérateur unitaire.

Alors :

- (1) U est C -normal,
- (2) UCU^* est une conjugaison,
- (3) CUC est unitaire,
- (4) si T est C -normal, alors UTU^* est UCU^* -normal,
- (5) de plus, si U et C commutent, alors si T est C -normal, UTU^* est aussi C -normal.

Démonstration. Les propriétés (1), (2), (3) et (4) proviennent directement des propriétés de la conjugaison et de celles de l'opérateur unitaire.

(5) Puisque U et C commutent, on a $CU = UC$. Si T est C -normal, alors :

$$\begin{aligned} TT^* = CT^*TC &\implies UTU^*UT^*U^* = UCT^*U^*UTC U^* \\ &\implies (UTU^*)(UTU^*)^* = C(UTU^*)^*(UTU^*)C, \end{aligned}$$

donc UTU^* est C -normal. □

Proposition 2.3.2. Soit $X \in LA(H)$ et soit $U \in \mathcal{B}(H)$ un opérateur unitaire. Si X est anti-linéaire normal, alors U^*XU est aussi anti-linéaire normal.

Démonstration. Le calcul direct montre que

$$\begin{aligned} (U^*XU)(U^*XU)^\# &= U^*XUU^*(U^*X)^\# = U^*XX^\#U \\ &= U^*X^\#XU = U^*X^\#UU^*XU \\ &= (U^*XU)^\#(U^*XU), \end{aligned}$$

donc U^*XU est anti-linéaire normal. □

2.3.2 Cas de dimension finie

Soit $\mathbb{M}_n$ l'algèbre de toutes les matrices complexes $n \times n$. Il existe quelques opérations sur les matrices définies comme suit : pour $M = [a_{jk}] \in \mathbb{M}_n$, on note

$$\overline{M} = [\overline{a_{jk}}], \quad M^t = [a_{kj}], \quad M^* = [\overline{a_{kj}}] \text{ et } M^s = [a_{n-j+1, n-k+1}].$$

Rappelons les relations entre opérateurs anti-linéaires et matrices. Soit $X \in LA(\mathbb{C}^n)$ et $e_1, \dots, e_n$ une base orthonormée dans $\mathbb{C}^n$. Il existe une matrice $M_X = [a_{jk}]$ telle que, pour tout $x = \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k \in \mathbb{C}^n$, on a :

$$\begin{aligned} Xx &= X \left(\sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k \right) = \sum_{k=1}^n \overline{\langle x, e_k \rangle} X e_k \\ &= \sum_{k=1}^n \overline{\langle x, e_k \rangle} \sum_{j=1}^n \langle X e_k, e_j \rangle e_j = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n a_{jk} \overline{\langle x, e_k \rangle} e_j \end{aligned}$$

avec $a_{jk} = \langle X e_k, e_j \rangle$. La matrice M_X sera appelée une représentation matricielle de l'opérateur anti-linéaire X quant à la base $e_1, \dots, e_n$. (La matrice standard pour l'opérateur linéaire $T \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^n)$ est également notée M_T).

Les propriétés suivantes sont valables.

Lemme 2.3.3. Soient $X, Y \in LA(\mathbb{C}^n)$ et $T \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^n)$. Si M_X, M_Y et M_T sont des représentation matricielle des opérateurs X, Y et T quant à certaines bases orthonormées $e_1, \dots, e_n$, respectivement, alors :

1. $M_{XT} = M_X \overline{M_T}$,
2. $M_{TX} = M_T M_X$,
3. $M_{XY} = M_X \overline{M_Y}$,
4. $M_{X^\#} = M_X^t$.

Démonstration. (1) On cherche la forme de la fonction définie pour ces matrices. On a :

$$\begin{aligned} (M_{XT}) : XT x &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_{jk}^X \overline{\langle T x, e_k \rangle} e_j \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_{jk}^X \overline{\left\langle \sum_{i=1}^n \sum_{l=1}^n a_{il}^T \langle x, e_l \rangle e_i, e_k \right\rangle} e_j \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n \sum_{l=1}^n a_{jk}^X \overline{a_{il}^T \langle x, e_l \rangle} \langle e_i, e_k \rangle e_j \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_{jk}^X \overline{a_{kl}^T \langle x, e_l \rangle} e_j \quad (\langle e_i, e_k \rangle = 0 \text{ si } i \neq k). \end{aligned}$$

Cela signifie que $M_{XT} = M_X \overline{M_T}$.

(4) On a :

$$\begin{aligned} (M_{X^\#}) : X^\# x &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n b_{jk} \overline{\langle x, e_k \rangle} e_j \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \langle X^\# e_k, e_j \rangle \overline{\langle x, e_k \rangle} e_j \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \overline{\langle e_k, X e_j \rangle} \overline{\langle x, e_k \rangle} e_j \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \langle X e_j, e_k \rangle \overline{\langle x, e_k \rangle} e_j \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_{kj} \overline{\langle x, e_k \rangle} e_j, \quad (M_X^t) \end{aligned}$$

Cela signifie que $M_{X^\#} = M_X^t$. □

Définition 2.3.2. On dit que la matrice $M \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ est normale conjuguée si

$$MM^* = \overline{M^*M}.$$

Le théorème ci-dessous montre les relations entre les opérateurs anti-linéaires normaux et les matrices normales conjuguées.

Théorème 2.3.2. Soit $X \in LA(\mathbb{C}^n)$. Alors X est anti-linéaire normal si et seulement si la matrice M_X est normale conjuguée.

Démonstration. L'opérateur anti-linéaire X est anti-linéaire normal si $XX^\# = X^\#X$, ce qui équivaut à $M_{XX^\#} = M_{X^\#X}$. D'après le lemme 2.3.3, on a :

$$M_X \overline{M_{X^\#}} = M_{X^\#} \overline{M_X} \iff M_X \overline{M_X^*} = \overline{M_X^*} M_X.$$

Donc $M_X M_X^* = \overline{M_X^* M_X}$. □

2.3.3 Résultats et exemples

Définition 2.3.3. Soient H_1, H_2 deux espaces de Hilbert complexes. Une application anti-linéaire $J : H_1 \rightarrow H_2$ est appelée un opérateur anti-unitaire si J est isométrique et surjectif. Il est clair que toute conjugaison sur un espace de Hilbert complexes H est naturellement un opérateur anti-unitaire sur H . Un opérateur anti-unitaire est appelé anti-conjugaison si $C^{-1} = -C$.

Soit M un sous-espace de H . Une application anti-linéaire $J : H \rightarrow H$ est appelée anti-unitaire partielle supportée sur M , si M réduit J ; $Jx = 0$ pour $x \in M^\perp$; et $J|_M$ est un opérateur anti-unitaire sur M .

Lemme 2.3.4. Soit J un opérateur anti-unitaire sur H . Alors

$$\langle Jx, Jy \rangle = \langle y, x \rangle, \quad \forall x, y \in H.$$

Démonstration. Pour $x, y \in H$, on a :

$$\|x + y\| - \|x - y\| = 2(\langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle), \quad \text{et} \quad i(\|x + iy\| - \|x - iy\|) = 2(\langle x, y \rangle - \langle y, x \rangle),$$

donc, en somme on trouve : $\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}(\|x + y\| - \|x - y\|) + \frac{i}{4}(\|x + iy\| - \|x - iy\|)$, alors

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle &= \frac{1}{4}(\|J(x + y)\| - \|J(x - y)\|) + \frac{i}{4}(\|J(x + iy)\| - \|J(x - iy)\|) \\ &= \frac{1}{4}(\|Jx + Jy\| - \|Jx - Jy\|) + \frac{i}{4}(\|Jx - iJy\| - \|Jx + iJy\|) \\ &= \frac{1}{4}(\|Jy + Jx\| - \|Jy - Jx\|) + \frac{i}{4}(\|Jy + iJx\| - \|Jy - iJx\|), \quad (\alpha = Jy \text{ et } \beta = Jx) \\ &= \langle Jy, Jx \rangle. \end{aligned}$$

Cela signifie que $\langle Jx, Jy \rangle = \langle y, x \rangle$. □

Théorème 2.3.3. [25] Soit C une conjugaison sur H et $T \in \mathcal{B}(H)$. Alors les éléments suivants sont équivalents :

(1) T est C -normal.

(2) $T = CJ|T|$ pour un opérateur anti-unitaire partiel J supporté sur $\overline{\text{Im}|T|}$ avec $J|T| = |T|J$.

(3) $T = C\tilde{J}|T|$ pour un opérateur anti-unitaire $\tilde{J}$ sur H avec $\tilde{J}|T| = |T|\tilde{J}$.

Démonstration. Soit $T = U|T|$ la décomposition polaire de T , où U est une isométrie partielle avec $\ker U = \ker T$. Notons $M = \overline{\text{Im}|T|}$ et $M_1 = \overline{\text{Im}|T^*|}$. Alors on voit que $U(M) = M_1$, U^*U est une projection de H sur M et $|T^*| = U|T|U^*$.

(1) $\implies$ (2). On pose $J = CU$.

Depuis $C|T| = |T^*|C$, on obtient $C(\text{Im}|T|) = \text{Im}|T^*|$. De plus, $C(M) = M_1$ et $C(M_1) = M$. Donc

$$J(M) = CU(M) = C(M_1) = M.$$

Notez que J est anti-linéaire, $\ker J = \ker CU = \ker U = M^\perp$ et $\|CUx\| = \|Ux\| = \|x\|$ pour $x \in M$.

Notons que U^*U est une projection de H sur M et UU^* est une projection de H sur M_1 . Il découle de $C(M) = M_1$ que $C(U^*U) = (UU^*)C$, c'est-à-dire que U est C -normal.

On a $C|T|C = |T^*| = U|T|U^*$, alors $|T|CU = CU|T|U^*U$. En notant que U^*U est une projection de H sur M , on obtient $|T|CU = CU|T|$, donc $|T|J = J|T|$.

(2) $\implies$ (3). Puisque J est supporté sur $\overline{\text{Im}|T|}$ avec $J|T| = |T|J$, T et J peuvent s'écrire :

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & P \end{bmatrix} \begin{matrix} M^\perp \\ M \end{matrix}, J = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & J_1 \end{bmatrix} \begin{matrix} M^\perp \\ M \end{matrix},$$

où P est positif et J_1 est un opérateur anti-unitaire sur M avec $PJ_1 = J_1P$.

Choisir un opérateur anti-unitaire J_0 sur $M^\perp$ et posons

$$\tilde{J} = \begin{bmatrix} J_0 & 0 \\ 0 & J_1 \end{bmatrix} \begin{matrix} M^\perp \\ M \end{matrix}.$$

Alors $\tilde{J}$ est un opérateur anti-unitaire sur H et $J|T| = \tilde{J}|T| = |T|\tilde{J}$. D'où $T = CJ|T| = C\tilde{J}|T|$.

(3) $\implies$ (1). Pour tout $x, y \in H$, on a

$$\begin{aligned} \langle |T|\tilde{J}^{-1}Cx, y \rangle &= \langle \tilde{J}^{-1}Cx, |T|y \rangle = \langle \tilde{J}|T|y, Cx \rangle \\ &= \langle x, C\tilde{J}|T|y \rangle = \langle x, Ty \rangle = \langle T^*x, y \rangle. \end{aligned}$$

Ceci montre que $T^* = |T|\tilde{J}^{-1}C$. Alors

$$\begin{aligned} TT^* &= (C\tilde{J}|T|)(|T|\tilde{J}^{-1}C) = C|T||T|\tilde{J}\tilde{J}^{-1}C \\ &= C|T|^2C = CT^*TC. \end{aligned}$$

Donc T est C -normal. □

Remarque 2.3.1. Le théorème 2.3.3 fournit un schéma simple pour construire des opérateurs C -normaux. Le corollaire suivant résulte de la preuve du théorème 2.3.3.

Corollaire 2.3.1. Si $T \in \mathcal{B}(H)$ est C -normal pour une conjugaison C et que $T = U|T|$ est la décomposition polaire de T , alors :

- (1) U est C -normal et $CU|T| = |T|CU$.
- (2) $|T|$ et $|T^*|$ sont unitairement équivalents.

Démonstration. (2) On peut trouver une conjugaison J sur H telle que $|T|J = |T|J$. Ensuite, nous avons

$$|T^*| = C|T|C = CJ|T|JC.$$

Posons $U = CJ$. Alors U est unitaire et $U^* = JC$. D'où $|T^*| = U|T|U^*$ □

Théorème 2.3.4. Soit T un opérateur C -normal pour une conjugaison C sur H avec $\|T\| \leq 1$. Alors, il existe des opérateurs unitaires U_1, U_2 qui sont C -normaux tels que $T = \frac{U_1 + U_2}{2}$.

Démonstration. Puisque T est C -normal, d'après le théorème 2.3.3, on a $T = C|T|J$, où J est un opérateur anti-unitaire qui commute avec $|T|$. Puisque $\|T\| \leq 1$, il s'ensuit que les opérateurs V_+ et V_- définis par

$$V_+ = |T| + i\sqrt{I - |T|^2} \quad \text{et} \quad V_- = |T| - i\sqrt{I - |T|^2},$$

vérifient $V_+^* = V_-$, $JV_+ = V_-J$ et $JV_- = V_+J$. On fixe $U_1 = CJV_+$ et $U_2 = CJV_-$. Alors U_1, U_2 sont des opérateurs unitaires et

$$\begin{aligned} \frac{U_1 + U_2}{2} &= \frac{1}{2}CJ(V_+ + V_-) \\ &= CJ|T| = T. \end{aligned}$$

□

Théorème 2.3.5. Soit C une conjugaison dans un espace de Hilbert complexe H et $T \in \mathcal{B}(H)$. Alors :

$T - \lambda$ est un opérateur C -normal pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ si et seulement si T est un opérateur complexe symétrique de conjugaison C .

Démonstration. Puisque $T - \lambda$ est C -normal pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, il s'ensuit que

$$\begin{aligned} 0 &= C(T - \lambda)(T - \lambda)^*C - (T - \lambda)^*(T - \lambda) \\ &= C(TT^* - \bar{\lambda}T - \lambda T^* + |\lambda|^2)C - (T^*T - \lambda T^* - \bar{\lambda}T + |\lambda|^2) \\ &= CTT^*C - \lambda CTC - \bar{\lambda}CT^*C + |\lambda|^2 - T^*T + \lambda T^* + \bar{\lambda}T - |\lambda|^2 \\ &= CTT^*C - \lambda CTC - \bar{\lambda}CT^*C - T^*T + \lambda T^* + \bar{\lambda}T. \end{aligned}$$

On pose $\lambda = re^{i\theta}$ pour $\theta \in \mathbb{R}$; alors

$$CTT^*C - re^{i\theta}CTC - re^{-i\theta}CT^*C = T^*T - re^{i\theta}T^* - re^{-i\theta}T$$

Par conséquent, on a

$$\frac{CTT^*C}{r} - e^{i\theta}CTC - e^{-i\theta}CT^*C = \frac{T^*T}{r} - e^{i\theta}T^* - e^{-i\theta}T.$$

En faisant tendre $r \rightarrow +\infty$, on obtient $e^{i\theta} CTC + e^{-i\theta} CT^*C = e^{i\theta} T^* + e^{-i\theta} T$ et ainsi

$$e^{i2\theta}(CTC - T^*) = T - CT^*C.$$

En prenant $\theta = 0$, on obtient que $CTC - T^* = T - CT^*C$ et en prenant $\theta = \frac{\pi}{2}$, on obtient $-CTC + T^* = T - CT^*C$. D'après les équations ci-dessus, on obtient $T = CT^*C$. Donc T est un opérateur complexe symétrique de conjugaison C .

Inversement, si T est un opérateur complexe symétrique, alors $T - \lambda$ est complexe symétrique. Donc $T - \lambda$ est C -normal pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$. $\square$

Exemple 2.3.2. Pour l'espace $L^2([0, 1])$, soit une conjugaison C sur $L^2([0, 1])$ donnée par $(Cf)(t) = \overline{f(1-t)}$ pour $t \in [0, 1]$. Supposons que $\varphi \in L^\infty$ et $M_\varphi \in \mathcal{B}(L^2([0, 1]))$ est l'opérateur de multiplication donné par $M_\varphi f = \varphi f$. On a

$$\begin{aligned} CM_\varphi M_\varphi^* Cf(t) &= CM_\varphi M_{\overline{\varphi}} \overline{f(1-t)} = CM_\varphi \overline{\varphi(t)} \overline{f(1-t)} \\ &= C\varphi(t) \overline{\varphi(t)} \overline{f(1-t)} = \varphi(1-t) \overline{\varphi(1-t)} f(1-(1-t)) \\ &= |\varphi|^2(1-t)f(t), \end{aligned}$$

et on a

$$\begin{aligned} M_\varphi^* M_\varphi f(t) &= M_{\overline{\varphi}} \varphi(t) f(t) = \overline{\varphi(t)} \varphi(t) f(t) \\ &= |\varphi|^2(t) f(t), \end{aligned}$$

donc l'opérateur M_φ est C -normal si et seulement si $|\varphi|^2(t) = |\varphi|^2(1-t)$. Mais, dans ce cas, puisque

$$CM_\varphi Cf(t) - M_\varphi^* f(t) = \overline{\varphi(1-t)} f(t) - \overline{\varphi(t)} f(t),$$

alors si $\varphi(t) \neq \varphi(1-t)$, il s'ensuit que M_φ n'est pas un opérateur complexe symétrique.

Théorème 2.3.6. Soit $T \in \mathcal{B}(H)$ un opérateur C -normal. Alors les énoncés suivants sont équivalents:

- (1) T est normal.
- (2) T est quasi-normal.
- (3) T est hyponormal.
- (4) T est p -hyponormal pour $0 < p \leq 1$.

Démonstration. Puisque (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (4) est vérifiée, il suffit de montrer que (4) $\Rightarrow$ (1) est vérifiée.

Supposons que T soit un opérateur C -normal et p -hyponormal. Il suffit de considérer quand $p = \frac{1}{2^n}$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. On veut donc montrer que

$$|T^*|^{\frac{1}{2^n}} = C|T|^{\frac{1}{2^n}}C, \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Puisque T est C -normal donc $|T^*| = C|T|C$.

Par récurrence, si $n = 0$ on a $|T^*| = C|T|C$ et on a

$$\begin{aligned} |T^*|^{\frac{1}{2^{n+1}}} &= |T^*|^{\frac{1}{2^n} \frac{1}{2}} = (|T^*|^{\frac{1}{2^n}})^{\frac{1}{2}} \\ &= (C|T|^{\frac{1}{2^n}}C)^{\frac{1}{2}} = C(|T|^{\frac{1}{2^n}})^{\frac{1}{2}}C \\ &= C|T|^{\frac{1}{2^{n+1}}}C. \end{aligned}$$

Ainsi $|T^*|^{2p} = C|T|^{2p}C$ pour $0 < p \leq 1$. Puisque T est p -hyponormal et d'après le résultat ci-dessus, nous avons

$$\begin{aligned} 0 \leq \langle (T^*T)^p - (TT^*)^p x, x \rangle &= \langle Cx, C((T^*T)^p - (TT^*)^p)x \rangle \\ &= \langle Cx, (C(T^*T)^pC - C(TT^*)^pC)Cx \rangle \\ &= \langle Cx, (C|T|^{2p}C - C|T^*|^{2p}C)Cx \rangle \end{aligned}$$

pour tout $x \in H$. De plus, puisque $|T^*|^{2p} = C|T|^{2p}C$ et T est p -hyponormal pour $0 < p \leq 1$, on a

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle Cx, (C|T|^{2p}C - C|T^*|^{2p}C)Cx \rangle \\ &= \langle Cx, (|T^*|^{2p} - |T|^{2p})Cx \rangle \\ &= \langle y, ((TT^*)^p - (T^*T)^p)y \rangle \leq 0. \end{aligned}$$

Ainsi $|T^*|^{2p} = |T|^{2p}$ pour $0 < p \leq 1$. Par un calcul facile, on peut montrer que si $|T^*|^{\frac{1}{2^n}} = |T|^{\frac{1}{2^n}}$, alors $|T^*|^{\frac{1}{2^{n-1}}} = |T|^{\frac{1}{2^{n-1}}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. D'où $|T^*|^2 = |T|^2$. Donc T est normal. $\square$

Lemme 2.3.5. *[23] Inégalité de Hölder–McCarthy. Pour tout opérateur positif $T \in \mathcal{B}(H)$ et tout $x \in H$, les inégalités suivantes sont vérifiées.:*

- (1) $\langle T^\gamma x, x \rangle \leq |\langle Tx, x \rangle|^\gamma \|x\|^{2(1-\gamma)}$ si $0 < \gamma \leq 1$.
- (2) $\langle T^\gamma x, x \rangle \geq |\langle Tx, x \rangle|^\gamma \|x\|^{2(1-\gamma)}$ si $1 \leq \gamma < +\infty$.

En tant qu'application du Lemme 2.3.5, nous obtenons l'inégalité généralisée de Cauchy-Schwarz suivante pour les opérateurs C -normal.

Théorème 2.3.7. *Soit $T \in \mathcal{B}(H)$ et $T = U_T|T|$ la décomposition polaire de T . Si T est C -normal, alors*

$$|\langle T^*x, y \rangle| \leq (\|TCx\| \|y\|)^\alpha (\|TCU_{T^*}^*y\| \|x\|)^\beta$$

pour tout $x, y \in H$, où $\alpha, \beta \geq 0$ avec $\alpha + \beta = 1$.

Démonstration. On a

$$\begin{aligned} |\langle T^*x, y \rangle| &\leq \|T^*x\| \|y\| = \|U_{T^*}|T^*|x\| \|y\| \\ &\leq \| |T^*| x \| \|y\| = \|C|T|Cx\| \|y\| \\ &= \| |T| Cx \| \|y\| = \|U_T^*U_T|T|Cx\| \|y\| \\ &\leq \|TCx\| \|y\|, \end{aligned}$$

nous prouvons ceci pour $\beta = 0$.

Supposons que $\beta = 1$ et $\alpha = 0$. Nous avons

$$\begin{aligned}
 |\langle T^* x, y \rangle| &= |\langle U_{T^*} | T^* | x, y \rangle| = |\langle x, | T^* | U_{T^*}^* y \rangle| \\
 &\leq \| | T^* | U_{T^*}^* y \| \| x \| = \| C | T | C U_{T^*}^* y \| \| x \| \\
 &= \| | T | C U_{T^*}^* y \| \| x \| = \| U_T^* U_T | T | C U_{T^*}^* y \| \| x \| \\
 &\leq \| T C U_{T^*}^* y \| \| x \|
 \end{aligned}$$

nous prouvons ceci pour $\beta = 1$.

Supposons que $0 < \alpha, \beta < 1$ et $\alpha + \beta = 1$. Alors, pour tout $x \in H$, nous avons

$$\begin{aligned}
 |\langle T^* x, y \rangle|^2 &= |\langle U_{T^*} | T^* | x, y \rangle|^2 = |\langle | T^* | x, U_{T^*}^* y \rangle|^2 \\
 &= |\langle C | T | C x, U_{T^*}^* y \rangle|^2 = |\langle C U_{T^*}^* y, | T | C x \rangle|^2 \\
 &= \left| \langle C U_{T^*}^* y, | T |^{\alpha+\beta} C x \rangle \right|^2 = \left| \langle | T |^\beta C U_{T^*}^* y, | T |^\alpha C x \rangle \right|^2 \\
 &\leq \| | T |^\alpha C x \|^2 \| | T |^\beta C U_{T^*}^* y \|^2 \\
 &= \langle | T |^\alpha C x, | T |^\alpha C x \rangle \langle | T |^\beta C U_{T^*}^* y, | T |^\beta C U_{T^*}^* y \rangle \\
 &= \langle | T |^{2\alpha} C x, C x \rangle \langle | T |^{2\beta} C U_{T^*}^* y, C U_{T^*}^* y \rangle \dots\dots\dots (*)
 \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Hölder–McCarthy, nous obtenons que l'équation (*) se transforme en l'inégalité suivante,

$$\begin{aligned}
 |\langle T^* x, y \rangle|^2 &\leq \langle | T |^{2\alpha} C x, C x \rangle \langle | T |^{2\beta} C U_{T^*}^* y, C U_{T^*}^* y \rangle \\
 &\leq \langle | T |^{2\alpha} C x, C x \rangle^\alpha \| C x \|^{2(1-\alpha)} \langle | T |^{2\beta} C U_{T^*}^* y, C U_{T^*}^* y \rangle^\beta \| C U_{T^*}^* y \|^{2(1-\beta)} \\
 &= \langle | T | C x, | T | C x \rangle^\alpha \| C x \|^{2(1-\alpha)} \langle | T | C U_{T^*}^* y, | T | C U_{T^*}^* y \rangle^\beta \| C U_{T^*}^* y \|^{2(1-\beta)} \\
 &= \langle U_T^* U_T | T | C x, | T | C x \rangle^\alpha \| C x \|^{2(1-\alpha)} \langle U_T^* U_T | T | C U_{T^*}^* y, | T | C U_{T^*}^* y \rangle^\beta \| C U_{T^*}^* y \|^{2(1-\beta)} \\
 &= \langle U_T | T | C x, U_T | T | C x \rangle^\alpha \| C x \|^{2(1-\alpha)} \langle U_T | T | C U_{T^*}^* y, U_T | T | C U_{T^*}^* y \rangle^\beta \| C U_{T^*}^* y \|^{2(1-\beta)} \\
 &= \langle T C x, T C x \rangle^\alpha \| C x \|^{2\beta} \langle T C U_{T^*}^* y, T C U_{T^*}^* y \rangle^\beta \| C U_{T^*}^* y \|^{2\alpha} \\
 &= \| T C x \|^2 \alpha \| C x \|^{2\beta} \| T C U_{T^*}^* y \|^{2\beta} \| C U_{T^*}^* y \|^{2\alpha} \\
 &\leq \| T C x \|^2 \alpha \| y \|^{2\alpha} \| T C U_{T^*}^* y \|^{2\beta} \| x \|^{2\beta} \\
 &= (\| T C x \| \| y \|)^{2\alpha} (\| T C U_{T^*}^* y \| \| x \|)^{2\beta}.
 \end{aligned}$$

Par conséquent, $|\langle T^* x, y \rangle| \leq (\| T C x \| \| y \|)^\alpha (\| T C U_{T^*}^* y \| \| x \|)^\beta$. Ceci termine la démonstration. $\square$

Corollaire 2.3.2. Si $T \in \mathcal{B}(H)$ est C -normal, alors $C \ker T^* \subset \ker T$, $\ker T^* = \ker TC$, et $\ker T = \ker T C U_{T^*}^*$.

Démonstration. Supposons que T soit C -normal, on a $| T^* | = C | T | C$. Donc, si $x \in \ker T^*$, alors

$$\begin{aligned}
 T^* x = 0 = U_{T^*} | T^* | x &\implies | T^* | x = 0 = C | T | C x \\
 &\implies | T | C x = 0 \implies U_T | T | C x = 0 \\
 &\implies T C x = 0 \dots\dots\dots(1)
 \end{aligned}$$

alors,

$$\begin{aligned}
 y \in C \ker T^* &\implies \exists x \in \ker T^* : y = Cx \\
 &\implies TCx = 0, \text{ et } y = Cx \\
 &\implies Ty = 0 \implies y \in \ker T.
 \end{aligned}$$

Donc $C \ker T^* \subset \ker T$.

De (1), on déduit que $\ker T^* \subseteq \ker TC$. Si $x \in \ker TC$, i.e., $TCx = 0$, d'après le Théorème 2.3.7, $\langle T^*x, y \rangle = 0$ pour tous $y \in H$, ainsi, $x \in \ker T^*$. Donc, $\ker TC \subseteq \ker T^*$. Par conséquent, $\ker T^* = \ker TC$.

Enfin, puisque $T^* = U_{T^*}|T^*|$ est la décomposition polaire de T^* , $T = (T^*)^* = |T^*|U_{T^*}^*$. Donc, si $x \in \ker T$, alors

$$\begin{aligned}
 |T^*|U_{T^*}^*x = 0 &\implies C|T|CU_{T^*}^*x = 0 \\
 &\implies |T|CU_{T^*}^*x = 0 \implies U_T|T|CU_{T^*}^*x = 0 \\
 &\implies TCU_{T^*}^*x = 0 \implies x \in \ker TCU_{T^*}^*
 \end{aligned}$$

alors, $\ker T \subseteq \ker TCU_{T^*}^*$.

Si $y \in \ker TCU_{T^*}^*$, alors on a $TCU_{T^*}^*y = 0$, d'après le Théorème 2.3.7, $\langle T^*x, y \rangle = 0 = \langle x, Ty \rangle$ pour tous $x \in H$, ainsi, $y \in \ker T$, alors $\ker TCU_{T^*}^* \subseteq \ker T$.

Par conséquent, $\ker TCU_{T^*}^* = \ker T$. □

2.4 Quelques résultats sur les opérateurs C -normaux

Dans cette section, nous présentons les résultats de notre article [24].

Dans le théorème suivant, nous donnons une condition suffisante pour que le produit d'un opérateur C -normal et d'un opérateur C -symétrique soit un opérateur C -normal.

Théorème 2.4.1. *Soient $T, S \in \mathcal{B}(H)$ et soit C une conjugaison sur H . Si T est C -normal, S est C -symétrique tels que $TS = ST$, alors TS est un opérateur C -normal.*

Démonstration. On a:

$$\begin{aligned}
 (TS)^*TS &= S^*T^*TS \\
 &= S^*CTT^*CS \\
 &= CSTT^*S^*C \\
 &= CTSS^*T^*C \\
 &= C(TS)(TS)^*C.
 \end{aligned}$$

En conséquence, TS est un opérateur C -normal. □

Remarque 2.4.1. Par un raisonnement similaire, on peut conclure que le résultat du Théorème 2.4.1 est également vrai si S est un opérateur skew-symétrique.

L'exemple suivant montre que le théorème 2.4.1 n'est pas nécessairement vrai si S et T ne commutent pas.

Exemple 2.4.1. Soit $H = \mathbb{C}^3$ et soit C une conjugaison sur H donnée par $C(z_1, z_2, z_3) = (\overline{z_3}, \overline{z_2}, \overline{z_1})$. Soient T et S définis sur H par :

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, S = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Après calcul, nous obtenons que $TS \neq ST$, T est C -normal et S est C -symétrique. Cependant,

$$C(TS)(TS)^*C(z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 4z_2 \\ 9z_3 \end{pmatrix} \neq (TS)^*(TS)(z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 9z_2 \\ 4z_3 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, TS n'est pas un opérateur C -normal.

Pour prouver notre prochain résultat, nous avons besoin du lemme suivant.

Lemme 2.4.1. Soit $T \in \mathcal{B}(H)$ et soit C une conjugaison sur H . Alors :

$$(CTC)^* = CT^*C.$$

Démonstration. Pour tous $x, y \in H$, on a :

$$\begin{aligned} \langle CT^*Cx, y \rangle &= \overline{\langle T^*Cx, C^\#y \rangle} \\ &= \langle Cy, T^*Cx \rangle \\ &= \langle TCy, Cx \rangle \\ &= \overline{\langle C^\#TCy, x \rangle} \\ &= \langle x, CTCy \rangle \\ &= \langle (CTC)^*x, y \rangle. \end{aligned}$$

D'où $(CTC)^* = CT^*C$. □

Dans le théorème suivant, nous donnons une condition suffisante pour laquelle le produit de deux opérateurs C -normaux est un opérateur C -normal.

Théorème 2.4.2. Soient $T, S \in \mathcal{B}(H)$ deux opérateurs C -normaux avec la conjugaison C sur H . Si $TS = ST$ et $S^*(CTC) = (CTC)S^*$, alors TS est un opérateur C -normal.

Démonstration. Depuis $S^*(CTC) = (CTC)S^*$ par Lemme 2.4.1, il s'ensuit que $(CT^*C)S = S(CT^*C)$ et, sous les

hypothèses, on peut observer que

$$\begin{aligned}
 (TS)(TS)^* &= TSS^*T^* \\
 &= STT^*S^* \\
 &= SCT^*TCS^* \\
 &= S(CT^*C)(CTC)S^* \\
 &= (CT^*C)SS^*(CTC) \\
 &= (CT^*C)CS^*SC(CTC).
 \end{aligned}$$

D'où $(TS)(TS)^* = C(TS)^*(TS)C$. Par conséquent, TS est un opérateur C -normal. □

L'exemple suivant montre que les conditions $TS = ST$ et $S^*(CTC) = (CTC)S^*$ sont nécessaires.

Exemple 2.4.2. Soit C une conjugaison sur $\mathbb{C}^3$ donnée par $C(z_1, z_2, z_3) = (\overline{z_3}, \overline{z_2}, \overline{z_1})$. Soient

$$T = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \text{ et } S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On peut vérifier que T et S sont des opérateurs C -normaux et que $TS \neq ST$. Cependant, TS n'est pas un opérateur C -normal.

En conséquence immédiate du théorème 2.4.2, nous obtenons le résultat suivant.

Corollaire 2.4.1. Soit $T \in \mathcal{B}(H)$ un opérateur C -normal avec la conjugaison C sur H . Supposons que $T^*(CTC) = (CTC)T^*$. Alors, T^n est un opérateur C -normal pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Démonstration. Nous utilisons un argument d'induction sur n pour démontrer l'affirmation.

Premièrement, pour $n = 2$ par le théorème 2.4.2, il est clair que T^2 est un opérateur C -normal.

Ensuite, supposons que T^n est C -normal et montrons que T^{n+1} est un opérateur C -normal. Puisque

$$T^n T = T T^n = T^{n+1},$$

Nous avons $T^*(CTC) = (CTC)T^*$, il s'ensuit que $T^*(CTC)^n = (CTC)^n T^*$, ce qui implique

$$T^*(CT^n C) = (CT^n C)T^*.$$

Alors, $T^n T = T^{n+1}$ est un opérateur C -normal d'après le théorème 2.4.2. Par conséquent, T^n est un opérateur C -normal pour tout $n \in \mathbb{N}$. □

Une application du théorème 2.4.2 conduit au résultat suivant.

Proposition 2.4.1. Soient $T, S \in \mathcal{B}(H)$ des opérateurs C -normaux avec la conjugaison C sur H . Si $TS = ST$, $S^*(CTC) = (CTC)S^*$, $T^*(CTC) = (CTC)T^*$ et $S^*(CSC) = (CSC)S^*$, alors $T^n S^m$ et $S^m T^n$ sont des opérateurs C -normaux pour tout $n, m \in \mathbb{N}^*$.

Démonstration. Par le Théorème 2.4.2, TS est un opérateur C -normal. Il suffit de montrer que $T^n S$ est un opérateur C -normal. Puisque $TS = ST$, $S^* (CTC) = (CTC) S^*$ et $T^* (CTC) = (CTC) T^*$, il s'ensuit que $T^{n-1} (TS) = (TS) T^{n-1}$ et

$$\begin{aligned} (TS)^* CT^{n-1} C &= S^* T^* (CTC)^{n-1} \\ &= S^* (CTC)^{n-1} T^* \\ &= (CTC)^{n-1} S^* T^* \\ &= CT^{n-1} C (TS)^*. \end{aligned}$$

De plus, puisque T est un opérateur C -normal et $T^* (CTC) = (CTC) T^*$, il découle du Corollaire 2.4.1 que T^{n-1} est un opérateur C -normal. Ainsi, TS et T^{n-1} sont des opérateurs C -normaux avec $T^{n-1} (TS) = (TS) T^{n-1}$ et $(TS)^* CT^{n-1} C = CT^{n-1} C (TS)^*$. Maintenant, en utilisant le Théorème 2.4.2, nous obtenons que $T^{n-1} (TS) = T^n S$ est un opérateur C -normal. De même, $T^n S^m$ est un opérateur C -normal. De plus, nous pouvons montrer que $S^m T^n$ est un opérateur C -normal en utilisant une méthode similaire. $\square$

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer la proposition suivante.

Proposition 2.4.2. Soient $T, S \in \mathcal{B}(H)$ tels que T soit un opérateur C -normal et $ST = CS^* T^* C$. Alors, TST est C -normal.

Démonstration. Au vu du Lemme 2.4.1, nous avons:

$$\begin{aligned} CS^* T^* C = ST &\implies C(TS)^* C = ST \\ &\implies (CTSC)^* = ST \\ &\implies CTSC = (ST)^* \\ &\implies CTSC = T^* S^*. \end{aligned}$$

Par conséquent, nous en déduisons que

$$\begin{aligned} (TST)^* (TST) &= T^* S^* T^* TST \\ &= T^* S^* C T T^* C S T \\ &= C (CT^* S^* C) T T^* (C S T C) C \\ &= C (TS) T T^* (S^* T^*) C \\ &= C (TST) (T^* S^* T^*) C \\ &= C (TST) (TST)^* C. \end{aligned}$$

Ainsi, $(TST)^* (TST) = C (TST) (TST)^* C$. Par conséquent, TST est un opérateur C -normal. $\square$

Notre prochain résultat est énoncé comme suit.

Proposition 2.4.3. Si $T \in \mathcal{B}(H)$ est un opérateur C -normal et T est 2-normal, alors $T^2 T^*$ est un opérateur C -normal.

Démonstration. Puisque T est 2-normal, cela signifie que $T^* T^2 = T^2 T^*$, nous en déduisons donc que

$$\begin{aligned}
 (T^2 T^*)^* (T^2 T^*) &= T (T^*)^2 T^2 T^* \\
 &= T T^* T^* T T^* \\
 &= (C T^* T C) (C T T^* C) (C T^* T C) \\
 &= C T^* T^2 T^{*2} T C \\
 &= C (T^* T^2) (T^* T^2)^* C \\
 &= C (T^2 T^*) (T^2 T^*)^* C.
 \end{aligned}$$

Ainsi, $(T^2 T^*)^* (T^2 T^*) = C (T^2 T^*) (T^2 T^*)^* C$.

Par conséquent, $T^2 T^*$ est un opérateur C -normal. □

La proposition suivante est une extension de la [[28] Proposition 2.6].

Proposition 2.4.4. *Soit C une conjugaison sur H et $U \in \mathcal{B}(H)$ un opérateur unitaire. Alors, les énoncés suivants sont vrais.*

1. U^n est un opérateur C -normal.
2. $(UCU^*)^n$ est une conjugaison lorsque n est impair.
3. $(CUC)^n$ est un opérateur unitaire.
4. Si T est un opérateur C -symétrique, alors $UT^n U^* = (UTU^*)^n$ est un opérateur UCU^* -symétrique.
5. S'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que T^n est un opérateur C -normal, alors $(UTU^*)^n$ est un opérateur UCU^* -normal.

Démonstration. (1), (2), (3) et (4) sont évidents. Pour (5), nous avons

$$((UTU^*)^n)^* (UTU^*)^n = U(T^n)^* T^n U^*, \text{ et } UCU^* (UTU^*)^n ((UTU^*)^n)^* UCU^* = U(T^n)^* T^n U^*.$$

Nous obtenons donc

$$((UTU^*)^n)^* (UTU^*)^n = (UCU^*) (UTU^*)^n ((UTU^*)^n)^* UCU^*.$$

Cela signifie que $(UTU^*)^n$ est UCU^* -normal. □

Dans le théorème suivant, nous donnons une condition suffisante pour que la somme de deux opérateurs C -normaux soit C -normale.

Théorème 2.4.3. *Soient T et $S \in \mathcal{B}(H)$ des opérateurs C -normaux. Si $TS^* = S^* T$ et TS^* est C -symétrique, alors $T + S$ est un opérateur C -normal.*

Démonstration. Par hypothèse, $TS^* = S^* T$, alors $(TS^*)^* = (S^* T)^*$, d'où $ST^* = T^* S$.

Puisque TS^* est C -symétrique, il s'ensuit que $CTS^* C = (TS^*)^* = ST^*$, ainsi $CST^* C = TS^*$.

Maintenant, nous avons:

$$\begin{aligned}
C(T+S)(T+S)^*C &= C(T+S)(T^*+S^*)C \\
&= C(TT^*+TS^*+ST^*+SS^*)C \\
&= CTT^*C+CTS^*C+CST^*C+CSS^*C \\
&= T^*T+ST^*+TS^*+S^*S \\
&= T^*T+T^*S+S^*T+S^*S \\
&= T^*(T+S)+S^*(T+S) \\
&= (T^*+S^*)(T+S) \\
&= (T+S)^*(T+S).
\end{aligned}$$

Par conséquent, $C(T+S)(T+S)^*C = (T+S)^*(T+S)$. Donc, $(T+S)$ est un opérateur C -normal. $\square$

Théorème 2.4.4. Soient T et $S \in \mathcal{B}(H)$ des opérateurs C -normaux. Si $C(TS^*+ST^*)C = T^*S+S^*T$, alors $(T+S)$ est un opérateur C -normal.

Démonstration. Nous avons

$$\begin{aligned}
C(T+S)(T+S)^*C &= C(T+S)(T^*+S^*)C \\
&= C(TT^*+TS^*+ST^*+SS^*)C \\
&= CTT^*C+C(TS^*+ST^*)C+CSS^*C \\
&= T^*T+T^*S+S^*T+S^*S \\
&= T^*(T+S)+S^*(T+S) \\
&= (T^*+S^*)(T+S) \\
&= (T+S)^*(T+S).
\end{aligned}$$

Par conséquent, $C(T+S)(T+S)^*C = (T+S)^*(T+S)$. Ainsi, $(T+S)$ est un opérateur C -normal. $\square$

Soit $H \otimes H$ qui désigne la complétion, dotée d'une norme croisée uniforme raisonnable, du produit tensoriel algébrique $H \otimes H$ de H par H . Pour les opérateurs $T, S \in \mathcal{B}(H)$, nous définissons l'opérateur de produit tensoriel $T \otimes S$ sur $\mathcal{B}(H \otimes H)$ par:

$$(T \otimes S) \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \otimes y_i \right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i T x_i \otimes S y_i, \text{ pour } x_i, y_i \in H.$$

Notez que

$$T \otimes S = (T \otimes I)(I \otimes S) = (I \otimes S)(T \otimes I).$$

Il est connu que si C_1 et C_2 sont des conjugaisons sur H , nous définissons $C_1 \otimes C_2$ sur $H \otimes H$ par

$$(C_1 \otimes C_2) \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \otimes y_i \right) = \sum_{i=1}^n \overline{\alpha_i} C_1 x_i \otimes C_2 y_i, \text{ pour } x_i, y_i \in H.$$

Alors, $C_1 \otimes C_2$ est une conjugaison sur $H \otimes H$.

Dans le théorème suivant, nous allons caractériser le produit tensoriel $T \otimes S$, où T et S sont tous deux des opérateurs

C –normaux non nuls dans $\mathcal{B}(H)$.

Théorème 2.4.5. Soient $T, S \in \mathcal{B}(H)$ des opérateurs C –normaux, où C est une conjugaison sur H . Alors, $T \otimes S$ est un opérateur $C \otimes C$ –normal.

Démonstration. Si T et S sont des opérateurs C –normaux, il est facile de voir que $T \otimes I$ et $I \otimes S$ sont respectivement des opérateurs $C \otimes C$ –normaux. De plus, nous avons

$$(T \otimes I)(I \otimes S) = (I \otimes S)(T \otimes I),$$

et il n'est pas difficile de vérifier que

$$(I \otimes S)^*(C \otimes C)(T \otimes I)(C \otimes C) = (C \otimes C)(T \otimes I)(C \otimes C)(I \otimes S)^*.$$

Puisque $T \otimes S = (T \otimes I)(I \otimes S)$, il découle du théorème 2.4.2 que $T \otimes S$ est un opérateur $C \otimes C$ –normal. □

Nous sommes maintenant en mesure de prouver le résultat suivant.

Proposition 2.4.5. Si X est un opérateur anti-linéaire normal, alors X^2 est un opérateur normal.

Démonstration. Remarquez que

$$\begin{aligned} \langle (X^\#)^2 x, y \rangle &= \langle X^\# X^\# x, y \rangle \\ &= \overline{\langle X^\# x, X y \rangle} \\ &= \langle x, X X y \rangle \\ &= \langle x, X^2 y \rangle \\ &= \langle (X^2)^* x, y \rangle. \end{aligned}$$

Cela implique que

$$(X^\#)^2 = (X^2)^*. \quad (2.1)$$

De plus, nous avons :

$$\begin{aligned} (X^\#)^2 X^2 &= X^\# X^\# X X \\ &= X^\# X X^\# X \\ &= (X^\# X)^2, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} X^2 (X^\#)^2 &= X X X^\# X^\# \\ &= X^\# X X^\# X \\ &= (X^\# X)^2. \end{aligned}$$

Ainsi, $(X^\#)^2 X^2 = X^2 (X^\#)^2$. Donc, $(X^2)^* X^2 = X^2 (X^2)^*$, et par conséquent, X^2 est un opérateur normal. □

Remarque 2.4.2. En utilisant (2.1), nous pouvons constater que $(X^\#)^{2k} = (X^{2k})^*$ pour chaque $k \in \mathbb{N}^*$, et

$$(X^\#)^n X = (X^\#)^{n-1} X^\# X = (X^\#)^{n-1} X X^\# = \dots = X (X^\#)^n.$$

Nous avons aussi:

$$X^\# X^n = X^\# X X^{n-1} = X X^\# X^{n-1} = \dots = X^n X^\#.$$

Cela signifie que X^n est un opérateur normal pour tout n pair. En effet, on a:

$$\begin{aligned} (X^n)^* X^n &= (X^\#)^n X^n \\ &= X^n (X^\#)^n \\ &= X^n (X^n)^*. \end{aligned}$$

Dans le théorème suivant, nous donnons certaines conditions sous lesquelles le produit de deux opérateurs anti-linéaires normaux sera un opérateur normal.

Théorème 2.4.6. Soient X_1, X_2 des opérateurs anti-linéaires normaux. Si $X_1 X_2^\# = X_2^\# X_1$, alors $X_1 X_2$ est un opérateur normal.

Démonstration. On a: $X_1 X_2^\# = X_2^\# X_1$. Donc, $X_2 X_1^\# = X_1^\# X_2$.

De plus, il n'est pas difficile de vérifier que $(X_1 X_2)^* = X_2^\# X_1^\#$. Alors,

$$\begin{aligned} (X_1 X_2)^* (X_1 X_2) &= X_2^\# X_1^\# X_1 X_2 \\ &= X_2^\# X_1 X_1^\# X_2 \\ &= X_1 X_2^\# X_2 X_1^\# \\ &= X_1 X_2 X_2^\# X_1^\# \\ &= (X_1 X_2)(X_1 X_2)^*. \end{aligned}$$

Ceci montre que $X_1 X_2$ est un opérateur normal et nous terminons la preuve. □

Nous sommes maintenant, en mesure de prouver le résultat suivant.

Proposition 2.4.6. Soient X_1, X_2 des opérateurs anti-linéaires normaux. Si $X_1 X_2^\# = X_2^\# X_1$, alors $(X_1 + X_2)$ est un opérateur anti-linéaire normal.

Démonstration. Nous avons

$$\begin{aligned} \langle (X_1 + X_2)^\# x, y \rangle &= \overline{\langle x, (X_1 + X_2)y \rangle} \\ &= \overline{\langle x, X_1 y \rangle + \langle x, X_2 y \rangle} \\ &= \langle X_1^\# x, y \rangle + \langle X_2^\# x, y \rangle \\ &= \langle (X_1^\# + X_2^\#)x, y \rangle, \text{ pour chaque } x, y \in H. \end{aligned}$$

Cela implique que $(X_1 + X_2)^\# = X_1^\# + X_2^\#$. Alors,

$$\begin{aligned}
 (X_1 + X_2)^\#(X_1 + X_2) &= (X_1^\# + X_2^\#)(X_1 + X_2) \\
 &= X_1^\#X_1 + X_1^\#X_2 + X_2^\#X_1 + X_2^\#X_2 \\
 &= X_1X_1^\# + X_2X_1^\# + X_1X_2^\# + X_2X_2^\# \\
 &= (X_1 + X_2)(X_1^\# + X_2^\#) \\
 &= (X_1 + X_2)(X_1 + X_2)^\#.
 \end{aligned}$$

□

Le corollaire suivant est une conséquence directe de la proposition précédente.

Corollaire 2.4.2. Si $(X_i)_{i=1}^n$ sont des opérateurs anti-linéaires normaux et que $X_iX_j^\# = X_j^\#X_i$ pour chaque $i, j \in \mathbb{N}^*$, alors $\sum_{i=1}^n X_i$ est un opérateur anti-linéaire normal.

Proposition 2.4.7. Si X est un opérateur anti-linéaire, alors $(X^{2k+1})^\# = (X^\#)^{2k+1}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Démonstration. On a :

$$\begin{aligned}
 \langle (X^{2k+1})^\#x, y \rangle &= \overline{\langle x, X^{2k+1}y \rangle} \\
 &= \overline{\langle x, XX^{2k}y \rangle} \\
 &= \langle X^\#x, X^{2k}y \rangle \\
 &= \langle (X^{2k})^*X^\#x, y \rangle \\
 &= \langle (X^\#)^{2k}X^\#x, y \rangle \\
 &= \langle (X^\#)^{2k+1}x, y \rangle.
 \end{aligned}$$

Cela implique que $(X^{2k+1})^\# = (X^\#)^{2k+1}$.

□

Corollaire 2.4.3. Si X est un opérateur anti-linéaire, alors

$$(X^n)^\# = (X^\#)^n \text{ pour tout } n \text{ impair.}$$

Ensuite, nous présentons la proposition suivante.

Proposition 2.4.8. Si X est un opérateur anti-linéaire normal, alors X^n est un opérateur anti-linéaire normal pour tout n impair.

Démonstration. Nous avons :

$$\begin{aligned}
 (X^n)^\#X^n &= (X^\#)^nX^n \\
 &= (X^\#)^{n-1}X^\#XX^{n-1} \\
 &= (X^\#)^{n-1}XX^\#X^{n-1} \\
 &= X^n(X^\#)^n \\
 &= X^n(X^n)^\#.
 \end{aligned}$$

Par conséquent, X^n est un opérateur anti-linéaire normal. $\square$

Enfin, nous sommes prêts à étendre le théorème de Fuglede-Putnam aux opérateurs anti-linéaires normaux.

Théorème 2.4.7. *Soit C une conjugaison sur H et soient X, Y des opérateurs anti-linéaires, tels que X est un opérateur anti-linéaire normal. Si $XY = YX$, $CX = XC$, et $CY = YC$, alors*

$$X^\# Y = Y X^\#.$$

Démonstration. Premièrement, il est facile de voir que si $CX = XC$, alors $CX^\# = X^\# C$. Soient $M = XC$, et $N = YC$. Alors

$$M^* M = (XC)^* XC = CX^\# XC = X^\# CCX = X^\# X$$

et

$$MM^* = XC(XC)^* = XCCX^\# = XX^\#.$$

Puisque X est un opérateur anti-linéaire normal, il s'ensuit que $M^* M = MM^*$. Donc, M est un opérateur normal. En utilisant le théorème de Fuglede-Putnam, nous obtenons

$$\begin{aligned} XY = YX &\implies XCCY = YCCX \\ &\implies MN = NM \\ &\implies M^* N = NM^* \\ &\implies (XC)^* (CY) = (CY) (XC)^* \\ &\implies CX^\# YC = CY X^\# C \\ &\implies X^\# Y = Y X^\#. \end{aligned}$$

La preuve est donc complète. $\square$

Chapitre 3

Les opérateurs 2-C-normaux et les opérateurs C-2-normaux

3.1 Les opérateurs 2-C-normaux

Dans cette section, nous introduisons le concept d'opérateurs 2-C-normaux et étudions certaines de leurs propriétés.

Définition 3.1.1. Soit C une conjugaison sur H . On dit qu'un opérateur $T \in \mathcal{B}(H)$ est 2-C-normal si

$$(TC)^2(TC)^\# = (TC)^\#(TC)^2.$$

Remarque 3.1.1. Si $T \in \mathcal{B}(H)$ est un opérateur 2-C-normal, alors $((TC)^2)^*(TC) = (TC)((TC)^2)^*$.

En effet, pour tout $x, y \in H$, on a

$$\begin{aligned} \langle (TC)^\#(TC)^2x, y \rangle &= \overline{\langle (TC)^2x, (TC)y \rangle} \\ &= \overline{\langle x, ((TC)^2)^*(TC)y \rangle}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \langle (TC)^2(TC)^\#x, y \rangle &= \langle (TC)^\#x, ((TC)^2)^*y \rangle \\ &= \overline{\langle x, (TC)((TC)^2)^*y \rangle}. \end{aligned}$$

Par conséquent, on en déduit que $((TC)^2)^*(TC) = (TC)((TC)^2)^*$. Par conséquent, on en déduit que $((TC)^2)^*(TC) = (TC)((TC)^2)^*$.

Dans l'exemple suivant, nous montrons qu'il existe un opérateur qui est 2-C-normal mais qui n'est pas un opérateur C-normal.

Exemple 3.1.1. Soit $T = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ et soit C une conjugaison sur $\mathbb{C}^2$ définie par $C(z_1, z_2) = (\overline{z_2}, \overline{z_1})$. Un calcul direct montre que T est 2-C-normal, mais n'est pas C-normal.

Définition 3.1.2. Soit X un opérateur anti-linéaire. On dit que X est un opérateur anti-linéaire 2-normal si

$$X^2 X^\# = X^\# X^2.$$

Proposition 3.1.1. Si X est un opérateur anti-linéaire normal, alors X est un opérateur anti-linéaire 2-normal.

Démonstration. Puisque X est un opérateur anti-linéaire normal, nous avons

$$X^2 X^\# = X X X^\# = X^\# X^2.$$

Alors, X est un opérateur anti-linéaire 2-normal. □

Théorème 3.1.1. Soit $T \in \mathcal{B}(H)$. Alors, T est un opérateur 2-C-normal si et seulement si

$$(TC)(CT^*)^2 = (CT^*)^2(TC), \text{ ce qui est équivalent à } CTT^*CT^* = T^*CT^*TC.$$

Démonstration. Nous remarquons que

$$\begin{aligned} \langle (TC)^2(TC)^\# x, y \rangle &= \langle TCTC(TC)^\# x, y \rangle \\ &= \langle CTC(TC)^\# x, T^* y \rangle \\ &= \langle CT^* y, TC(TC)^\# x \rangle \\ &= \langle (TC)^\# x, CT^* CT^* y \rangle \\ &= \overline{\langle x, (TC)(CT^*)^2 y \rangle}. \end{aligned}$$

D'autre part, nous avons

$$\begin{aligned} \langle (TC)^\#(TC)^2 x, y \rangle &= \overline{\langle TCTC x, (TC)y \rangle} \\ &= \overline{\langle CT^*(TC)y, TCx \rangle} \\ &= \overline{\langle x, CT^*CT^*(TC)y \rangle} \\ &= \overline{\langle x, (CT^*)^2(TC)y \rangle}. \end{aligned}$$

Par conséquent, $(TC)^2(TC)^\# = (TC)^\#(TC)^2$ est équivalent à $(TC)(CT^*)^2 = (CT^*)^2(TC)$, ce qui est équivalent à

$$TCCT^*CT^* = CT^*CT^*TC \Leftrightarrow CTT^*CT^* = T^*CT^*TC.$$

□

Proposition 3.1.2. Soit $T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telle que a, b, c et d sont des nombres réels, et soit C une conjugaison définie

sur $\mathbb{C}^2$ comme $C(z_1, z_2) = (\overline{z_2}, \overline{z_1})$. Alors, T est un opérateur 2-C-normal si et seulement si

$$\begin{cases} (a-d)(a+d)(b+c) = 0 \\ (a-d)(b-c)(b+c) = 0 \end{cases}.$$

Démonstration. Supposons que T est 2-C-normal, alors d'après le Théorème 3.1.1, nous avons $TT^*CT^* = CT^*CT^*(TC)$, et on a

$$\begin{aligned} TT^*CT^*(z) &= TT^*C \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & ac + bd \\ ac + bd & c^2 + d^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b\overline{z_1} + d\overline{z_2} \\ a\overline{z_1} + c\overline{z_2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (b(a^2 + b^2) + a(ac + bd))\overline{z_1} + (d(a^2 + b^2) + c(ac + bd))\overline{z_2} \\ (b(ac + bd) + a(c^2 + d^2))\overline{z_1} + (d(ac + bd) + c(c^2 + d^2))\overline{z_2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

De plus, nous avons

$$\begin{aligned} CT^*CT^*(TC)(z) &= CT^*C \begin{pmatrix} a^2 + c^2 & ab + cd \\ ab + cd & b^2 + d^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{z_2} \\ \overline{z_1} \end{pmatrix} \\ &= C \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (ab + cd)z_2 + (b^2 + d^2)z_1 \\ (a^2 + c^2)z_2 + (ab + cd)z_1 \end{pmatrix} \\ &= C \begin{pmatrix} (a(b^2 + d^2) + c(ab + cd))z_1 + (a(ab + cd) + c(a^2 + c^2))z_2 \\ (b(b^2 + d^2) + d(ab + cd))z_1 + (b(ab + cd) + d(a^2 + c^2))z_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (b(b^2 + d^2) + d(ab + cd))\overline{z_1} + (b(ab + cd) + d(a^2 + c^2))\overline{z_2} \\ (a(b^2 + d^2) + c(ab + cd))\overline{z_1} + (a(ab + cd) + c(a^2 + c^2))\overline{z_2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Par conséquent, nous en déduisons que

$$\begin{aligned} b(a^2 + b^2) + a(ac + bd) &= b(b^2 + d^2) + d(ab + cd) \\ \implies a^2(b + c) &= d^2(b + c) \\ \implies (a^2 - d^2)(b + c) &= 0 \\ \implies (a - d)(a + d)(b + c) &= 0, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 d(a^2 + b^2) + c(ac + bd) &= b(ab + cd) + d(a^2 + c^2) \\
 \implies b^2d + ac^2 &= ab^2 + c^2d \\
 \implies (b^2 - c^2)(a - d) &= 0 \\
 \implies (a - d)(b - c)(b + c) &= 0.
 \end{aligned}$$

Ensuite, si T est 2-C-normal, alors on a

$$\begin{cases} (a - d)(a + d)(b + c) = 0 \\ (a - d)(b - c)(b + c) = 0 \end{cases}$$

□

Remarque 3.1.2. Si $a = d$, alors pour tous $b, c \in \mathbb{R}$, nous avons $T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix}$ est un opérateur 2-C-normal.

Remarque 3.1.3. Si $C(z_1, z_2) = (\overline{z_1}, \overline{z_2})$ est une conjugaison sur $\mathbb{C}^2$, alors d'après le Théorème 3.1.1

$T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, tel que a, b, c et d sont dans $\mathbb{R}$, est un opérateur 2-C-normal si et seulement si

$$(b - c)(b + c)(a + d) = 0, \text{ et } (b - c)(a - d)(a + d) = 0.$$

Proposition 3.1.3. Soit C une conjugaison sur H . Si $T \in \mathcal{B}(H)$ est un opérateur 2-C-normal et que $T = T^*$, alors T commute avec CT^2C .

Démonstration. Soit T un opérateur 2-C-normal. En utilisant le Théorème 3.1.1, nous avons $CTT^*CT^* = T^*CT^*TC$. Cela implique que $CT^2CT = TCT^2C$. Ainsi, T commute avec CT^2C . □

Exemple 3.1.2. Soit $T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ et soit C une conjugaison sur $\mathbb{C}^2$, définie comme $C(z_1, z_2) = (\overline{z_1}, \overline{z_2})$. Par la remarque 3.1.3, nous avons que T est un opérateur 2-C-normal et $T^* = T$, donc nécessairement nous avons $TCT^2C = CT^2CT$.

Théorème 3.1.2. Soit C une conjugaison sur H . Si T est un opérateur 2-C-normal, alors:

- (1) T^* est 2-C-normal.
- (2) λT est 2-C-normal pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$.
- (3) Si T^{-1} existe, alors T^{-1} est 2-C-normal.

Démonstration. (1) Soit $x, y \in H$. Nous avons

$$\begin{aligned}\langle (CT^*TCT)^*x, y \rangle &= \langle x, CT^*TCTy \rangle \\ &= \langle T^*TCTy, Cx \rangle \\ &= \langle CTy, T^*TCx \rangle \\ &= \langle T^*CT^*TCx, y \rangle.\end{aligned}$$

Par conséquent, nous obtenons $(CT^*TCT)^* = T^*CT^*TC$. Cela équivaut à dire que $CT^*TCT = (T^*CT^*TC)^*$. Et donc,

$$\begin{aligned}CT^*(T^*)^*C(T^*)^* &= (T^*CT^*TC)^* \\ &= (CTT^*CT^*)^* \\ &= (T^*)^*CT^*(T^*)^*C.\end{aligned}$$

Cela implique que $CT^*(T^*)^*C(T^*)^* = (T^*)^*CT^*(T^*)^*C$. Par conséquent, T^* est un opérateur 2-C-normal.

(2) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$, nous avons

$$\begin{aligned}C(\lambda T)(\lambda T)^*C(\lambda T)^* &= \bar{\lambda}CT(\bar{\lambda}T^*)C(\bar{\lambda}T^*) \\ &= \bar{\lambda}\lambda\bar{\lambda}(CTT^*CT^*).\end{aligned}$$

Et de la même manière, nous avons $(\lambda T)^*C(\lambda T)(\lambda T)^*C = \bar{\lambda}\lambda\bar{\lambda}(T^*CTT^*C)$.

Puisque T est un opérateur 2-C-normal, cela implique $C(\lambda T)(\lambda T)^*C(\lambda T)^* = (\lambda T)^*C(\lambda T)(\lambda T)^*C$, alors (λT) est un opérateur 2-C-normal.

(3) Si T^{-1} existe, alors nous avons :

$$\begin{aligned}CT^{-1}(T^{-1})^*C(T^{-1})^* &= CT^{-1}(T^*)^{-1}C(T^*)^{-1} \\ &= C(T^*T)^{-1}C(T^*)^{-1} \\ &= (T^*CT^*TC)^{-1} \\ &= (CT^*TCT^*)^{-1} \\ &= (T^{-1})^*C(T^{-1})^*T^{-1}C.\end{aligned}$$

Cela montre que T^{-1} est un opérateur 2-C-normal. □

Proposition 3.1.4. Soit C une conjugaison sur H et $U \in \mathcal{B}(H)$ un opérateur unitaire. Alors:

1. U est 2-C-normal.
2. U^n est 2-C-normal pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Démonstration. (1) Puisque U est un opérateur unitaire, alors $U^*U = UU^* = I$. Cela implique que

$$CUU^*CU^* = CCU^* = U^*, \text{ et } U^*CU^*UC = U^*CC = U^*.$$

Ainsi, $CUU^*CU^* = U^*CU^*UC$. Donc, U est un opérateur 2-C-normal.

(2) Remarquons que $U^n(U^n)^* = (U^n)^*U^n = I$, et, par une méthode similaire à la preuve de (1), nous pouvons obtenir les résultats souhaités. $\square$

Théorème 3.1.3. Soit C une conjugaison sur H et soit $U \in \mathcal{B}(H)$ un opérateur unitaire. Nous avons que $C_1 = U^*CU$ est une conjugaison sur H (la preuve est simple). Alors, $T \in \mathcal{B}(H)$ est $2 - C_1$ -normal si et seulement si UTU^* est $2 - C$ -normal.

Démonstration. Si UTU^* est un opérateur $2 - C$ -normal, alors cela équivaut à

$$\begin{aligned} C(UTU^*)(UTU^*)^*C(UTU^*)^* &= (UTU^*)^*C(UTU^*)^*(UTU^*)C \Leftrightarrow CUTT^*U^*CUT^*U^* = UT^*U^*CUT^*TU^*C \\ &\Leftrightarrow UC_1TT^*C_1T^*U^* = UT^*C_1T^*TC_1U^* \\ &\Leftrightarrow C_1TT^*C_1T^* = T^*C_1T^*TC_1 \end{aligned}$$

Ainsi, UTU^* est $2 - C$ -normal si et seulement si T est $2 - C_1$ -normal. $\square$

Proposition 3.1.5. Soit C une conjugaison sur H , et soit U un opérateur unitaire. Alors, si $T \in \mathcal{B}(H)$, on a:

- (1) $U^n T(U^*)^n$ est $2 - C$ -normal si et seulement si T est $2 - (U^*)^n C U^n$ -normal, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- (2) $U^n T^m (U^*)^n$ est $2 - C$ -normal si et seulement si T^m est $2 - (U^*)^n C U^n$ -normal pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, et $n \in \mathbb{N}$.

Démonstration. La preuve repose sur un argument similaire à celui du Théorème 3.1.3 $\square$

Proposition 3.1.6. Soit C une conjugaison sur H . Alors, pour chaque opérateur $T \in \mathcal{B}(H)$, lorsque T est C -normal, cela implique que T est également $2 - C$ -normal.

Proposition 3.1.7. Soit C une conjugaison sur $\mathbb{C}^3$ définie par $C(z_1, z_2, z_3) = (\overline{z_3}, \overline{z_2}, \overline{z_1})$ et soient a, b, c des nombres

réels. $T = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est un opérateur sur $\mathbb{C}^3$. Alors, T est $2 - C$ -normal si $b = 0$ et a, c sont arbitraires, ou si $b \neq 0$ et $a = c$.

Démonstration. Soit $z \in \mathbb{C}^3$, on a

$$CTT^*CT^*(z) = C \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \\ b & c & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b\overline{z_1} + c\overline{z_2} \\ a\overline{z_1} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ (ac^2 + b^2c)z_1 + bc^2z_2 \\ (ba^2 + b^3 + abc)z_1 + (ca^2 + cb^2)z_2 \end{pmatrix}.$$

D'un autre côté, nous obtenons

$$T^*CT^*TC(z) = T^*C \begin{pmatrix} 0 \\ ab\overline{z_1} + a^2\overline{z_2} \\ (b^2 + c^2)\overline{z_1} + ba\overline{z_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ (ab^2 + ac^2)z_1 + a^2bz_2 \\ (abc + b^3 + bc^2)z_1 + (ab^2 + ca^2)z_2 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, T est 2-C-normal si l'on obtient

$$\begin{cases} ac^2 + b^2c = ab^2 + ac^2 \text{ et } bc^2 = a^2b \\ ba^2 + b^3 + abc = abc + b^3 + bc^2 \text{ et } ca^2 + cb^2 = ab^2 + ca^2 \end{cases}$$

Cela implique que $b^2(a-c) = 0$ et que $b(a^2 - c^2) = 0$, ce qui est équivalent à : si $b = 0$ et que a, c sont arbitraires, ou si $b \neq 0$ et $a = c$, alors l'opérateur T est 2-C-normal. $\square$

Proposition 3.1.8. Soit $T = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ où a, b et c sont des nombres réels, et $C(z_1, z_2, z_3) = (\overline{z_3}, \overline{z_2}, \overline{z_1})$ est une

conjugaison sur $\mathbb{C}^3$. Alors, T est C-normal si $b = 0$ et $|a| = |c|$ ou si b est arbitraire et $a = c$.

Remarque 3.1.4. Si $b = 0$ et $|a| \neq |c|$, nous constatons que T est 2-C-normal mais n'est pas C-normal. Ainsi, il n'y a pas d'équivalence entre le fait que T soit C-normal et le fait que T soit 2-C-normal.

Théorème 3.1.4. Soit C une conjugaison sur H et soit $T \in \mathcal{B}(H)$ tel que $CTC = T$. Alors, T est 2-C-normal si et seulement si T est 2-normal.

Remarque 3.1.5. L'opérateur T peut s'écrire sous la forme : $T = \frac{N+CNC}{2}$ et $T = \frac{N-CNC}{2i}$ pour tout opérateur $N \in \mathcal{B}(H)$, ainsi, on a $CTC = T$.

Démonstration. (Théorème 3.1.4) On a $CT = TC$, donc $CT^* = T^*C$, de plus, nous pouvons observer que

$$CTT^*CT^* = TT^*CCT^* = T(T^*)^2, \text{ et } T^*CT^*TC = T^*T^*CTC = (T^*)^2T.$$

Cela montre que

$$CTT^*CT^* = T^*CT^*TC \Leftrightarrow T(T^*)^2 = (T^*)^2T.$$

Par conséquent, $T^2T^* = T^*T^2$. Donc, T est 2-C-normal si et seulement si T est 2-normal. $\square$

Proposition 3.1.9. Soit $(\alpha_i)_{i=1}^k \in \mathbb{C}$ avec $k \in \mathbb{N}^*$, et soit T défini par

$$T = \begin{pmatrix} 0 & \overline{\alpha_1} & 0 & .. & .. & .. & .. & .. & 0 \\ \alpha_1 & 0 & \overline{\alpha_2} & 0 & .. & .. & .. & .. & .. \\ 0 & \alpha_2 & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ .. & .. & .. & 0 & \overline{\alpha_k} & 0 & .. & .. & .. \\ .. & .. & .. & \alpha_k & 0 & \overline{\alpha_k} & .. & .. & .. \\ .. & .. & .. & .. & \alpha_k & 0 & .. & .. & .. \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & \overline{\alpha_2} & 0 \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. & \alpha_2 & 0 & \overline{\alpha_1} \\ 0 & .. & .. & .. & .. & .. & .. & \alpha_1 & 0 \end{pmatrix},$$

et soit C une conjugaison sur $\mathbb{C}^{2k+1}$ définie par $C(z_1, z_2, \dots, z_{2k+1}) = (\overline{z_{2k+1}}, \dots, \overline{z_2}, \overline{z_1})$. Ou encore

$$T = \begin{pmatrix} 0 & \overline{\alpha_1} & 0 & .. & .. & .. & .. & .. & .. & 0 \\ \alpha_1 & 0 & \overline{\alpha_2} & 0 & .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ 0 & \alpha_2 & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ .. & .. & .. & 0 & \overline{\alpha_{k-1}} & 0 & .. & .. & .. & .. \\ .. & .. & .. & \alpha_{k-1} & 0 & \overline{\alpha_k} & .. & .. & .. & .. \\ .. & .. & .. & .. & \alpha_k & 0 & \overline{\alpha_{k-1}} & .. & .. & .. \\ .. & .. & .. & .. & .. & \alpha_{k-1} & .. & .. & 0 & .. \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & 0 & \overline{\alpha_2} & .. \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & \alpha_2 & 0 & \overline{\alpha_1} \\ 0 & .. & .. & .. & .. & .. & .. & 0 & \alpha_1 & 0 \end{pmatrix}$$

et C une conjugaison sur $\mathbb{C}^{2k}$ définie par $C(z_1, z_2, \dots, z_{2k}) = (\overline{z_{2k}}, \dots, \overline{z_2}, \overline{z_1})$.

Ainsi, nous pouvons facilement prouver que $T = T^*$, ce qui signifie que T est un opérateur 2-normal, et $CTC = T$. Ensuite, d'après le Théorème 3.1.4, T est un opérateur 2-C-normal.

Théorème 3.1.5. Soit C une conjugaison sur H , et soit $T \in \mathcal{B}(H)$, tel que T^{-1} existe et $T^* = \lambda T^{-1}$ avec $\lambda \in \mathbb{C}$. Alors,

(1) T est un opérateur 2-C-normal.

(2) T est un opérateur C-normal si et seulement si $\lambda = \overline{\lambda}$ c'est-à-dire que $\lambda \in \mathbb{R}$.

Démonstration. (1) Puisque $T^* = \lambda T^{-1}$, alors nous avons

$$CTT^*CT^* = CT(\lambda T^{-1})CT^* = \bar{\lambda}CTT^{-1}CT^* = \bar{\lambda}T^*.$$

D'autre part,

$$T^*CT^*TC = T^*C(\lambda T^{-1})TC = \bar{\lambda}T^*CT^{-1}TC = \bar{\lambda}T^*.$$

Ainsi, $CTT^*CT^* = T^*CT^*TC$. Ensuite, T est un opérateur 2-C-normal pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$.

(2) Si $T^* = \lambda T^{-1}$, alors nous avons

$$TT^* = T(\lambda T^{-1}) = \lambda TT^{-1} = \lambda, \text{ et } CT^*TC = C(\lambda T^{-1})TC = \bar{\lambda}CT^{-1}TC = \bar{\lambda}CC = \bar{\lambda}.$$

Par conséquent, $TT^* = CT^*TC$, c'est-à-dire que T est un opérateur C-normal si et seulement si $\lambda = \bar{\lambda}$. $\square$

Proposition 3.1.10. Si $T = U|T|$ est la décomposition polaire d'un opérateur $T \in \mathcal{B}(H)$, où U est un opérateur unitaire, alors il existe des conjugaisons C et J sur H telles que $U = CJ$ (voir l'article [13]). De plus,

(1) T est un opérateur C-normal si et seulement si $J|T|^2J = |T|^2$.

(2) T est un opérateur 2-C-normal si et seulement si $(J|T|J)^2|T| = |T|(J|T|J)^2$.

Démonstration. (1) Nous avons

$$CTT^*C = CU|T|^2U^*C = CCJ|T|^2JCC = J|T|^2J, \text{ et } T^*T = |T|^2.$$

Ainsi, T est un opérateur C-normal si et seulement si $J|T|^2J = |T|^2$.

(2) Nous avons

$$CTT^*CT^* = J|T|^2J|T|U^* = (J|T|J)^2|T|JC, \text{ et } T^*CT^*TC = |T|JCC|T|^2C = |T|J|T|^2C.$$

Cela implique que $CTT^*CT^* = T^*CT^*TC$ si et seulement si $(J|T|J)^2|T|JC = |T|J|T|^2C$. Alors,

$$\begin{aligned} (J|T|J)^2|T|JCCJ &= |T|J|T|^2CCJ \Leftrightarrow (J|T|J)^2|T| = |T|J|T|^2J \\ &\Leftrightarrow (J|T|J)^2|T| = |T|(J|T|J)^2. \end{aligned}$$

Ainsi, T est un opérateur 2-C-normal si et seulement si $(J|T|J)^2|T| = |T|(J|T|J)^2$. $\square$

Remarque 3.1.6. Si $T = U|T|$ est la décomposition polaire d'un opérateur $T \in \mathcal{B}(H)$, où U est un opérateur unitaire, alors $U = CJ$, avec C et J des conjugaisons sur H . Par conséquent, si $|T|J = J|T|$, alors T est un opérateur C-normal et un opérateur 2-C-normal.

Proposition 3.1.11. Dans un espace mesurable (X, μ) , soit $f \in L^2(X, \mu)$. Soit $\varphi \in L^\infty$ et T_φ l'opérateur de multiplication sur $L^2(X, \mu)$, défini par $T_\varphi f = \varphi f$. Nous pouvons alors observer que:

(1) Si C est une conjugaison donnée par $Cf(x) = \overline{f(x)}$, Conformément à l'article [28], l'opérateur T_φ est un opérateur C-normal, donc T_φ est un opérateur 2-C-normal.

(2) Si C est une conjugaison donnée par $Cf(x) = \overline{f(-x)}$, alors l'opérateur T_φ est un opérateur 2-C-normal.

Démonstration. (2) Nous avons $T_\varphi^* = T_{\overline{\varphi}}$, alors

$$\begin{aligned} CT_\varphi T_\varphi^* CT_\varphi^*(f(x)) &= CT_\varphi T_{\overline{\varphi}} CT_{\overline{\varphi}}(f(x)) = CT_\varphi T_{\overline{\varphi}} C(\overline{\varphi(x)}) f(x) \\ &= CT_\varphi T_{\overline{\varphi}}(\varphi(-x) \overline{f(-x)}) = C \varphi(x) \overline{\varphi(x)} \varphi(-x) \overline{f(-x)} \\ &= \overline{\varphi(-x)} \varphi(-x) \overline{\varphi(x)} f(x) = |\varphi(-x)|^2 \overline{\varphi(x)} f(x), \end{aligned}$$

et de l'autre côté,

$$\begin{aligned} T_\varphi^* CT_\varphi^* T_\varphi C(f(x)) &= T_{\overline{\varphi}} CT_{\overline{\varphi}} T_\varphi \overline{f(-x)} = T_{\overline{\varphi}} C \overline{\varphi(x)} \varphi(x) \overline{f(-x)} \\ &= T_{\overline{\varphi}} \varphi(-x) \overline{\varphi(-x)} f(x) \\ &= \overline{\varphi(x)} |\varphi(-x)|^2 f(x) = |\varphi(-x)|^2 \overline{\varphi(x)} f(x). \end{aligned}$$

Par conséquent, $CT_\varphi T_\varphi^* CT_\varphi^* = T_\varphi^* CT_\varphi^* T_\varphi C$. Donc l'opérateur T_φ est un opérateur 2-C-normal. $\square$

Remarque 3.1.7. (Dans l'article [28]), nous avons que tout opérateur normal $T \in \mathcal{B}(H)$ est unitaire équivalent à l'opérateur de multiplication M_φ , i.e., $M_\varphi = UTU^*$, où $U \in L(H, L^2(X, \mu))$ est unitaire. Soit C une conjugaison dans H telle que $(UCU^*)f(x) = \overline{f(x)}$. Alors, T est un opérateur C-normal. Il est clair que T est également un opérateur 2-C-normal.

Théorème 3.1.6. Soit $T \in \mathcal{B}(H)$, où T^{-1} existe. Si $T^*(C|T^*|C) = (C|T^*|C)T^*$, alors T est un opérateur normal si et seulement si T est un opérateur 2-C-normal.

Démonstration. Supposons que T soit normal, donc $TT^* = T^*T$ et nous avons

$$\begin{aligned} T^*(C|T^*|C) &= (C|T^*|C)T^* \implies T^*(C|T^*|C)^2 = (C|T^*|C)^2 T^* \\ &\implies T^*C|T^*|^2 C = C|T^*|^2 CT^* \\ &\implies T^*CTT^*C = CTT^*CT^* \\ &\implies T^*CT^*TC = CTT^*CT^*. \end{aligned}$$

Par conséquent, T est un opérateur 2-C-normal.

Si T est un opérateur 2-C-normal, alors

$$\begin{aligned} T^*CT^*TC &= CTT^*CT^* \implies T^*C|T|^2 C = C|T^*|^2 CT^* \\ &\implies T^*C|T|^2 C = T^*C|T^*|^2 C \\ &\implies C|T|^2 C = C|T^*|^2 C \\ &\implies |T|^2 = |T^*|^2. \end{aligned}$$

Par conséquent, T est un opérateur normal. $\square$

Théorème 3.1.7. [23]. Soit $T \in \mathcal{B}(H)$ un opérateur 2-C-normal tel que T^{-1} existe. Alors les propositions suivantes sont équivalentes :

- (1) T^* est une isométrie.
- (2) T est une isométrie.
- (3) T est unitaire.

Démonstration. Parce que T est 2-C-normal, alors $T^*CT^*TC = CTT^*CT^*$. Ainsi, en supposant que T^* est une isométrie, nous avons $TT^* = I$, donc:

$$\begin{aligned} T^*CT^*TC = CICT^* &\implies T^*CT^*TC = T^* \\ &\implies CT^*TC = I \\ &\implies T^*T = I \end{aligned}$$

Cela implique que T est une isométrie.

De la même manière, nous pouvons conclure que si T est une isométrie, alors T^* est une isométrie.

Et étant donné que T et T^* sont des isométries, cela équivaut également à dire que T est unitaire. $\square$

Théorème 3.1.8. Soient $T, S \in \mathcal{B}(H)$ et soit C une conjugaison sur H . Si $T = CSC$, alors:

1. T est C-normal si et seulement si S est C-normal.
2. T est 2-C-normal si et seulement si S est 2-C-normal.

Démonstration. (2) Si T est 2-C-normal, nous avons $T^*CT^*TC = CTT^*CT^*$, alors

$$\begin{aligned} (CS^*C)C(CS^*C)(CSC)C &= C(CSC)(CS^*C)C(CS^*C) \implies CS^*CS^*S = SS^*CS^*C \\ &\implies S^*CS^*SC = CSS^*CS^* \end{aligned}$$

Cela implique que S est 2-C-normal. $\square$

Remarque 3.1.8. Soit T un opérateur dans $\mathcal{B}(H)$ et pour chaque C une conjugaison sur H . On a:

1. Si T est C-normal, alors CTC est C-normal.
2. Si T est 2-C-normal, alors CTC est 2-C-normal.

Proposition 3.1.12. Soit $N_{2,C}(H)$ l'ensemble de tous les opérateurs 2-C-normaux sur H . Alors, la classe $N_{2,C}(H)$ est fermée pour la norme dans $\mathcal{B}(H)$.

Démonstration. Si $T \in \overline{N_{2,C}(H)}$, alors il existe une suite $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dans $N_{2,C}(H)$ telle que $\|T_n - T\| \rightarrow 0$.

Alors on a:

$$\begin{aligned} \|T^*CT^*TC - CTT^*CT^*\| &\leq \|T^*CT^*TC - T_n^*CT_n^*TC\| + \|T_n^*CT_n^*TC - T_n^*CT_n^*TC\| \\ &\quad + \|T_n^*CT_n^*TC - T_n^*CT_n^*T_nC\| + \|T_n^*CT_n^*T_nC - CT_nT_n^*CT_n^*\| \\ &\quad + \|CT_nT_n^*CT_n^* - CTT_n^*CT_n^*\| + \|CT_n^*CT_n^* - CTT^*CT_n^*\| \\ &\quad + \|CTT^*CT_n^* - CTT^*CT^*\| \\ &\leq \|(T^* - T_n^*)CT^*TC\| + \|T_n^*C(T^* - T_n^*)TC\| \\ &\quad + \|T_n^*CT_n^*(T - T_n)C\| + \|T_n^*CT_n^*T_nC - CT_nT_n^*CT_n^*\| \\ &\quad + \|C(T_n - T)T_n^*CT_n^*\| + \|CT(T_n^* - T^*)CT_n^*\| \\ &\quad + \|CTT^*C(T_n^* - T^*)\| \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Donc, $\|T^*CT^*TC - CTT^*CT^*\| = 0$, par conséquent $T^*CT^*TC = CTT^*CT^*$. Ainsi, $T \in N_{2,C}(H)$.

Dès lors, $N_{2,C}(H)$ est fermée pour la norme dans $\mathcal{B}(H)$. $\square$

Théorème 3.1.9. Soit $T \in \mathcal{B}(H)$ un opérateur 2-C-normal. On a:

- (1) Si T est un opérateur injectif, alors $\ker(T^*CT^*) = \ker(T^*CT^*TC)$.
- (2) Si T^* est un opérateur injectif, alors $\ker(TC) = \ker(TT^*CT^*)$.

Démonstration.

(1) Soit $x \in \ker(T^*CT^*)$, c'est-à-dire, $T^*CT^*(x) = 0$. Ensuite, nous avons $CTT^*CT^*(x) = 0$. Étant donné que T est 2-C-normal, alors $T^*CT^*TC(x) = 0$, ce qui signifie que $x \in \ker(T^*CT^*TC)$. Cela implique que $\ker(T^*CT^*) \subseteq \ker(T^*CT^*TC)$.

Soit $x \in \ker(T^*CT^*TC)$, alors $T^*CT^*TC(x) = 0$, ce qui implique $CTT^*CT^*(x) = 0$, donc $TT^*CT^*(x) = 0$ et étant donné que T est un opérateur injectif $T^*CT^*(x) = 0$. Ainsi $x \in \ker(T^*CT^*)$. Cela implique que $\ker(T^*CT^*TC) \subseteq \ker(T^*CT^*)$. Ensuite, nous montrons que $\ker(T^*CT^*) = \ker(T^*CT^*TC)$.

(2) Soit $x \in \ker(TC)$, alors

$$\begin{aligned} TC(x) = 0 &\implies T^*TC(x) = 0 \\ &\implies T^*CT^*TC(x) = 0 \\ &\implies CTT^*CT^*(x) = 0 \\ &\implies TT^*CT^*(x) = 0, \end{aligned}$$

cela signifie que $x \in \ker(TT^*CT^*)$. Donc $\ker(TC) \subseteq \ker(TT^*CT^*)$.

Pour chaque $x \in \ker(TT^*CT^*)$, on a

$$\begin{aligned} TT^*CT^*(x) = 0 &\implies CTT^*CT^*(x) = 0 \\ &\implies T^*CT^*TC(x) = 0 \end{aligned}$$

puisque T^* est un opérateur injectif, nous trouvons $TC(x) = 0$. Alors $x \in \ker(TC)$, ce qui implique que $\ker(TT^*CT^*) \subseteq \ker(TC)$. Par conséquent, $\ker(TC) = \ker(TT^*CT^*)$. □

Proposition 3.1.13. ([23]). Soit $T \in \mathcal{B}(H)$ un opérateur 2-C-normal, et C une conjugaison sur H . Si TT^*CT^* ou T^*CT^*T est borné inférieurement, alors T est borné inférieurement.

Démonstration. En supposant que T n'est pas borné inférieurement, alors $0 \in \sigma_{ap}(T)$, cela signifie qu'il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $\|x_n\| = 1$ et $\|Tx_n\| \rightarrow 0$. Donc

$$\|T^*CT^*Tx_n\| \leq \|T^*CT^*\| \|Tx_n\| \rightarrow 0$$

et on a

$$\|TT^*CT^*Cx_n\| = \|CTT^*CT^*Cx_n\| = \|T^*CT^*TCCx_n\| \leq \|T^*CT^*\| \|Tx_n\| \rightarrow 0.$$

Puisque $\|Cx_n\| = \|x_n\| = 1$, alors nous constatons que $0 \in \sigma_{ap}(T^*CT^*T)$ et $0 \in \sigma_{ap}(TT^*CT^*)$, cela signifie que T^*CT^*T et TT^*CT^* ne sont pas bornés inférieurement. □

Proposition 3.1.14. Soit $\{e_i\}_{i=1}^{2n+1}$ une base orthonormée de $\mathbb{C}^{2n+1}$. Soit T un opérateur défini comme suit:

$Te_i = \alpha_i e_{i+1}$ et $Te_{2n+1} = 0$, où $(\alpha_i)_{i=1}^{2n} \in \mathbb{C}$. Soit C une conjugaison sur $\mathbb{C}^{2n+1}$ définie par

$C(z_1, z_2, \dots, z_{2n}, z_{2n+1}) = (\overline{z_{2n+1}}, \overline{z_{2n}}, \dots, \overline{z_2}, \overline{z_1})$. Alors, T est 2-C-normal pour toutes les valeurs $(\alpha_i) \in \mathbb{C}$.

Démonstration. Pour chaque $z \in C^{2n+1}$, nous avons

$$T^*CT^*TC(z) = T^*C \begin{pmatrix} |\alpha_1|^2 & 0 & 0 & .. & .. & .. & 0 \\ 0 & |\alpha_2|^2 & 0 & .. & .. & .. & .. \\ 0 & 0 & |\alpha_3|^2 & .. & .. & .. & .. \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ .. & .. & .. & .. & .. & |\alpha_{2n}|^2 & 0 \\ 0 & .. & .. & .. & .. & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{z_{2n+1}} \\ \overline{z_{2n}} \\ \overline{z_{2n-1}} \\ .. \\ .. \\ \overline{z_2} \\ \overline{z_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{\alpha_1} |\alpha_{2n}|^2 z_2 \\ \overline{\alpha_2} |\alpha_{2n-1}|^2 z_3 \\ \overline{\alpha_3} |\alpha_{2n-2}|^2 z_4 \\ .. \\ \overline{\alpha_{2n-1}} |\alpha_2|^2 z_{2n} \\ \overline{\alpha_{2n}} |\alpha_1|^2 z_{2n+1} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

De la même manière, on peut constater que

$$CTT^*CT^*(z) = C \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & .. & .. & .. & 0 \\ 0 & |\alpha_1|^2 & 0 & .. & .. & .. & .. \\ 0 & 0 & |\alpha_2|^2 & .. & .. & .. & .. \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ .. & .. & .. & .. & .. & |\alpha_{2n-1}|^2 & 0 \\ 0 & .. & .. & .. & .. & 0 & |\alpha_{2n}|^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha_{2n} \overline{z_{2n+1}} \\ \alpha_{2n-1} \overline{z_{2n}} \\ .. \\ \alpha_3 \overline{z_4} \\ \alpha_2 \overline{z_3} \\ \alpha_1 \overline{z_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{\alpha_1} |\alpha_{2n}|^2 z_2 \\ \overline{\alpha_2} |\alpha_{2n-1}|^2 z_3 \\ \overline{\alpha_3} |\alpha_{2n-1}|^2 z_4 \\ .. \\ \overline{\alpha_{2n-1}} |\alpha_2|^2 z_{2n} \\ \overline{\alpha_{2n}} |\alpha_1|^2 z_{2n+1} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Cela montre que $T^*CT^*TC = CTT^*CT^*$, pour tous les $(\alpha_i)_{i=1}^{2n} \in \mathbb{C}$. Par conséquent, T est 2-C-normal. $\square$

3.2 Les opérateurs C-2-normaux

Dans cette section, nous introduisons le concept d'opérateurs C-2-normaux et étudions certaines de leurs propriétés. Nous donnons quelques exemples de cette classe d'opérateurs et de leur relation avec les opérateurs C-normaux.

Définition 3.2.1. Soit C une conjugaison dans H . Un opérateur $T \in \mathcal{B}(H)$ est dit C-2-normal si :

$$CT^*T^2 = T^2T^*C. \quad (3.1)$$

On peut montrer facilement que cette définition est équivalente à

$$CT^2T^* = T^*T^2C. \quad (3.2)$$

Théorème 3.2.1. Soit $T \in \mathcal{B}(H)$ et soit C une conjugaison sur H . Si T est un opérateur $C-2$ -normal, alors les énoncés suivants sont vérifiés :

1. T^* est $C-2$ -normal.
2. Si T est inversible, alors l'opérateur T^{-1} est $C-2$ -normal.
3. λT est $C-2$ -normal si et seulement si $\lambda \in \mathbb{R}$.

Démonstration. (1) Pour tout x et y dans H , on a

$$\begin{aligned} \langle C(T^*)^2(T^*)^*x, y \rangle &= \langle Cy, (T^2)^*Tx \rangle = \langle T^*T^2Cy, x \rangle \\ &= \langle CT^2T^*y, x \rangle = \langle T(T^*)^2Cx, y \rangle \\ &= \langle (T^*)^*(T^*)^2Cx, y \rangle. \end{aligned}$$

Cela montre que $C(T^*)^2(T^*)^* = (T^*)^*(T^*)^2C$; donc T^* est $C-2$ -normal.

(2) En utilisant les propriétés de l'inversion, on a

$$\begin{aligned} C(T^{-1})^2(T^{-1})^* &= C^{-1}(T^*T^2)^{-1} = (CT^2T^*)^{-1} \\ &= (T^*)^{-1}(T^2)^{-1}C = (T^{-1})^*(T^{-1})^2C. \end{aligned}$$

Par conséquent, $C(T^{-1})^2(T^{-1})^* = (T^{-1})^*(T^{-1})^2C$, ce qui signifie que T^{-1} est $C-2$ -normal.

(3) Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}^*$, on a

$$\begin{aligned} C(\lambda T)^2(\lambda T)^* &= C\lambda^2T^2\bar{\lambda}T^* = \bar{\lambda}^2\lambda CT^2T^* \\ &= \bar{\lambda}|\lambda|^2CT^2T^*. \end{aligned}$$

D'un autre côté, nous avons

$$\begin{aligned} (\lambda T)^*(\lambda T)^2C &= \bar{\lambda}T^*\lambda^2T^2C = \bar{\lambda}\lambda^2T^*T^2C \\ &= \lambda|\lambda|^2T^*T^2C. \end{aligned}$$

Cela montre que (λT) est $C-2$ -normal si et seulement si $\bar{\lambda}|\lambda|^2 = \lambda|\lambda|^2$, ce qui est équivalent à $\bar{\lambda} = \lambda$, donc $\lambda \in \mathbb{R}$. $\square$

Proposition 3.2.1. Soit $C(z_1, z_2, z_3) = (\bar{z}_3, \bar{z}_2, \bar{z}_1)$ une conjugaison sur $\mathbb{C}^3$, et $a, b, c \in \mathbb{C}^*$. Alors

$$T = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \text{ est } C-2\text{-normal si et seulement si } b \in \mathbb{R} \text{ et } c = \bar{a}.$$

Démonstration. On a

$$CT^2T^*(z) = C \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{a} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{b} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{c} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{c}|c|^2\bar{z}_3 \\ \bar{b}|b|^2\bar{z}_2 \\ \bar{a}|a|^2\bar{z}_1 \end{pmatrix} \text{ et on a } T^*T^2C(z) = \begin{pmatrix} a|a|^2\bar{z}_3 \\ b|b|^2\bar{z}_2 \\ c|c|^2\bar{z}_1 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, T est $C-2$ -normal si et seulement si

$$\begin{cases} \bar{c}|c|^2 = a|a|^2 \\ \bar{b}|b|^2 = b|b|^2 \\ \bar{a}|a|^2 = c|c|^2 \end{cases} \iff \begin{cases} |c| = |a| \\ \bar{b} = b \\ \bar{a} = c \end{cases}$$

□

Proposition 3.2.2. Soit $C(z_1, z_2, z_3) = (\bar{z}_3, \bar{z}_2, \bar{z}_1)$ une conjugaison sur $\mathbb{C}^3$, et soit $a, b \in \mathbb{C}^*$, alors

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ est } C-2\text{-normal si et seulement si } b \in \mathbb{R} \text{ et } a \in \mathbb{C}.$$

Démonstration. On a

$$CT^2T^*(z) = C \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{b} & 0 \\ \bar{a} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{b}|b|^2 \bar{z}_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ et on a } T^*T^2C(z) = \begin{pmatrix} 0 \\ b|b|^2 \bar{z}_2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Cela signifie que T est $C-2$ -normal si et seulement si $\bar{b}|b|^2 = b|b|^2$, ce qui est équivalent à $b = \bar{b}$, donc l'opérateur T est $C-2$ -normal si et seulement si $b \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{C}$. □

Remarque 3.2.1. Soit $C(z_1, z_2, z_3) = (\bar{z}_3, \bar{z}_2, \bar{z}_1)$ une conjugaison sur $\mathbb{C}^3$. Alors, les énoncés suivants sont vrais :

1. Nous constatons que, même si T est $C-2$ -normal, il doit être vrai que $b = 0$, $a = \bar{d}$ et $c \in \mathbb{R}$ (Proposition 3.2.1) ou bien $a = d = 0$, $c \in \mathbb{R}$ et b est arbitraire dans $\mathbb{C}$ (Proposition 3.2.2). (Nous pouvons étudier l'opérateur

$$T = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix}.$$

2. Nous constatons que, même si T est $C-2$ -normal, il doit être vrai que ($a = 0$ ou bien $c = 0$) et b est arbitraire.

$$(\text{Nous pouvons étudier l'opérateur}) T = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. En partant de l'exemple précédent, nous avons que, pour tous les $a, b \in \mathbb{C}^*$ l'opérateur $T = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est

$C-2$ -normal, et nous avons

$$CT^*TC(z) = C \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & |a|^2 & \bar{a}b \\ 0 & a\bar{b} & |b|^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{z}_3 \\ \bar{z}_2 \\ \bar{z}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |b|^2 z_1 + \bar{a}b z_2 \\ a\bar{b} z_1 + |a|^2 z_2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et on a } TT^*(z) = \begin{pmatrix} (|a|^2 + |b|^2) z_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Alors, T est C -normal si

$$\begin{cases} |b|^2 = |a|^2 + |b|^2 \\ \bar{a}b = 0 \\ a\bar{b} = 0 \\ |a|^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b \in \mathbb{C} \\ a = 0 \end{cases}.$$

Donc, l'opérateur suivant $T = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ avec $a, b \in \mathbb{C}^*$, est $C-2$ -normal, mais T n'est pas C -normal.

4. Par le Théorème 3.2.1, nous avons que $T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est $C-2$ -normal pour tout $a, b \in \mathbb{C}$.

Proposition 3.2.3. Soit $C(z_1, z_2, z_3) = (\bar{z}_3, \bar{z}_2, \bar{z}_1)$ une conjugaison sur $\mathbb{C}^3$. L'opérateur $T = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

est $C-2$ -normal si $a = 0$.

Démonstration. Pour tout $a \in \mathbb{C}$, nous observons que

$$T^*T^2 = T^2T^* = \begin{pmatrix} a|a|^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Puisque T est $C-2$ -normal, on constate que

$$CT^2T^*(z) = T^*T^2C(z) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \overline{a}|a|^2\overline{z_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a|a|^2\overline{z_3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Cela implique que $\overline{a}|a|^2 = 0$ et $a|a|^2 = 0$, et donc $a = 0$. □

Théorème 3.2.2. Soient $T, S \in \mathcal{B}(H)$ des opérateurs $C-2$ -normaux avec la conjugaison C sur H . Si $ST = TS$ et $T^*S = ST^*$, alors TS est un opérateur $C-2$ -normal.

Démonstration. Nous avons $(TS)^2 = T^2S^2$ et $TS^* = S^*T$, alors:

$$\begin{aligned} C(TS)^2(TS)^* &= CT^2S^2S^*T^* = CT^2T^*S^2S^* \\ &= T^*T^2CS^2S^* = T^*T^2S^*S^2C \\ &= T^*S^*T^2S^2C = (TS)^*(TS)^2C. \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient que $C(TS)^2(TS)^* = (TS)^*(TS)^2C$. Par conséquent, (TS) est $C-2$ -normal. □

Remarque 3.2.2. Les énoncés suivants sont vrais.

- (1) Soient $T, S \in \mathcal{B}(H)$ des opérateurs $C-2$ -normaux avec la conjugaison C sur H . Si $TS = ST$ et si T est un opérateur normal ou S est un opérateur normal, alors (TS) est $C-2$ -normal. Il suffit d'utiliser le théorème de Fuglede pour obtenir $TS^* = S^*T$, puis d'appliquer le théorème 3.2.2 pour obtenir le résultat souhaité.
- (2) Soient $T, S \in \mathcal{B}(H)$ des opérateurs $C-2$ -normaux, où C est une conjugaison dans H . Si $TS + ST = 0$ et $TS^* + S^*T = 0$, alors TS est un opérateur $C-2$ -normal.
- (3) Soient $(T_i)_{i=1}^n \subset \mathcal{B}(H)$ une suite d'opérateurs $C-2$ -normaux avec la conjugaison C sur H , pour $i \in \{1, \dots, n\}$ où $n \in \mathbb{N}^*$. Si $T_iT_j = T_jT_i$ et $T_iT_j^* = T_j^*T_i$ pour $i, j \in \{1, \dots, n\}$, alors $T_1T_2\dots T_n$ est un opérateur $C-2$ -normal.

L'exemple suivant montre que les conditions $TS = ST$ et $TS^* = S^*T$ sont nécessaires dans le Théorème 3.2.2.

Exemple 3.2.1. Soit C une conjugaison sur $\mathbb{C}^3$ donnée par $C(z_1, z_2, z_3) = (\overline{z_3}, \overline{z_2}, \overline{z_1})$. Nous prenons :

$$T = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \overline{a} & 0 & 0 \\ \overline{b} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

tel que $a, b \in \mathbb{C}^*$. Selon la Remarque 3.2.1 (3 et 4), T et S sont des opérateurs $C-2$ -normaux et

$$TS = \begin{pmatrix} |a|^2 + |b|^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Puisque $a \neq 0$ et $b \neq 0$, alors $|a|^2 + |b|^2 \neq 0$. Ensuite, selon la Proposition 3.2.3 nous constatons que TS n'est pas $C-2$ -normal. Même si $TS^* = S^*T$, nous avons

$$ST = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & |a|^2 & \bar{a}b \\ 0 & a\bar{b} & |b|^2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = TS.$$

Alors, les conditions $TS = ST$ et $TS^* = S^*T$, sont toutes deux nécessaires pour que TS soit $C-2$ -normal.

Théorème 3.2.3. Soit T un opérateur $C-2$ -normal et C une conjugaison sur H . Si T est 2 -normal, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, nous avons que T^n est $C-2$ -normal.

Démonstration. Nous avons que T est 2 -normal, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a que $(T^2)^n (T^*)^n = (T^2 T^*)^n$. Donc,

$$\begin{aligned} C(T^n)^2 (T^n)^* &= C(T^2)^n (T^*)^n = C(T^2 T^*)^n \\ &= T^* T^2 C(T^2 T^*)^{n-1} = \dots = (T^* T^2)^n C \\ &= (T^n)^* (T^n)^2 C. \end{aligned}$$

Cela signifie que T^n est $C-2$ -normal. □

Remarque 3.2.3. Si T est un opérateur normal, alors T est 2 -normal. Par conséquent, si T est $C-2$ -normal, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a T^n est $C-2$ -normal avec C une conjugaison sur H .

Théorème 3.2.4. Soit $T \in \mathcal{B}(H)$ un opérateur $C-2$ -normal avec la conjugaison C sur H . Si T est 4 -normal, alors les énoncés suivants sont vrais.

1. T^2 est $C-2$ -normal si et seulement si C commute avec $T^2(T^*)^2 T^2$.
2. Pour tout $n = 2k + 1$ où $k \in \mathbb{N}$, alors T^n est $C-2$ -normal.
3. Pour tout $n = 4m$ ($k = 2m$) où $k \in \mathbb{N}^*$, alors T^n est $C-2$ -normal.
4. Pour tout $n = 4m + 2$ ($k = 2m + 1$) où $k \in \mathbb{N}$, et si T^2 est normal, alors T^n est $C-2$ -normal.

Démonstration. (1) Nous avons

$$\begin{aligned} C(T^2)^2 (T^2)^* &= CT^4 T^* T^* = CT^* T^2 T^2 T^* \\ &= T^2 T^* CT^2 T^* = T^2 (T^*)^2 T^2 C, \end{aligned}$$

et on a

$$\begin{aligned} (T^2)^* (T^2)^2 C &= T^* T^* T^4 C = T^* T^2 T^2 T^* C \\ &= T^* T^2 CT^* T^2 = CT^2 (T^*)^2 T^2. \end{aligned}$$

Par conséquent, T^2 est $C-2$ -normal, ce qui est équivalent au fait que C commute avec $T^2(T^*)^2 T^2$.

(2) Si $n = 2k + 1$, nous avons

$$\begin{aligned}
 C(T^n)^2(T^n)^* &= C(T^{2k+1})^2(T^{2k+1})^* = CT^{4k+2}(T^*)^{2k+1} \\
 &= CT^2(T^4)^k T^* ((T^*)^2)^k = CT^2 T^* (T^4 (T^*)^2)^k \\
 &= CT^2 T^* (T^* T^2 T^2 T^*)^k \\
 &= C(T^2 T^*)[(T^* T^2)(T^2 T^*)][(T^* T^2)(T^2 T^*)] \dots [(T^* T^2)(T^2 T^*)] \\
 &= (T^* T^2)[(T^2 T^*)(T^* T^2)][(T^2 T^*)(T^* T^2)] \dots [(T^2 T^*)(T^* T^2)]C \\
 &= T^* T^4 (T^*)^2 T^4 (T^*)^2 \dots T^4 (T^*)^2 T^2]C = T^* ((T^*)^2)^k (T^4)^k T^2 C \\
 &= (T^*)^{2k+1} (T^{4k+2})C = (T^n)^* (T^n)^2 C.
 \end{aligned}$$

Par conséquent, T^n est $C-2$ -normal.

(3) Si $n = 4m$, nous avons

$$\begin{aligned}
 C(T^n)^2(T^n)^* &= C(T^{4m})^2(T^{4m})^* = C(T^8)^m((T^4)^*)^m = C(T^8(T^*)^4)^m \\
 &= C(T^* T^4 T^* T^* T^4 T^*)^m = C(T^* T^2 T^2 T^* T^* T^2 T^2 T^*)^m \\
 &= C[(T^* T^2)(T^2 T^*)(T^* T^2)(T^2 T^*)](T^* T^2 T^2 T^* T^* T^2 T^2 T^*)^{m-1} \\
 &= [T^2 (T^*)^2 T^4 (T^*)^2 T^2]C(T^* T^2 T^2 T^* T^* T^2 T^2 T^*)^{m-1} \\
 &= [T^2 (T^*)^4 T^4 T^2]C(T^* T^2 T^2 T^* T^* T^2 T^2 T^*)^{m-1} \\
 &= [(T^*)^4 (T^4)^2]C(T^* T^2 T^2 T^* T^* T^2 T^2 T^*)^{m-1} \\
 &= [(T^*)^4 (T^4)^2][(T^*)^4 (T^4)^2]C(T^* T^2 T^2 T^* T^* T^2 T^2 T^*)^{m-2} \\
 &= [(T^*)^{4.2} (T^{4.2})^2]C(T^* T^2 T^2 T^* T^* T^2 T^2 T^*)^{m-2} \\
 &= \dots = [(T^*)^{4m} (T^{4m})^2]C = [(T^{4m})^* (T^{4m})^2]C \\
 &= (T^n)^* (T^n)^2 C.
 \end{aligned}$$

Par conséquent, $C(T^n)^2(T^n)^* = (T^n)^* (T^n)^2 C$, ce qui est équivalent au fait que T^n est $C-2$ -normal.

(4) De la même manière. □

Remarque 3.2.4. Soit $T \in \mathcal{B}(H)$ un opérateur $C-2$ -normal et C une conjugaison sur H . Si T est un opérateur 4-normal, alors pour tout $n = 4m$ ($m \neq 0$), $n = 4m + 1$ et $n = 4m + 3$ nous trouvons que T^n est un opérateur $C-2$ -normal. Mais si $n = 4m + 2$, alors nous avons besoin de conditions supplémentaires.

Proposition 3.2.4. Soit $N_{C,2}(H)$ l'ensemble de tous les opérateurs $C-2$ -normal sur H . Alors, la classe $N_{C,2}(H)$ est fermée pour la norme dans $\mathcal{B}(H)$.

Démonstration. Si $T \in \overline{N_{C,2}(H)}$, alors il existe une suite $(T_n)_{n=0}^{+\infty} \subset \mathcal{B}(H)$ d'opérateurs $C-2$ -normaux, telle que $\|T_n - T\| \rightarrow 0$. Alors, nous avons

$$\begin{aligned}
 \|CT^2 T^* - T^* T^2 C\| &= \|CT^2 T^* - CT_n^2 T_n^* + T_n^* T_n^2 C - T^* T^2 C\| \\
 &= \|C(T^2 T^* - T_n^2 T_n^*) + (T_n^* T_n^2 - T^* T^2)C\| \\
 &\leq \|C(T^2 T^* - T_n^2 T_n^*)\| + \|(T_n^* T_n^2 - T^* T^2)C\| \\
 &\leq \|T^2 T^* - T_n^2 T_n^*\| + \|T_n^* T_n^2 - T^* T^2\|.
 \end{aligned}$$

Puisque $\|T^2 T^* - T_n^* T_n^*\| \rightarrow 0$, et $\|T_n^* T_n^* - T^* T^2\| \rightarrow 0$, cela signifie que $\|CT^2 T^* - T^* T^2 C\| = 0$.

Alors, $CT^2 T^* = T^* T^2 C$, donc T est un opérateur $C-2$ -normal. Par conséquent, $N_{C,2}(H)$ est fermé pour la norme dans $\mathcal{B}(H)$. $\square$

Théorème 3.2.5. Soient T et S des opérateurs sur $\mathcal{B}(H)$, tels que S soit unitairement équivalent à T , c'est-à-dire qu'il existe un opérateur unitaire U tel que $S = UTU^*$. Alors, pour toute conjugaison C sur H , nous avons l'équivalence suivante: T est un opérateur $C-2$ -normal si et seulement si S est $(UCU^*)-2$ -normal.

Démonstration. Nous avons $T = U^* S U$, donc $T^2 = U^* S^2 U$. Alors,

$$\begin{aligned} C(U^* S U)^2 (U^* S U)^* &= (U^* S U)^* (U^* S U)^2 C \Leftrightarrow CU^* S^2 U U^* S^* U = U^* S^* U U^* S^2 U C \\ &\Leftrightarrow U(CU^* S^2 S^* U) U^* = U(U^* S^* S^2 U C) U^* \\ &\Leftrightarrow (UCU^*) S^2 S^* = S^* S^2 (UCU^*). \end{aligned}$$

Donc, S est un opérateur $(UCU^*)-2$ -normal, ce qui est équivalent au fait que T est $C-2$ -normal. $\square$

Remarque 3.2.5. Pour que $(T + N)$ soit un opérateur $C-2$ -normal, nous avons besoin d'une grande quantité de données.

Théorème 3.2.6. Soient $T, S \in \mathcal{B}(H)$ deux opérateurs $C-2$ -normaux où C est une conjugaison sur H .

(1) Si $TS + ST = 0$, $T^2 S^* + S^2 T^* = 0$ et $T^* S^2 + S^* T^2 = 0$, alors $(T + S)$ est un opérateur $C-2$ -normal.

(2) Si T et S sont des opérateurs C -symétriques tels que $TS + ST = 0$, alors $(T + S)$ est un opérateur $C-2$ -normal si et seulement si $T(T - S^*)S^*$ est un opérateur auto-adjoint.

Démonstration. Puisque $TS + ST = 0$, donc $(T + S)^2 = T^2 + S^2$, alors

$$\begin{aligned} C(T + S)^2 (T + S)^* &= C(T^2 T^* + T^2 S^* + S^2 T^* + S^2 S^*) \\ &= C(T^2 T^* + S^2 S^*) = CT^2 T^* + CS^2 S^* \\ &= T^* T^2 C + S^* S^2 C = (T^* T^2 + S^* S^2)C \\ &= (T^* T^2 + T^* S^2 + S^* T^2 + S^* S^2)C \\ &= (T + S)^* (T + S)^2 C. \end{aligned}$$

Ainsi, $C(T + S)^2 (T + S)^* = (T + S)^* (T + S)^2 C$. Par conséquent, $(T + S)$ est un opérateur $C-2$ -normal. $\square$

Théorème 3.2.7. Soit $T \in \mathcal{B}(H)$ et soit C une conjugaison sur H . Si $(T + \alpha)$ est un opérateur $C-2$ -normal pour chaque $\alpha \in \mathbb{R}$, alors $C(T^* + 2T)C = (T^* + 2T)$. De plus, nous avons l'équivalence suivante: T est un opérateur C -normal si et seulement si $CT^2 = T^2 C$.

Démonstration. Tant donné que $(T + \alpha)$ est un opérateur $C-2$ -normal pour tous les $\alpha \in \mathbb{R}$, alors T est un opérateur $C-2$ -normal. Nous avons

$$\begin{aligned} C(T + \alpha)^2 (T + \alpha)^* &= C(T^2 T^* + \alpha T^2 + 2\alpha T T^* + 2\alpha^2 T + \alpha^2 T^* + \alpha^3) \\ &= CT^2 T^* + \alpha CT^2 + 2\alpha C T T^* + 2\alpha^2 C T + \alpha^2 C T^* + \alpha^3 C, \end{aligned}$$

et on a

$$\begin{aligned}(T + \alpha)^*(T + \alpha)^2 C &= (T^* T^2 + 2\alpha T^* T + \alpha^2 T^* + \alpha T^2 + 2\alpha^2 T + \alpha^3)C \\ &= T^* T^2 C + 2\alpha T^* T C + \alpha^2 T^* C + \alpha T^2 C + 2\alpha^2 T C + \alpha^3 C.\end{aligned}$$

Cela démontre que $2\alpha(CTT^* - T^*TC) + \alpha(CT^2 - T^2C) + 2\alpha^2(CT - TC) + \alpha^2(CT^* - T^*C) = 0$. Alors, $\alpha[2(CTT^* - T^*TC) + (CT^2 - T^2C)] + \alpha^2[C(T^* + 2T) - (T^* + 2T)C] = 0$. Puisque α est arbitraire dans $\mathbb{R}$, on obtient $2(CTT^* - T^*TC) + (CT^2 - T^2C) = 0$ et $C(T^* + 2T) - (T^* + 2T)C = 0$.

Cela implique que $C(T^* + 2T)C = (T^* + 2T)C$. Et nous avons $2(CTT^* - T^*TC) + (CT^2 - T^2C) = 0$.

Si T est un opérateur C -normal, alors $(CT^2 - T^2C) = 0$, ce qui implique que $CT^2 = T^2C$. Et si $CT^2 = T^2C$, alors $2(CTT^* - T^*TC) = 0$, ce qui implique que $TT^* = CT^*TC$, ce qui à son tour signifie que T est un opérateur C -normal. $\square$

Théorème 3.2.8. Soit $T \in \mathcal{B}(H)$, et soit C une conjugaison sur H . Alors les énoncés suivants sont vrais :

- (1) Si T est un opérateur C -skew-symétrique, alors T est C -2-normal si et seulement si $(T^2 T^*)^* = -(T^2 T^*)$.
- (2) Si T est un opérateur C -symétrique, alors T est C -2-normal si et seulement si $T^2 T^*$ est un opérateur auto-adjoint.
- (3) Si T est C -symétrique et $T = T^*$, alors T est C -2-normal.
- (4) Si T est C -skew-symétrique et $T = -T^*$, alors T est C -2-normal.

Démonstration. (1) Nous avons que T est C -skew-symétrique, donc $CT = -T^*C$, et donc

$$\begin{aligned}CT^2 T^* &= -T^*CTT^* = -(T^*)^2 TC \\ &= -(T^* T^2)^* C.\end{aligned}$$

Par conséquent, $CT^2 T^* = -(T^* T^2)^* C$, donc $CT^2 T^* = T^* T^2 C$ ce qui équivaut à $T^* T^2 = -(T^* T^2)^*$.

(2) Puisque T est C -symétrique, cela signifie que $CTC = T^*$, et $CT^*TC = TT^*$. En partant du fait que T est C -2-normal, alors $T^2 T^* = CT^* T^2 C$, donc

$$\begin{aligned}T^2 T^* &= CT^* TTC = CT^* TCT^* \\ &= T(T^*)^2 = (T^2 T^*)^*.\end{aligned}$$

Cela signifie que $T^2 T^* = (T^2 T^*)^*$, donc $T^2 T^*$ est un opérateur auto-adjoint.

(3) et (4) se démontrent de la même manière. $\square$

Les propositions du (Théorème 3.2.8, points (3) et (4)) sont équivalentes si T est inversible.

Proposition 3.2.5. Soit $T \in \mathcal{B}(H)$ un opérateur inversible, et soit C une conjugaison sur H . Les énoncés suivants sont vrais :

- (1) Si T est C -symétrique et T est C -2-normal, alors $T = T^*$.
- (2) Si T est C -skew-symétrique et T est C -2-normal, alors $T = -T^*$.

Démonstration.

(1) Supposons que $CT^2T^* = T^*T^2C$, donc $(T^*)^2TC = T^*T^2C$, nous obtenons

$$\begin{aligned} (T^*)^2T = T^*T^2 &\Leftrightarrow (T^*T^*T) = (T^*TT) \\ &\Leftrightarrow (T^{-1})^*(T^*T^*T)T^{-1} = (T^{-1})^*(T^*TT)T^{-1} \\ &\Leftrightarrow T = T^*. \end{aligned}$$

(2) De la même manière. □

Théorème 3.2.9. Soit $T \in \mathcal{B}(H)$ un opérateur C -normal et inversible, et soit C une conjugaison sur H . Alors, T est C -2-normal si et seulement si $CT = TC$.

Démonstration. Nous avons que T est C -2-normal, alors selon la relation 3.1 nous obtenons

$T^2T^*C = CT^*T^2$, et nous avons que T est C -normal, donc $CT^*T = TT^*C$, alors

$$\begin{aligned} TTT^*C = CT^*TT &\Leftrightarrow TCT^*T = TT^*CT \\ &\Leftrightarrow TCT^*T - TT^*CT = 0 \\ &\Leftrightarrow T(CT^* - T^*C)T = 0 \\ &\Leftrightarrow CT^* - T^*C = 0. \end{aligned}$$

Par conséquent, T est C -2-normal si et seulement si $CT = TC$. □

Proposition 3.2.6. Soit $T \in \mathcal{B}(H)$ un opérateur C -normal. Nous constatons que si T est une isométrie ou si T^* est une isométrie, alors T est un opérateur unitaire (selon le Théorème 3 de la référence [23]). Dans cette situation, nous trouvons que T est C -2-normal si et seulement si $CTC = T$.

Démonstration. Puisque T est un opérateur unitaire, alors $TT^* = T^*T = I$. En supposant que T est C -2-normal, nous trouvons que

$$\begin{aligned} CT^2T^* = T^*T^2C &\Rightarrow CTTT^* = T^*TTC \\ &\Rightarrow CT = TC \\ &\Rightarrow CTC = T. \end{aligned}$$

En supposant que $CTC = T$, alors $CT = TC$, et nous trouvons également que $CT^* = T^*C$. Donc

$$\begin{aligned} TI = IT &\Rightarrow T^2T^* = T^*T^2 \\ &\Rightarrow CT^2T^* = CT^*T^2 \\ &\Rightarrow CT^2T^* = T^*T^2C. \end{aligned}$$

Par conséquent, T est C -2-normal. □

Cette caractéristique montre que la somme et la différence des opérateurs nécessitent beaucoup de conditions pour être C -2-normal.

Théorème 3.2.10. Soient $T, S \in \mathcal{B}(H)$, et soit C une conjugaison sur H telle que $(ST)^*(TS)^2 = (TS)^*(ST)^2$, $(TS)^2(ST)^* = (ST)^2(TS)^*$, et $TS^2T + ST^2S = 0$. Si TS est $C-2$ -normal, et ST est $C-2$ -normal, alors $[T, S]$ est un opérateur $C-2$ -normal, tel que $[T, S] = TS - ST$.

Démonstration. Nous avons:

$$\begin{aligned} [T, S]^2 &= (TS)^2 - TS^2T - ST^2S + (ST)^2 \\ &= (TS)^2 + (ST)^2 - (TS^2T + ST^2S) \\ &= (TS)^2 + (ST)^2. \end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned} C[T, S]^2[T, S]^* &= C((TS)^2 + (ST)^2)((TS)^* - (ST)^*) \\ &= C[(TS)^2(TS)^* - (TS)^2(ST)^* + (ST)^2(TS)^* - (ST)^2(ST)^*] \\ &= C(TS)^2(TS)^* - C(ST)^2(ST)^* \\ &= ((TS)^*(TS)^2C - (ST)^*(ST)^2C) \\ &= [(TS)^*(TS)^2 + (TS)^*(ST)^2 - (ST)^*(TS)^2 - (ST)^*(ST)^2]C \\ &= ((TS)^* - (ST)^*)((TS)^2 + (ST)^2)C \\ &= [T, S]^*[T, S]^2C. \end{aligned}$$

Donc, $C[T, S]^2[T, S]^* = [T, S]^*[T, S]^2C$. Par conséquent, $[T, S]$ est un opérateur $C-2$ -normal. $\square$

Théorème 3.2.11. Soit C une conjugaison sur H , et soit T un opérateur inversible dans $\mathcal{B}(H)$.

- (1) Si $T = T^{-1}$ ou bien $T^* = T^{-1}$, alors nous disons que T est $C-2$ -normal si et seulement si $CTC = T$.
(2) Si $T^* = \lambda T^{-1}$ ou bien $T = \lambda T^{-1}$ où $\lambda \in \mathbb{C}$, alors nous disons que T est un opérateur $C-2$ -normal si et seulement si $\frac{\bar{\lambda}}{\lambda}CTC = T$ ou bien $\frac{\lambda}{\lambda}CTC = T$ respectivement (Généralisation de (1)).

Démonstration. (1) Si $T = T^{-1}$, alors $T^2 = I$. Ainsi, $CT^2T^* = CT^*$ et $T^*T^2C = T^*C$. Nous avons

$$\begin{aligned} CT^2T^* = T^*T^2C &\Leftrightarrow CT^* = T^*C \\ &\Leftrightarrow CT^*C = T^* \\ &\Leftrightarrow CTC = T. \end{aligned}$$

Par conséquent, T est un opérateur $C-2$ -normal si et seulement si $CTC = T$.

Si $T^* = T^{-1}$, alors $CT^2T^* = CTTT^{-1} = CT$, et $T^*T^2C = T^{-1}TTC = TC$. Par conséquent, T est un opérateur $C-2$ -normal si et seulement si $CTC = T$. $\square$

Lemme 3.2.1. Soit $T \in \mathcal{B}(H)$. Si T^{-1} existe, alors T^* est également inversible. Dans ce cas, $|T|$ est également inversible.

Démonstration. Nous obtenons $|T| = (T^*T)^{\frac{1}{2}}$, ensuite

$$\begin{aligned} |T|^{-1} &= ((T^*T)^{\frac{1}{2}})^{-1} = ((T^*T)^{-1})^{\frac{1}{2}} \\ &= (T^{-1}(T^{-1})^*)^{\frac{1}{2}} = |(T^{-1})^*| = |(T^*)^{-1}|. \end{aligned}$$

Par conséquent, $|T|$ est inversible. □

Théorème 3.2.12. Soit $T = U|T|$, la décomposition polaire de $T \in \mathcal{B}(H)$, où U est un opérateur unitaire. Alors, il existe des conjugaisons C et J sur H telles que $U = CJ$, (voir le Théorème 1 [15]). Si J commute avec $|T|$, alors:

- (1) T est un opérateur $C-2$ -normal si et seulement si $|T|(|T|U|T|)$ est un opérateur auto-adjoint.
 (2) Si T est inversible, alors on trouve que T est $C-2$ -normal si et seulement si $T = T^*$.

Démonstration. (1) Nous avons :

$$\begin{aligned} CT^2T^* &= CU|T|U|T||T|U^* = CCJ|T|CJ|T|^2JC \\ &= |T|JC|T|^2JJC = |T|U^*|T|^2C = (|T|U|T|)^*|T|C \\ &= (|T|(|T|U|T|))^*C. \end{aligned}$$

De l'autre côté,

$$\begin{aligned} T^*T^2C &= |T|U^*U|T|U|T|C = |T||T|U|T|C \\ &= |T|(|T|U|T|)C. \end{aligned}$$

Alors, T est un opérateur $C-2$ -normal, ce qui est équivalent à $(|T|(|T|U|T|))^* = |T|(|T|U|T|)$.

(2) Nous avons que T est $C-2$ -normal, alors

$$\begin{aligned} CT^2T^* = T^*T^2C &\Leftrightarrow (|T|(|T|U|T|))^* = |T|(|T|U|T|) \\ &\Leftrightarrow |T|U^*|T||T| = |T||T|U|T| \\ &\Leftrightarrow U^*|T| = |T|U \\ &\Leftrightarrow T^* = T. \end{aligned}$$

Cela signifie que $T = T^*$, ce qui est équivalent à $CT^2T^* = T^*T^2C$, donc T est $C-2$ -normal. □

Proposition 3.2.7. Soit $T = U|T|$, la décomposition polaire de T dans $\mathcal{B}(H)$, où U est un opérateur unitaire. Alors, il existe des conjugaisons C et J sur H telles que $U = CJ$. Si T est $C-2$ -normal et T est $J-2$ -normal, alors la transformée de Duggal $\hat{T}$ est $C-2$ -normal et $\hat{T}$ est $J-2$ -normal, de telle sorte que $\hat{T} = |T|U$.

Démonstration. Si T est $C-2$ -normal et T est $J-2$ -normal, nous avons

$$\left\{ \begin{array}{l} CT^2T^* = T^*T^2C \\ JT^2T^* = T^*T^2J \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} T^*T^2 = CT^2T^*C \\ T^2T^* = JT^2T^*J \end{array} \right\}.$$

Alors,

$$\begin{aligned}
C(\hat{T})^2(\hat{T})^* &= C|T|U|T||T| = CU^*U|T|U|T||T|U^*U \\
&= CU^*T^2T^*U = CJCT^2T^*CJ \\
&= CJT^*T^2J = CT^2T^* = T^*T^2C \\
&= JT^2T^*JC = JCT^*T^2CJC \\
&= U^*T^*T^2UC = U^*|T|U^*U|T|U|T|UC \\
&= U^*|T||T|U|T|UC = (\hat{T})^*(\hat{T})^2C.
\end{aligned}$$

Puisque $C(\hat{T})^2(\hat{T})^* = (\hat{T})^*(\hat{T})^2C$, cela signifie que $\hat{T}$ est C-2-normal.

En utilisant la même preuve que précédemment, nous concluons que $\hat{T}$ est aussi J-2-normal. $\square$

Remarque 3.2.6. Si la transformation de Duggal $\hat{T}$ est C-2-normal et que $\hat{T}$ est J-2-normal, alors T est C-2-normal et J-2-normal. Cela implique une équivalence dans la Proposition 3.2.7.

Proposition 3.2.8. Soit $T \in \mathcal{B}(H)$ un opérateur normal, et soit $T = U|T|$, la décomposition polaire de T , avec $U = CJ$ où C et J sont des conjugaisons sur H . Si J commute avec $|T|$, alors les énoncés suivants sont vrais:

- (1) T est un opérateur C-2-normal si et seulement si $|T|^3 = (U|T|^3U)$.
- (2) $\hat{T}$ est un opérateur J-normal et on a $\hat{T}$ est un opérateur C-2-normal si et seulement si $|T|^3 = C|T|CU^*|T|^2U^*$.

Démonstration. (1) Nous avons que T est un opérateur normal, alors

$$T^*T^2C = TT^*TC = U|T||T|U^*U|T|C = CJ|T|^3C,$$

et

$$CT^2T^* = CTT^*T = CCJ|T|^3 = |T|^3J.$$

Ensuite, nous montrons que T est C-2-normal, ce qui est équivalent à

$$|T|^3J = CJ|T|^3C \Leftrightarrow |T|^3 = CJ|T|^3CJ \Leftrightarrow |T|^3 = U|T|^3U.$$

(2) Étant donné que T est un opérateur normal, alors

$$\begin{aligned}
(\hat{T})^*\hat{T} &= U^*|T||T|U = JC|T|JJ|T|CJ \\
&= JCJ|T||T|JCJ = JU|T||T|U^*J \\
&= JTT^*J = JT^*TJ = J|T|U^*U|T|J \\
&= J|T|UU^*|T|J = J\hat{T}(\hat{T})^*J.
\end{aligned}$$

Par conséquent, $\hat{T}$ est un opérateur J-normal.

Nous avons $\hat{T}^* \hat{T} = J \hat{T} (T)^* J$, ensuite

$$\begin{aligned}
C(\hat{T})(\hat{T})(\hat{T})^* &= (\hat{T})^* (\hat{T})(\hat{T})C &\Leftrightarrow C(\hat{T})J(\hat{T})^* (\hat{T})J &= J(\hat{T})(\hat{T})^* J(\hat{T})C \\
&\Leftrightarrow C|T|CJ(\hat{T})^* (\hat{T})J &= J|T|^2 J(\hat{T})C \\
&\Leftrightarrow C|T|C(\hat{T})^* (\hat{T})J &= |T|^3 UC \\
&\Leftrightarrow C|T|C(\hat{T})^* (\hat{T}) &= |T|^3 U^2 \\
&\Leftrightarrow C|T|CU^* |T|^2 U &= |T|^3 U^2 \\
&\Leftrightarrow C|T|CJC|T|^2 &= |T|^3 U \\
&\Leftrightarrow |T|^3 &= C|T|CU^* |T|^2 U^*.
\end{aligned}$$

Ceci termine la preuve. □

Théorème 3.2.13. Soient T et $S \in \mathcal{B}(H)$, et soit C une conjugaison sur H , telle que $T = CSC$. Nous avons l'équivalence suivante : T est un opérateur $C-2$ -normal si et seulement si S est un opérateur $C-2$ -normal.

Démonstration. En supposant que T soit $C-2$ -normal, cela est équivalent à,

$$\begin{aligned}
CT^2T^* &= T^*T^2C &\Leftrightarrow C(CS^2C)(CS^*C) &= (CS^*C)(CS^2C)C \\
&&\Leftrightarrow S^2S^*C &= CS^*S^2 \\
&&\Leftrightarrow CS^2S^* &= S^*S^2C.
\end{aligned}$$

Cela équivaut à ce que S soit $C-2$ -normal. □

Proposition 3.2.9. Soit (X, μ) un espace mesuré. En utilisant la proposition (5.1) de [28], nous obtenons:

- (1) Soit $L^2(X, \mu)$ un espace de fonctions à valeurs complexes avec la conjugaison C définie par $Cf(x) = \overline{f(x)}$. Soit $\varphi \in L^\infty$, et soit T_φ un opérateur de multiplication sur $L^2(X, \mu)$ tel que $T_\varphi f = \varphi f$. Alors T_φ est un opérateur $C-2$ -normal si et seulement si $\overline{\varphi} = \varphi$, ce qui équivaut à $(\overline{\varphi} - \varphi) = 0$.
- (2) Si C est une conjugaison sur $L^2(X, \mu)$ définie par $Cf(x) = \overline{f(-x)}$, et si $\varphi \in L^\infty$ est une fonction paire et que $\overline{\varphi} = \varphi$, alors l'opérateur de multiplication T_φ sur $L^2(X, \mu)$ est un opérateur $C-2$ -normal.

Démonstration. (1) Nous avons,

$$\begin{aligned}
CT_\varphi^2 T_\varphi^* (f) &= CT_\varphi T_\varphi T_{\overline{\varphi}} (f) = C(\varphi^2 \overline{\varphi} f) \\
&= \overline{\varphi}^2 \varphi \overline{f} = |\varphi|^2 \overline{\varphi} f.
\end{aligned}$$

De l'autre côté,

$$\begin{aligned}
T_\varphi^* T_\varphi^2 C(f) &= T_{\overline{\varphi}} T_\varphi T_\varphi C(f) = T_{\overline{\varphi}} (\varphi^2 \overline{f}) \\
&= \overline{\varphi} \varphi^2 \overline{f} = |\varphi|^2 \overline{\varphi} f.
\end{aligned}$$

Par conséquent, l'opérateur T_φ est un opérateur $C-2$ -normal si et seulement si $|\varphi|^2 \varphi \overline{f} = |\varphi|^2 \overline{\varphi} f$, ce qui signifie que $|\varphi|^2 (\varphi - \overline{\varphi}) \overline{f} = 0$, étant donné que si $\varphi \neq 0$ (si $\varphi = 0$, la proposition est claire).

Par conséquent, $(\varphi - \overline{\varphi}) \overline{f} = 0$ pour tout $f \in L^2(X, \mu)$, ce qui est équivalent à $\varphi = \overline{\varphi}$. □

Proposition 3.2.10. (Selon Corollaire 5 dans la référence [23]) Soit $T \in \mathcal{B}(H)$ un opérateur $C-2$ -normal, et soit C une conjugaison sur H . Si T^*T^2 ou T^2T^* sont bornés inférieurement, alors T^* et T^2 le sont également.

Démonstration. (1) En supposant que T^* n'est pas borné inférieurement, cela signifie que $0 \in \sigma_{ab}(T^*)$, par conséquent, il existe une suite (x_n) avec $\|x_n\| = 1$, telle que $\|Cx_n\| = 1$ et $\|T^*x_n\| \rightarrow 0$. Ensuite, nous avons

$$\|T^2T^*x_n\| \leq \|T^2\| \|T^*x_n\| \rightarrow 0, \text{ et } \|T^*T^2Cx_n\| = \|CT^2T^*x_n\| \leq \|T^2\| \|T^*x_n\| \rightarrow 0.$$

Cela signifie que $0 \in \sigma_{ab}(T^2T^*)$, et $0 \in \sigma_{ab}(T^*T^2)$. Par conséquent, T^2T^* et T^*T^2 ne sont pas bornés inférieurement.

(2) En supposant que T^2 n'est pas borné inférieurement, nous trouvons que $0 \in \sigma_{ab}(T^2)$, donc, il existe une suite (x_n) avec $\|x_n\| = \|Cx_n\| = 1$, et $\|T^2x_n\| \rightarrow 0$. Nous avons

$$\|T^*T^2x_n\| \leq \|T^*\| \|T^2x_n\| \rightarrow 0, \text{ et } \|T^2T^*Cx_n\| = \|CT^*T^2x_n\| \leq \|T^*\| \|T^2x_n\| \rightarrow 0.$$

Par conséquent, $0 \in \sigma_{ab}(T^2T^*)$ et $0 \in \sigma_{ab}(T^*T^2)$, ce qui signifie que T^2T^* et T^*T^2 ne sont pas bornés inférieurement. $\square$

Proposition 3.2.11. Soit $C(z_1, z_2, z_3, z_4) = (\overline{z_4}, \overline{z_3}, \overline{z_2}, \overline{z_1})$ une conjugaison sur $\mathbb{C}^4$. Soit T un opérateur tel que

$$T = \begin{pmatrix} 0 & b & 0 & 0 \\ a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ 0 & 0 & a & 0 \end{pmatrix}.$$

Alors, les énoncés suivants sont vérifiés:

- (1) T est $C-2$ -normal si et seulement si $b = \overline{a}$.
- (2) T est C -normal pour tout $a, b \in \mathbb{C}$.

Démonstration. (1) Nous avons

$$CT^2T^*(z) = C \begin{pmatrix} ab & 0 & b^2 & 0 \\ 0 & 2ab & 0 & b^2 \\ a^2 & 0 & 2ab & 0 \\ 0 & a^2 & 0 & ab \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \overline{a} & 0 & 0 \\ \overline{b} & 0 & \overline{a} & 0 \\ 0 & \overline{b} & 0 & \overline{a} \\ 0 & 0 & \overline{b} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{a}^2 b \overline{z_1} + (|a|^2 + |b|^2) \overline{a z_3} \\ (|a|^2 + 2|b|^2) \overline{a z_2} + 2|a|^2 \overline{b z_4} \\ 2\overline{a} |b|^2 \overline{z_1} + (2|a|^2 + |b|^2) \overline{b z_3} \\ (|a|^2 + |b|^2) \overline{b z_2} + a \overline{b^2 z_4} \end{pmatrix}.$$

D'un autre côté,

$$T^* T^2 C(z) = \begin{pmatrix} \bar{a}b^2\bar{z}_1 + 2|a|^2 b\bar{z}_3 \\ (2|a|^2 + |b|^2) b\bar{z}_2 + (|a|^2 + |b|^2) a\bar{z}_4 \\ (|a|^2 + |b|^2) b\bar{z}_1 + (|a|^2 + 2|b|^2) a\bar{z}_3 \\ 2a|b|^2 \bar{z}_2 + a^2 \bar{b}\bar{z}_4 + \end{pmatrix}.$$

Nous constatons que si $a \neq 0$ et $b \neq 0$, alors T est $C-2$ -normal, ce qui équivaut à $b = \bar{a}$.

(2) Pour tous $a, b \in \mathbb{C}$, on a :

$$TT^*(z) = \begin{pmatrix} |b|^2 z_1 + \bar{a}bz_3 \\ (|a|^2 + |b|^2) z_2 + \bar{a}bz_4 \\ \bar{a}\bar{b}z_1 + (|a|^2 + |b|^2) z_3 \\ \bar{a}\bar{b}z_2 + |a|^2 z_4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad CT^*TC(z) = \begin{pmatrix} |b|^2 z_1 + \bar{a}bz_3 \\ (|a|^2 + |b|^2) z_2 + \bar{a}bz_4 \\ \bar{a}\bar{b}z_1 + (|a|^2 + |b|^2) z_3 \\ \bar{a}\bar{b}z_2 + |a|^2 z_4 \end{pmatrix}.$$

Pour tous $a, b \in \mathbb{C}$, nous constatons que $CT^*TC = TT^*$, donc T est C -normal. $\square$

Remarque 3.2.7. À partir de ce qui précède, on peut généraliser en considérant $C(z_1, z_2, \dots, z_{2k}) = (\bar{z}_{2k}, \dots, \bar{z}_2, \bar{z}_1)$ comme une conjugaison sur $\mathbb{C}^{2k}$. Pour tout $T \in M_{2k}(\mathbb{C})$ tel que

$$T = \begin{pmatrix} 0 & b & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ a & 0 & b & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a & 0 & b & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & a & 0 & b & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 & a & 0 & b \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & a & 0 \end{pmatrix},$$

On constate que T est un opérateur C -normal pour tous $a, b \in \mathbb{C}$ et que T est un opérateur $C-2$ -normal si et seulement si $b = \bar{a}$.

Conclusion

Cette thèse repose sur la théorie des opérateurs linéaires bornés dans l'espace de Hilbert, que nous avons symbolisée par $\mathcal{B}(H)$. Notre étude s'est concentrée plus particulièrement sur les opérateurs C -normaux, $2-C$ -normaux et $C-2$ -normaux, où C représente une conjugaison dans l'espace H .

Nous avons introduit, au début de cette thèse, quelques éléments préliminaires sur les opérateurs normaux et les opérateurs positifs. Nous avons rappelé tous les outils nécessaires à l'élaboration de cette thèse.

Dans le deuxième chapitre, nous avons concentré nos efforts sur la notion de conjugaison et sur celle des opérateurs C -symétriques sur un espace de Hilbert. Cela constitue une introduction aux opérateurs C -normaux, dans laquelle nous avons étudié tous les concepts présentés dans ce contexte. Cette approche facilite l'identification de plusieurs propriétés de ce type d'opérateurs.

En étudiant les opérateurs C -normaux, nous avons constaté qu'il était possible de généraliser davantage ce concept. Par conséquent, dans le troisième chapitre, nous avons développé cette généralisation en introduisant deux nouvelles classes d'opérateurs, que nous avons appelées « $2-C$ -normaux » et « $C-2$ -normaux ».

Pour découvrir leurs propriétés distinctes, nous avons utilisé plusieurs caractéristiques, dont la décomposition polaire d'un opérateur et la transformation de Duggal.

Les perspectives de recherche dans ce travail sont nombreuses; nous en citons quelques-unes.

- (1) Étudier la transformation de Duggal pour les opérateurs C -normaux et les opérateurs $2-C$ -normaux représente un sujet intéressant.
- (2) Étudier la transformée d'Aluthge pour les opérateurs normaux, les opérateurs $2-C$ -normaux et les opérateurs $C-2$ -normaux constitue un domaine de recherche prometteur.
- (3) Tenter de généraliser les $2-C$ -normaux aux $n-C$ -normaux représente une extension ambitieuse visant à comprendre de manière plus complexe cette catégorie d'opérateurs.
- (4) De même, parmi les sujets passionnants figure la généralisation des $C-2$ -normaux aux $C-n$ -normaux.

Bibliographie

- [1] Alzuraiqi, S. A., & Patel, A. B. (2010). On n -normal operators. *General Mathematics Notes*, 1(2), 61–73.
- [2] Amara, Z., & Oudghiri, M. (2023). C -normality of rank-one perturbations of normal operators. *Linear and Multilinear Algebra*, 71(15), 2426–2440.
- [3] Belacel, A. *Opérateurs sommants et factorisation par les espaces de Köthe*, Thèse de doctorat, Université Mohammed Boudiaf M'sila, 2014/2015.
- [4] Bender, C., Fring, A., Günther, U., & Jones, H. (2012). Quantum physics with non-Hermitian operators. *J. Phys. A : Math. Theor.*, 45(44), 440301.
- [5] Brezis, H. *Analyse fonctionnelle, théorie et application*, Masson, Paris, 1983.
- [6] Brown, A. (1953). On a class of operators. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 4(5), 723–728.
- [7] Chebli, H. *Analyse Hilbertienne*, Centre de Publication Universitaire, Tunis, 2001.
- [8] Chō, M., Ko, E., & Lee, J. E. (2016). On m -complex symmetric operators. *Mediterranean J. Math.*, 13, 2025–2038.
- [9] Chō, M., Ko, E., & Lee, J. (2017). Properties of m -complex symmetric operators. *Stud. Univ. Babeş-Bolyai Math.*, 62(2), 233–248.
- [10] Foiaş, C., Jung, I. B., Ko, E., & Pearcy, C. (2003). Complete contractivity of maps associated with the Aluthge and Duggal transforms. *Pacific J. Math.*, 209(2), 249–259.
- [11] Fuglede, B. (1950). A commutativity theorem for normal operators. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, 36(1), 35–40.
- [12] Garcia, S. R. (2008). Aluthge transforms of complex symmetric operators. *Integral Equations and Operator Theory*, 60(3), 357–367.
- [13] Garcia, S., & Putinar, M. (2006). Complex symmetric operators and applications. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 358(3), 1285–1315.
- [14] Garcia, S. R., & Putinar, M. (2006). Complex symmetric operators and applications. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 358, 1285–1315.
- [15] Garcia, S., & Putinar, M. (2007). Complex symmetric operators and applications II. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 359(8), 3913–3931.
- [16] Garcia, S., & Wogen, W. (2010). Some new classes of complex symmetric operators. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 362(11), 6065–6077.
- [17] Garcia, S. R., Prodan, E., & Putinar, M. (2014). Mathematical and physical aspects of complex symmetric operators. *J. Phys. A : Math. Theor.*, 47(35), 353001.
- [18] Guesba, M. *Traitement sur les opérateurs normaux et les opérateurs compacts*, Thèse de doctorat, Université Mohammed Boudiaf M'sila, 2017.

- [19] Gustafson, K. E., & Rao, D. K. (1997). *Numerical Range*. Springer, New York.
- [20] Halmos, P. R. (1982). *A Hilbert Space Problem Book* (2nd ed.). Springer, New York.
- [21] Jibril, A. A. S. (1996). On 2-normal operators. *Dirasat*, 23.
- [22] Jung, S., Ko, E., & Lee, J. E. (2013). On complex symmetric operator matrices. *J. Math. Anal. Appl.*, 406(2), 373–385.
- [23] Ko, E., Lee, J. E., & Lee, M. J. (2021). On properties of C -normal operators. *Banach J. Math. Anal.*, 15(4), 65.
- [24] Lakehal, I., & Guesba, M. (2023). Some results on C -normal operators. *Surveys in Mathematics and its Applications*, 18, 13–26.
- [25] Li, C., & Zhu, S. (2013). Skew symmetric normal operators. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 141(8), 2755–2762.
- [26] Li, C. G., & Zhou, T. T. (2014). Skew symmetry of a class of operators. *Banach J. Math. Anal.*, 8(1), 279–294.
- [27] Moiseyev, N. (2011). *Non-Hermitian Quantum Mechanics*. Cambridge University Press.
- [28] Ptak, M., Simik, K., & Wicher, A. (2020). C -normal operators. *Electron. J. Linear Algebra*, 36, 67–79.
- [29] Thompson, D., McClatchey, T., & Holleman, C. (2021). Binormal, complex symmetric operators. *Linear and Multilinear Algebra*, 69(9), 1705–1715.
- [30] Uhlmann, A. (2016). Anti-(conjugate) linearity. *Sci. China Phys. Mech. Astron.*, 59(3), 630301.
- [31] Wang, C., Zhaob, J., & Zhu, S. (2020). Remarks on the structure of C -normal operators. *Linear Multilinear Algebra*.
- [32] Wang, C., Zhao, J., & Zhu, S. (2022). Remarks on the structure of C -normal operators. *Linear and Multilinear Algebra*, 70(9), 1682–1696.