



**République Algérienne Démocratique et Populaire**

**Ministère de l'Enseignement Supérieur et de**

**la Recherche Scientifique**

**UNIVERSITÉ HAMMA LAKHDAR EL OUED**

**FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES**

**Mémoire de fin d'étude**

**MASTER ACADEMIQUE**

Domaine: Mathématiques et Informatique

Filière: Mathématiques

Spécialité: Mathématiques fondamentales

**Thème**

**Etude spectrale des opérateurs  
normaux**

Présenté par: Khelaifa Karima  
Semama Fouzia

Soutenu publiquement devant le jury composé de

Djedidi Yacine	MCA/Prof.	Président	Univ. El Oued
Guesba Messaoud	Dr.	Rapporteur	Univ. El Oued
Mdekkel Hamza	MCA/MC	Examineur	Univ. El Oued

Année universitaire 2017 – 2018

# Remerciements

Avant toute chose, nous à remercier « **Allah** » le tous puissant, pour nous avoir donné la force et la patience. Pour compléter ce travail.

Ainsi, il nous fait plaisir que nous, au commencement de ce travail, présentons nous grand remerciements à notre encadreur estimations

**Dr. "Guesba Messaoud"**

pour ses conseils et son encouragement durant la période de rédaction de ce travail.

Nous tenons également à remercier messieurs les membres de jury pour l'honneur qu'ils nous ont fait en acceptant de siéger à notre soutenance

Enfin. Il est important pour nous de remercier nos familles, nos parents nos frères et nos sœurs qui nous ont toujours été une source inépuisable d'encouragements.

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Rappels et notions fondamentales</b>	<b>2</b>
1.1 Espaces fonctionnels . . . . .	2
1.1.1 Définitions (rappels) . . . . .	2
1.1.2 Inégalités des auxiliaires . . . . .	6
1.2 Notions sur les opérateurs . . . . .	7
1.2.1 Les opérateurs linéaires bornés . . . . .	7
1.2.2 Inverse d'un opérateur . . . . .	15
1.2.3 L'adjoint d'opérateur . . . . .	16
1.2.4 Spectre d'un opérateur . . . . .	19
<b>2 Propriétés des opérateurs normaux</b>	<b>23</b>
2.1 Quelques classes des opérateurs . . . . .	23
2.1.1 L'opérateur auto-adjoint . . . . .	23
2.1.2 Définitions élémentaires et exemples . . . . .	26
2.1.3 Opérateurs compacts . . . . .	28
2.2 Les opérateur normaux . . . . .	33
2.2.1 Définitions et propriétés . . . . .	33
2.2.2 Image numérique . . . . .	38
<b>3 Théorie spectrale des opérateurs normaux</b>	<b>41</b>
3.1 Rappels . . . . .	41
3.2 Classification des valeurs spectrales . . . . .	45

3.2.1	Le spectre ponctuel . . . . .	46
3.2.2	Le spectre résiduel . . . . .	50
3.2.3	Le spectre continu . . . . .	50
3.3	Applications . . . . .	53
	<b>Bibliographie</b>	<b>58</b>

# Introduction générale

Dans ce travail, nous avons présenté quelques classes d'opérateurs linéaires bornés et des concepts fondamentaux connexes, et en particulier les opérateurs normaux.

Les opérateurs normaux sont introduits, et leurs propriétés sont étudiées dans [5] et [6]

Dans [1], M. Akkouchi a introduit une nouvelle notion dans l'étude à la théorie spectrale des opérateurs normaux.

Dans toute suite l'étude  $H$  signifiera un espace de Hilbert complexe. On notera aussi par  $\mathcal{L}(H)$  l'algèbre des opérateurs linéaires bornés définis sur  $H$ .

Soit  $T \in \mathcal{L}(H)$  on dit qu'un nombre complexe  $\lambda$  est une valeur propre de l'opérateur  $T$ . On appelle spectre de  $T$  et noté  $\sigma(T)$  on a :

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}, \quad (T - \lambda I) \text{ n'est pas inversible}\}$$

On a évoqué la notion de spectre et ces types (ponctuel, continu, résiduel)

L'objectif de ce travail est de présenter les points importants dans cette théorie.

Notre travail se compose de trois chapitres :

**Dans le premier chapitre**, nous rappelons quelques définitions des notions de l'analyse fonctionnelle, les espaces métriques, l'espace de Hilbert..., et nous présentons les notations sur les opérateurs bornés, nous avons étudié quelques l'inverse, l'adjoint et spectre d'un opérateur.

**Dans le deuxième chapitre**, nous donnons quelques classes des opérateurs (auto-adjoint, unitaire, positive, isométrie, projection, compact). Comme nous introduit la définition d'opérateur normal et quelques exemples générales et on présente ses propriétés principales.

**Le dernier chapitre** est consacré à la théorie spectrale des opérateurs normaux et donne quelques exemples.

# Chapitre 1

## Rappels et notions fondamentales

### 1.1 Espaces fonctionnels

#### 1.1.1 Définitions (rappels)

**Définition 1.1.1.** (*Espace vectoriel normé*)

Soit  $E$  un espace vectoriel sur le corps  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , on appelle norme sur l'espace  $E$  toute application notée  $\|\cdot\|$  définie sur  $E$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^+$ ,

vérifiant pour tout  $x, y$  dans  $E$  et  $\alpha$  dans  $\mathbb{K}$

i)  $\|x\| = 0$  si et seulement si  $x = 0$ .

ii)  $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$  (homogénéité).

iii)  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$  (inégalité triangulaire).

Tout espace vectoriel muni d'une norme est appelé espace vectoriel normé.

**Exemple 1.1.1.** Soit  $C([a, b], \mathbb{R})$ , l'espace vectoriel des fonctions continues sur  $[a, b]$  valeurs réelles. Pour tout  $f \in C([a, b], \mathbb{R})$ , on pose

$$\|f\|_1 = \int_a^b f(x) dx, \quad \|f\|_2 = \left( \int_a^b |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \text{et } \|f\|_\infty = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|.$$

Les applications  $\|\cdot\|_1$  et  $\|\cdot\|_\infty$  sont des normes sur  $C([a, b], \mathbb{R})$ .

**Définition 1.1.2.** (*Espace métrique complet*)

On dit que  $E$  est un espace métrique complet si toute suite de Cauchy de  $E$  converge dans  $E$ .

**Définition 1.1.3. (Espace de Banach)**

Tout espace vectoriel normé complet est appelé espace de Banach.

**Exemple 1.1.2.**  $(C([0, 1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$  est un espace de Banach.

**Définition 1.1.4. (Produit scalaire)**

Soit  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$ , un produit scalaire sur  $E$  est application de  $E \times E$  dans  $\mathbb{K}$ , notée  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  possédant les propriétés suivantes

pour tout  $x, y, z$  dans  $E$  et  $\alpha, \beta$  dans  $\mathbb{R}$ ,

i)  $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$ .

ii)  $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ .

iii)  $\langle x, x \rangle \geq 0$ .

iv)  $\langle x, x \rangle = 0$  implique  $x = 0$ .

**Définition 1.1.5. (Espace Préhilbertien)**

Un espace préhilbertien est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire.

**Proposition 1.1.1.** [9] Tout espace Préhilbertien est un espace vectoriel normé, la norme est donné par

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

**Exemple 1.1.3.** Les espaces  $\mathbb{R}$  et  $\mathbb{C}$  sont des espaces préhilbertiens pour le produit scalaire dit usuel.

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i \quad \text{dans le cas réel}$$

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \bar{y}_i \quad \text{dans le cas complexe}$$

**Proposition 1.1.2. (L'identité du parallélogramme)**

Soient  $x, y$  deux vecteurs de l'espace préhilbertien  $E$  alors

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2 (\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

**Proposition 1.1.3.** [2] Un espace vectoriel normé est un espace préhilbertien si et seulement si, sa norme vérifie l'identité du parallélogramme.

**Exemple 1.1.4.**  $C([0, 1], \mathbb{R}, \|\cdot\|_\infty)$  est un espace vectoriel normé, mais n'est pas un espace préhilbertien pour  $g(t) = t$  et  $f(t) = 1 - t$ ,  $t \in [0, 1]$ , tel que

$$\|f\|_\infty = \|g\|_\infty = 1 \text{ et } \|f + g\|_\infty^2 = \|f - g\|_\infty^2 = 2, \text{ mais } 2(\|f\|_\infty^2 + \|g\|_\infty^2) = 4.$$

**Définition 1.1.6. (Vecteurs orthogonaux)**

On dit que deux éléments  $x$  et  $y$  d'un espace préhilbertien sont orthogonaux si  $\langle x, y \rangle = 0$ , et on note  $x \perp y$ .

**Exemple 1.1.5.** On prend  $E = \mathbb{C}^n$  muni d'un produit scalaire

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \bar{y}_i.$$

On pose l'ensemble des vecteurs

$$(e_\alpha)_{\alpha=1\dots n} = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$$

Pour tout  $\alpha$  et  $\beta$  telle que  $\alpha \neq \beta$ , on a  $e_\alpha \perp e_\beta$ , lorsque,  $\langle e_\alpha, e_\beta \rangle = 0$ .

**Définition 1.1.7.** On appelle orthogonal d'une partie  $F$  de  $E$  l'ensemble

$$F^\perp = \{y \in E, \forall x \in F, \langle x, y \rangle = 0\}.$$

**Définition 1.1.8. (Espace de Hilbert)**

On appelle espace de Hilbert ou espace hilbertien tout espace préhilbertien complet.

**Proposition 1.1.4.** [2] Un espace de Banach est un espace de Hilbert si, et seulement si sa norme vérifie l'identité du parallélogramme.

**Exemple 1.1.6.** Considérons l'espace  $C([0, \frac{\pi}{2}], \|\cdot\|_\infty)$ . Posons

$$f(t) = \cos t, \quad g(t) = \sin t$$

On a

$$\|f\|_\infty = \|g\|_\infty = 1$$

et

$$\|f + g\|_\infty = \sqrt{2}, \quad \|f - g\|_\infty = 1.$$

On voit donc que

$$\|f + g\|_\infty^2 + \|f - g\|_\infty^2 \neq 2(\|f\|^2 + \|g\|^2).$$

Il est de voir que l'espace des fonctions continues  $C([a, b])$  n'est pas un espace de Hilbert, quelque soit le segment  $[a, b]$ .

**Définition 1.1.9. (Espace  $C[a, b]$ )**

Des fonctions continues sur  $[a, b]$ , de norme

$$\|x\| = \max_{t \in [a, b]} |x(t)|.$$

**Définition 1.1.10. (Espace  $C^k[a, b]$ )**

Des fonctions  $k$  fois continument dérivables sur  $[a, b]$ , de norme

$$\|x\| = \sum_{i=0}^k \max |x^i(t)|$$

telle que  $x^0(t) = x(t)$ .

**Définition 1.1.11. (Espace  $L^1(\Omega)$ )** Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ , on désigne par  $L^1(\Omega)$  des fonctions intégrable sur  $\Omega$  à valeur dans  $\mathbb{R}$ , on pose

$$\|f\|_1 = \int_{\Omega} |f(x)|.$$

**Définition 1.1.12. (Espace  $L^p(\Omega)$ )**

Soit  $1 \leq p \leq +\infty$ , on pose

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, f \text{ mesurable et } |f(x)|^p \in L^1(\Omega)\}$$

muni de la norme

$$\|f\|_{L^p} = \|f\|_p = \left( \int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Si  $p = +\infty$ , on a  $L^\infty(\Omega)$  est l'espace des fonctions  $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ ,  $f$  mesurable, vérifiant

$$\exists c > 0 \text{ telle que } |f(x)| \leq c, \text{ p.p. sur } \Omega$$

La norme est notée par

$$\|f\|_{L^\infty} = \|f\|_\infty = \inf\{c > 0, |f(x)| \leq c \text{ p.p sur } \Omega\}.$$

**Remarque 1.1.1.** Si  $f \in L^1(\Omega)$ , on a

$$|f(x)| \leq \|f\|_\infty \text{ p.p. sur } \Omega.$$

**Théorème 1.1.1.** [3](Fischer-Riesz)

L'espace  $L^p$  est un espace de Banach pour tout  $1 \leq p \leq \infty$ .

**Remarque 1.1.2.** L'espace  $L^2$  est le seul espace de Hilbert.

**Définition 1.1.13.** (Espace  $\ell^p$ ,  $1 \leq p < \infty$ )

L'espace des suites de nombres complexes telles que  $\sum |x_i|^p$  converge.

$$\|x\|_p = \left( \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

définit une norme dans cet espace.

**Remarque 1.1.3.** Si  $p = \infty$ , alors

$$\|x\|_\infty = \sup(|x_n|, n \in \mathbb{R}^*) < \infty.$$

## 1.1.2 Inégalités des auxiliaires

### a) Inégalité de Cauchy-Schwarz.

Si  $E$  est espace préhilbertien, on a pour tout  $(x, y) \in E^2$

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\| \tag{1.1}$$

### b) Inégalité de Hölder.

Soient  $p$  et  $q$  deux exposants conjugués (i.e.  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ) et  $f \in L^p$ ,  $g \in L^q$  alors,

$$f, g \in L^1 \text{ et } \int |fg| \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q \tag{1.2}$$

Pour  $p = q = 2$ , l'inégalité (1.2) devient

$$\int |fg| \leq \left( \int |f|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int |g|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \tag{1.3}$$

et on l'appelle inégalité de Cauchy-Schwarz.

### c) Inégalité de Minkowski.

Soit  $p \geq 1$  et  $f, g$  deux fonctions dans  $L^p(\Omega)$  alors, la somme  $f + g$  est aussi dans  $L^p(\Omega)$  et on a

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p \tag{1.4}$$

## 1.2 Notions sur les opérateurs

### 1.2.1 Les opérateurs linéaires bornés

#### Définition 1.2.1. (*Opérateur linéaire*)

Soient  $E$  et  $F$  deux espace vectoriels, on appelle opérateur linéaire de  $D(A) \subset E$  dans  $F$  toute application

$$A : D(A) \subset E \longrightarrow F, \quad (D(A) \text{ est le domaine de } A)$$

qui vérifie les conditions suivantes

1) Condition additive

$$\forall x, y \in D(A) \text{ on a } A(x + y) = A(x) + A(y).$$

2) Condition homogène

$$\forall x \in D(A), \lambda \in \mathbb{K} = (\mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}) \text{ on a } A(\lambda x) = \lambda A(x).$$

**Remarque 1.2.1.** 1. En d'auter terme, l'application  $A : D(A) \subset E \longrightarrow F$  est linéaire si et seulement si

$$A(\lambda x + \mu y) = \lambda A(x) + \mu A(y)$$

pour tout  $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$  et  $x, y \in D(A)$ .

2. Le vecteur  $A(x)$  est en générale, noté  $Ax$ .

3. On suppose que  $D(A)$  est une variété linéaire i.e.  $\forall x, y \in D(A), \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K} : \lambda x + \mu y \in D(A)$ .

**Exemple 1.2.1.** Soient  $E$  et  $F$  deux espaces normés.

1. On considère l'opérateur suivant

$$Ix = x \text{ pour tout } x \in E.$$

L'opérateur  $I$  s'appelle opérateur identique.

2. Soit

$$Ox = 0 \text{ pour tout } x \in E.$$

(0 désigne ici l'élément nul de l'espace). Alors 0 s'appelle opérateur nul.

3. Soit l'opérateur  $T$  défini par

$$T : L^2[0, 1] \longrightarrow L^2[0, 1]$$
$$f(x) \longmapsto xf(x)$$

l'opérateur  $T$  est appelé opérateur de multiplication par  $x$ .

**Définition 1.2.2. (Noyau et image d'opérateur)**

• L'ensemble

$$\text{Ker}A = \{x \in D(A), Ax = 0\}$$

est appelé noyau de l'opérateur  $A$ , et aussi noté parfois  $N(A)$ .

• L'image de l'opérateur  $A$  défini par

$$\text{Im}A = \{Ax, x \in D(A)\}$$

et aussi noté parfois  $R(A)$

**Définition 1.2.3.** Soient  $A$  et  $B$  deux opérateurs linéaires. On dit que  $A$  et  $B$  sont égales si

1.  $D_A = D_B$

2.  $\forall x \in D_A$  on a  $Ax = Bx$ .

On note alors,  $A = B$ .

**Notation 1.2.1.** On note par  $L(E, F)$  l'ensemble des opérateurs linéaires de  $E$  vers  $F$ .

Si  $F = \mathbb{K}$ ,  $L(E, \mathbb{K})$  est le dual algébrique de  $E$ , il est noté  $E^*$ . Enfin, si  $E = F$  on écrira  $L(E)$  au lieu de  $L(E, E)$ .

**Définition 1.2.4. (Somme d'opérateurs)**

Soient  $A$  et  $B$  deux opérateurs linéaires de l'espace vectoriel  $E$  dans  $F$ . On définit l'opérateur  $A + B$  par

$$(A + B)x = Ax + Bx, x \in D(A + B) \text{ et } D(A + B) = D(A) \cap D(B)$$

**Définition 1.2.5. (Produit d'opérateurs)**

Soient  $A$  et  $B$  deux opérateurs linéaires,  $A \in L(E, E_1)$  et  $B \in L(E_1, E_2)$ . On définit l'opérateur  $BA$  comme l'opérateur linéaire de  $E$  dans  $E_2$  par

$$(BA)x = B(Ax), \forall x \in D(BA)$$

tel que

$$D(BA) = \{x \in D(A), Ax \in D(B)\}.$$

**Définition 1.2.6.** On définit l'opérateur  $kA$  produit d'un opérateur  $A$  par un nombre  $k$  tel que

$$(kA)x = k(Ax), \forall x \in D(A), \forall k \in \mathbb{K}.$$

**Remarque 1.2.2.**

1.  $A + B, AB, kA \in L(E, F)$ .
2. L'ensemble  $L(E, F)$  constitue un espace vectoriel par rapport aux opérations d'addition et de multiplication par un nombre.
3.  $L(E)$  est une algèbre avec identité sur  $\mathbb{K}$ .

**Définition 1.2.7.** On dit que  $A$  et  $B$  commutent et on écrit

$$AB = BA, \forall x \in D_{AB} \cap D_{BA}$$

**Définition 1.2.8. (Opérateur continu)**

Soient  $E$  et  $F$  deux espaces normés, un opérateur linéaire  $A$  de  $E$  dans  $F$  est dit continu au point  $x_0 \in E$ , si pour tout voisinage  $V$  du point  $y_0 = Ax_0$  il existe un voisinage  $U$  du point  $x_0$  tel que  $Ax \in V$ , dès que  $x \in U \cap E$ .

L'opérateur  $A$  est dit continu, s'il est continu en tout point  $x \in E$ .

**Définition 1.2.9.**  $A \in L(E, F)$  est dit continu si

$$\forall (x_n) \subset E, x_n \xrightarrow{\|\cdot\|_E} x \Rightarrow Ax_n \xrightarrow{\|\cdot\|_F} Ax.$$

**Définition 1.2.10. (Opérateur borné)**

Soient  $E, F$  deux espaces normés, un opérateur linéaire  $A$  de  $E$  dans  $F$  est dit borné, s'il est défini partout dans  $E$  (i.e.  $D(A) = E$ ) et transforme tout ensemble borné dans  $E$  en un ensemble borné dans  $F$ .

**Définition 1.2.11.** Un opérateur linéaire  $A$  défini sur  $E$  dans  $F$  est dit borné s'il existe une constante positive  $C > 0$ , telle que

$$\|Ax\|_F \leq C\|x\|_E. \tag{1.5}$$

**Proposition 1.2.1.** *Tout opérateur linéaire continu est borné.*

**preuve.**

Soit  $M \subset E$  un ensemble borné. Supposons que l'ensemble  $AM \subset F$  ne soit pas borné. Alors dans  $F$  il existe un voisinage de zéro  $V$  tel qu'aucun des ensembles  $\frac{1}{n}AM$  n'est contenu dans  $V$ , mais alors il existe une suite d'éléments  $x_n \in M$  telle qu'aucun des éléments  $\frac{1}{n}Ax_n$  n'appartient à  $V$ . Par suite d'une part, on a  $\frac{1}{n}x_n \rightarrow 0$  dans  $E$  et, d'autre part, la suite  $\frac{1}{n}Ax_n$  ne converge pas vers 0 dans  $F$ , ceci contredit l'hypothèse de continuité de l'opérateur  $A$ .

**Exemple 1.2.2.** 1. *L'opérateur de multiplication  $T$  défini sur l'espace  $C([1, 2])$ , alors*

$$\begin{aligned}\|Tf\|_\infty &= \sup_{x \in [1, 2]} |(Tf)x| \\ &= \sup_{x \in [1, 2]} |xf(x)| \\ &\leq 2\|f\|_\infty\end{aligned}$$

*Donc  $T$  est borné.*

2. *L'un des opérateurs linéaires les plus importants est l'opérateur de dérivation. Il peut être considéré dans des espace différents.*

a)

$$\begin{aligned}D : C([0, 1]) &\longrightarrow C([0, 1]) \\ f(t) &\longmapsto f'(t)\end{aligned}$$

*dans cet espace, il est évident que cet opérateur n'est pas défini sur tout l'espace  $C([0, 1])$ , l'opérateur  $D$  est donc n'est pas continu.*

b)

$$\begin{aligned}D : C^1([0, 1]) &\longrightarrow C([0, 1]) \\ f(t) &\longmapsto f'(t)\end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned}\|Df\|_\infty &= \|f'\|_\infty = \sup_{t \in [0,1]} |f'(t)| \\ \|f\|_{C^1([0,1])} &= \sup_{t \in [0,1]} |f(t)| + \sup_{t \in [0,1]} |f'(t)| \\ &= \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty\end{aligned}$$

d'où,

$$\|Df\|_\infty \leq \|f\|_{C^1([0,1])}$$

Donc  $D$  est borné.

**Définition 1.2.12. (Norme d'un opérateur)**

Le plus petit des nombres  $C$  vérifiant l'inégalité (1.5) s'appelle norme de l'opérateur  $A$  et se note  $\|A\|$  i.e

$$\|A\| = \inf\{C > 0, \forall x \in E, \|Ax\| \leq C\|x\|\}$$

**Proposition 1.2.2.** Pour tout opérateur borné  $A \in L(E, F)$  on a

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|_F = \sup_{\substack{\|x\| \leq 1 \\ x \neq 0}} \|Ax\|_F$$

**Démonstration.** Voir [15]

**Exemple 1.2.3.** 1. Soit

$$\begin{aligned}T : C([0, 1]) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto f(0)\end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}\|Tf\| &= \sup_{x \in [0,1]} |f(0)| = |f(0)| \leq \|f\| \\ &\Rightarrow \|Tf\| \\ &\leq \|f\| \\ &\Rightarrow \|T\| \leq 1\end{aligned}\tag{1.6}$$

On pose

$$g(x) = 1, \text{ pour tout } x \in [0, 1]$$

Alors,

$$Tg(x) = g(0) = 1$$

d'où,

$$\|Tg\| = 1 \text{ et } \|T\| = \sup_{\|Tg\|=1} \|Tg\|$$

Alors,

$$\|T\| \geq 1 \tag{1.7}$$

Par (1.6) et (1.7) on obtient

$$\|T\| = 1.$$

2. On définit l'opérateur  $S$  sur  $\ell^2(\mathbb{N})$  (et on l'appelle le shift ou opérateur de décalage) par

$$S(x_1, x_2, \dots) = (0, x_1, x_2, \dots)$$

On a

$$\|S\| = 1.$$

**Corollaire 1.2.1.** On déduit de la proposition précédent de la norme que

$$\|Ax\| \leq \|A\|\|x\|, \forall x \in E.$$

**Remarque 1.2.3.** La norme de  $A$  est également donnée par

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |\langle Ax, y \rangle|$$

**Notation 1.2.2.** On note par  $\mathcal{L}(E, F)$  l'ensemble des opérateurs linéaires bornés de  $E$  dans  $F$ . Si  $F = \mathbb{K}$ ,  $\mathcal{L}(E, K)$  est le dual topologique de  $E$ , il est noté  $E'$ . Enfin, si  $E = F$  on écrit  $\mathcal{L}(E)$  au lieu de  $\mathcal{L}(E, F)$ .

**Proposition 1.2.3.** [5] (**Propriétés de la norme**)

Soient  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels normés.

1. Si  $A, B \in \mathcal{L}(E, F)$ , alors  $A + B \in \mathcal{L}(E, F)$  et

$$\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|.$$

2. Si  $\alpha \in \mathbb{K}$  et  $A \in \mathcal{L}(E, F)$ , alors  $\alpha A \in \mathcal{L}(E, F)$  et

$$\|\alpha A\| = |\alpha| \|A\|.$$

3. Si  $A, B \in \mathcal{L}(E)$ , alors  $AB \in \mathcal{L}(E)$  et

$$\|AB\| \leq \|A\| \|B\|.$$

**Définition 1.2.13. (Graphe d'opérateur)**

Le graphe  $G(A)$  d'un opérateur  $A \in \mathcal{L}(E, F)$  est un sous-espace de  $E \times F$  défini par

$$G(A) = \{(x, Ax), x \in D(A)\} \subset E \times F$$

**Définition 1.2.14. (Théorème du graphe fermé)**

Soient  $E, F$  deux espaces de Banach et  $A$  opérateur linéaire. Alors

$G(A)$  fermé dans  $E \times F \Leftrightarrow A \in \mathcal{L}(E, F)$

**Proposition 1.2.4. [16]** Soient  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels normés sur  $\mathbb{K}$  et

$A \in L(E, F)$ , les propriétés suivantes sont équivalentes

1. L'opérateur  $A$  est continu sur  $E$ .
2. L'opérateur  $A$  est continu en 0.
3. L'opérateur  $A$  est continu en un point.
4. L'opérateur  $A$  est borné.

**Théorème 1.2.1.** Soit  $A \in \mathcal{L}(H)$ ,  $H$  est un espace de Hilbert sur  $\mathbb{C}$ .

Si

$$\langle Ax, x \rangle = 0, \forall x \in H$$

Alors,

$$A = 0.$$

**Démonstration.**

Comme

$$\langle A(x + y), x + y \rangle = 0$$

On voit que

$$\langle Ax, y \rangle + \langle Ay, x \rangle = 0 \quad (x \in H, y \in H) \tag{1.8}$$

On remplace  $y$  par  $iy$  en (1.8), le résultat est

$$-i\langle Ax, y \rangle + i\langle Ay, x \rangle = 0 \quad (1.9)$$

Multiplions (1.8) par  $i$  et additions à (1.9) on trouve

$$\langle Ax, y \rangle = 0 \quad (1.10)$$

On pose

$$y = Ax$$

(1.10) donne  $\|Ax\|^2 = 0$ , alors

$$Ax = 0, \forall x \in H$$

Donc

$$A = 0.$$

**Remarque 1.2.4.** *Si  $H$  est un espace de Hilbert sur  $\mathbb{R}$ , le théorème précédent n'a pas été vérifié.*

**Exemple 1.2.4.**

$$E = \mathbb{R}^2, A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

On a  $\langle Ax, x \rangle = 0$  pour tout  $x \in \mathbb{R}^2$ , mais  $A \neq 0$ .

**Corollaire 1.2.2.** *Si  $S, T \in \mathcal{L}(H)$  et*

$$\langle Sx, x \rangle = \langle Tx, x \rangle, \forall x \in H$$

*Alors,*

$$S = T.$$

**Preuve.** En appliquant le théorème précédent pour  $S - T$ .

**Types des convergences.**

**Définition 1.2.15.** *Soient  $E, F$  deux espaces normés  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'opérateurs linéaires bornés, i.e.  $A_n \in \mathcal{L}(E, F)$  a) La suite  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge fortement vers  $A$ , si*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n x - Ax\| = 0, \forall x \in E$$

et nous écrivons  $A_n \xrightarrow{S} A$

b) La suite  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément vers  $A$ , si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n - A\| = 0$$

et nous écrivons  $A_n \xrightarrow{U} A$

c) La suite  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge faiblement vers  $A$ , si

$$\acute{x}(A_n x) \longrightarrow \acute{x}(Ax)$$

Quand  $n \rightarrow \infty$ ,  $\forall \acute{x} \in F$ ,  $\forall x \in E$

et nous écrivons  $A_n \xrightarrow{W} A$

**Théorème 1.2.2.** Soit  $A_n \in \mathcal{L}(E, F)$ , alors

1.  $A_n \xrightarrow{U} A \Rightarrow A_n \xrightarrow{S} A$

2.  $A_n \xrightarrow{S} A \Rightarrow A_n \xrightarrow{W} A$

**Remarque 1.2.5.**  $A_n \xrightarrow{S} A \not\Rightarrow A_n \xrightarrow{U} A$

## 1.2.2 Inverse d'un opérateur

**Définition 1.2.16. (Inversibilité)** Soient  $E, F$  deux espaces normés,  $A \in \mathcal{L}(E, F)$ .

L'opérateur  $A$  est dit *inversibilité*, si pour tout  $y \in F$  l'équation

$$Ax = y$$

a une solution et une seule.

**Définition 1.2.17.** On dit que  $A \in \mathcal{L}(E, F)$  est *inversible* s'il est bijectif et si son inverse est continu.

**Théorème 1.2.3.** L'inverse d'un opérateur linéaire  $A$  existe et seulement si  $Ax = 0$  implique  $x = 0$ , quand  $A^{-1}$ , existe c'est un opérateur.

**Définition 1.2.18. (Opérateur inverse)**

On dit que  $A \in \mathcal{L}(E, F)$  est *inversible* s'il existe  $B \in \mathcal{L}(E, F)$  tel que

$$AB = I_E \text{ et } BA = I_F.$$

l'opérateur  $B$  (lorsqu'il existe) est unique. On l'appelle l'inverse de  $A$  et note par  $A^{-1}$ .

**Théorème 1.2.4.** [14] *L'opérateur  $A^{-1}$ , inverse d'un opérateur linéaire  $A$ , est aussi linéaire.*

**Remarque 1.2.6.**

1. *Un opérateur linéaire continu  $B$  est dit être un inverse gauche de  $A$  si  $BA=I$*
2. *Un opérateur linéaire continu  $C$  est dit être un inverse droite de  $A$  si  $AC=I$*

**Exemple 1.2.5.** *L'opérateur  $I$  est inversible, et  $I^{-1} = I$ .*

**Théorème 1.2.5. (Série de Neumann)**

*Soit  $A$  un opérateur linéaire borné d'un espace de Banach  $E$  dans lui-même avec  $\|A\| < 1$ , et soit  $I$  l'opérateur identique dans  $E$ .*

*Alors, l'opérateur  $I - A$  admet un opérateur inverse borné, donné par la série de Neumann*

$$(I - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k$$

*De plus*

$$\|(I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|A\|}$$

**Démonstration.** voir [9]

### 1.2.3 L'adjoint d'opérateur

**Définition 1.2.19. (opérateur adjoint)**

*Soient  $H$  et  $K$  deux espace de Hilbert et  $T \in \mathcal{L}(H, K)$  l'opérateur  $T^* \in \mathcal{L}(K, H)$  tel que pour tout  $x \in H, y \in K$  on ait*

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle$$

*est appelé adjoint de  $T$ .*

**Exemple 1.2.6.**

1. *On a  $\langle Ix, y \rangle = \langle x, I^*y \rangle$ , or  $\langle Ix, y \rangle = \langle x, y \rangle$ , pour tout  $x, y \in H$ .*

*Donc*

$$I^* = I.$$

2. *Soit*

$$A : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \longmapsto (0, y)$$

Soit  $X = (x_1, x_2)$  et  $Y = (y_1, y_2)$

$$\begin{aligned}\langle AX, Y \rangle &= \langle A(x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle \\ &= \langle (0, x_2), (y_1, y_2) \rangle \\ &= x_2 y_2\end{aligned}\tag{1.11}$$

On a  $\langle AX, Y \rangle = \langle X, A^*Y \rangle$

Posons  $A^*Y = Z = (z_1, z_2)$

$$\begin{aligned}\langle X, Z \rangle &= \langle (x_1, x_2), (z_1, z_2) \rangle \\ &= x_1 z_1 + x_2 z_2\end{aligned}\tag{1.12}$$

Par (1.11) et (1.12) on obtient  $z_1 = 0$  et  $z_2 = y_2$

Alors,  $A^*$  est défini par

$$A^*(x, y) = (0, y)$$

3. On considère opérateur shift  $S : \ell^2(\mathbb{C}) \longrightarrow \ell^2(\mathbb{C})$  défini par

$$S(x_1, x_2, \dots) = (0, x_1, x_2, \dots).$$

Soit  $(x_n)$  et  $(y_n)$  dans  $\ell^2(\mathbb{C})$ . Alors

$$\begin{aligned}\langle S^* x_n, y_n \rangle &= \langle x_n, S y_n \rangle \\ &= \langle (x_1, x_2, \dots), (0, y_1, y_2, \dots) \rangle \\ &= x_2 \bar{y}_1 + x_3 \bar{y}_2 + \dots \\ &= \langle (x_2, x_3, \dots), (y_1, y_2, \dots) \rangle.\end{aligned}$$

Alors  $S^*$  est défini par

$$S^*(x_1, x_2, \dots) = (x_2, x_3, \dots).$$

### **Théorème 1.2.6. (Propriétés de l'adjoint)**

1.  $(\alpha T + \beta S)^* = \bar{\alpha} T^* + \bar{\beta} S^*$ , pour tout  $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ .
2.  $(TS)^* = S^* T^*$ .
3. Si  $T$  est inversible,  $T^*$  est aussi et on a  $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$ .
4.  $(T^*)^* = T$ .
5.  $\|T^*\| = \|T\|$ .
6.  $\|T^* T\| = \|T\|^2$

### Démonstration.

1.

$$\begin{aligned}\langle x, (\alpha T + \beta S)^*(y) \rangle &= \langle (\alpha T + \beta S)x, y \rangle \\ &= \langle x, \overline{\alpha T^* y} \rangle + \langle x, \overline{\beta S^* y} \rangle \\ &= \alpha \langle Tx, y \rangle + \beta \langle Sx, y \rangle \\ &= \langle x, (\overline{\alpha T^*} + \overline{\beta S^*})(y) \rangle\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}\langle (TS)^*(x), y \rangle &= \langle x, (TS)y \rangle \\ &= \langle T^*x, Sy \rangle \\ &= \langle T^*S^*(x), y \rangle\end{aligned}$$

3. Si  $T$  est inversible on a  $TT^{-1} = T^{-1}T = I$ , d'où  $(T^{-1})^*T^* = T^*(T^{-1})^* = I^* = I$ .

4. Posons  $S = (T^*)^*$ . On a  $\langle T^*x, y \rangle = \langle x, Sy \rangle$ .

Mais

$$\langle T^*x, y \rangle = \overline{\langle y, T^*x \rangle} = \overline{\langle Ty, x \rangle} = \langle x, Ty \rangle$$

Donc

$$\langle x, Ty \rangle = \langle x, Sy \rangle$$

D'après le corollaire (1.2.2), on trouve

$$T = S$$

5. On a

$$|\langle Tx, y \rangle| = |\langle x, T^*y \rangle| \leq \|T\| \|x\| \|y\|.$$

Choisissons  $x = T^*y$ . Alors

$$\|T^*y\|^2 \leq \|T\| \|T^*y\| \|y\|$$

Ou bien

$$\|T^*y\| \leq \|T\| \|y\|$$

Cette inégalité exprime que  $T^*$  est borné et que

$$\|T^*\| \leq \|T\|$$

Choisissons  $T = T^*$ , donc on a aussi

$$\|T\| \leq \|T^*\|$$

Par conséquent, on trouve

$$\|T\| = \|T^*\|$$

6. On a

$$\begin{aligned} \|T^*T\| &\leq \|T^*\| \|T\| = \|T\|^2 \\ \|T^*T\| &= \sup_{\|x\| \leq 1} \|T^*T(x)\| \\ &= \sup_{\|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1} |\langle T^*T(x), y \rangle| \\ &\geq \sup_{\|x\| \leq 1} |\langle T^*T(x), x \rangle| \\ &= \sup_{\|x\| \leq 1} |T(x), T(x)| \\ &= \|T\|^2 \end{aligned}$$

Par conséquent  $\|T^*T\| = \|T\|^2$ .

## 1.2.4 Spectre d'un opérateur

**Définition 1.2.20.** (*Valeur propre et vecteur propre*)

Soit  $E$  un espace normé et  $T \in \mathcal{L}(E)$ . Un nombre  $\lambda \in \mathbb{C}$  s'appelle valeur propre de l'opérateur  $T$ , si l'équation  $(T - \lambda I)x = 0$ , a une solution  $x \neq 0$  dans  $E$ .

Une telle solution  $x$  est appelée vecteur propre (ou une fonction propre) associé à la valeur propre  $\lambda$ .

**Définition 1.2.21.** (*point régulier*)

Soit  $T \in \mathcal{L}(E)$ , le nombre  $\lambda \in \mathbb{C}$  s'appelle un point régulier de l'opérateur  $T$  si  $(T - \lambda I)$  est inversible.

**Définition 1.2.22.** (*ensemble résolvante et la résolvante*)

• On appelle ensemble résolvante de  $T$  l'ensemble des points réguliers de l'opérateur  $T$  et note par  $\rho(T)$  tel que

$$\rho(T) = \{ \lambda \in \mathbb{C}, T - \lambda I \text{ inversible} \}.$$

L'ensemble résolvante  $\rho(T)$  est un ouvert de  $\mathbb{C}$ .

- On définit la résolvante de l'opérateur  $T$  comme

$$R_\lambda(T) = (T - \lambda I)^{-1}$$

**Théorème 1.2.7.** Si  $|\lambda| > \|T\|$ , alors  $\lambda$  est un point régulier de l'opérateur  $T$  (i.e.  $\lambda \in R_\lambda(T)$ ).

**Preuve.** Posons  $G = \frac{1}{\|\lambda\|}T$ , alors  $\|G\| = \frac{1}{\|\lambda\|}\|T\| < 1$  (car  $|\lambda| > \|T\|$ ), donc l'opérateur  $G - I$  est inversible et  $(G - I)^{-1} = (\frac{1}{\lambda}T - I)^{-1}$  existe et il est borné. C'est-à-dire  $\lambda \in R_\lambda(T)$ .

**Théorème 1.2.8. (Spectre d'un opérateur)**

On appelle spectre de  $T$  l'ensemble

$$\sigma(T) = \mathbb{C} \setminus \rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}, T - \lambda I \text{ n'est pas inversible}\}.$$

L'ensemble  $\sigma(T)$  est un fermé de  $\mathbb{C}$ .

**Corollaire 1.2.3.**

1.  $\sigma(T) \cup \rho(T) = \mathbb{C}$
2.  $\sigma(T) \cap \rho(T) = \emptyset$
3. Si  $\lambda \in \sigma(T)$ , alors  $|\lambda| \leq \|T\|$  i.e.  $\sigma(T) \subset \{\lambda, |\lambda| \leq \|T\|\}$  C'est-à-dire,  $\sigma(T) \subset \overline{B}(0, \|T\|)$ .
4. Le spectre d'un opérateur borné n'est jamais vide i.e.  $\sigma(T) \neq \emptyset$ .

**Définition 1.2.23. (Le spectre ponctuel)**

On appelle spectre ponctuel de  $T$  l'ensemble des valeurs propres de  $T$ , noté  $\sigma_p(T)$  tel que

$$\sigma_p(T) = \{\lambda \in \sigma(T), T - \lambda I \text{ non injectif}\}.$$

**Remarque 1.2.7.**

- Si  $E$  est dimension finie  $n$ , alors

$$\sigma(T) = \sigma_p(T).$$

et le spectre de  $T$  est un ensemble fini ayant au plus  $n$  éléments qui sont les racines du polynôme caractéristique de  $T$ .

- Mais si  $E$  est dimension infinie on a

$$\sigma_p(T) \subset \sigma(T).$$

**Exemple 1.2.7. (cas de la dimension finie)**

Soit  $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  défini par

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

On a

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 4 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4 = (\lambda - 4)(\lambda + 4)$$

Alors

$$\sigma(A) = \sigma_p(A) = \{-4, 4\}.$$

**Définition 1.2.24. (Le spectre continu)**

On appelle spectre continu de  $T$  et on note par  $\sigma_c(T)$ , l'ensemble

$$\sigma_c(T) = \{\lambda \in \sigma(T), T - \lambda I \text{ injectif et } \overline{\text{Im}(T - \lambda I)} = E\}$$

**Définition 1.2.25. (Le spectre résiduel)**

On appelle spectre résiduel de  $T$  et on note par  $\sigma_r(T)$ , l'ensemble

$$\sigma_r(T) = \{\lambda \in \sigma(T), T - \lambda I \text{ injectif et } \overline{\text{Im}(T - \lambda I)} \neq E\}$$

**Remarque 1.2.8.** Le spectre  $\sigma(T)$  est la réunion disjointe de trois ensembles

$$\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \sigma_c(T) \cup \sigma_r(T).$$

**Définition 1.2.26. (Le spectre approximatif)**

Le spectre approximatif de  $T \in \mathcal{L}(H)$ , noté par  $\sigma_{ap}(T)$  défini par

$$\sigma_{ap}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}, \exists (x_n) \subset H, \text{ tel que } \|x_n\| \text{ et } \|(T - \lambda I)x_n\| \rightarrow 0\}$$

**Proposition 1.2.5.** Soit  $T \in \mathcal{L}(E)$  et  $\lambda \in \mathbb{C}$ , alors

1.  $\sigma(T^*) = \{\bar{\lambda} \in \mathbb{C}, \lambda \in \sigma(T)\}$ .
2.  $\sigma(T^{-1}) = \sigma(T)^{-1}$  si  $T$  est inversible.
3.  $\sigma(\lambda I - T) = \lambda - \sigma(T)$ .

**Définition 1.2.27. (Rayon spectrale)**

Soit  $T \in \mathcal{L}(E)$ , on définit le rayon spectral de  $T$  comme suit

$$r(T) = \sup\{|\lambda|, \lambda \in \sigma(T)\}.$$

**Exemple 1.2.8.** Soit  $H = L^2([0, 1])$  on considère l'opérateur de multiplication par  $x$

$$Tf(x) = xf(x).$$

On a  $\|T\| = 1$  et donc

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| \leq 1\}.$$

Alors,  $\sigma(T) = [0, 1]$ , donc  $r(T) = 1$ .

**Théorème 1.2.9.** Le rayon spectral satisfait

$$r(T) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

**Preuve.** Voir [4]

**Corollaire 1.2.4.** On a

$$r(T) \leq \|T\|.$$

# Chapitre 2

## Propriétés des opérateurs normaux

Dans ce chapitre, on va parler quelques classes des opérateurs linéaires bornés, et nous allons intéresser présenté propriétés des opérateurs normaux.

### 2.1 Quelques classes des opérateurs

#### 2.1.1 L'opérateur auto-adjoint

**Définition 2.1.1.** *Un opérateur  $A \in \mathcal{L}(H)$  est dit auto-adjoint (ou parfois hermitien) s'il est égale à son adjoint, c'est-à-dire si, quels que soient  $x$  et  $y$  dans  $H$*

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle.$$

**Exemple 2.1.1.** 1. *Soit le matrice  $A$  de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  tel que*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

*On remarque  $A = A^*$  donc  $A$  est auto-adjoint.*

2. *Considérons l'opérateur  $A$  défini sur  $L^2(\mathbb{R})$  par*

$$Ax(t) = e^{-|t|}x(t)$$

*$A$  est un opérateur borné auto-adjoint, car*

$$\langle Ax, y \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|}x(t)\overline{y(t)}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\overline{e^{-|t|}y(t)}dt = \langle x, Ay \rangle$$

**Remarque 2.1.1.** *Tout opérateur borné  $T$  sur un espace de Hilbert  $H$  à la représentation  $T = A + iB$ , où  $A$  et  $B$  sont deux opérateurs auto-adjoints, de plus  $T^* = A - iB$ .*

*En effet, il suffit de prendre*

$$A = \frac{1}{2}(T^* + T) \quad \text{et} \quad B = \frac{i}{2}(T^* - T).$$

**Proposition 2.1.1.** [5] *(Caractérisation d'un auto-adjoint)*

*Soit  $H$  un espace de Hilbert sur  $\mathbb{C}$ . Un élément  $A$  de  $\mathcal{L}(H)$  est auto-adjoint si et seulement si, pour tout  $x$  dans  $E$ ,  $\langle Ax, x \rangle$  est un nombre réel.*

**Preuve.**

En effet

$$\langle Ax, x \rangle = \langle x, Ax \rangle = \overline{\langle Ax, x \rangle}$$

Donc  $\langle Ax, x \rangle \in \mathbb{R}$

**Proposition 2.1.2.** *Si  $A$  et  $B$  deux opérateurs auto-adjoints. Alors*

- 1)  $\alpha A + \beta B$  est un auto-adjoint pour tout  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
- 2)  $AB$  est auto-adjoint si et seulement si  $AB = BA$
- 3) Si  $A$  est un opérateur quelconque alors  $A^*A$ ,  $AA^*$  et  $A + A^*$  sont auto-adjoints

**Démonstration.**

1.  $\forall x, y \in H$

$$\begin{aligned} \langle (\alpha A + \beta B)x, y \rangle &= \langle \alpha Ax, y \rangle + \langle \beta Bx, y \rangle \\ &= \alpha \langle Ax, y \rangle + \beta \langle Bx, y \rangle \\ &= \alpha \langle x, Ay \rangle + \beta \langle x, By \rangle \\ &= \langle x, \alpha Ay \rangle + \beta \langle x, By \rangle \\ &= \langle x, (\alpha A + \beta B)y \rangle \end{aligned}$$

Donc l'opérateur  $\alpha A + \beta B$  est auto-adjoint.

2. On montre que

$AB$  auto-adjoint  $\implies AB=BA$

$AB$  auto-adjoint d'où,

$$(AB)^* = AB$$

$$(AB)^* = B^*A^* = AB$$

Donc

$$BA = AB$$

Maintenant on montre que

$$AB = BA \implies (AB) \text{ auto-adjoint}$$

On a

$$(AB)^* = B^*A^* = BA = AB$$

$$3. (A^*A)^* = A^*(A^*)^* = A^*A$$

$$(A + A^*)^* = A^* + (A^*)^* = A^* + A.$$

**Corollaire 2.1.1.** [5] Soit  $H$  un espace de Hilbert sur  $\mathbb{C}$  et  $A$  dans  $\mathcal{L}(H)$ .

Si  $\langle Ax, x \rangle = 0$  pour tout  $x \in H$ , alors  $A = 0$ .

**Théorème 2.1.1. (Norme d'un opérateur auto-adjoint)**

Si  $A$  est un opérateur auto-adjoint, alors

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} |\langle Ax, x \rangle|$$

De plus, si le maximum est atteint en  $x_0$ , alors celui-ci est vecteur propre de  $A$  associé à  $\|A\|$  ou  $-\|A\|$ .

**Preuve.** Voir [5]

**Proposition 2.1.3.** [5] Soit  $A \in \mathcal{L}(H)$  un opérateur auto-adjoint et soit  $F$  un sous-espace de  $H$ .

Si  $F$  est invariant par  $A$ , alors  $F^\perp$  est aussi invariant par  $A$ .

**Démonstration.**

En effet, pour tout  $x \in F$  et  $y \in F^\perp$ , on a

$$\langle Ay, x \rangle = \langle y, Ax \rangle = 0$$

car  $Ax$  appartient à  $F$ , il en résulte que  $Ay$  appartient à  $F^\perp$ .

## 2.1.2 Définitions élémentaires et exemples

### Définition 2.1.2. (*Opérateur unitaire*)

Un opérateur borné  $T$ , défini sur un espace de Hilbert  $H$ , est dit unitaire si

$$TT^* = T^*T = I$$

C'est-à-dire  $T$  est l'inverse de son adjoint. (i.e.  $T^{-1} = T^*$ )

**Exemple 2.1.2.** Soit  $H = L^2[0, 1]$  défini sur un opérateur  $T$  sur  $H$  par

$$Tf(t) = f(1 - t), \quad t \in [0, 1]$$

On calcul l'opérateur  $T$

$$\langle Tf(t), g(t) \rangle = \langle f(1 - t), g(t) \rangle = \int_0^1 f(1 - t) \overline{g(t)} dt$$

On prend  $y = 1 - t \implies dy = -dt$ , alors

$$\int_0^1 f(y) \overline{g(1 - y)} = \langle f(y), T^*g(y) \rangle$$

D'où,

$$T^*g(y) = g(1 - y)$$

C'est-à-dire,

$$T^*f(t) = f(1 - t).$$

Maintenant on vérifie facilement que  $T$  est un opérateur unitaire, telle que

$$TT^*f(t) = Tf(1 - t) = f(t)$$

$$T^*Tf(t) = T^*f(1 - t) = f(t)$$

Donc

$$TT^* = T^*T = I$$

### Définition 2.1.3. (*Opérateur isométrique*)

Un opérateur linéaire  $A$  sur un espace de Hilbert  $H$  est isométrique (ou est isométrie) si

$$A^*A = I$$

Ou bien,

$$\forall x \in H, \quad \|Ax\| = \|x\|$$

**Exemple 2.1.3.** L'opérateur de décalage  $S$  (ou Shift) est un isométrie, car pour

$$S(x_1, x_2, \dots) = (0, x_1, x_2, \dots)$$

$$S^*(x_1, x_2, \dots) = (x_2, x_3, \dots)$$

On a,

$$S^*S(x_1, x_2, \dots) = S^*(0, x_1, x_2, \dots) = (x_1, x_2, \dots)$$

Alors

$$S^*S = I$$

**Définition 2.1.4. (Opérateur projection)**

Un opérateur linéaire  $p$  sur un espace de Hilbert  $H$  est dit projection si

$$p^2 = p$$

**Définition 2.1.5. (Opérateur projection orthogonale)**

Un opérateur linéaire  $p$  sur un espace de Hilbert  $H$  est dit projection orthogonale si

$$p = p^2 = p^*$$

**Exemple 2.1.4.** Soit l'opérateur  $A$  défini par

$$A : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x_1, x_2, x_3) \longmapsto (x_1, 0, x_3)$$

On peut vérifier que

$$A^*(x_1, x_2, x_3) = (x_1, 0, x_3)$$

Alors,

$$A(x_1, x_2, x_3) = A^*(x_1, x_2, x_3) = A^2(x_1, x_2, x_3) = (x_1, 0, x_2)$$

Donc  $A$  est une projection orthogonale

**Définition 2.1.6. (Opérateur anti-hermitien)**

Un opérateur linéaire  $A$  sur un espace de Hilbert  $H$  est dit anti-hermitien si

$$A^* = -A$$

**Exemple 2.1.5.** Soit  $T = iI$

D'où

$$T^* = -iI$$

Donc

$$T^* = -T$$

i.e.  $T$  est anti-hermitien

**Définition 2.1.7. (Opérateur positif)**

Un opérateur linéaire  $p$  sur un espace de Hilbert  $H$  est dit positif (ce qui est noté  $A \geq 0$ ) si

$$\forall x \in H \quad \langle Ax, x \rangle \geq 0.$$

**Exemple 2.1.6.**

1. l'opérateur identité et l'opérateur nul sont positifs.
- 2.

$$A : L^2([0, 1]) \longrightarrow L^2([0, 1])$$

$$f \longmapsto xf$$

$$\langle Af, f \rangle = \langle xf(x), f(x) \rangle \quad \forall f \in L^2([0, 1])$$

$$= \int_0^1 xf(x)\overline{f(x)}dx$$

$$= \int_0^1 x|f(x)|^2dx \geq 0.$$

### 2.1.3 Opérateurs compacts

**Définition 2.1.8.** Soit  $U$  un ensemble d'un espace norme  $E$ ,  $U$  est dit compact si de tout recouvrement de  $U$  par des ouverts de  $U$  on peut extraire un sous-recouvrement fini i.e.

$$\forall V_j, j \in J \text{ (ouvert); } U \subset \cup_{j \in J} V_j, \exists V_j(k), j(k) = 1, 2, \dots, n; \text{ tel que } U \subset \cup_{k=1}^n V_j(k).$$

**Définition 2.1.9. (Relativement compact)**

Un sous-ensemble  $U$  de  $E$  est relativement compact si son adhérence  $\overline{U}$  est compact.

**Définition 2.1.10. (Opérateur compact)**

Un opérateur  $T$  qui applique un espace normé  $E$  dans  $F$ , s'appelle opérateur compact, s'il transforme tout ensemble borné de  $E$  en un ensemble relativement compact de  $F$ .

**Définition 2.1.11.** On dit  $T$  est un opérateur compact s'il transforme la boule unité  $B_E$  de  $E$  en une partie relativement compact de  $F$ .

On en déduit le résultat suivant

**Définition 2.1.12. (Critère de compacité)**

L'opérateur  $T$  est compact, si et seulement si pour toute suite bornée  $\{x_n\}_{n \geq 1} \subset E$ , la suite  $\{Tx_n\}_{n \geq 1}$  admet une sous-suite convergente dans  $F$ .

Dans le cas particulier où  $E = C([a, b])$ , le théorème suivant d'Aszela-Ascoli est généralement utilisé pour prouver la compacité de  $T$ .

**Théorème 2.1.2. (Aszela-Ascoli)**

Une condition nécessaire et suffisante qu'une famille des fonctions continues définie sur l'intervalle compact  $[a, b]$  est relativement compact dans  $C([a, b])$  est que cette famille est uniformément bornée et équicontinue.

**Exemple 2.1.7.** Considérons l'opérateur de Volterra

$$V : L^2([0, 1]) \longrightarrow C([0, 1])$$
$$f(t) \longmapsto \int_0^x f(t) dt$$

Soit

$$\overline{B}(0, 1) = \{f \in L^2, \|f\| \leq 1\}.$$

On va montrer que  $V\overline{B}(0, 1)$  est relativement compact dans  $C([a, b])$ .

$V\overline{B}(0, 1)$  est uniformément borné car

$$\|Vf\|_\infty = \sup_{x \in [0, 1]} \left| \int_0^x f(t) dt \right|$$

Puisque,

$$\left| \int_0^x f(t) dt \right| \leq \int_0^1 |f(t)| dt = \|f\|_{L^1}$$

Alors

$$\|Vf\|_\infty \leq \|f\|_{L^1}.$$

On sait que

$$\|f\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^2}.$$

Donc,

$$\|Vf\|_\infty \leq \|f\|_{L^2}$$

$$\|Vf\|_\infty \leq 1.$$

$V\overline{B}(0,1)$  est équicontinue car

$\forall x_1, x_2 \in [0, 1]$  on a

$$\begin{aligned} Vf(x_2) - Vf(x_1) &= \int_0^{x_2} f(t) dt - \int_0^{x_1} f(t) dt \\ &= \int_{x_1}^{x_2} f(t) dt \\ |Vf(x_2) - Vf(x_1)| &= \left| \int_{x_1}^{x_2} f(t) dt \right| \\ &\leq \int_{x_1}^{x_2} |f(t)| dt \\ &\leq \left( \int_{x_1}^{x_2} |f(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{x_1}^{x_2} dt \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq |x_2 - x_1|^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

D'après le théorème d'Aszela-Ascoli. L'ensemble  $V\overline{B}(0,1)$  est relativement compact, d'où l'opérateur  $V$  est compact.

**Remarque 2.1.2.** *L'opérateur identique  $I$  de  $E$  dans  $F$  est compact si et seulement si,  $E$  de dimension finie.*

**Remarque 2.1.3.** *On désignera par  $\mathcal{K}(E)$  l'ensemble des opérateurs compacts de  $E$  dans lui-même.*

**Théorème 2.1.3.** *Tout opérateur compact est borné, c'est-à-dire que l'on a l'inclusion  $\mathcal{K}(E) \subset \mathcal{L}(E)$ .*

**Démonstration.** *Soit  $A$  un opérateur compact dans  $E$ . L'image de la boule unité de  $E$  est un ensemble relativement compact, donc borné. Il existe, alors, une constante  $M > 0$ , telle que*

$$\text{pour tout } y \in E, \quad \|y\| \leq 1, \quad \|Ay\| \leq M$$

*On en déduit que*

$$\|Ax\| \leq M\|x\|, \text{ pour tout } x \in E$$

*L'opérateur  $A$  est donc continu et sa norme est majorée par  $M$ .*

**Remarque 2.1.4.** *La réciproquement, L'opérateur identique  $I$  de  $E$  dans  $F$  borné, mais il n'est pas compact car*

*$I(B(0, 1)) = B(0, 1)$  n'est pas relativement compact sauf si  $E$  est de dimension finie.*

**Théorème 2.1.4.** [5] *L'ensemble  $\mathcal{K}(E)$  est*

*a) un sous-espace vectoriel fermé de  $\mathcal{L}(E)$ .*

*b) un idéal bilatère de  $\mathcal{L}(E)$ , c'est-à-dire que si  $A \in \mathcal{K}(E)$  et  $B \in \mathcal{L}(E)$ , alors  $AB$  et  $BA$  sont dans  $\mathcal{K}(E)$ .*

**Théorème 2.1.5.** *Soit  $A$  un opérateur compact dans  $E$ . Alors, l'image par  $A$  de toute suite de  $E$  faiblement convergente est une suite (fortement) convergente.*

**Corollaire 2.1.2.** *Soit  $(e_k)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , une suite orthonormée dans  $E$ . Si  $A$  un élément de  $\mathcal{K}(E)$ , alors*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|Ae_k\| = 0$$

**Preuve.** Pour tout  $x \in E$  la série  $\sum_k |\langle x, e_k \rangle|^2$  est convergent et son terme général

$$\langle x, e_k \rangle \longrightarrow 0 \quad (k \longrightarrow \infty)$$

Cela traduit le fait que la suite  $(e_k) \xrightarrow{W} 0$  le théorème précédent

$$\|Ae_k\| \longrightarrow 0 \quad (k \longrightarrow +\infty)$$

**Théorème 2.1.6.** [6] Une combinaison linéaire  $T = \alpha T_1 + \beta T_2$  des opérateurs compacts est un opérateur compact, pour tous les scalaires  $\alpha, \beta$

**Théorème 2.1.7.** Le produit  $AB$  de deux opérateurs bornés  $A$  et  $B$  est compact, si l'un des opérateurs  $A$  ou  $B$  est compact.

**Preuve.** Si  $A$  est compact, alors  $A(B_E)$  est relativement compact dans  $E$  et comme  $B$  est borné, d'où  $B(A(B_E))$  est relativement compact, donc  $AB$  est compact.

Si  $B$  est compact, on applique le même argument.

**Corollaire 2.1.3. (L'inverse d'un opérateur compact)**

Dans un espace  $E$  dimension infinie l'inverse d'un opérateur compact ne peut pas être borné. En effet, dans le cas contraire, l'opérateur identique  $I = A^{-1}A$  serait compact dans  $E$ , ce qui est impossible.

**Théorème 2.1.8. (Schauder)**

Si  $A \in \mathcal{L}(H)$  est compact, alors  $A^*$  est compact.

**Preuve.** Voir [3]

**Théorème 2.1.9.** [5] Soit  $E$  un espace normé et  $F$  un espace Banach, et soit  $\{T_n\}$  une suite d'opérateurs compacts de  $E$  dans  $F$ , Si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n - T\| = 0.$$

Alors,  $T$  est compact.

**Opérateur de rang fini**

**Définition 2.1.13.** Un opérateur  $A$  est de rang fini. Si  $\dim A(E) < \infty$ ,  $\dim R(E) < \infty$ .

**Exemple 2.1.8.** Sur l'espace de Hilbert  $L^2([0, \pi], dx)$ , l'opérateur  $A$  défini par

$$Af(x) = \int_0^\pi \cos(x-s)f(s)ds, \text{ pour } f \in L^2([0, \pi], dx)$$

est manifestement un opérateur linéaire, continu et l'expression

$$Af(x) = \left( \int_0^\pi \cos(u)f(u)du \right) \cos x + \left( \int_0^\pi \sin(u)f(u)du \right) \sin x$$

montre que l'image de  $A$  est un sous-espace de dimension deux. L'opérateur  $A$  est donc de rang fini égal à 2.

**Théorème 2.1.10.** *Un opérateur borné  $A$  est de rang fini si et seulement si, son adjoint  $A^*$  est aussi. Dans ce cas  $A$  et  $A^*$  ont même rang.*

**Théorème 2.1.11.** *Tout opérateur de rang fini est compact.*

**Démonstration.** En effet, un opérateur de rang fini étant borné, il transforme un ensemble borné en un ensemble borné. Or dans un espace de dimension finie, un ensemble borné est relativement compact.

Il est facile de voir que  $\mathcal{K}_0(E)$  constitue un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{K}(E)$

**Théorème 2.1.12.** *Soit  $A$  un élément de  $\mathcal{L}(E)$ . Les assertions suivantes sont équivalentes*

- a) *L'opérateur  $A$  est compact.*
- b) *L'opérateur  $A^*$  est compact.*
- c) *L'opérateur  $A$  est limite d'une suite d'opérateurs de rang fini.*

## 2.2 Les opérateur normaux

### 2.2.1 Définitions et propriétés

**Définition 2.2.1.** *On dit que  $T \in \mathcal{L}(H)$  est un opérateur normal si  $T$  commute avec son adjoint.*

$$i.e. \quad T^*T = TT^*.$$

**Remarque 2.2.1.** *On remarque que tous les classes des opérateurs que nous étudions précédents sont opérateurs normaux sauf l'opérateur isométrique*

**Exemple 2.2.1.** 1. La multiplication  $T_\varphi$  par une fonction mesurable bornée  $\varphi$  est un opérateur normal sur  $L^2([0, 1])$ , car

$$T_\varphi : L^2([0, 1]) \longrightarrow L^2([0, 1]), \quad \varphi \in C([0, 1])$$

$$(T_\varphi f)(t) = \varphi(t)f(t)$$

On a

$$\langle T_\varphi f, g \rangle = \langle f, T_\varphi g \rangle \quad \forall f, g \in L^2([0, 1])$$

$$\langle \varphi(t)f(t), g(t) \rangle = \langle f(t), \overline{\varphi(t)}g(t) \rangle$$

Donc

$$(T_\varphi^* g)(t) = \overline{\varphi(t)}g(t)$$

D'où

$$T_\varphi^* = T_{\overline{\varphi}}.$$

Alors,

$$T_\varphi^* T_\varphi = T_{\overline{\varphi}} T_\varphi = T_\varphi T_{\overline{\varphi}} = T_\varphi T_\varphi^*$$

Donc  $T_\varphi$  est un opérateur normal.

L'opérateur  $T_\varphi$  est un hermitien (auto-adjoint) si fonction  $\varphi$  est réelle.

2. Soit l'opérateur Shift

$$S(x_1, x_2, \dots) = (0, x_1, x_2, \dots)$$

pour  $(x_1, x_2, \dots) \in \ell^2(\mathbb{C})$

On a montré précédemment que  $S^*S = I$ , et  $S^*(x_1, x_2, \dots) = (x_2, x_3, \dots)$

D'où

$$SS^*(x_1, x_2, \dots) = S(x_2, x_3, \dots) = (0, x_2, x_3, \dots)$$

Alors

$$S^*S \neq SS^*$$

Donc,  $S$  n'est pas normal.

**Proposition 2.2.1.** [6] Soit  $T \in \mathcal{L}(H)$ , les assertions suivantes sont équivalentes

a)  $T$  est normal.

b)  $\|Tx\| = \|T^*x\|$  pour tout  $x \in H$ .

Dans le cas complexe, ces assertions sont équivalentes à

c) Les parties réelles et imaginaires de  $T$  commutent.

**Démonstration.**

a) Pour tout  $x \in H$ , on a

$$\begin{aligned} \|Tx\| &= \|T^*x\| \Leftrightarrow \|Tx\|^2 = \|T^*x\|^2 \\ &\Leftrightarrow \langle Tx, Tx \rangle = \langle T^*x, T^*x \rangle \\ &\Leftrightarrow \langle x, T^*Tx \rangle = \langle x, TT^*x \rangle \\ &\Leftrightarrow T^*T = TT^*, \text{ pour tout } x \in H. \end{aligned}$$

b) On pose  $T = A + iB$ , tel que  $A = \operatorname{Re}(T)$  et  $B = \operatorname{Im}(T)$ , on a  $T^* = A - iB$

$$\begin{aligned} TT^* &= (A + iB)(A - iB) \\ &= A^2 - iAB + iBA + B^2 \\ TT^* &= (A - iB)(A + iB) \\ &= A^2 + iAB - iBA + B^2 \end{aligned}$$

Alors,

$$TT^* - T^*T = 2i(BA - AB)$$

Donc  $TT^* = T^*T$  si et seulement si  $AB = BA$ .

**Proposition 2.2.2.**

1. Si  $a \in \mathbb{C}$  et  $T$  est normal, alors  $aT$  est aussi normal.
2.  $T$  normal  $\Rightarrow T^n$  normal pour tout  $n \in \mathbb{N}$

**Démonstration.**

1. Nous avons

$$\begin{aligned} (aT)(aT)^* &= (aT)\bar{a}T^* = a\bar{a}TT^* \\ (aT)^*(aT) &= (\bar{a}T^*)(aT) = \bar{a}aT^*T. \end{aligned}$$

Puisque  $T$  est normal, ils sont égaux

2.  $T$  normal  $\Rightarrow TT^* = T^*T$

$$\Rightarrow (TT^*)^n = (T^*T)^n$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow T^n (T^*)^n &= (T^*)^n T^n \\ \Rightarrow T^n (T^n)^* &= (T^n)^* T^n. \end{aligned}$$

Donc  $T^n$  opérateur normal, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

**Corollaire 2.2.1.** *Soit  $P$  est polynôme et  $T$  est normal. Alors,  $P(T)$  est aussi normal.*

**Remarque 2.2.2.**  $T^n$  normal  $\nRightarrow T$  normal, pour tout  $n \geq 2$ .

**Exemple 2.2.2.** *En effet, soit*

$$T = \begin{pmatrix} i & 2 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

On a  $T^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  est normal, mais  $T$  n'est pas normal.

**Proposition 2.2.3.** [8] *Soit  $T \in \mathcal{L}(E)$  est normal, on a*

$$\ker T \oplus \overline{\operatorname{Im} T} = H.$$

**Preuve.**

On sait que  $\ker T^* = (\operatorname{Im} T)^\perp$  et  $T$  normal

D'où

$$\ker T^* = \ker T = (\operatorname{Im} T)^\perp$$

ce implique

$$(\ker T)^\perp = ((\operatorname{Im} T)^\perp)^\perp = \overline{\operatorname{Im} T}$$

et on a

$$\ker T \oplus (\ker T)^\perp = H$$

i.e

$$\ker T \oplus \overline{\operatorname{Im} T} = H$$

**Proposition 2.2.4. (Inverse d'un opérateur normal)**

*Soit  $T \in \mathcal{L}(H)$  est normal et inversible d'inverse  $T^{-1}$ , alors  $T^{-1}$  est normal.*

**Preuve.**

On a

$$\begin{aligned}(TT^*)^{-1} &= (T^*T)^{-1} \\ \Rightarrow (T^*)^{-1}T^{-1} &= T^{-1}(T^*)^{-1} \\ \Rightarrow (T^{-1})^*T^{-1} &= T^{-1}(T^*)^{-1}\end{aligned}$$

i.e  $T^{-1}$  est normal.

**Proposition 2.2.5.** [13] *Pour tout  $U$  est unitaire l'opérateur  $U^*TU$  normal si et seulement si  $T$  est normal.*

**Preuve.**

On a

$$(U^*TU)^*(U^*TU) = U^*T^*UU^*TU = U^*T^*TU$$

et

$$(U^*TU)(U^*TU)^* = U^*TUU^*T^*U = U^*TT^*U$$

On remarque que  $T^*T = TT^*$  si seulement si  $U^*TU$  est normal.

**Proposition 2.2.6.** [10] *Soit  $T \in \mathcal{L}(E)$  est inversible, le assertions suivantes sont équivalents*

1.  $T$  est normal
2.  $T^{-1}T^*$  (ou  $T^*T^{-1}$ ) est unitaire.
3. Il existe un opérateur unitaire  $U$  tel que  $T^* = UT$

**Preuve.**

Nous montrons

1  $\Rightarrow$  2 On a

$$\begin{aligned}(T^{-1}T^*)(T^{-1}T^*)^* &= T^{-1}T^*T(T^{-1})^* \\ &= T^{-1}TT^*(T^*)^{-1} \\ &= II = I\end{aligned}$$

et

$$(T^{-1}T^*)^*(T^{-1}T^*) = I$$

2 $\Rightarrow$  3 On pose  $U = T^{-1}T^*$

D'où

$$T^* = TU = UT$$

3  $\Rightarrow$  1 Il existe  $U$  tel que  $T^* = UT$ , pour tout  $x \in H$  on a

$$\begin{aligned} \|T^*x\|^2 &= \|UTx\|^2 \\ &= \langle UTx, UTx \rangle = \langle Tx, U^*UTx \rangle = \langle Tx, Tx \rangle = \|Tx\|^2 \end{aligned}$$

Donc,

$$\|T^*x\| = \|Tx\| \quad \forall x \in H$$

i.e.  $T$  est normal.

## 2.2.2 Image numérique

**Définition 2.2.2.** *L'image numérique de  $T$  est l'ensemble  $W(T)$  des nombres complexes défini par*

$$W(T) = \{\langle Tx, x \rangle \in \mathbb{C} : x \in H, \|x\| = 1\}$$

**Définition 2.2.3.** *Le rayon numérique de  $T$  est défini par*

$$w(T) = \sup_{\lambda \in W(T)} |\lambda|$$

*Voici quelques propriétés de base souvent utilisées dans le calcul de l'image numérique et facile à démontrer.*

**Proposition 2.2.7.** [11] *Soient  $T, S \in \mathcal{L}(H)$  et soit  $U \in \mathcal{L}(H)$  un opérateur unitaire (i.e.  $U^*U = UU^* = I$ ). Alors on a que*

1.  $W(\alpha I + \beta T) = \alpha + \beta W(T)$  pour tout  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$
2.  $W(T + S) \subset W(T) + W(S)$
3.  $W(T^*) = \{\bar{\lambda}, \lambda \in W(T)\}$
4.  $W(U^*TU) = W(T)$

**Exemple 2.2.3.** On définit l'opérateur  $T$  de  $l_2$  vers  $l_2$  par

$$T(x_1, x_2, x_3, \dots) = \left( x_1, \frac{1}{2}x_2, \frac{1}{3}x_3 \right)$$

On a  $W(T) = (0; 1]$ .

La propriété la plus importante sur l'image numérique est fournie par le théorème de Toeplitz-Hausdorff.

**Théorème 2.2.1. (Toeplitz-Hausdorff)**

L'image numérique d'un opérateur linéaire borné est un ensemble convexe borné.

**Théorème 2.2.2.** [10] L'opérateur  $T$  est un auto-adjoint si et seulement si  $W(T) \subset \mathbb{R}$ .

**Preuve.**

Si  $T$  est auto-adjoint, alors pour tout  $x \in H$

$$\langle Tx, x \rangle = \langle x, Tx \rangle = \overline{\langle Tx, x \rangle}.$$

D'où  $W(-T) \subset \mathbb{R}$ .

Inversement, si  $W(T) \subset \mathbb{R}$ , alors  $\langle Tx, x \rangle \in \mathbb{R}$ . Donc  $T$  est auto-adjoint.

La théorème suivant donne une condition sur sante pour qu'un  $T$  opérateur normal.

**Théorème 2.2.3.** [11] Si  $W(T)$  est un segment de droite, alors  $T$  est un opérateur normal.

**Preuve.**

Soit  $\alpha$  un point sur le segment de droite ayant une inclinaison  $\theta$ , d'où  $W(e^{-i\theta}[T - \alpha I])$  est inclu dans l'axe des réels. Ainsi, le théorème précédent implique que  $e^{-i\theta}[T - \alpha I]$  est un opérateur auto-adjoint. On déduit donc, par un calcul simple que  $T$  est un opérateur normal.

**Théorème 2.2.4.** Si  $T$  est un opérateur normal, alors

$$w(T) = \|T\|.$$

Rappelons aussi que l'envolope convexe de  $\sigma(T)$ , noté  $\text{Conv} \{\sigma(T)\}$  est le plus petit convexe contenant  $\sigma(T)$ .

La théorème suivant montre que l'image numérique d'un opérateur normal est une bonne approximation de son spectre.

**Théorème 2.2.5.** *Soit  $T \in \mathcal{L}(H)$  un opérateur normal, on a que*

$$\overline{W(T)} = \overline{\text{Conv}\{\sigma(T)\}}$$

**Corollaire 2.2.2.** *Soit  $m$  et  $M$  deux nombres complexes. Si*

$$\overline{W(T)} = [m, M].$$

*Alors*

$$\{m, M\} \subseteq \sigma(T).$$

**Preuve.**

Si  $\overline{W(T)} = [m, M]$ , alors le théorème (2.2.3) implique que  $T$  est un opérateur normal. Ainsi, d'après le théorème (2.2.5)  $\overline{W(T)}$  est l'enveloppe convexe de  $\sigma(T)$ , ou encore

$$[m, M] = \overline{W(T)} = \overline{\text{Conv}\{\sigma(T)\}}.$$

Il suit donc que

$$[m, M] \subseteq \sigma(T).$$

# Chapitre 3

## Théorie spectrale des opérateurs normaux

La théorie spectrale sur les opérateurs linéaires bornés est différent quelques classes d'opérateurs.

Le but de ce chapitre est l'étudier la théorie spectrale des opérateurs normaux.

### 3.1 Rappels

Soit  $H$  un espace de Hilbert complexe, soit  $T \in \mathcal{L}(H)$ , on appelle spectre de  $T$  et noté  $\sigma(T)$  défini par

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda I \text{ n'est pas inversible}\}$$

Le spectre  $\sigma(T)$  est la réunion disjoint de trois ensembles

$$\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \sigma_c(T) \cup \sigma_r(T)$$

On sait que

1. Le spectre ponctuel de  $T$  noté  $\sigma_p(T)$  est défini par

$$\sigma_p(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \text{Ker}(T - \lambda I) \neq 0\}$$

2. Le spectre résiduel de  $T$  noté  $\sigma_r(T)$  est défini par

$$\sigma_r(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda I \text{ injectif et } \text{Im}(T - \lambda I) \neq H\}$$

3. Le spectre continu de  $T$  noté  $\sigma_c(T)$  est défini par

$$\sigma_c(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda I \text{ injectif et } \overline{\text{Im}(T - \lambda I)} = H\}$$

4. Le spectre approximatif de  $T$ , noté  $\sigma_{ap}(T)$  défini par

$$\sigma_{ap}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}, \exists (x_n)_n \text{ Dans } H, \text{ tel que } \|x_n\| = 1 \text{ et } \|(T - \lambda I)x_n\| \rightarrow 0\}$$

On a

$$\sigma_p(T) \cup \sigma_c(T) \subset \sigma_{ap}(T) \subset \sigma(T)$$

**Corollaire 3.1.1.** *Si  $T \in \mathcal{L}(H)$  est normal, alors*

$$\sigma(T) \subset \overline{\{(Tx, x); \|x\| = 1\}}$$

### Preuve

Si  $\lambda \in \sigma(T)$  alors, la suite  $(x_n)_n$  est un vecteur unitaire tel que

$$\|Tx_n - \lambda x_n\| \rightarrow 0$$

L'implique

$$(Tx_n - \lambda x_n, x_n) \rightarrow 0$$

$$(Tx_n, x_n) \rightarrow 0$$

**Théorème 3.1.1.** *Si  $T \in \mathcal{L}(H)$  est un opérateur normal, alors les assertions suivantes sont*

*i)  $T$  est auto-adjoint si et seulement si  $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$*

*ii)  $T$  est positif si et seulement si  $\sigma(T) \subset \mathbb{R}^+$*

*iii)  $T$  est unitaire si et seulement si  $\sigma(T) \subset \{z \in \mathbb{C} | |z| = 1\}$*

*iv)  $T$  est une projection si et seulement si  $\sigma(T) \subset \{0, 1\}$*

### Preuve

Nous prouverons les implications (les implications inverses sont plus compliquées). Dans le cas de (i) et (ii), implications découlent du corollaire (3.1.1).

Supposons que  $T$  soit unitaire. Alors  $\|T\| = 1$  et donc  $|(Tx, x)| \leq \|x\| = 1$  pour tout les vecteurs unitaires  $x$ .  $\sigma(T)$  est un sous-ensemble du disque unité. Si  $\lambda \in \sigma(T)$ , alors  $\lambda$  est non nul et  $\frac{1}{\lambda} \in \sigma(T^{-1}) = \sigma(T^*)$ . Comme  $T^*$  est unitaire, nous avons ce  $|\frac{1}{\lambda}| < 1$ . Donc  $|\lambda| = 1$

Pour prouve (iv) on présenté le remarque suivante

**Remarque 3.1.1.** Toute projection  $P \in \mathcal{L}(H)$  est une projection orthogonale de  $H$  sur  $P(H)$

L'exemple suivante montre que ces inclusions peuvent être strictes. Avant de faire cela, nous montrons que  $\sigma_{ap}(T)$  est toujours non vide.

**Théorème 3.1.2.** Pour tout  $T \in \mathcal{L}(H)$ ,  $\partial\sigma(T) \subset \sigma_{ap}(T)$ , où  $\partial\sigma(T)$  désigne la frontière de  $\sigma(T)$ . En particulier,  $\sigma_{ap}(T) \neq \emptyset$

**Preuve**

Supposons que  $\lambda \in \partial\sigma(T) \setminus \sigma_{ap}(T)$ , alors  $\exists \lambda_n \in \rho(T)$  tel que  $\lambda_n \rightarrow \lambda$ , et  $(T - \lambda)$  est bornée ci-dessous, dire par  $c > 0$ . Puisque  $\lambda \in \sigma(T)$ , et  $(T - \lambda)$  n'est pas inversible.

Par conséquent, il doit arriver que  $Im(T - \lambda)$  n'est pas dense en  $H$ .

De manière équivalente,  $\exists x \in Im(T - \lambda)^\perp$  qui est non nul.

Définissez maintenant

$$x_n = \frac{(T - \lambda_n)^{-1}(x)}{\|(T - \lambda_n)^{-1}(x)\|}$$

Alors  $(T - \lambda_n)x_n$  est un produit scalaire de  $x$  et ainsi

$$(T - \lambda_n)(x_n) \perp (T - \lambda)(x_n)$$

Par conséquent, par le théorème de Pythagore

$$\begin{aligned} \|(T - \lambda)(x_n)\|^2 &\leq \|(T - \lambda)(x_n)\|^2 + \|(T - \lambda_n)(x_n)\|^2 \\ &= \|(\lambda - \lambda_n)(x_n)\|^2 \\ &= |\lambda - \lambda_n|^2 \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Ceci contredit le fait que  $(T - \lambda)$  est limité ci-dessous.

**Théorème 3.1.3.** Soit  $T \in \mathcal{L}(H)$ , l'ensemble  $\sigma(T)$  est fermé.

**Lemme 3.1.1.** Soit  $\lambda \in \mathcal{L}(H)$ ,  $\lambda$  valeur propre de  $T$ , alors  $\lambda \in \sigma(T)$ .

**Preuve.**

Soit  $\lambda$  valeur propre de  $T$  alors  $\exists x \neq 0$

$$\begin{aligned} Tx = \lambda x &\Leftrightarrow (T - \lambda I_H)x = 0 \\ &\Leftrightarrow x \in Ker(T - \lambda I_H), \quad x \neq 0 \\ &\Leftrightarrow Ker(T - \lambda I_H) \neq \{0\} \quad \text{n'est pas injectif} \end{aligned}$$

Donc  $T - \lambda I_H$  n'est pas inversible et alors  $\lambda \in \sigma(T)$

**Exemple 3.1.1.** Soit  $S : \ell^2 \rightarrow \ell^2$  est l'opérateur droite

$$S((x_n)) = (0, x_1, x_2, \dots)$$

Nous souhaitons déterminer  $\sigma(S)$ ,  $\sigma_{ap}(S)$  et  $\sigma_p(S)$ . Notez que  $S^*$  est l'opérateur gauche

$$S^*((x_n)) = (x_2, x_3, \dots)$$

1. Si  $|\lambda| < 1$ , alors nous affirmons que  $\lambda \in \sigma(S)$ . Pour voir cela, notez que

$$\lambda \in \sigma(S) \Leftrightarrow \bar{\lambda} \in \sigma(S^*)$$

Mais si  $z = \bar{\lambda}$  alors  $|z| < 1$ , donc si  $x = (z, z^2, z^3, \dots)$ , alors  $z \in \ell^2$ , et

$$S^*x = (z^2, z^3, \dots) = zx$$

Et donc  $z$  est une valeur propre de  $S^*$ , d'où  $z \in \sigma(S^*)$  par conséquent,

$$\lambda \in \sigma(S)$$

2. En fait, cela montre que si  $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ , alors

$$D \subset \sigma(S^*) \Rightarrow D \subset \sigma(S)$$

Cependant,  $\sigma(S)$  est fermé et  $\|s\| = 1$ , donc

$$\sigma(S) = \bar{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$$

3. Maintenant si  $\lambda \in \mathbb{C}$  avec  $|\lambda| < 1$ , alors

$$\|(S - \lambda)x\| \geq \|Sx\| - \|\lambda\| \|x\| = (1 - |\lambda|)\|x\|$$

Donc  $(S - \lambda)$  est bornée ci-dessous, d'où  $\lambda \in \sigma_{ap}(S)$ . Par le théorème précédent, il suit cela

$$\sigma_{ap}(S) = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$$

4. Enfin,  $\sigma_p(S) = \emptyset$ . Par conséquent,

$$\sigma(S) = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$$

$$\sigma_{ap}(S) = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$$

$$\sigma_p(S) = \emptyset$$

## 3.2 Classification des valeurs spectrales

Il est bien connu que le spectre d'un opérateur normal a une structure simple. Plus précisément, si  $T \in \mathcal{L}(H)$  est normal, alors nous avons

$$\sigma_p(T) \cup \sigma_c(T) = \sigma(T) = \sigma_{ap}(T) \quad (3.1)$$

Dans cette section nous donnons ensuite une nouvelle preuve des égalités (3.1). Par souci d'exhaustivité, nous terminons cette sous-section en rappelant ce qui suit classification importante des éléments  $\lambda$  dans le spectre d'un opérateur normal borné  $T$  ([4], p.112) basé sur l'utilisation le rang  $Im(T_\lambda)$  des opérateurs  $T_\lambda = T - \lambda I_H$ .

Ainsi, on va montrer le résultat suivant.

**Théorème 3.2.1.** [1] *Soit  $H$  est un espace de Hilbert complexe, soit  $T \in \mathcal{L}(H)$  un opérateur normal et  $\lambda \in \mathbb{C}$ . On a*

1.  $\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : Im(T_\lambda) = H\}$
2.  $\sigma_p(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \overline{Im(T_\lambda)} \neq H\}$
3.  $\sigma_c(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \overline{Im(T_\lambda)} = H, \text{ et } Im(T_\lambda) \neq H\}$
4.  $\sigma_r(T) = \emptyset$

**Définition 3.2.1.** *Soit  $S \in \mathcal{L}(H)$ , et soit  $(x_n)_n$  une suite des éléments de  $H$ , On dit que  $(x_n)_n$  est un  $S$ -suite spectrale s'elle satisfait aux propriétés suivantes*

- i)  $x_n$  est un vecteur unitaire pour tout  $n$ , et
- ii)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|Sx_n\| = 0$ .

**Notation 3.2.1.** *Soit  $T \in \mathcal{L}(H)$  et  $\lambda \in \mathbb{C}$ , on note  $S_T(\lambda)$  l'ensemble  $T_\lambda$ -suite spectrale.*

Où

$$T_\lambda = T - \lambda I_H$$

**Proposition 3.2.1.** [1] *Pour tout  $T \in \mathcal{L}(H)$ , et  $\lambda \in \mathbb{C}$ , nous avons observients suivantes*

- a)  $S_T(\lambda) \neq \emptyset \Leftrightarrow \lambda \in \sigma_{ap}(T)$
- b) Si  $(x_n)_n \in S_T(\lambda)$ . Alors tout sous-suite  $(x_n)$  appartient aussi  $S_T(\lambda)$

Dans le partie suivant, nous présentons certaines caractérisantions le spectre ponctuel et spectre continu, spectre résudiel d'un opérateur normal borné.

### 3.2.1 Le spectre ponctuel

Rappelons que le spectre ponctuel  $\sigma_p(T)$  est l'ensemble des valeurs propres.

**Proposition 3.2.2.**  *$T \in \mathcal{L}(H)$  un opérateur normal. Alors*

1. *Si  $Tx = \lambda x$ , tel que  $\lambda \in \mathbb{C}$  et  $x \in H$ . Alors,  $T^*x = \bar{\lambda}x$ .*
2. *Deux espaces propres de  $T$  associés des valeurs propres distincts sont orthogonaux.*

**Proposition 3.2.3.** *Soit  $T \in \mathcal{L}(H)$  un opérateur normal, Alors*

$$\lambda \in \sigma(T) \Leftrightarrow \exists c > 0 \text{ tel que } \|(T - \lambda I)x\| > c\|x\| \quad \forall x \in H. \quad (3.2)$$

**Preuve.**

Sans perte de généralité, supposons que  $\lambda = 0$ , supposons qu'il y ait est  $c > 0$  satisfaisant la condition (3.2), alors  $T$  est injectif.

Il résulte de (3.2) que  $\text{range } T(H)$  est complète et donc fermé en  $H$ , il reste à prouver que

$$\text{Im}(T) = H$$

Choisissez  $x \in \text{Im}(T)^\perp$  alors

$$0 = (x, TT^*x) = (x, T^*T) = (xT, xT^*) = \|Tx\|^2 > c^2\|x\|^2$$

En d'autres termes,  $x = 0$  et  $\text{Im}(T) = H$ . Donc (3.2) implique  $0 \notin \sigma(T)$ .

L'inverse l'implication est clair.

**Corollaire 3.2.1.** *Si  $T \in \mathcal{L}(H)$  est normal et  $\lambda \in \sigma(T) \setminus \sigma_p(T)$ , alors*

$$(T - \lambda I)(H) \text{ n'est pas fermé.}$$

**Preuve.**

Si  $T - \lambda I$  est injectif et  $(T - \lambda I)(H)$  est fermé, alors par le théorème inverse de cartographie, il y a une carte linéaire continue

$$S : (T - \lambda I)(H) \longrightarrow H \text{ tel que } S(T - \lambda I)x = x \text{ pour tout } x \in H.$$

Cela signifie que

$$\|x\| \leq \|S\| \|(T - \lambda I)x\|$$

comme  $\|S\| = 0$ , on voit que

$$\|(T - \lambda I)x\| \geq \frac{1}{\|S\|} \|x\|$$

En vue de la proposition (3.2.3),  $\lambda \notin \sigma(T)$

**Théorème 3.2.2.** *Soit  $(H, \langle, \rangle)$  espace Hilbert complexe, soit  $T \in \mathcal{L}(H)$  et  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Alors les assertions suivantes équivalentes*

i)  $\lambda \in \sigma_p(T)$

ii) Il existe  $T_\lambda$ -suite spectre,  $(x_n)_n$  est convergent fortement dans  $H$ .

iii) Il existe  $T_\lambda$ -suite spectre,  $(x_n)_n$  n'est pas convergent faiblement vers 0

### Preuve

Les implications (i)  $\Rightarrow$  (ii) et (ii)  $\Rightarrow$  (iii) sont évidentes.

(iii)  $\Rightarrow$  (i) soit  $\lambda \in \mathbb{C}$  et soit  $(x_n)$  est un  $\lambda$ -suite qui n'est pas convergent faiblement vers 0.

Alors nous pouvons trouver  $z$  un vecteur non nul dans  $H$  et sous-suite  $(y_k = x_{n_k})_k$  de  $(x_n)_n$  qui converge faible vers  $z$ , ainsi la suite  $(y_k)_k$  vérifie les conditions suivantes

a)  $y_k$  est un vecteur unitaire pour tout  $k$ , et  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \|T_{Y_K} - \lambda y_k\| = 0$  (i.e.  $(y_k)_k$  est une  $T_\lambda$ -suite)

b)  $(y_k)_k$  converge faiblement vers  $z$ , quand  $k \rightarrow \infty$

En utilisant le Théorème de Banach-saks (voir [1] et [2], page 154), nous pouvons trouver une sous-suite  $(z_m = y_{k_m})_m$  de  $(y_k)_k$  pour la quelle la suite  $(z_m)_m$  converge faiblement vers  $z$ , alors  $\tilde{z}$  sont le moyennes arithmétiques données par

$$\tilde{z}_m = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m z_j = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m y_{k_j}, \quad \forall m \geq 0$$

Puque  $(y_{k_j})$  est une  $T_\lambda$ -suite, alors en utilisant les moyens de convergence de Casar'o, on obtient

$$\begin{aligned} \|T(\tilde{z}_m) - \lambda \tilde{z}_m\| &= \frac{1}{m} \left\| \sum_{j=1}^m T(y_{k_j}) - \lambda y_{k_j} \right\| \\ &\leq \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \|T(y_{k_j}) - \lambda y_{k_j}\| \longrightarrow 0, \quad \text{quand } m \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Puque  $T$  est continue, on a

$$\|Tz_m - \lambda z\| = \lim_{m \rightarrow +\infty} \|T(\tilde{z}_m) - \lambda \tilde{z}_m\|$$

Nous concluons que  $\lambda$  est une valeur propre, ainsi notre résultat est prouvé.

**Théorème 3.2.3.** [17] Soit  $T \in \mathcal{L}(H)$  opérateur compact, alors

$$\sigma_{ap}(T) \setminus \{0\} = \sigma_p(T) \setminus \{0\}$$

**Preuve.**

Soit  $T \in \sigma_{ap}(T) \setminus \{0\}$  et suppose que  $\lambda \notin \sigma_p(T)$ . Soit  $(x_n)_n$   $\lambda$ -suite spectrale en suite, d'après le Théorème (3.2.2), cette suite doit nécessairement converger faiblement vers zéro. Puisque  $T$  est compact, alors par le Théorème de Riesz (voir [2] p.150), la suite  $(T(x_n))_n$  converge fortement vers zéro. Puisque  $\lambda \neq 0$  et puisque  $(x_n)_n$  est une suite de  $\lambda$ , il s'ensuit que  $(x_n)_n$  converge fortement vers zéro. Nous notons également que les réserves suivantes

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle T(x_n), x_n \rangle = \lambda$$

Maintenant nous avons

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \|T(x_n) - \lambda x_n\|^2 \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\|T(x_n)\|^2 - 2\Re(\overline{\lambda} \langle T(x_n), x_n \rangle) + |\lambda|^2) \\ &= |\lambda|^2 \end{aligned}$$

Nous obtenons donc  $\lambda = 0$ , une contradiction. Ceci complète la preuve.

On sait que, si  $T$  est normal, alors  $\sigma(T) = \sigma_{ap}(T)$ . Par conséquent, nous avons le résultat suivante.

**Proposition 3.2.4.** [7] Si  $T \in \mathcal{L}(H)$  est un opérateur normal, Alors

$$\sigma(T) = \sigma_{ap}(T)$$

**Corollaire 3.2.2.** Soit  $T \in \mathcal{L}(H)$  un opérateur normal et compact. Alors nous avons

$$\sigma(T) \setminus \{0\} = \sigma_p(T) \setminus \{0\}$$

Nous terminons cette section en prouvant le résultat suivante qui dit que le spectre de points de tout opérateur normal n'est pas vide.

**Théorème 3.2.4.** *Soit  $T \in \mathcal{L}(H)$  un opérateur normal, alors les assertions suivantes sont vraies*

*i) Il existe  $\lambda \in \sigma(T)$  tel que  $|\lambda| = \|T\|$  (c'est-à-dire,  $\sigma_p(T) \cap \{z \in \mathbb{C} : |z| = \|T\|\}$  n'est pas vide }*

*ii) Si de plus,  $T$  est compact alors il existe  $\lambda \in \sigma_p(T)$  tel que  $|\lambda| = \|T\|$  (c'est-à-dire,  $\sigma_p(T) \cap \{z \in \mathbb{C} : |z| = \|T\|\}$  n'est pas vide }*

### Preuve

Nous pouvons supposer que  $T$  n'est pas nul. Puisque  $T$  est normal, alors (voir, pour exemple, [3], p.130) nous avons

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} |\langle Tx, x \rangle|$$

Il s'ensuit qu'il existe une suite  $(x_n)_n$  des vecteurs unitaires telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\langle T(x_n), x_n \rangle| = \|T\|$$

On peut supposer que la suite des nombres  $(\langle T(x_n), x_n \rangle)_n$  est convergent (sinon, on peut prendre une suite de  $(x_n)_n$ ).

Soit  $\lambda$  la limite de cette suite, alors  $|\lambda| = \|T\|$ . Pour prouver que  $\lambda$  appartient au spectre de  $T$ , il est suffisant pour montrer que  $(x_n)_n$  est une  $T_\lambda$ -suite spectre.

Pour voir cela, nous utilisons les inégalités suivantes

$$\begin{aligned} \|T(x_n) - \lambda x_n\|^2 &= \|T(x_n)\|^2 - 2\Re(\bar{\lambda}\langle Tx_n, x_n \rangle) + |\lambda|^2 \|x_n\|^2 \\ &= \|T(x_n)\|^2 - 2\Re(\bar{\lambda}\langle Tx_n, x_n \rangle) + |\lambda|^2 \\ &\leq 2|\lambda|^2 - 2\Re(\bar{\lambda}\langle Tx_n, x_n \rangle) \\ &\longrightarrow 2|\lambda|^2 - 2|\lambda|^2, \text{ quand } n \longrightarrow \infty \end{aligned}$$

Ainsi,  $\lambda \in \sigma_{ap}(T) \setminus \{0\} \subset \sigma(T)$ , si en plus  $T$  est compact, alors, par théorème (3.2.3) nous en déduisons que  $\lambda \in \sigma_{ap}(T) \setminus \{0\} \subset \sigma(T) \setminus \{0\}$ .

Ceci complète la preuve de (i) et (ii).

### 3.2.2 Le spectre résiduel

Soit  $T \in \mathcal{L}(H)$  et  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Rappelons que  $\lambda \in \sigma_r(T)$  si et seulement si (a)  $T_\lambda := T - \lambda I_H$  est injectif, et (b) le fermeture  $\overline{Im(T_\lambda)}$  de le rang  $Im(T_\lambda)$  n'est pas égale  $H$ . Nous avons la proposition suivante.

**Proposition 3.2.5.** *Soit  $T \in \mathcal{L}(H)$  et  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Supposons que l'ensemble  $S_T(\lambda)$  est vide et  $T_\lambda$  n'est pas surjectif. Alors  $\lambda \in \sigma_r(T)$ .*

#### Preuve

Puisque  $S_T(\lambda)$  est vide, alors  $\varepsilon := \inf_{x \in S_H} \|Tx - \lambda x\| > 0$ , on a  $S_H := \{x \in H : \|x\| = 1\}$ . Par conséquent, nous avons

$$\|Tx - \lambda x\| \geq \varepsilon \|x\| \quad \forall x \in H. \quad (3.3)$$

(3.3) montre que  $T_\lambda$  est injectif et que range  $Im(T_\lambda)$  est fermée dans  $H$ . Puisque n'est pas surjectif, nous concluons que  $Im(T_\lambda)$  n'est pas dense dans  $H$ .

Ainsi,  $\lambda \in \sigma_r(T)$

### 3.2.3 Le spectre continu

Soit  $T \in \mathcal{L}(H)$  et  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Rappelons que  $\lambda \in \sigma_c(T)$  si et seulement si (a)  $T_\lambda = T - \lambda I_H$  est injectif, et (b) le surjectif, et (c) image  $Im(T_\lambda)$  est dense dans  $H$ .

**Proposition 3.2.6.** *Soit  $T \in \mathcal{L}(H)$  et  $\lambda \in \mathbb{C}$  Supposons que  $\lambda \in \sigma_c(T)$ . Alors*

- (i) *L'ensemble  $S_T(\lambda)$  n'est pas vide.*
- (ii) *Tout suite spectrale  $S_T(\lambda)$  converge faiblement vers zéro.*
- (iii) *Tout suite spectrale  $S_T(\lambda)$  n'est pas convergent fortement dans  $H$ .*

#### Preuve

Puisque  $\lambda \in \sigma_c(T)$ , alors  $\lambda \in \sigma_{ap}(T)$ , donc  $S_T(\lambda)$  n'est pas vide. De puis  $\lambda$  n'est pas un valeur propre de  $T$ , alors par (iii) du Théorème (3.2.3), on en déduit que la suite spectrale  $T(\lambda)$  converge faiblement vers zéro. De plus, par (ii) du Théorème (3.1.4), nous en déduisons que tout suite spectrale  $S_T(\lambda)$  n'est pas converge fortement dans  $H$ .

$H$  espace de Hilbert complexe comme ci-dessus. Dans le résultat suivant, nous présentons quelques caractérisation du spectre continu de tout borné et normal opérateur sur  $H$ .

**Théorème 3.2.5.** *Soit  $T \in \mathcal{L}(H)$  un opérateur normal, les assertions suivantes sont équivalentes*

(i)  $\lambda \in \sigma_c(T)$ .

(ii)  $\lambda \in \sigma(T) \setminus \sigma_p(T)$ .

(iii)  $T - \lambda I$  est injectif, et l'image de  $(T - \lambda I)(H)$  n'a pas fermée.

(iv) L'ensemble  $S_T(\lambda)$  n'est pas vide, et tout suite spectrale  $T_\lambda$  convergent faiblement vers zéro.

### Preuve

$ii) \Rightarrow i)$  puisque  $\lambda \in \sigma(T) \setminus \sigma_p(T)$ , alors  $T - \lambda I$  est injectif, mais ne pas surjectif. Supposons que l'image  $(T - \lambda I)(H)$  n'est pas dense dans  $H$ , alors il existe  $z \in (T - \lambda I)(H)^\perp$ . Par conséquent nous avons,

$$z \in (T - \lambda I)(H)^\perp = \ker(T^* - \bar{\lambda}I) = \ker(T - \lambda I)$$

D'où contradiction, donc nous concluons que  $\lambda \in \sigma_c(T)$ .

$i) \Rightarrow iii)$  est évidente à partir de la définition du spectre continu.

$iii) \Rightarrow ii)$  on a  $T - \lambda I$  est injectif, alors  $\lambda \notin \sigma_p(T)$ . Supposons que,  $\lambda \in \sigma_p(T)$  alors il existe un opérateur ( inversible )  $S \in \mathcal{L}(H)$  tel que  $S(T - \lambda I)x = x$ , pour tout  $x \in H$ . En particulier nous avons,

$$\frac{1}{\|S\|} \|x\| \leq \|(T - \lambda I)x\|, \quad \forall x \in H$$

D'où  $(T - \lambda I)(H)$  est complet et fermée dans  $H$ , qui est une contradiction. Nous concluons que.  $\lambda \in \sigma(T) \setminus \sigma_p(T)$ .

Les équivalence  $(ii) \Leftrightarrow (iv) \Leftrightarrow (v)$  sont assurés par le Théorème (3.2.5). Par conséquence, noté résultat est complètement prouvé.

En conséquence du Théorème (3.2.2), nous retrouvons les éléments suivants bien connus résultat.

**Corollaire 3.2.3.** *Soit  $T \in \mathcal{L}(H)$  un opérateur normal. Alors, le spectre résiduel  $\sigma_r$  est vide et,*

$$\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \sigma_c(T) = \sigma_{ap}(T).$$

En conclusion de notre étude, nous avons la classification suivante des valeurs spectrales des opérateurs normaux bornés sur les espaces de Hilbert en termes de leurs séquences spectrales associées.

**Théorème 3.2.6.** *Soit  $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  est comme ci-dessus et soit  $T \in \mathcal{L}(H)$  un opérateur normal, soit  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Ensuite nous avons*

1.  $\lambda \in \rho(T)$  si et seulement si l'ensemble  $S_T(\lambda)$  n'est pas vide.

2. Les assertions suivantes sont équivalentes

i)  $\lambda \in \sigma_c(T)$ .

ii) IL existe une  $T_\lambda$ -suite  $((x_n))_n$  qui est convergent fortement en  $H$ .

iii) IL existe une  $T_\lambda$ -suite  $(x_n)_n$  qui n'est pas convergent faiblement vers zéro.

3. Les assertions suivantes sont équivalentes

i)  $\lambda \in \sigma_c(T)$ .

ii) L'ensemble  $S_T(\lambda)$  n'est pas vide et toute suite  $T_\lambda$  converge faiblement vers zéro.

iii) L'ensemble  $S_T(\lambda)$  n'est pas vide et toute suite  $T_\lambda$  n'est pas convergent fortement en  $H$ .

4.  $\sigma_r(T)$ . est vide.

**Proposition 3.2.7.** [10] *Le rayon spectral d'un opérateur normal  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  vérifie*

$$r(T) = \|T\|$$

**Preuve.**

On suppose d'abord que  $T$  est auto-adjoint. on a  $\|T^2\| = \|T\|^2$  et par récurrence sur  $n$  l'on obtient pour tout  $n \in \mathbb{N}$  la relation  $\|T^{2n}\| = \|T\|^{2n}$ , il vient

$$r(T) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|T^{2n}\|^{2^{-n}} = \|T\|$$

On revient au cas normal, l'élément  $TT^*$  est auto-adjoint et il s'ensuit que l'on a,

$$\begin{aligned} r(T) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\|T^n(T^n)^*\|^{\frac{1}{n}}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\|(TT^*)^n\|^{\frac{1}{n}}} \\ &= \sqrt{r(TT^*)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{\|TT^*\|} \\
&= \|T\|
\end{aligned}$$

### 3.3 Applications

#### Exemple 3.3.1.

Soit  $H$  un espace de Hilbert et  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une base de  $H$ .

Soit  $a \in \ell^\infty(\mathbb{N})$  et  $T_a : H \rightarrow H$  tel que pour tout  $n \in \mathbb{N}$

$$T_a e_n = a_n e_n.$$

$T_a$  est borné, en effet pour tout  $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
\|T_a e_n\| &= \|a_n e_n\| \\
&= |a_n| \|e_n\| \\
&\leq \|a\|_\infty
\end{aligned}$$

Donc  $\|T\| \leq \|a\|_\infty$ .

De plus pour tout  $\epsilon > 0$  il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que

$$\|a_{n_0}\| = \|T_a e_{n_0}\| > \|a\|_\infty - \epsilon$$

donc pour tout  $\epsilon > 0$ ,  $\|T_a\| \geq \|a\|_\infty - \epsilon$ , et en faisant tendre  $\epsilon$  vers 0

On obtient  $\|T_a\| \geq \|a\|_\infty$

D'où

$$\|T_a\| = \|a\|_\infty$$

Son adjoint vérifie pour tout  $n, m \in \mathbb{N}$

$$\langle e_n, T_a^* e_m \rangle = \langle T_a e_n, e_m \rangle = a_n \langle e_n, e_m \rangle = a_n$$

On en déduit donc,

$$\forall n \in \mathbb{N}, T_a^* e_n = \overline{a_n} e_n$$

On a pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$T_a^* T_a e_n = T_a^* a_n e_n = |a_n|^2 e_n$$

et

$$T_a T_a^* e_n = T_a \overline{a_n} e_n = |a_n|^2 e_n$$

Donc  $T_a$  est normal. Par conséquent  $r(T_a) = \|T_a\| = \|a\|_\infty$ ,

$\sigma_r(T_a) = \emptyset$  et  $\sigma(T_a) \subseteq \overline{D}(0, \|a\|_\infty)$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $T_a e_n = a_n e_n$ .

Donc,

$$\{a_n, n \in \mathbb{N}\} \subseteq \sigma_p(T_a)$$

Réciproquement soit  $\lambda \in \sigma_p(T_a)$  alors  $\exists x \in H$  non nul tel que

$T_a x - \lambda x = 0$  c'est-à-dire, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a_n x_n = \lambda x_n$ .

Mais puisque  $x$  est non nul, il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que  $\lambda = a_{n_0}$ .

Donc  $\sigma_p(T_a) \subseteq \{a_n, n \in \mathbb{N}\}$ .

D'où,

$$\sigma_p(T_a) = \{a_n, n \in \mathbb{N}\}.$$

Posons  $A = \sigma_p(T_a)$  alors  $\overline{A} \subseteq \sigma(T_a)$  Soit  $b \in \ell^\infty$ .

Alors  $T_b$  est inversible si et seulement si pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $b_n \neq 0$  et  $\frac{1}{b} \in \ell^\infty(\mathbb{N})$ .

On vérifie alors que son inverse est  $T_{\frac{1}{b}}$ .

Soit maintenant  $\lambda \notin \overline{A}$ .

Alors pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $|a_n - \lambda| \geq d(A, \lambda) > 0$ , car  $\lambda \notin \overline{A}$ .

Donc  $n \in \mathbb{N} \quad \frac{1}{a_n - \lambda} \leq \frac{1}{d(\lambda, A)}$

D'où  $\frac{1}{a - \lambda} \in \ell^\infty(\mathbb{N})$ . Mais  $T_a - \lambda = T_{a - \lambda}$ , donc  $T_{a - \lambda}$  est inversible d'inverse  $T_{a - \lambda}^{-1}$ . On en déduit donc

$$\sigma(T_a) \subseteq \overline{A}$$

Finalement

$$\sigma(T_a) = \overline{A}.$$

### Exemple 3.3.2. (Multiplication par une fonction)

Soit  $g \in C([0, 1], \mathbb{R})$  On définit l'opérateur de multiplication par

$$T_g : \begin{cases} L^2[0, 1] \longrightarrow L^2[0, 1] \\ h \longmapsto gh \end{cases}$$

$T_g$  est borné en effet on a pour tout  $h \in L^2[0, 1]$

$$\begin{aligned}\|T_g(h)\|_2^2 &= \int_0^1 |g(t)h(t)|^2 dt \\ &\leq \|g\|_\infty \|h\|_2^2 \quad (g \text{ étant continue sur le compact } [0, 1])\end{aligned}$$

Donc  $\|T_g\| \leq \|g\|_\infty$

Soit  $\epsilon > 0$ . Posons  $A_\epsilon = \{t \in [0, 1]; \|g\|_\infty - \epsilon < |g(t)|\}$ , alors c'est un ouvert de  $[0, 1]$  puisque  $g$  est continue. Et de plus  $A_\epsilon$  est non vide par définition de la norme de la convergence uniforme. Donc  $A_\epsilon$  est de mesure de Lebesgue strictement positive.

En posant  $h := \frac{1}{\sqrt{\mu(A_\epsilon)}} 1_{A_\epsilon}$ , on a

$$\|T_g h\|_2^2 = \int_0^1 \left| g(t) \frac{1}{\sqrt{\mu(A_\epsilon)}} 1_{A_\epsilon} \right|^2 dt = \frac{1}{\mu(A_\epsilon)} \int_{A_\epsilon} |g(t)|^2 dt \geq (\|g\|_\infty - \epsilon)^2$$

On en déduit donc

$$\|T_g\| = \|g\|_\infty$$

On souhaite à présent déterminer le spectre de  $T_g$ . Pour cela, nous allons d'abord calculer l'adjoint  $T^*$  de  $T$ .

On a pour tout  $f, h \in L^2[0, 1]$

$$\begin{aligned}\langle T_g h, f \rangle &= \int_0^1 g f \bar{h} d\mu \\ &= \int_0^1 f \bar{g} h d\mu \\ &= \langle f, T_{\bar{g}} \rangle\end{aligned}$$

On a donc

$$T_g^* = T_{\bar{g}}$$

On vérifie facilement que  $T_g$  est normal. Ainsi on obtient

$$\sigma_r(T_g) = \emptyset$$

et

$$r(T_g) = \|g\|_\infty$$

On souhaite à présent déterminer le spectre de  $T_g$ .

Soit  $\lambda \notin \text{Im}(g)$ . Alors  $g - \lambda$  ne s'annule pas sur  $[0, 1]$ . On sait alors que  $T_g - \lambda = T_{g-\lambda}$  est inversible. Donc  $\lambda \notin \sigma(T_g)$ .

On en déduit donc

$$\sigma(T_g) \subseteq \text{Im}(g)$$

Réciproquement soit  $\lambda \in \text{Im}(g)$ , alors il existe  $t_0$  tel que  $\lambda = g(t_0)$  montrons alors que  $T_{g-\lambda}$  est non inversible.

Soit  $\epsilon > 0$ . Alors puisque  $g$  est continue, il existe  $\eta > 0$  tel que

$$|t - t_0| < \eta \Rightarrow |g(t) - \lambda| < \epsilon$$

Posons  $A_\epsilon = \{t, |g(t) - \lambda| < \epsilon\}$ . On a  $\mu(A_\epsilon) \geq 2\eta > 0$  car  $\mu$  est invariant par translation.

On définit alors

$$f_\epsilon = \frac{1_{A_\epsilon}}{\sqrt{\mu(A_\epsilon)}} \in L^2[0, 1]$$

Et  $\|f_\epsilon\|_2 = 1$ , donc  $\|T_{g-\lambda}f_\epsilon\|_2^2 \leq \epsilon^2$ .

On se place maintenant dans le cas particulier où  $\epsilon = \frac{1}{n}$  pour  $n \in \mathbb{N}^*$ . Alors il existe  $f_n \in L^2[0, 1]$  de norme 1 tel que  $\|T_{g-\lambda}f_n\|_2^2 \leq \frac{1}{n}$ . Mais alors si  $MT_{g-\lambda}$  était inversible on aurait pour tout  $n \in \mathbb{N}$

$$1 = \|f_n\| = \|(T_{g-\lambda})^{-1}T_{g-\lambda}f_n\| \leq \frac{1}{n}\|(T_{g-\lambda})^{-1}\|$$

qui tend vers 0. Contradiction

Donc

$$\text{Im}(g) \subseteq \sigma(T_g)$$

Finalement

$$\sigma(T_g) = \text{Im}(g).$$

Alors

$$\sigma_{ap}(T_g) = \sigma(T_g) = \text{Im}(g).$$

Cet exemple est un cas particulier de l'exemple précédent.

**Exemple 3.3.3.**

Sur l'espace  $H = L^2([0, 1])$ , on considère l'opérateur de multiplication par une variable  $x$

$$T(f)(x) = xf(x).$$

De l'exemple précédent l'adjoint est

$$T_f^* = T_{\bar{f}}$$

On vérifie facilement que  $T$  est normal. Ainsi on obtient

$$\sigma_r(T) = \emptyset$$

On a  $\|T\| = 1$ , et donc

$$\sigma(T) \subset \{\lambda \in \mathbb{C}; |\lambda| \leq 1\}$$

Si  $\lambda$  est en dehors de l'intervalle  $[0, 1]$ , la fonction  $x \rightarrow (x - \lambda)^{-1}$  est borné sur l'intervalle  $[0, 1]$  et l'opérateur  $T$  par cette fonction est borné, c'est l'interse de  $T - \lambda I$ , donc

$$\sigma(T) \subset [0, 1]$$

D'autre part, la relation  $Tf - \lambda f = 0$  implique que  $f$  est nulle sauf éventuellement au point  $\lambda$ , l'opérateur  $T$  n'admet donc pas de valeur propre  $\sigma_p(T) = \emptyset$ .

Enfin, pour tout  $\lambda \in [0, 1]$ , l'opérateur  $T - \lambda I$  n'est pas surjectif, puisque l'unique solution de l'équation  $Tf - \lambda f = 1$  est la fonction  $(x - \lambda)^{-1}$  qui n'appartient pas à  $L^2([0, 1])$ .

En conclusion

$$\sigma(T) = [0, 1] \text{ et } \sigma_p(T) = \emptyset.$$

Alors

$$\sigma_{ap}(T) = \sigma(T) = [0, 1],$$

et donc

$$\sigma_c(T) = [0, 1]$$

et

$$r(T) = \|T\| = 1.$$

# Bibliographie

- [1] M. Akkouchi. *Remarks on the spectrum of bounded and normal operators on Hilbert space*, *An. St. Univ. Ovidius Constanta*. 16/2 (2008), 7-14.
- [2] J. Bass. *de mathématique "TOME III"*, Masson et C<sup>IE</sup>, Éditeurs 120, Boulevard Saint-Germain, Paris, 1971.
- [3] H. Brézis. *Analyse fonctionnelle, Théorie et application*, Masson, Paris, 1992.
- [4] S. Carlos, Kubrusly. *Spectral theory of operators on Hilbert spaces*, Birkhäuser.
- [5] H. Chebli. *Analyse Hilbertienne*, Centre publication universitaire, Tunis, 2001.
- [6] J.B. Conway. *A Course in Functional Analysis*, (1985) New York, Spring-Verlag.
- [7] N. Dunford and J. Schwartz, *Linear Operators, Part II*, Wiley, New York, 1971.
- [8] I. Gohberg, S. Goldberg, M.A. Kaashoek, *Basic of Classes of Linear Operators*, Birkhäuser Verlag, Basel, 2003.
- [9] M. Guesba. *Sur quelques équation intégrales non linéaires*, Mémoire de magister université Kasdi Merbah d'Ouargla 2012.
- [10] M. Guesba. *Traitement sur les opérateurs normaux et les opérateurs compacts*, Thèse de doctorat université Mouhammed Boudiaf M'sila 2017.
- [11] K.E. Gustafson, D.K.M. Rao. *Numerical Range*, Springer, New York, 1997.
- [12] P.R. Halmos. *A Hilbert space problem book. Second edition*, Springer-verlag, New York, 1982.
- [13] T. Kato. *Perturbation theory for linear operator*, Springer, 1980 (2nd edition).
- [14] A. Kolmogorov, Fomine S. *Eléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle*, Mir.1977.

- [15] M. Nadir . *Cours d'analyse fonctionnelle, université de M'sila, 2004*
- [16] W. Rudin. *Perturbation theory for linear operator, Springer, 1980 (2nd edition).*
- [17] K. Zhu. *Operator theory in function spaces. Mongraphs and Text-books in Pure and Applied Mathematics, 139. Marcel Dekker, Inc., New York, 1990.*

## ملخص:

هذه المذكرة تتعلق بدراسة صنف هام من أصناف المؤثرات الخطية المحدودة, وهو المؤثر الناظمي. حيث بدأنا بتعاريف أولية حول المؤثرات الخطية المحدودة وبعض خصائصها وأصنافها المهمة, ثم قدمنا تعريف المؤثر الناظمي وأعطينا أمثلة عليه وبعض خصائصه الأساسية.

وفي الختام, قمنا بدراسة نظرية الأطياف الخاصة بهذا المؤثر.

الكلمات المفتاحية: فضاء هلبرت, مؤثر خطي و محدود, ناظمي, طيف.

## Résumé:

Dans ce mémoire, nous avons intéressé en particulier à l'étude d'une classe importante des opérateurs linéaires bornés, qui s'appelle l'opérateur normal. Où nous avons commencé par quelques préliminaires sur les opérateurs linéaires bornés, et on a donné quelques classes des opérateurs. Nous avons introduit les notions fondamentales. Ensuite, on présente la définition d'opérateur normal et on a donné quelques exemple ainsi ses propriétés principales.

En fin, on a conclut par introduire la théorie spectrale le d'opérateur normal

Mots clés: Espace de Hilbert, Opérateur linéaire borné, Normal, spectre.

## Abstract:

In this memory, we had particularly interested in the study of an important class of bounded linear operators called the normal operator. Where we started with some preliminaries on bounded linear operators, and we gave some classes of operators we have introduced fundamentals notions . Then, we have presented the definition of normal operator, and we gave some examples.

Finally, we have concluded by introducing the spectral theory of normal operator.

Key words: Hilbert space, Bounded linear operator, Normal, Spectrum.